

КОНСТРУКТИВНОЕ D-РАЗБИЕНИЕ ДЛЯ ДВУХ ЛИНЕЙНО ВХОДЯЩИХ В ПОЛИНОМ ПАРАМЕТРОВ. Ч. 1. Описание границ областей D-разбиения[#]

А. А. Тремба

Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова РАН, г. Москва,
Московский физико-технический институт, г. Долгопрудный

✉ atremba@ipu.ru

Аннотация. При анализе устойчивости линейных систем, зависящих от нескольких параметров, часто применяется метод D-разбиения, описывающий область устойчивости характеристического полинома с помощью уравнения её границы. Предлагается метод конструктивного D-разбиения, выделяющего отдельные части кривых и прямых линий на плоскости параметров, образующих границы областей D-разбиения и, в частности, области устойчивости. Рассмотрены характеристический полином, линейно зависящий от двух параметров, и область локализации корней с кусочно-дробно-рациональной границей, заданной параметрически. В этом случае граница каждой области D-разбиения представляет собой конечный набор участков дробно-рациональных кривых, а также отрезков, лучей или прямых, которые можно найти явно. При этом дробно-рациональные участки кривых параметризованы на интервалах, концы которых находятся вычислением вещественных корней вспомогательных полиномов. D-разбиение, ограниченное (локализованное) на компактном множестве, состоит из конечного числа отрезков и участков дробно-рациональных кривых, параметризованных на отрезках.

Ключевые слова: конструктивное D-разбиение, локализация корней, дробно-рациональные кривые, локализованное D-разбиение.

ВВЕДЕНИЕ

Синтез регуляторов для линейных систем управления тесно связан с анализом характеристического полинома. Это верно как для систем, заданных в виде вход – выход с помощью передаточных функций, так и записанных в пространстве состояний¹. При этом устойчивость системы определяется корнями характеристического полинома. Рассмотрим характеристический полином степени n , зависящий от двух вещественных параметров

$$G(s, k_1, k_2). \quad (1)$$

Здесь k_1, k_2 – параметры, например, представляющие коэффициенты регулятора или неопределённость. Все корни полинома (1) асимптотически устойчивых систем непрерывного времени лежат в левой комплексной полуплоскости (такие полиномы называются гурвицевыми):

$$\mathbf{D} = \{s \in \mathbb{C}: \operatorname{Re} s < 0\}. \quad (2)$$

Для устойчивых дискретных систем все корни характеристического полинома должны лежать внутри единичного круга ($\mathbf{D} = \{s \in \mathbb{C}: |s| < 1\}$), такие полиномы называются шуровскими. Этот случай можно свести к анализу непрерывного полинома с помощью дробно-линейного преобразования Мёбиуса с аннулированием знаменателя: полином $G_0(z)$ шуровский тогда и только тогда, когда по-

[#] Результаты исследований, представленные в § 3 и 4, получены за счёт средств Российского научного фонда, грант № 21-71-30005-П, <https://rscf.ru/project/21-71-30005/>.

¹ Если система не распадается на несколько независимых систем, т. е. её матрица может быть приведена к фробениусовой форме (канонической форме Бруновского).

лином $G(s) = (1-s)^n G_0\left(\frac{1+s}{1-s}\right)$ гурвицев и $G_0(-1) \neq 0$ [1]. Последняя оговорка описывает особый случай, при котором степень полинома $G(s)$ может оказаться меньше степени $G_0(z)$, – это происходит, если G_0 имеет корень -1 .

В общем случае требуемое множество локализации корней полинома $\mathbf{D} \subset \mathbb{C}$ может быть любым подмножеством комплексной плоскости, выбранным исходя из требований к системе. Хотя поведение системы определяется не только корнями её характеристического полинома, но и структурой системы и начальными условиями, ряд важных свойств (помимо устойчивости) можно проанализировать по расположению корней. Так, можно ограничить степень устойчивости, показатель колебательности и другие инженерные критерии качества [2–4].

Если все n корней полинома лежат во множестве \mathbf{D} , он называется \mathbf{D} -устойчивым. Для удобства будем называть его просто устойчивым. Корни полинома, лежащие во множестве \mathbf{D} , будем называть *устойчивыми*, а лежащие вне \mathbf{D} – *неустойчивыми*. Без ограничения общности продемонстрируем анализ устойчивости системы непрерывного времени, в этом случае \mathbf{D} – открытая левая комплексная полуплоскость, а \mathbf{D} -устойчивость означает гурвицевость полинома. Общие требования к множеству \mathbf{D} приведены в § 1.

Корни полинома (1) зависят от параметров k_1, k_2 , и задача состоит в том, чтобы определить, при каких значениях параметров полином устойчив, т. е. все его корни устойчивы. Результаты используются как для анализа устойчивости системы по этим параметрам (например, по физическим параметрам системы, входящим в характеристический полином), так и для синтеза регуляторов низкого порядка, например, ПИ-, ПД- или ПИД-регулятора с одним зафиксированным коэффициентом. Если система стабилизируема, то множество таких параметров не пусто, его называют *областью устойчивости* системы в пространстве параметров. Обозначим область устойчивости как D_n , где индекс соответствует числу устойчивых корней.

Для построения области устойчивости используется метод D-разбиения Ю. И. Неймарка, позволяющий описать область устойчивости с помощью его границы [5–9]. Кратко изложим идею метода. Граница области локализации корней $\partial\mathbf{D}$ – мнимая ось для непрерывных систем, единичная окружность для дискретных и т. д. – неявным или

явным образом отображается на плоскость параметров. Полученная граница разделяет плоскость параметров на связные компоненты, которые будем называть *областями D-разбиения*; внутри каждой из них число устойчивых корней не меняется. Совокупность областей D-разбиения, в которых все n корней устойчивы, образует область устойчивости. Их число для гурвицевых и шуровских полиномов может быть оценено [10]. Таким образом, граница области устойчивости ∂D_n удовлетворяет следующему условию:

$$\partial D_n \subset \{(k_1, k_2) : G(s, k_1, k_2) = 0_{\mathbb{C}}, s \in \partial\mathbf{D}\}. \quad (3)$$

Обозначение нуля $0_{\mathbb{C}}$ в формуле (3) подчёркивает, что уравнение комплексное. Пусть граница области локализации корней параметризуется вещественным параметром $w : \partial\mathbf{D} = \{s(w) : w \in W \subset \mathbb{R}\}$. Тогда D-разбиение задаётся так называемым *основным уравнением*

$$G(s(w), k_1, k_2) = 0_{\mathbb{C}}, w \in W, \quad (4)$$

и *условием понижения степени* полинома, накладываемым на коэффициент при s^n :

$$G_n(k_1, k_2) = 0_{\mathbb{C}}. \quad (5)$$

Уравнение (5) описывает изменение общего числа корней. Оно соответствует структурному изменению системы, его можно интерпретировать таким образом, что в этом случае хотя бы один из корней «бесконечный» и неустойчивый (по числу последовательных нулевых старших членов).

Особенности решения основного уравнения приведены в § 1. Достоинством D-разбиения является его простота и наглядность. Очевидны недостатки метода D-разбиения:

- зависимость от небольшого числа параметров (одного, двух или трёх, некоторые исключения при специальной структуре полинома исследованы в статье [11]);
- нетривиальность применения к полиномам, зависящим от параметров нелинейно – уравнение (4) должно быть разрешимо относительно параметров;
- избыточность построения границ, в частности, области устойчивости.

Последний пункт связан с тем, что отображение мнимой оси на плоскость параметров ограничивает не только связные компоненты области устойчивости, но и разграничивает все остальные области с разным числом устойчивых корней. Более того, образ мнимой оси может разграничивать области с одинаковым числом устойчивых корней. Из этой же проблемы следует, что представление границы области устойчивости чаще всего задаёт-



ся и анализируется в графическом и численном виде.

В настоящей статье решается последняя из указанных проблем с помощью явного, конструктивного описания участков границы области устойчивости и алгоритмизации её построения. Для этого используется комбинация алгебраических и вычислительных алгоритмов. Метод подходит для полиномов с линейной зависимостью от параметров и произвольных областей локализации корней, граница ∂D которых параметризуется кусочно-дробно-рациональной функцией. Так как метод D-разбиения применяется во многих практических задачах синтеза регуляторов, имеющих такую структуру (см. работу [5]), то явное выделение области устойчивости является актуальным.

