

# ОПТИМИЗАЦИЯ РАЗМЕЩЕНИЯ СКВАЖИН НА НЕФТЯНЫХ ЗАЛЕЖАХ НА ОСНОВЕ АЛГОРИТМОВ ЦЕЛОЧИСЛЕННОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

А.И. Ермолаев, Б.А. Абдикадыров

*Российский государственный университет нефти и газа им. И.М. Губкина, г. Москва*

Рассмотрены математические аспекты проблемы рационального размещения добывающих и нагнетательных скважин на нефтяных залежах. Для ее решения применены алгоритмы дискретной оптимизации. В качестве исходной информации взяты результаты геологического и гидродинамического моделирования продуктивных пластов. Предложены процедуры, позволяющие учесть эвристические правила рационального размещения скважин, принятые в практике разработки залежей углеводородов.

## ВВЕДЕНИЕ

В данной работе объектами исследования являются модели, предназначенные для обоснования вариантов размещения заданного числа добывающих и нагнетательных скважин на нефтяном месторождении. Поиск рационального размещения скважин относится к числу основных задач проектирования разработки месторождений нефти и газа [1]. Решение этой проблемы должно быть направлено на обеспечение максимальных объемов добычи углеводородных ресурсов, что вызывает необходимость в учете значительного числа природных факторов (фильтрационно-емкостных свойств пласта, его геометрических характеристик и т. п.). Поэтому возможны ситуации, в частности, при проектировании разработки сложно построенных пластов, когда для поиска рационального размещения скважин необходимо привлечение формализованных моделей формирования и выбора рационального размещения скважин, позволяющих учесть опыт и интуицию специалистов и представляющих собой математические средства поддержки проектных решений.

Проблему рационального размещения скважин сводят, часто, к поиску оптимальной плотности сетки скважин (определению рационального расстояния между скважинами) [1]. Очевидно, что та-

кая трактовка рационального размещения скважин оправдана, если проектируется равномерное расположение скважин по продуктивной площади. Однако возможны случаи, когда равномерная сетка скважин может оказаться не эффективной. Например, при существенной изменчивости фильтрационно-емкостных свойств по площади и разрезу продуктивного пласта, при его сложной геометрической форме более целесообразными могут оказаться нерегулярные (неравномерные) сетки, позволяющие в большей степени учесть неоднородность пласта и его геометрию. Предлагаемая процедура ориентирована на учет отмеченных особенностей. Кроме этого, по сравнению с существующими подходами к размещению скважин предлагаемая процедура позволяет учесть геолого-промышленные параметры, данные, полученные с помощью гидродинамических расчетов, а также эвристические правила, выработанные практикой разработки нефтяных залежей, и экспертные оценки.

Под рациональным размещением забоев добывающих скважин понимается их расположение, которое обеспечивает:

- как можно меньшее расстояние скважины до любой точки пласта;
- примерное равенство областей дренирования скважин;

— максимально возможное приближение скважин к блокам, имеющим большие значения продуктивности (геологических запасов блока) или каких-либо других характеристик, прямо пропорциональных продуктивности.

Размещение нагнетательных скважин предлагается определять при известном расположении добывающих скважин. Под рациональным размещением нагнетательных скважин понимается их расположение, которое обеспечивает:

— как можно меньшее расстояние нагнетательной скважин до любой добывающей скважины;

— примерное равенство числа добывающих скважин, взаимодействующих с ближайшей нагнетательной скважиной.

Введенные понятия рациональности направлены на максимальный охват пласта заданным числом добывающих скважин и максимальный охват продуктивного пласта заводнением (воздействием). Приведенный набор эвристических правил может быть дополнен и изменен.

Уточним, что в данной работе размещение скважины равносильно лишь выбору ячейки, в которой ее целесообразно разместить, и при этом не выбирается зона перфорации для вертикальной скважины или положение горизонтального участка скважины относительно кровли и подошвы пласта. В этом состоит ограниченность предлагаемых моделей. Однако после выбора ячеек, содержащих скважины, можно перейти к поиску наилучшего размещения скважины внутри ячейки и выбору наиболее целесообразной зоны перфорации скважин. Другое ограничение моделей состоит в том, что определяется размещение для заданного числа скважин. Это ограничение можно, в некоторой степени, обойти, решая задачу несколько раз для разного числа скважин.

## 1. МОДЕЛЬ РАЗМЕЩЕНИЯ ДОБЫВАЮЩИХ СКВАЖИН

Модель рационального размещения заданного числа добывающих скважин базируется на подходе, предложенном в работе [2] для газовых месторождений. Следуя этому подходу, разобьем залежь на ячейки (блоки). Каждая ячейка представляет собой прямоугольную призму. Основания призмы — квадраты, одинаковые для всех ячеек, а высота равняется нефтенасыщенной толщине пласта в этой ячейке. Таким образом, залежь покрыта совокупностью одинаковых квадратов. При размещении скважины в каком-либо квадрате координаты забоя скважины совпадают с центром этого квадрата (если проекция залежи на горизонтальную плоскость «накрыта» координатной сеткой, то центры ячеек совпадают с узлами сетки). Макси-

мальное число ячеек и, соответственно, минимальную площадь ячейки можно найти, исходя из минимально допустимого расстояния между скважинами. Минимально допустимая длина стороны квадрата будет совпадать с этим расстоянием. Минимальное число ячеек, по крайней мере, должно быть в два раза больше числа скважин, чтобы были возможны не только тривиальные решения. Если предполагается применение горизонтальных скважин, то размеры каждого блока должны позволять размещение в нем горизонтального участка скважины в любом направлении. При этом считается, что длина горизонтального участка относится к числу заданных параметров.

*Введем исходные параметры.* Пусть  $s$  — число добывающих скважин,  $n$  — число ячеек,  $k \equiv (n/s) - 1$ ,  $n > s$ . Будем считать, что  $n$  делится без остатка на  $s$ .

Пусть

$$\lambda_j \equiv V_j \left( \sum_{l=1}^n V_l \right)^{-1}, \quad j = \overline{1, n},$$

где  $V_j$  — запасы нефти  $j$ -й ячейки. Очевидно, что в качестве  $\lambda_j$  можно использовать любой параметр, характеризующий «важность» («полезность», «привлекательность»)  $j$ -й ячейки для разработки залежи. В этом случае оценку  $\lambda_j$  можно получить, привлекая экспертов, которые могут, например, учесть «степень опасности» ячейки в смысле ее близости к водоносным горизонтам.

Пусть  $R_{ij}$  — расстояние между центрами  $i$ -й и  $j$ -й ячеек,  $i = 1, \dots, n$ ,  $j = 1, \dots, n$ . Пусть

$$r_{ij} = \frac{R_{ij}}{\sum_{l=1}^n \sum_{t=1}^n R_{lt}}.$$

Определим параметр  $c_{ij}$  — «взвешенное расстояние» между  $i$ -й и  $j$ -й ячейками следующим образом:

$$c_{ij} \equiv (\lambda_j)^\gamma \cdot (r_{ij})^{(1-\gamma)}, \quad \gamma \in [0, 1], \quad (1)$$

где  $\gamma$  — экспертная оценка важности показателя «запасы» по отношению к показателю «расстояние». Параметр  $c_{ij}$  можно трактовать как «штраф» за удаленность  $i$ -й ячейки, содержащей скважину, от  $j$ -й ячейки залежи.

*Введем искомые переменные  $x_{ij}$ :*  $x_{ij} = 1$ , если  $j$ -я ячейка входит в область дренирования добывающей скважины, находящейся в  $i$ -й ячейке;  $x_{ij} = 0$ , в ином случае. Из определения  $x_{ij}$  следует:  $x_{ii} = 1$ , если в  $i$ -й ячейке находится скважина;  $x_{ii} = 0$  в ином случае.



С учетом сформулированного понятия рациональности формирование наилучшей схемы размещения скважин сводится к поиску таких  $x_{ij}$ , что

$$c_{ij}x_{ij} \rightarrow \min, \quad i = \overline{1, n}, \quad j = \overline{1, n}, \quad (2)$$

$$\sum_{i=1}^n x_{ij} = s, \quad (3)$$

$$\sum_{i=1}^n x_{ij} = 1, \quad j = \overline{1, n}, \quad (4)$$

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = (k+1)x_{ii}, \quad i = \overline{1, n}, \quad (5)$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\}, \quad i = \overline{1, n}, \quad j = \overline{1, n}. \quad (6)$$

Ограничение (3) — ограничение на число скважин; ограничение (4) — условие: любая ячейка может входить только в одну область дренирования; ограничение (5) — условие: область дренирования каждой скважины содержит одинаковое число ячеек.