Настоящая статья является развитием публикации [12]. Полученная параметризация границы области устойчивости может быть использована для последующей оптимизации внутри области устойчивости и для иных задач, связанных с анализом и синтезом регуляторов с заданными характеристиками, определяемыми областью локализации корней (эти вопросы будут рассмотрены во второй части статьи).

Альтернативные подходы

Вкратце перечислим основные подходы к описанию области устойчивости и её границы, в общем случае применимые и к большому числу параметров. Разделим их на четыре группы.

Самым простым и очевидным способом является прямой перебор параметров k , например, с помощью регулярной сетки. В каждом из узлов сетки вычисляются корни полинома и подсчитывается их число в области локализации корней D , по этому параметру определяется принадлежность узла соответствующей области D-разбиения. Для реализации этого подхода нужна хотя бы приближительная локализация области устойчивости. Как правило, она доступна в виде параллелепипеда $K = K_1 \times K_2 \times \dots \times K_\ell = [k_1, \bar{k}_1] \times [k_2, \bar{k}_2] \times \dots \times [k_\ell, \bar{k}_\ell]$; диапазоны всех ℓ параметров $K_i = [k_i, \bar{k}_i]$, $i = 1, \dots, \ell$, взяты из «физических» ограничений анализируемой системы или исходя из иных соображений. Однако число пробных точек – узлов сетки – обратно пропорционально ℓ -й степени мелкости сетки, при этом граница множества устойчивости будет описана приблизительно. Например, могут быть «пропущены» малые по сравнению с мелкостью сетки области устойчивости или неустойчивости. Метод прост и позволяет быстро оценить или локализовать область устойчивости. На рис. 1 показаны примеры применения прямого перебора параметров. Видно, что слева область устойчивости включает всего семь пробных точек, и при более редкой сетке не была бы обнаружена.

Второй подход состоит в разбиении плоскости параметров на множества, обычно на прямоугольники, для которых определяется их принадлеж-

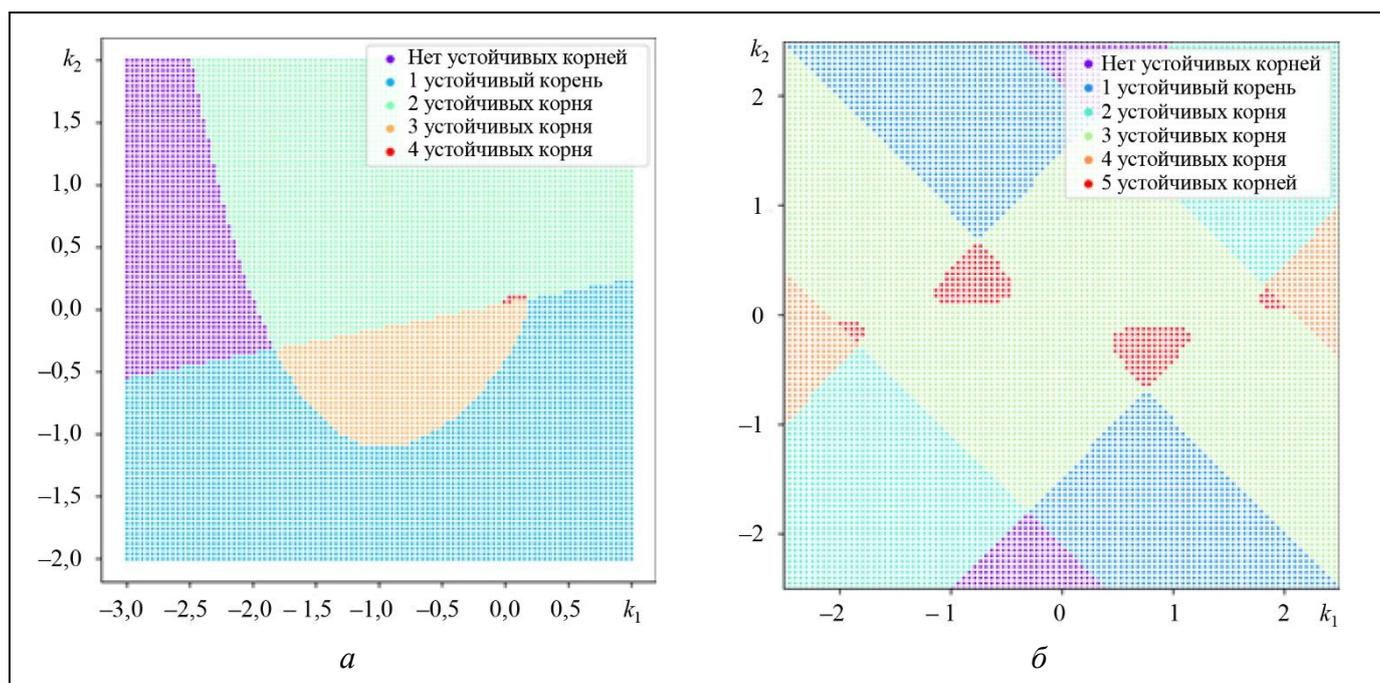


Рис. 1. Результат прямого перебора параметров: a – для примера 1, b – для примера 2, см. § 5

ность к области устойчивости, например, с помощью достаточных критериев робастной устойчивости [13]. Алгоритм имеет оценку сложности относительно степени полинома, гарантирует построение внутренней аппроксимации множества устойчивости. Этот же подход применим и для анализа систем с неопределённостью [14].

В третьем подходе область устойчивости описывается неявно как система уравнений и неравенств, например, матричных. Это позволяет решать задачу «верхнего уровня», например, о поиске оптимального в каком-то смысле регулятора, либо осуществлять поиск регулятора или наблюдателя, удовлетворяющего дополнительным ограничениям типа H_∞ -нормы передаточных функций и пр. среди устойчивых регуляторов. Данный подход удобен тем, что он органично встраивает указанные ограничения **D**-устойчивости в задачу оптимизации. Так, если ограничения на параметры записываются в терминах положительной (отрицательной) определённости некоторых матриц, то они хорошо согласуются с формулировкой задачи управления в виде полуопределённого программирования (*semi-definite programming*) [15]. Такие постановки естественны при задании системы в форме пространства состояний (в форме Коши) с помощью матриц, в которые параметры входят линейно, а в характеристический полином войдут полиномиальным образом. Однако, хотя задание области в виде формул удобно, фактически множество устойчивости может иметь сложную структуру, быть невыпуклым, многосвязным или несвязным. В результате задача оптимизации на этом множестве сложна сама по себе. Близким к этому подходу является описание границы области устойчивости или, обобщённо, области параметров, удовлетворяющих требованиям задачи (не обязательно формулируемым с использованием корней полинома), с помощью некоторого уравнения границы (*guardian map*) [16, 17]. К этой группе отнесём и иные подходы, при которых граница области устойчивости используется неявным образом. Например, при прямом поиске оптимального регулятора применяется численный метод, который «не выходит» за границы области устойчивости благодаря функции барьерного типа, стремящейся к бесконечности при приближении к границе области устойчивости [18].

Наконец, четвертая группа подходов состоит в алгебраическом анализе уравнения (4) как системы двух уравнений от набора вещественных параметров w, k_1, k_2, \dots . Как правило, основное уравнение полиномиальное, и его решение можно анализировать алгебраическими методами [4, 19]. В частно-

сти, можно исключить переменную w , получить уравнение границы **D**-разбиения и далее вычлени её части, соответствующие границе области устойчивости. Попутно выделяется набор точек, позволяющих идентифицировать не только участки границ области устойчивости, но и саму область. Алгоритм включает в себя построения базиса Грёбнера и его идеала или аналогичное исключение переменных (что, по сути, эквивалентно записи решения основного уравнения (4) в аналитическом виде) и цилиндрического алгебраического разложения (англ. *cylindrical algebraic decomposition*, CAD) для системы полиномиальных уравнений [19, 20]. Однако применение этого метода требует специального программного обеспечения, его численная реализация может потребовать больших затрат времени и памяти; кроме того, результат очень чувствителен к коэффициентам полинома и способу их задания.

Технически все методы сводятся к анализу некоторой кривой (кривых, прямых) на плоскости, являющейся решением некоторого уравнения, задающего границы областей **D**-разбиения. Постановки соответствующих задач зависят от способа задания кривой. В настоящей статье предлагается конкретизировать процесс построения **D**-разбиения для одного и двух параметров путём комбинирования алгебраических и численных методов. Для этого используются элементарные вспомогательные конструкции, сводящиеся к вычислению вещественных корней вспомогательных полиномов. В результате будет получено аналитическое описание границы области устойчивости в виде набора параметризованных кривых и прямых линий с определёнными интервалами параметризации. Для полученного описания границы в виде набора кривых и прямых предлагается ряд методов для численной аппроксимации области устойчивости и (или) её границы с любой заданной точностью. Полученными методами легко решается ряд задач, связанных с областью устойчивости, таких как локализация множества устойчивости, анализ робастности и пр.

1. КОНСТРУКТИВНОЕ **D**-РАЗБИЕНИЕ

1.1. **D**-разбиение для полиномов, линейно зависящих от параметров

Рассмотрим характеристический полином, линейно зависящий от двух параметров k_1, k_2 :

$$G(s, k_1, k_2) = k_1 P(s) + k_2 Q(s) + R(s). \quad (6)$$



Пусть задана регулярная открытая² область локализации корней $\mathbf{D} \subset \mathbb{C}$. Далее предполагаем, что полиномы $P(s), Q(s), R(s)$ не имеют общих корней³.

При изменении значений параметров k_1, k_2 корни полинома меняются и могут войти в область \mathbf{D} или, наоборот, выйти из неё. Пусть граница области локализации корней $\partial\mathbf{D}$ параметризована вещественным параметром с помощью полиномов или дробно-рациональных функций либо набора таких полиномов и функций.

Рассмотрим D-разбиение на примере гурвицевых полиномов. Для этого без ограничения общности рассмотрим границу области асимптотической устойчивости (2) с односвязной границей $\Gamma = \{s \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} s = 0\}$ и с параметризацией

$$s(w) = jw, w \in (-\infty, \infty). \quad (7)$$

В общем случае предполагается, что граница описывается набором простых кривых, каждая из которых является кусочно-дробно-рациональной⁴ функцией от параметра, см. § 2. Отметим, что если множество \mathbf{D} симметрично относительно вещественной оси, а коэффициенты полиномов вещественные, то достаточно изучать только «верхнюю» часть границы с $\operatorname{Im} s \geq 0$, в частности, в случае анализа асимптотической устойчивости, $w \in [0, \infty)$. При этом точки пересечения границы

² Либо регулярная замкнутая, но для неё принадлежность каждого участка границы области устойчивости самой области устойчивости надо проверять отдельно, в том числе отдельно рассматривая точки пересечения и сопряжения участков границы, при том что методология построения D-разбиения такая же. Эта же техническая особенность имеет место для замкнутых, но не регулярных замкнутых областей локализации корней, например, с $\mathbf{D} = \{s : \operatorname{Re} s < 0, \operatorname{Im} s = 0\}$, для анализа апериодичности. Результаты статьи верны и для открытых множеств, для них возможны «внутренние», «висячие» части границы области локализации корней и аналогичные участки границы области устойчивости.

³ В противном случае общий корень, лежащий в области \mathbf{D} , можно выделить в качестве общего множителя и рассмотреть полином степени $n-1$. Если общий корень не принадлежит области \mathbf{D} , то полином неустойчив при любых значениях параметров.

⁴ Основное уравнение (4) при подстановке дробно-рациональной функции $s(w)$ приводится к полиномиальному уравнению относительно w , при этом надо отдельно рассмотреть случаи, при которых знаменатель $s(w)$ обращается в нуль. Если множество локализаций корней многосвязно, то может потребоваться анализ не только области устойчивости D_n , но и иных областей $D_d, d=1, \dots, n$ [3, 21]. Предлагаемый подход позволяет единообразно рассматривать такие ситуации, выделяя область с произвольным числом устойчивых корней.

Γ с вещественной осью будут считаться точками сопряжения участков границы.

Параметры на границе области устойчивости должны удовлетворять основному уравнению (4) или уравнению понижения степени (5). Конкретизируем их для полинома (6). Старший коэффициент полинома $G_n(k_1, k_2)$ линеен по параметрам k_1, k_2 , и уравнение (5) связывает коэффициенты полиномов $P(s), Q(s), R(s)$ при s^n , обозначим их как $P_n = a_0, Q_n = b_0, R_n = c_0$. Некоторые, но не все из них, могут быть нулевыми:

$$G_n(k_1, k_2) = a_0 k_1 + b_0 k_2 + c_0 = 0. \quad (8)$$

Основное уравнение D-разбиения (4) для границы (7) принимает вид $G(jw, k_1, k_2) = 0_{\mathbb{C}}$. Оно является полиномиальным относительно всех параметров и эквивалентно системе двух вещественных линейных уравнений

$$\begin{cases} \operatorname{Re} G(jw, k_1, k_2) = k_1 \operatorname{Re} P(jw) + \\ + k_2 \operatorname{Re} Q(jw) + \operatorname{Re} R(jw) = 0, \\ \operatorname{Im} G(jw, k_1, k_2) = k_1 \operatorname{Im} P(jw) + \\ + k_2 \operatorname{Im} Q(jw) + \operatorname{Im} R(jw) = 0. \end{cases} \quad (9)$$

Это линейное векторное уравнение относительно переменных k_1, k_2 с коэффициентами, полиномиально зависящими от w . Его решение можно записать в явном виде. Для этого сначала надо рассмотреть особые критические частоты, в которых обнуляется определитель матрицы

$$T(w) = \begin{pmatrix} \operatorname{Re} P(jw) & \operatorname{Re} Q(jw) \\ \operatorname{Im} P(jw) & \operatorname{Im} Q(jw) \end{pmatrix}. \quad (10)$$

Критические частоты определяются полиномиальным уравнением, составленным по формуле (10):

$$\det T(w) = \operatorname{Re} P(jw) \operatorname{Im} Q(jw) - \operatorname{Re} Q(jw) \operatorname{Im} P(jw) = 0. \quad (11)$$

Пусть оно имеет M различных вещественных корней w_i , их не более n на интервале $[0, \infty)$ для случая асимптотической устойчивости с границей (7), включая нулевой корень (в общем случае – не более $2n$ корней). Множество решений (9) для каждого из корней является либо прямой, называемой *особой прямой*, либо пустым множеством. При этом строки расширенной матрицы, составленной из $T(w_i)$ и $(-\operatorname{Re} R(jw_i), -\operatorname{Im} R(jw_i))^T$, либо линейно зависимые, либо линейно независимые. В последнем случае решения нет и соответствующий корень w_i игнорируется. Сама расширенная матрица ненулевая по предположению об

отсутствии общих корней полиномов P, Q, R . Если в случае существования решения обозначить элементы ненулевой строки матрицы $T(w_i)$ как a_i, b_i , а свободный член как c_i , то решение системы (9) при $w = w_i$ описывается уравнениями прямых

$$a_i k_1 + b_i k_2 + c_i = 0, \quad i = 1, \dots, M. \quad (12)$$

Линейная зависимость строк расширенной матрицы включает случай, когда одна строка нулевая; например, для границы (7) это происходит при обнулении мнимой части для $w = 0$, что соответствует особой прямой.

В остальных интервалах $(w_1 = 0, w_2), (w_2, w_3), \dots, (w_{M-1}, w_M), (w_M, \infty)$ решения уравнения (9) задают дробно-рациональную кривую на плоскости, состоящую из не более чем $M + 1$ связанных участков – по числу интервалов, на которых функции $k_1(w), k_2(w)$ непрерывны:

$$\begin{aligned} k_1(w) &= \frac{1}{\det T(w)} (\operatorname{Im} R(jw) \operatorname{Re} Q(jw) - \\ &\quad - \operatorname{Re} R(jw) \operatorname{Im} Q(jw)), \\ k_2(w) &= \frac{1}{\det T(w)} (\operatorname{Re} R(jw) \operatorname{Im} P(jw) - \\ &\quad - \operatorname{Im} R(jw) \operatorname{Re} P(jw)). \end{aligned} \quad (13)$$

Таким образом, D-разбиение описывается кривой (13), далее будем называть её основной кривой, и $K + 1$ уравнениями прямых (8) и (12).