Если считать, что все ячейки равноценны по другим характеристикам, не участвующим в оценке  $c_{ij}$ , и учесть, что  $R_{ii} = 0$ , то сформулированную многокритериальную задачу (2)—(6) можно свести к однокритериальной модели, используя свертку критериев [3]:

$$\sum_{i=1}^n \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n c_{ij}x_{ij} \rightarrow \min_x. \quad (7)$$

Систему ограничений (3)—(6) можно заменить более простыми условиями [2]:

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n (x_{ij} + kx_{ji}) = k, \quad i = \overline{1, n}, \quad (8)$$

$$x_{ij} \in \{0, 1, 2, \dots\}, \quad i = \overline{1, n}, \quad j = \overline{1, n}, \quad j \neq i, \quad (9)$$

т. е. решение задачи (2)—(6) заменяется решением задачи (7)—(9). Если через  $\{x_{ij}^*\}$  обозначить оптимальное решение этой задачи, то с учетом ограничения (5) значения  $x_{ii}^*$  будут вычисляться по формуле:

$$x_{ii}^* = \frac{1}{k} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n x_{ij}^*, \quad i = \overline{1, n},$$

а множество номеров ячеек, содержащих скважины, будут составлять номера ячеек, для которых  $x_{ii}^* = 1$ . Номера ячеек, входящих в область дре-

нирования скважины, находящейся в  $i$ -й ячейке ( $x_{ii}^* = 1$ ), будут определяться по правилу:  $j$ -я ячейка включается в область дренирования этой скважины, если  $x_{ij}^* = 1$ .

Для решения полностью целочисленной оптимизационной задачи (7)—(9) можно применить один из стандартных алгоритмов дискретной оптимизации [4].

Остановимся на применении предлагаемой модели при большой размерности задачи размещения скважин (большом числе ячеек и скважин). Такое исследование может оказаться полезным, так как при большой размерности задач дискретной оптимизации методы целочисленного программирования требуют значительных затрат компьютерной памяти и, соответственно, значительного времени решения.

Указанное затруднение можно обойти, если предложить дополнительную процедуру разбиения залежи на зоны меньшей площади. После такого разбиения решается задача размещения скважин для каждой из полученных зон. Для формализованного описания процедуры введем обозначения. Пусть  $n$  — заданное число ячеек, на которые разбита залежь;  $n_0$  — допустимое при расчетах число ячеек, которое определяется, исходя из возможностей метода оптимизации,  $n_0 < n$ ;  $s$  — заданное число добывающих скважин;  $s_0$  — допустимое при расчетах число скважин, которое определяется, исходя из возможностей метода оптимизации,  $s_0 < s$ . Введем вспомогательный параметр  $N_0 \equiv I(n/n_0) + 1$ , где через  $I(n/n_0)$  обозначена целая часть числа  $n/n_0$ . Пусть  $N$  — число зон, на которые необходимо разбить залежь,  $N$  — параметр, подлежащий определению.

Теперь процедура сводится к следующим операциям:

- 1) положить  $N = N_0$ ;
- 2) разбить залежь на  $N$  зон одинаковой площади;
- 3) используя данные геологической модели залежи, определить  $V_l$  — геологические запасы нефти  $l$ -й зоны,  $l = 1, \dots, N$ ;
- 4) вычислить параметр

$$\xi = sV_l \left( \sum_{l=1}^N V_l \right)^{-1};$$

- 5) определить  $s_l$  — число скважин в  $l$ -й зоне:

$$s_l = I(\xi) + 1, \quad l = \overline{1, N};$$

- 6) проверить выполнение правила останова: если выполняется  $s_l \leq s_0$ ,  $l = 1, \dots, N$ , то процедура

разбиения на зоны заканчивается; в ином случае следует положить  $N \equiv N + 1$  и вернуться к п. 2.

Остановимся подробнее на п. 2 приведенного алгоритма. Чтобы разбить залежь на  $N$  зон одинаковой площади, достаточно решить задачу (7)–(9), в которой  $N$  — число «скважин», а при расчете расстояния  $c_{ij}$  по формуле (1) следует положить  $\gamma = 0$ . В результате решения задачи (7)–(9) будут получены «области дренирования скважин», которые, в данном случае, будут представлять собой искомые зоны меньшей площади.

После разбиения залежи на зоны, меньшие по площади, решается задача размещения для каждой зоны в отдельности, причем число скважин в  $l$ -й зоне равняется  $s_l$ ,  $l = 1, \dots, N$ .

Отметим, что в первоначальное множество ячеек, составляющих залежь, включаются ячейки, для которых запасы (или нефтенасыщенная толщина) не меньше заданных предельных значений.