В общем случае граница области локализации корней Γ кусочно-непрерывная, разным её участкам соответствует своя параметризация, и в результате D-разбиение определяется несколькими основными кривыми и набором прямых. Более того, граница локализации корней может состоять из нескольких связанных компонент [3]. Далее приведён алгоритм конструктивного построения D-разбиения в общем случае. Он состоит в выделении границ отдельных областей D-разбиения и, в частности, области устойчивости с помощью одномерной параметризации участков границы.

1.2. Конструктивное D-разбиение для двух вещественных параметров

Предлагается применять численно-алгебраический алгоритм для описания отдельных областей D-разбиения, вычисляя их границы. Часть преобразований выполняется аналитически, а часть – численно. Все нетривиальные численные операции можно свести к вычислению вещественных корней

некоторых полиномов. Предлагаемый подход позволяет справиться со сложностями, присущими упомянутым во введении альтернативным методам. В частности, он не требует специального программного обеспечения и может быть эффективно реализован. С другой стороны, он явно описывает границы областей D-разбиения в виде участков дробно-рациональных кривых и отрезков. Численно получены только интервалы параметров этих кривых и отрезков.

Алгоритм 1. Конструктивное D-разбиение.

Дано: полином степени n , линейно зависящий от параметров, вида (6); область локализации корней \mathbf{D} с параметризованной границей

$$\Gamma = \bigcup_{\ell} \Gamma_{\ell}, \quad \Gamma_{\ell} = \{s_{\ell}(w) \in \mathbb{C} : w \in W_{\ell}\}, \quad (14)$$

$$\ell = 1, \dots, L,$$

искомое число устойчивых корней $0 \leq d \leq n$.

1. Для всех участков границы Γ_{ℓ} получить уравнения D-разбиения в виде системы двух уравнений, например,

$$\begin{cases} \operatorname{Re} G(s_{\ell}(w), k_1, k_2) = k_1 \operatorname{Re} P(s_{\ell}(w)) + \\ \quad + k_2 \operatorname{Re} Q(s_{\ell}(w)) + \operatorname{Re} R(s_{\ell}(w)) = 0, \\ \operatorname{Im} G(s_{\ell}(w), k_1, k_2) = k_1 \operatorname{Im} P(s_{\ell}(w)) + \\ \quad + k_2 \operatorname{Im} Q(s_{\ell}(w)) + \operatorname{Im} R(s_{\ell}(w)) = 0, \end{cases} \quad (15)$$

$$w \in W_{\ell}.$$

2. Получить решение (15) в виде набора параметрических кривых $(k_{\ell,1}(w), k_{\ell,2}(w))$, $w \in W_{\ell}$, и особых прямых и добавить к ним прямую из уравнения понижения степени (8), если множество его решений не пусто. При этом интервалы W_{ℓ} могут быть разбиты на интервалы, полуинтервалы или отрезки, соответствующие непрерывным участкам кривых и разделённые критическими частотами.

3. Найти все точки пересечения кривых и прямых, полученные на предыдущем шаге, и точки самопересечения кривых $(k_{\ell,1}(w), k_{\ell,2}(w))$ в пределах интервалов W_{ℓ} на интервалах с непрерывной зависимостью от параметра w . При вычислении точек пересечений считать конечные предельные точки принадлежащими соответствующим кривым (см. § 3).

В результате интервалы W_{ℓ} будут разбиты на подынтервалы $W_{\ell,i}$, соответствующие непрерывным участкам кривых от одного пересечения до другого (или бесконечным участкам без пересечений). На прямых будут выделены отрезки, параметризованные интервалами $t \in T_m \subset \mathbb{R}$.



4. Определить, какие области D-разбиения лежат с каждой стороны от каждого участка кривых и отрезков. Последовательно сгруппировать участки кривых и отрезки, ограничивающие часть области D-разбиения с d корнями.

Результат алгоритма: упорядоченный набор кривых и отрезков (или интервалов), параметризованных интервалами $W_{\ell,i}$ и T_m , формирующий границы области D_d .

Учёт конечных предельных точек кривых на шаге 3 является существенным, так как позволяет вычислить разбиение особых прямых на отрезки, являющиеся границами разных областей D-разбиения.

В основном алгоритм применяется для нахождения области устойчивости D_n , т. е. при $d = n$. Поиск других областей D-разбиения может потребоваться при анализе многосвязной области локализации корней или если исходное множество локализации корней описывается объединением множеств, как указано в сноске 4 (см. с. 43).

Алгоритм 1 обобщается на случай нелинейной зависимости от параметров. В таком случае для его реализации необходимо получить явное решение основного уравнения D-разбиения $G(s_\ell(w), k_1, k_2) = 0_{\mathbb{C}}$ относительно исследуемых параметров в зависимости от значения параметра w . Возможно, это потребует перепараметризации или введения дополнительных параметров для описания ветвей кривых или дополнительных прямых. Кроме того, необходимо предоставить алгоритмы нахождения точек пересечения полученных кривых и прямых. По-видимому, получить такое решение даже в случае полиномиальной зависимости от k_1, k_2 является нетривиальной задачей, а выделение разрешимых случаев является интересным направлением исследований.

Далее приведена характеристика границ областей D-разбиения для кусочно-дробно-рациональных границ области локализации корней в ограниченном множестве.

2. КОНСТРУКТИВНОЕ D-РАЗБИЕНИЕ ДЛЯ ОБЛАСТИ ЛОКАЛИЗАЦИИ КОРНЕЙ С ДРОБНО-РАЦИОНАЛЬНОЙ ГРАНИЦЕЙ

Рассмотрим особенности реализации алгоритма 1 и его применимость. Сперва рассмотрим границу множества локализации корней Γ вида (14), состоящую из одной кривой: $\Gamma = \{s(w) \in \mathbb{C} : w \in W\}$. В общем случае полученные результаты верны для

каждого участка границы Γ_ℓ . Без ограничения общности в качестве искомой области D-разбиения далее будем рассматривать область устойчивости D_n .

Прежде всего, необходимо решить уравнения (15) относительно w . Если функция $s(w)$ представима в виде дробно-рациональной комплексной функции

$$s(w) = s_{\text{real}}(w) + j s_{\text{imag}}(w),$$

с дробно-рациональными функциями $s_{\text{real}}(w)$, $s_{\text{imag}}(w)$, то функции $P(s(w))$, $Q(s(w))$, $R(s(w))$ и, следовательно, $\text{Re}P(s(w))$ и т. д. также дробно-рациональные. В результате умножения на наименьшее общее кратное знаменателей функций $\text{Re}P(s(w))$, $\text{Re}Q(s(w))$, $\text{Re}R(s(w))$ (или $\text{Im}P(s(w))$, $\text{Im}Q(s(w))$, $\text{Im}R(s(w))$ для второго уравнения) систему уравнений (15) можно привести к такому же виду, как (9), с полиномами P_1 , P_2 , Q_1 , Q_2 , R_1 , R_2 , степень которых зависит как от степени исходного полинома G , так и от степеней числителя и знаменателя функции $s(w)$:

$$\begin{cases} k_1 P_1(w) + k_2 Q_1(w) + R_1(w) = 0, \\ k_1 P_2(w) + k_2 Q_2(w) + R_2(w) = 0. \end{cases} \quad (16)$$

Преобразование уравнения (15) к полиномиальной системе двух уравнений не однозначно. Аналогично случаю с переходом от анализа шуровских полиномов к гурвицевым, с подстановкой дробно-рациональной функции $s(w)$ можно сначала дополнительно умножить полином $G(s(w), k_1, k_2)$ на знаменатель функции $s(w)$ в степени n . Тем самым знаменатели из уравнений (15) будут исключены, так как функция $s(w)$ описывает параметризацию кривой и её знаменатель не обращается в нуль на интервале W . И только после этого преобразования надо разделить полученное полиномиальное уравнение на вещественную и мнимую части. В обоих случаях вычисление коэффициентов полиномов P_1, P_2 , и т. д. выполняется аналитически, подстановкой функции $s(w)$ с последующим выделением вещественной и мнимой частей. Этот способ выглядит предпочтительным, так как при операции выделения вещественной и мнимой частей комплексного полинома, описанной в предыдущем способе, приходится умножать числитель на комплексно-сопряжённый знаменатель, что повышает степень полиномов

вдвое. В свою очередь, степень числителя и знаменателя сложной функции $G(s(w), k_1, k_2)$ кратна степени исходной системы и степеням числителя и знаменателя функции $s(w)$.

Основное решение системы (16), как и решение системы (9) в случае $s(w) = -jw$, описывается одной дробно-рациональной функцией (на интервалах её непрерывности) и, возможно, особыми прямыми. Особые прямые соответствуют параметрам w , по аналогии с § 1 называемым критическими частотами⁵, которые определяются уравнением, аналогичным (11):

$$\det T(w) = P_1(w)Q_2(w) - Q_1(w)P_2(w) = 0. \quad (17)$$

Общее решение $k(w) = (k_1(w), k_2(w))$, аналогично формулам (13), выражается дробно-рациональными функциями

$$\begin{aligned} k_1(w) &= \frac{1}{\det T(w)} (R_2(w) Q_1(w) - \\ &\quad - R_1(w) Q_2(w)) = \frac{k_{1,\text{num}}(w)}{k_{1,\text{den}}(w)}, \\ k_2(w) &= \frac{1}{\det T(w)} (R_1(w) P_2(w) - \\ &\quad - R_2(w) P_1(w)) = \frac{k_{2,\text{num}}(w)}{k_{2,\text{den}}(w)}, \end{aligned} \quad (18)$$

$w \in W.$

Здесь индексами num и den обозначены полиномы в числителе и знаменателе соответственно.

В зависимости от контекста удобно рассматривать $k(w)$ вне особых частот либо как одну кривую, заданную общим выражением, либо как набор непрерывных кривых, заданных на открытых интервалах.

2.1. Прямые и пересечение с ними

Аналогично уравнению (9) для анализа асимптотической устойчивости, система уравнений (16) полиномиальная, и её решениями могут быть особые прямые; обозначим их так же, как прямые (12), с коэффициентами $a_i, b_i, c_i, i = 0, \dots, M$. К ним добавлена особая прямая с индексом $i = 0$, соответствующая условию понижению степени (8). Общее число корней зависит от конкретных

⁵ Иногда критическими частотами называются не сами корни w_i , а вычисленные в них функции $s(w_i)$, также называемые обобщёнными критическими частотами.

функций $G(\dots)$ и $s(w)$ и от степеней полиномов, образующих их. Критические частоты w_i определяются численно, из уравнения (17), при этом нужны только вещественные корни, принадлежащие интервалу W . В список критических попадают только те частоты w_i , при которых множество решений системы (16) не пусто.

Пересечение этих прямых с основной кривой D-разбиения (18) задаётся уравнением

$$\begin{aligned} &a_i (R_2(w)Q_1(w) - R_1(w)Q_2(w)) + \\ &+ b_i (R_1(w)P_2(w) - R_2(w)P_1(w)) + \\ &+ c_i (P_1(w)Q_2(w) - Q_1(w)P_2(w)) = 0, \end{aligned} \quad (19)$$

$i = 0, \dots, K.$

Полученное уравнение относительно w полиномиальное, и его вещественные корни можно вычислить явно, обозначим их как $w_m, m = 1, \dots$. Эти корни вместе с критическими частотами w_i разбивают интервал W на отрезки и интервалы, соответствующие простым, непрерывным частям границ D-разбиения, участкам основной кривой. Эти участки образуют основную, нетривиальную часть D-разбиения. Сами точки пересечения определяются из уравнения (18) как $k(w_m) = (k_1(w_m), k_2(w_m))$, они не только разбивают основную кривую на участки, но и разбивают особые прямые на отрезки или бесконечные интервалы (лучи).

2.2. Выделение отрезков на прямой

На плоскости параметров точки пересечения особых прямых между собой и с основной кривой определяют отрезки и интервалы, на которые разделяется каждая особая прямая. Рассмотрим прямую на плоскости, заданную уравнением вида (12), где числа a и b не равны нулю одновременно:

$$ak_1 + bk_2 + c = 0. \quad (20)$$

Опишем связь между алгебраическим и параметрическим представлениями прямой:

$$\begin{aligned} k(t) &= t d + p, \quad -\infty < t < +\infty, \\ p, d &\in \mathbb{R}^2, \quad d \neq 0. \end{aligned} \quad (21)$$

Из уравнения (20) следует выражение (21) при выборе

$$a = d_2, \quad b = -d_1, \quad c = d_1 p_2 - d_2 p_1. \quad (22)$$

Это представление однозначно с точностью до множителя (ненулевого).

Обратно, из формулы (21) можно получить вид (20). Ему соответствует любая пара из направля-



ющей d и точки p , удовлетворяющих независимой системе уравнений

$$\begin{cases} ad_1 + bd_2 = 0, \\ ap_1 + bp_2 + c = 0. \end{cases} \quad (23)$$

В качестве направляющей можно взять $d = (-b, a)^T$, она определена с точностью до ненулевого множителя. Второе уравнение в системе (23) совпадает с уравнением (20), и в качестве p выбирается любая точка на прямой, удовлетворяющая уравнению (20), это условие также очевидно из того, что точка $k(0) = p$ принадлежит прямой. Например, можно взять точку пересечения прямой с осью абсцисс $(-c/a, 0)$, если $a \neq 0$, или с осью ординат $(0, -c/b)$, если $b \neq 0$. Можно взять ближайшую к началу координат точку с координатами

$$p_1 = -\frac{ac}{a^2 + b^2}, p_2 = -\frac{bc}{a^2 + b^2}. \quad (24)$$

Если известна точка k на прямой, можно сразу выбрать $p = k$. Так, если известны все точки пересечения прямой (20) с другими прямыми или с основной кривой (кривыми) D-разбиения, то можно вместо точки (24) взять точку с минимальной (или максимальной) абсциссой или ординатой, а направление d выбрать таким образом, чтобы все интересующие отрезки и интервалы соответствовали интервалам с неотрицательным t . Можно при этом нормировать направляющий вектор d так, чтобы параметры всех интересующих отрезков попадали в интервал $t \in [0; 1]$. Это удобно в случае априорной локализации области устойчивости, описанной в § 3.

Для параметризации (21) представляет интерес определение параметра t по точке на прямой, так называемая инверсия (*inversion*). В частности, для алгоритма 1 требуется определить отрезки прямой между точками пересечения с другими прямыми или с основной кривой D-разбиения. Пусть точка $k = (k_1, k_2)^T$ лежит на прямой, заданной формулой (21). Значение параметра можно получить из уравнения для одной из координат: $t^* = (k_1 - p_1) / d_1$, если $d_1 \neq 0$, или $t^* = (k_2 - p_2) / d_2$, если $d_2 \neq 0$, либо из выражения

$$t^* = \frac{(k_1 - p_1)d_1 + (k_2 - p_2)d_2}{d_1^2 + d_2^2} = \frac{(k - p)^T d}{\|d\|^2}. \quad (25)$$

Если точка k получена численно и не лежит на прямой, формула (25) соответствует ближайшей к

k точке на прямой, которая является её евклидовой проекцией:

$$\begin{aligned} k^* &= t^* d + p = \frac{(k - p)^T d}{\|d\|^2} d + p = \\ &= p + \frac{dd^T}{d^T d} (k - p) = \left(I - \frac{dd^T}{d^T d} \right) p + \frac{dd^T}{d^T d} k = \\ &= k + \left(I - \frac{dd^T}{d^T d} \right) (p - k), \end{aligned} \quad (26)$$

где I – единичная матрица размера 2×2 , а $\frac{dd^T}{d^T d}$ – проектор на прямую.

Осталось рассмотреть точки пересечения двух прямых. Пусть первая из них задана алгебраически, уравнением (20), а вторая – параметрически, формулой (21). Если они пересекаются и не совпадают, то они не параллельны, и $(a, b)d = ad_1 + bd_2 \neq 0$. Здесь запись $(a, b)d$ обозначает матричное произведение вектора-строки (a, b) и вектора-столбца d , т. е. стандартное скалярное произведение векторов $(a, b)^T$ и d . Тогда точка пересечения k^* находится из подстановки формулы (21) в уравнение (20) и определяется так:

$$\begin{aligned} t_2^* &= -\frac{c + ap_1 + bp_2}{ad_1 + bd_2} = -\frac{c + (a, b)p}{(a, b)d}, \\ k^* &= t_2^* d + p = -\frac{c + (a, b)p}{(a, b)d} d + p. \end{aligned} \quad (27)$$

Здесь t_2^* относится к параметризации второй прямой. А чтобы найти значение параметра t_1^* , соответствующее первой прямой, надо рассмотреть её параметризацию вида (21), подставленную в уравнение второй прямой вида (20).