## 2. МОДЕЛЬ РАЗМЕЩЕНИЯ НАГНЕТАТЕЛЬНЫХ СКВАЖИН

Перейдем к математической формулировке задачи рационального размещения нагнетательных скважин. Пусть заданы координаты забоев добывающих скважин (номера ячеек, содержащих добывающие скважины), число нагнетательных скважин и номера ячеек, в которых, по мнению экспертов, можно расположить нагнетательные скважины. Например, эксперты могут запретить слишком близкое расположение нагнетательной скважины к добывающей. Число таких допустимых ячеек должно быть больше числа нагнетательных скважин. Пусть  $M_d$  — множество ячеек, содержащих добывающие скважины,  $M_n$  — множество ячеек, в которых можно разместить нагнетательные скважины. Будем считать, что  $s$  — число добывающих скважин делится без остатка на  $m$ , где  $m$  — число нагнетательных скважин,  $s > m$ . Отношение  $k = s/m$  представляет собой число добывающих скважин, приходящееся на одну нагнетательную. Пусть  $R_{ij}$  — расстояние между центрами  $i$ -й и  $j$ -й ячеек,  $i \in M_n, j \in M_d$ . Пусть  $d$  — минимально допустимое расстояние между ячейками, содержащими нагнетательные скважины,  $d_{it}$  — расстояние между  $i$ -й и  $t$ -й ячейками, в которых могут быть размещены нагнетательные скважины, т. е.  $i, t \in M_n$ .

Введем искомые переменные  $y_i$  и  $x_{ij}$ , где  $y_i = 1$ , если в  $i$ -й ячейке располагается нагнетательная скважина, и  $y_i = 0$  в ином случае;  $x_{ij} = 1$ , если  $j$ -я добывающая скважина включается в область воздействия нагнетательной скважины, находящейся в  $i$ -й ячейке, и  $x_{ij} = 0$  в ином случае.

Пусть расстояния  $c_{ij}$  вычисляются по формуле (1), где  $\gamma = 0$ ,  $i \in M_n, j \in M_d$ . Тогда решение задачи сводится к поиску  $y_i$  и  $x_{ij}$ ,  $i \in M_n, j \in M_d$ , удовлетворяющих следующим соотношениям:

$$\sum_{i \in M_n} \sum_{j \in M_d} c_{ij} x_{ij} \rightarrow \min_x, \quad (10)$$

$$\sum_{i \in M_n} y_i = m, \quad (11)$$

$$\sum_{i \in M_n} y_i x_{ij} = 1, \quad j \in M_d, \quad (12)$$

$$\sum_{j \in M_d} x_{ij} = ky_i, \quad i \in M_n, \quad (13)$$

$$(d_{it} - d)y_i y_t \geq 0, \quad i, t \in M_n, \quad (14)$$

$$y_i \in \{0, 1\}, \quad i \in M_n, \quad (15)$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\}, \quad i \in M_n, j \in M_d. \quad (16)$$

Задача (10)–(16) в силу ограничений (12) и (14) является задачей нелинейного дискретного программирования. Чтобы применить для ее решения стандартные методы линейного целочисленного программирования, необходимо заменить нелинейные ограничения (12) и (14) эквивалентными линейными. Для этого вводятся дополнительные искомые переменные  $z_{ij}$  и дополнительные ограничения на переменные  $z_{ij}$ ,  $y_i$  и  $x_{ij}$  [5]:

$$z_{ij} \in \{0, 1\}, \quad i \in M_n, j \in M_d. \quad (17)$$

$$(y_i + x_{ij}) - 1 \leq z_{ij} \leq \frac{1}{2}(y_i + x_{ij}), \quad i \in M_n, j \in M_d. \quad (18)$$

Выполнение ограничений (17) и (18) эквивалентно выполнению равенств  $z_{ij} = y_i x_{ij}$ . Поэтому нелинейные ограничения (12) можно заменить линейными

$$\sum_{i \in M_n} z_{ij} = 1, \quad j \in M_d. \quad (19)$$

Аналогично можно поступить и с нелинейными ограничениями (14). А именно, вводятся дополнительные искомые переменные  $w_{it}$  и дополнительные линейные ограничения на переменные  $y_i$ ,  $y_t$  и  $w_{it}$ :

$$w_{it} \in \{0, 1\}, \quad i, j \in M_n, \quad (20)$$

$$(y_i + y_t) - 1 \leq w_{it} \leq \frac{1}{2}(y_i + y_t), \quad i, j \in M_n. \quad (21)$$



Как и ранее, выполнение ограничений (20) и (21) эквивалентно выполнению равенств  $w_{it} = y_i y_r$ . Поэтому нелинейные ограничения (14) можно заменить линейными ограничениями

$$(d_{it} - d)w_{it} \geq 0, \quad i, j \in M_H. \quad (22)$$

Таким образом, нелинейная задача (10)–(16) заменяется линейной дискретной задачей (10), (11), (19), (13), (22), (15)–(18), (20) и (21), решение которой можно получить стандартными алгоритмами целочисленного программирования [4].