3. ЛОКАЛИЗОВАННОЕ D-РАЗБИЕНИЕ И ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТОЧКИ

На практике D-разбиение осуществляется в ограниченной замкнутой области (компакте), например, в прямоугольнике $K = [k_1, \bar{k}_1] \times [k_2, \bar{k}_2]$. Будем называть её областью локализации или областью априорной локализации, а D-разбиение в ней – локализованным D-разбиением. Конечно, в результате локализованного D-разбиения будет получена только та часть области устойчивости, которая лежит в области локализации. Однако во многих случаях область локализации содержит область устойчивости целиком, так как последняя

часто ограничена и мала. Иногда можно заранее определить, что вне области \mathbf{K} полином заведомо неустойчив, например, используя необходимые критерии устойчивости; к примеру, для того, чтобы полином был гурвицевым, все его коэффициенты должны быть одного знака (критерий Стодолы) и пр. [22].

Границы прямоугольника \mathbf{K} – вертикальные и горизонтальные отрезки, для них уравнение (19) упрощается, ср. с уравнением для одной из компонент (18):

$$R_2(w)Q_1(w) - R_1(w)Q_2(w) = x(P_1(w)Q_2(w) - Q_1(w)P_2(w)), \quad (28)$$

$$x = \underline{k}_1, \bar{k}_1,$$

$$R_1(w)P_2(w) - R_2(w)P_1(w) = y(P_1(w)Q_2(w) - Q_1(w)P_2(w)), \quad (29)$$

$$y = \underline{k}_2, \bar{k}_2.$$

Решая каждое из этих уравнений, надо проверить, попадает ли вторая координата в нужный интервал, т. е. пересекается ли основная кривая с отрезком на прямой. Если корни первого уравнения равны w_m , то надо выбрать только те из них, для которых $k_2(w_m) \in [\underline{k}_2, \bar{k}_2]$, и наоборот. Исходно для поиска пересечений основной кривой с особыми прямыми подобная проверка не требовалась.

Пересечение особых прямых с границами области \mathbf{K} делается с учётом их параметризации

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} \bar{k}_1 - \underline{k}_1 \\ 0 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} \underline{k}_1 \\ \underline{k}_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \bar{k}_1 - \underline{k}_1 \\ 0 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} \underline{k}_1 \\ \bar{k}_2 \end{pmatrix}, \\ & \begin{pmatrix} 0 \\ \bar{k}_2 - \underline{k}_2 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} \underline{k}_1 \\ \underline{k}_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \bar{k}_2 - \underline{k}_2 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} \bar{k}_1 \\ \underline{k}_2 \end{pmatrix}, \quad (30) \\ & t \in [0, 1]. \end{aligned}$$

При применении формулы (27) для расчёта пересечения отрезков (30) с особыми прямыми в форме (20), дополнительно проверяется, что параметр $t_2^* \in [0; 1]$, в противном случае пересечения особой прямой с отрезком нет.

Локализация D-разбиения в ограниченном множестве удобна тем, что упрощает изучение предельных точек. Далее, кроме леммы 4, рассмотрена отдельная основная кривая $k(w) = (k_1(w), k_2(w))$. Пусть на интервале W обнаружены соседние критические частоты w_i, w_{i+1} . На открытом интервале (w_i, w_{i+1}) между критическими частотами кривая непрерывна. Рассмотрим предельные точки этой кривой на этом интервале и

любой конец отрезка w_c . Левому концу $w_c = w_i$ соответствует правосторонний предел, а правому $w_c = w_{i+1}$ – левосторонний. Имеют место два случая.

Лемма 1. Если правосторонний (левосторонний) предел $\lim_{w \rightarrow w_c} k(w) = k_c$ существует, то предельная точка $k_c = (k_{c,1}, k_{c,2})$ лежит на особой прямой, соответствующей критической частоте w_c .

Доказательство. Из прямой подстановки в систему (16) решения (18) следует, что внутри отрезка (w_i, w_{i+1}) оба уравнения принимают вид тождества $k_1(w)P(w) + k_2(w)Q(w) + R(w) = R(w) \frac{\det T(w)}{\det T(w)} - R(w) = 0$, $w \neq w_c$, поскольку $\det T(w) \neq 0$. В пределе при $w \rightarrow w_c$ тождество остаётся верным исходя из непрерывной зависимости (11) от k , в частности, все непрерывно зависящие от w члены $k_{c,1}P(w_c)$, $k_{c,2}Q(w_c)$ и $R(w_c)$ будут удовлетворять соответствующему равенству. Таким образом, точка k_c удовлетворяет уравнению (11), т. е. множество решений не пусто при $w = w_c$ и ранг расширенной матрицы не больше ранга матрицы $T(w_c)$. Так как по предположению полиномы P, Q, R не имеют общих корней, полиномы $P_1, P_2, Q_1, Q_2, R_1, R_2$ также не имеют общих корней, т. е. матрица $T(w_c)$ – не нулевая. При этом $\det T(w_c) = 0$, следовательно, ранг матрицы $T(w_c)$ равен 1, а значит, ранг расширенной матрицы тоже должен быть равен 1. В результате система (16) при $w = w_c$ имеет своим решением особую прямую, которой принадлежит k_c . ♦

Из леммы 1 следует, что можно доопределить кривую в точке w_c значением k_c , сохранив непрерывность кривой и замкнув интервал её определения на соответствующем конце.

Далее рассмотрим для определённости левый конец отрезка, $w \rightarrow w_i$, и предел справа к нему, $w \rightarrow w_i +$. Следующая лемма характеризует бесконечные участки кривых вне области \mathbf{K} .

Лемма 2. Если правосторонний предел $\lim_{w \rightarrow w_i+} k(w)$ не существует и для некоторого $w_0 \in (w_i, w_{i+1})$ точка $k(w_0) \in \mathbf{K}$, то существует $w_c \in (w_i, w_0]$ такая, что $k(w_c) \in \mathbf{K}$, при этом $k(w) \notin \mathbf{K}$ для всех $w \in (w_i, w_c)$.

Доказательство. Следует из непрерывности. По построению внутри отрезка (w_i, w_{i+1}) знак опреде-



лителя $\det T(w)$ постоянный. Найдём все точки пересечения кривой $k(w)$, $w \in (w_i, w_{i+1})$, с границами области \mathbf{K} , например из уравнений (28), (29), и выберем среди них минимальное значение параметра, обозначим его как w_c . Существование минимума следует из компактности области \mathbf{K} и непрерывности функции $k(w)$. Точка $k(w_c)$ действительно существует, поскольку $k(w_0) \in \mathbf{K}$, а предела $k(w)$ при $w \rightarrow w_i +$ нет. Функция $k(w)$ дробно-рациональная, из этого следует неограниченное возрастание $\|k(w)\|$ при $w \rightarrow w_i +$, и для достаточно близкого к w_i значения $w_{i+} < w_c$ точка $k(w_{i+}) \notin \mathbf{K}$. На интервале (w_{i+}, w_c) функция $k(w)$ непрерывна и не пересекается с границей области \mathbf{K} , поэтому участок кривой $k(w)$ также лежит вне области \mathbf{K} для всех $w \in (w_i, w_c)$. ♦

Очевидно, что лемма 2 имеет место для обоих концов отрезка или интервала (w_i, w_{i+1}) . Отметим, что в результате применения лемм 1 и 2 для разбиения внутри области \mathbf{K} достаточно рассматривать отрезок $[w_c, w_d] \subset (w_i, w_{i+1})$, при этом w_c, w_d определяются алгоритмически. Для проверки пересечения участка границы с прямоугольным множеством \mathbf{K} достаточно найти корни четырёх полиномов (28), (29).

Для полноты надо рассмотреть бесконечные интервалы параметризации и их предельные точки. Пусть интервал W после разбиения критическими частотами включает бесконечный интервал (w_i, ∞) .

Лемма 3. Если предел $\lim_{w \rightarrow \infty} k(w)$ не существует, то для дробно-рациональной функции следует, что порядок числителя больше порядка знаменателя, $\|k(w)\| \rightarrow \infty$, и будет верно утверждение, аналогичное лемме 2. А именно, если для некоторого $w_0 \in (w_i, \infty)$ точка $k(w_0) \in \mathbf{K}$, то существует $w_c \geq w_0$ такое, что $k(w_c) \in \mathbf{K}$, при этом $k(w) \notin \mathbf{K}$ для всех $w > w_c$.

Доказательство леммы 3 повторяет доказательство леммы 2.

Наконец, случай существования предела на бесконечном интервале параметра характеризуется следующей леммой. В ней рассматривается участок кривой $\Gamma_i = \{s_i(w), w \in W_i\}$, на неограниченном участке (\dots, ∞) .

Лемма 4. Если предел $\lim_{w \rightarrow \infty} k_i(w)$ для участка кривой Γ_i существует и равен k_∞ , то либо предел

$\lim_{w \rightarrow \infty} s_i(w)$ существует и принадлежит кривой Γ либо предел $\lim_{w \rightarrow \infty} s_i(w)$ не существует, при этом точка k_∞ лежит на особой прямой, отвечающей условию понижения степени (8).

Доказательство. Согласно утверждению леммы, рассмотрим два случая.

1. Если предел $s_0 = \lim_{w \rightarrow \infty} s_i(w)$ существует, то он принадлежит замыканию Γ_i , поскольку $s_i(w) \in \Gamma_i$. В свою очередь, замыкание Γ_i является подмножеством всей границы Γ , так как граница замкнута.

2. Если предел $\lim_{w \rightarrow \infty} s_i(w)$ не существует, то в полярном представлении $s_i(w) = r(w)e^{j\phi(w)}$ функция $r(w) \rightarrow \infty$. при этом $s(w)$ является корнем полинома

(6). Разделим полином на s^n . Тогда коэффициенты функций $P(s)/s^n$ и пр. при параметрах k_1, k_2 и в свободном члене стремятся к коэффициентам полиномов P, Q, R при s^n , а остальные коэффициенты – к нулю. Для каждого $w \in W_i$ $s_i(w)$ является корнем уравнения $P(s)/s^n = 0$, и для предельной точки k_∞ выполняется уравнение понижения степени (8), т. е. k_∞ лежит на соответствующей ему особой прямой. ♦

Что касается самой предельной точки $s_\infty = \lim_{w \rightarrow \infty} s_i(w)$, если она существует, то она является точкой сопряжения участков границы локализации корней, т. е. либо принадлежит кривой $\Gamma_m, m \neq i$, либо является другим концом того же участка кривой Γ_i . При этом ей соответствует конечное значение параметра w (возможно, относящееся к другому участку кривой Γ_m и $s_\infty = s_m(w)$), так как все точки границы параметризованы по определению.

Леммы 1 и 4 характеризуют конечные предельные точки участков кривых. Они учитываются на шаге 3 алгоритма 1 при поиске точек пересечения. Строго говоря, в таких случаях кривая доопределяется в конечной предельной точке w_i – границе интервала, а для бесконечных предельных точек при $w \rightarrow \infty$ используется смена параметризации, см. доказательство теоремы 1 ниже. При проверке принадлежности предельной точки k особой прямой можно использовать, согласно формуле (26),

$$\text{расстояние от точки до прямой} \left\| \left(I - \frac{dd^T}{d^T d} \right) (p - k) \right\|.$$

Если это расстояние не превышает заданную точность, то предельная точка может считаться точ-

кой пересечения. Прямая, соответственно, разбивается этой точкой на две части параметром t , вычисляемым по формуле (25). Для проверки нахождения предельной точки на другой основной кривой, заданной дробно-рациональной функцией, используется алгебраическая форма этой кривой, и инверсия – восстановление параметра по точке на кривой, см. работу [23]. Разбиение можно сделать и другим способом, используя тот факт, что кривая задана системой уравнений. Для этого надо подставить в одно из уравнений (16) второй основной кривой значения компонент предельной точки k (первой основной кривой) и разрешить его относительно w . Затем подставить найденные корни во второе уравнение второй основной кривой и выбрать те из них, для которых при тех же компонентах k будет выполнено равенство. Тем самым будет найдено и значение параметра предельной точки первой основной кривой на второй основной кривой.

С помощью лемм можно полностью характеризовать границы областей локализованного D-разбиения полинома (6) при кусочно-дробно-рациональной границе области локализации корней. Предполагается, что граница области локализации K состоит из конечного числа участков дробно-рациональных кривых.

Теорема 1. *Границы областей D-разбиения, локализованного в компактном множестве K , состоят из конечного числа отрезков, участков границ области локализации ∂K и участков дробно-рациональных кривых, определённых на конечных замкнутых интервалах параметров.*

Доказательство. Для линейной зависимости полинома от параметров D-разбиение описывается особыми прямыми и дробно-рациональными кривыми вида (13), определёнными на открытых (если конец интервала соответствует критической частоте или не ограничен) или замкнутых (если кривая соответствует участку границы, определённой на замкнутом интервале) числовых интервалах. Замкнутость каждого конца интервала рассматривается независимо, поэтому интервал может быть замкнут с одной стороны и открыт с другой. Из-за компактности множества K части особых прямых, принадлежащие K , являются отрезками, их число конечно по предположению о дробно-рациональной границе K . Если участок границы области локализации корней состоит из одной точки, то он отображается либо в особую прямую, либо в точку на плоскости параметров, которая является вырожденным отрезком. Если односвязная компонента j области D_i (обозначим её как $D_{i,j}$) исходного, не локализованного D-разбиения не лежит целиком внутри или вне K , то в локализованное D-разбиение войдёт область $D_{i,j} \cap K$, часть границы которого в общем случае является границей K . При

этом число участков каждой основной кривой вне и внутри K конечно по предположению о дробно-рациональной границе K . Что касается оставшихся частей границы, т. е. участков дробно-рациональной кривой, определённых на интервалах с хотя бы одним открытым или неограниченным концом, то для неограниченных $k(w)$ имеют место лемма 2 или лемма 3, согласно которым внутри K соответствующий конец подынтервала будет замкнут.

Рассмотрим участок дробно-рациональной кривой, определённый на интервале W с конечным открытым концом w_2 и существующим пределом $k(w)$. Для определённости рассмотрим правый конец интервала $W=(w_0, w_2)$ и предел $\lim_{w \rightarrow w_2^-} k(w) = k_2$. Имеют место два случая. Если $k_2 \in K$, то, по лемме 1, дробно-рациональную кривую (13) можно доопределить в точке w_2 значением k_2 . Если $k_2 \notin K$, то, следуя доказательству леммы 2, из-за компактности множества K внутри интервала будет выделен подынтервал $(w_0, w_1]$ с замкнутым правым концом такой, что $k(w_1) \in K$, и $k(w) \notin K, w \in (w_1, w_2)$. Тем самым правый конец интервала, соответствующий участку кривой – границы $k(w)$, лежащему в области K , будет замкнут. Аналогичное верно для левого открытого конца интервала.

Наконец, надо рассмотреть случай с неограниченным интервалом, например $[w_1, \infty)$, и существующим пределом $\lim_{w \rightarrow \infty} k(w) = k_\infty$. В этом случае применимо изменение параметризации, см. например, работу [24]. Без ограничения общности левый конец замкнут, так как будут верны указанные выше случаи. Неограниченный снизу интервал рассматривается аналогично. Неограниченный с обеих сторон интервал $(-\infty, +\infty)$ разбивается на три интервала, например, $(-\infty, -1], [-1, 1], [1, \infty)$. Если $k_\infty \notin K$, то, аналогично предыдущему случаю с открытым концом интервала, внутри области K лежит участок кривой $k(w)$ с подынтервалом $[w_1, w_2]$, у которого правый конец замкнутый. Если $k_\infty \in K$, то выберем $w_0 < w_1$, например, $w_0 = w_1 - 1$. При введении параметра $u = 1/(w - w_0), u \in (0, 1]$ дробно-рациональная кривая $k(w)$ будет иметь дробно-рациональную параметризацию $k_u(u) = k(w_0 + 1/u)$, которую можно доопределить на $u=0$ предельным значением k_∞ . Таким образом, все участки границ локализованного D-разбиения, которые определялись кривой (13), будут определены на конечных замкнутых интервалах. ♦

С учётом предположения о дробно-рациональной границе области локализации K , границы областей локализованного D-разбиения являются либо отрезками, либо участками дробно-рациональ-



ных кривых, определённых на конечных замкнутых интервалах (отрезках), и их число конечно.