### 3. ВЫБОР РАЦИОНАЛЬНОГО ЧИСЛА СКВАЖИН

Предлагаемые модели размещения скважин могут быть использованы для оценки рационального числа скважин. Возможность указанного расширения области применения моделей связана с проведением многократных расчетов по этим моделям, суть которых заключается в следующем. Предположим, что имеются несколько вариантов, отличающихся числом скважин. Для каждого фиксированного числа добывающих и нагнетательных скважин определяется их оптимальное размещение. Дополняя полученные решения значениями других технологических параметров, можно рассчитывать (например, с помощью пакетов по гидродинамическому моделированию) объемы добычи нефти и их изменение во времени. На основе информации о технологических параметрах и объемах добычи рассчитываются показатели экономической эффективности вариантов. После этого выбирается вариант, обладающий лучшими значениями показателей эффективности. Каждому варианту соответствует определенная схема размещения для соответствующего числа скважин. Поэтому одновременно с выбором лучшего варианта осуществляется и выбор лучших схем размещения скважин, и выбор наиболее целесообразного числа скважин.

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предложенная процедура размещения скважин позволяет учесть распределение запасов углеводородного сырья по продуктивному пласту и экспертные оценки перспективности размещения скважин на различных участках залежи. Ее применение целесообразно, когда для поиска рационального размещения скважин в дополнение к опыту и интуиции специалистов необходимо привлекать формализованные алгоритмы в силу сложного геологического строения залежи.

В зависимости от размеров месторождения число скважин может достигать нескольких сотен. Поэтому задачи размещения скважин могут иметь большую размерность. Учитывая существенную зависимость эффективности алгоритмов целочисленного программирования от размерности задачи, следует признать, что наиболее целесообразной областью применения предлагаемого подхода к размещению скважин является проектирование разработки небольших по размеру залежей. Отметим, что число таких залежей достаточно, чтобы считать их рациональное освоение актуальным. Тем не менее, предлагаемые алгоритмы могут быть применены и для поиска рационального размещения большого числа скважин. В этом случае можно предварительно разбить всю продуктивную площадь на зоны, эквивалентные небольшим залежам, а затем для каждой такой зоны решить задачу рационального размещения скважин.

Предложенные подходы целесообразно использовать для получения удовлетворительных первоначальных вариантов размещения скважин. В дальнейшем эти варианты могут быть скорректированы с использованием дополнительной расчетной или экспертной информации. Применяя рассмотренные алгоритмы отдельно для каждой ячейки, содержащей скважину, и разбивая эту ячейку на более мелкие блоки, можно уточнить положение забоя скважины внутри ячейки. Решая задачу для различного числа скважин и рассчитывая для полученных вариантов размещения скважин технико-экономические показатели эффективности, можно определить не только их рациональное размещение, но и их наиболее целесообразное число.

### ЛИТЕРАТУРА

1. *Закиров С.Н.* Анализ проблемы «Плотность сетки скважин — нефтеотдача». — М.: Грааль, 2002. — 314 с.
2. *Ермолаев А.И., Ибрагимов И.И.* Модели рационального размещения скважин при разработке газовых и газоконденсатных месторождений. — Труды Института проблем управления РАН. — 2006. — Т. XXV. — С. 118–123.
3. *Подиновский В.В., Ногин В.Д.* Парето-оптимальные решения многокритериальных задач. — М.: Наука, 1982. — 254 с.
4. *Мину М.* Математическое программирование. Теория и алгоритмы. — М.: Наука, 1990. — 486 с.
5. *Мамиконов А.Г., Цвиркун А.Д., Кульба В.В.* Автоматизация проектирования АСУ. — М.: Энергоиздат, 1981. — 328 с.

☎ (495) 135-79-36, e-mail: aier@gubkin.ru, rgkm@gubkin.ru

Статья представлена к публикации членом редколлегии В.Н. Бурковым. □