4. РЕАЛИЗАЦИЯ КОНСТРУКТИВНОГО D-РАЗБИЕНИЯ

4.1. Пересечение двух основных кривых

Если граница локализации корней Γ описывается несколькими функциями $s_\ell(w) \in \mathbb{C}: w \in W_\ell$, $\ell = 1, 2, \dots$, то необходимо найти все точки их попарных пересечений. Рассмотрим две основные кривые и соответствующие им функции, обозначим их как $k^a(w)$, $w \in W$, и $k^b(u)$, $u \in U$:

$$k_1^a(w) = \frac{k_{1,\text{num}}^a(w)}{k_{1,\text{den}}^a(w)}, k_2^a(w) = \frac{k_{2,\text{num}}^a(w)}{k_{2,\text{den}}^a(w)}$$

и

$$k_1^b(u) = \frac{k_{1,\text{num}}^b(u)}{k_{1,\text{den}}^b(u)}, k_2^b(u) = \frac{k_{2,\text{num}}^b(u)}{k_{2,\text{den}}^b(u)}. \quad (31)$$

Их пересечение описывается системой двух дробно-рациональных уравнений, которые можно свести к системе полиномиальных уравнений:

$$\begin{cases} k_{1,\text{num}}^a(w) k_{1,\text{den}}^b(u) = k_{1,\text{num}}^b(u) k_{1,\text{den}}^a(w), \\ k_{2,\text{num}}^a(w) k_{2,\text{den}}^b(u) = k_{2,\text{num}}^b(u) k_{2,\text{den}}^a(w), \end{cases} \quad w \in W, u \in U.$$

Среди решений используются только те, которые не соответствуют особым прямым, т. е. $k_{1,\text{den}}^a(w) \neq 0$, $k_{1,\text{den}}^b(u) \neq 0$. Эту систему двух полиномиальных уравнений можно решать численно, например, запуская метод Ньютона вблизи решения, или использовать разбиение плоскости параметров k_1, k_2 [25], или разбивать пространство аргументов [24], или решать алгебраическими методами, например, с помощью результатов. Подчеркнём, что, как и в случае пересечения основной кривой и прямых численно определяются только значения параметров w, u , соответствующие пересечениям.

Напомним принцип использования результатов на примере решения системы из двух полиномов

$$p(w, u) = 0, q(w, u) = 0, \quad (32)$$

зависящих от двух параметров, см. например, монографию [20]. Для этого один параметр выносится в мономы, а второй остаётся в коэффициентах полинома от первого параметра. Пусть максимальная степень этих полиномов по u равна m , т. е.

хотя бы один из полиномов $p_m(w), q_m(w)$ не равен тождественно нулю:

$$p(w, u) = p_m(w)u^m + p_{m-1}(w)u^{m-1} + \dots + p_1(w)u + p_0(w) = 0, \quad (33)$$

$$q(w, u) = q_m(w)u^m + q_{m-1}(w)u^{m-1} + \dots + q_1(w)u + q_0(w) = 0. \quad (34)$$

Далее из коэффициентов $p_i(w), q_i(w)$ составляется матрица $R(w)$ размера $n \times n$, называемая результатом. Есть разные способы её составления, самые известные – это результаты Безу и Сильвестра. Ключевой результат состоит в том, что два полинома (31) имеют общие корни – по u – тогда и только тогда, когда вырождается определитель матрицы $R(w)$, т. е. выполнено некоторое условие на коэффициенты полиномов $p_i(w), q_i(w)$. Общий корень полиномов означает, что существует такое значение u , для которого равенства (32) и (33) выполнены. При этом коэффициенты полиномов отвечают какому-то конкретному значению w , т. е. найдено решение системы уравнений. Таким образом, необходимо сначала решить уравнение

$$\det R(w) = 0, \quad (35)$$

т. е. найти корни w_j этого полинома, исключив из них корни полинома $k_{1,\text{den}}^a(w)$. Затем надо подставить каждый из найденных корней в коэффициенты полиномов (33), (34), вычислить уже их корни $u_{p,i}(w_j), u_{q,i}(w_j)$, а после выделить среди них совпадающие корни, которые при этом не являются корнями полинома $k_{1,\text{den}}^b(u)$. Полученные пары $(u_{p,i}, w_j)$ дают решение системы (32). По построению они являются решениями уравнений (31), и тем самым получены значения параметров кривых, соответствующих точкам пересечения. При использовании альтернативных способов нахождения точек пересечений (например, на плоскости k) необходимо решать задачу инверсии – восстановления параметров w, u по точке (p, q) . Это также можно сделать с помощью результатов, см. работу [23].

Указанная процедура позволяет найти все решения системы (31). У этого подхода есть две особенности: первая состоит в увеличении сложности, так как полином (35) имеет степень порядка m^2 . Для вычисления его коэффициентов желательно использовать точные, алгебраические промежу-

точные вычисления. Процедуру можно дополнить уточняющим решением системы (31) или (32) методом Ньютона, используя полученную пару (u, w) как начальную точку.

Вторая особенность состоит в том, что для применения результатов полиномы должны быть независимыми, т. е., в частности, не иметь общих множителей, их коэффициенты не должны быть линейно зависимыми и пр. Эти случаи соответствуют вырождению результата из-за структуры полиномов $p()$, $q()$ и зависимости их коэффициентов от w . В этих случаях при любых значениях w уравнение (35) превращается в тождество и не позволяет найти отдельные w . Алгебраически это соответствует бесконечному числу решений системы (32), т. е. наложению дробно-рациональных кривых $k^a(w)$, $k^b(u)$ друг на друга, или множеству решений, не зависящих от одного из параметров, например, $(w, 0)$ для любого w . Последний случай соответствует общему корню числителя и знаменателя $k_1^a(w)$, $k_2^a(w)$, который должен быть сокращён при записи кривых. Как правило, в результате D-разбиения получаются основные кривые общего положения, и подход с помощью результатов успешен. Важное исключение – задача поиска самопересечения основной кривой, для решения которой используются разные параметризации одной и той же кривой.

4.2. Самопересечение основной кривой

Последним компонентом для описания участков границ D-разбиения являются точки самопересечения основной кривой. Дробно-рациональная кривая (18) может пересекаться сама с собой, что разбивает плоскость на дополнительные области. Точки самопересечения удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} k_1(w) = k_1(u), \\ k_2(w) = k_2(u), \\ w \neq u. \end{cases}$$

Эта система сводится к системе полиномиальных уравнений

$$\begin{cases} k_{1,num}(w)k_{1,den}(u) = k_{1,num}(u)k_{1,den}(w), \\ k_{2,num}(w)k_{2,den}(u) = k_{2,num}(u)k_{2,den}(w), \\ w \neq u. \end{cases}$$

Проблему создаёт условие неравенства параметров, так как система имеет тривиальное решение $w = u$. Это делает невозможным использование результатов, описанное в п. 4.1, так как они

вырождаются. Следуя изложенному в работе [25], тривиальное решение можно исключить явно, записав уравнение так называемых сокращённых разностей (*reduced differences*):

$$\begin{cases} p(w, u) = \frac{(k_{1,num}(w) k_{1,den}(u))}{w-u} - \frac{(k_{1,num}(u) k_{1,den}(w))}{w-u} = 0, \\ q(w, u) = \frac{(k_{2,num}(w) k_{2,den}(u))}{w-u} - \frac{(k_{2,num}(u) k_{2,den}(w))}{w-u} = 0. \end{cases} \quad (36)$$

Полученная система решается теми же методами, что и в п. 4.1. В работе [25] предложен способ решения этой системы на плоскости параметров p , q . Для формирования редуцированных полиномов используется запись исходных полиномов в базисе полиномов Бернштейна, также требуется решить задачу восстановления параметров w , u по точке пересечения.

Иногда оказывается, что полиномы $k_1(w)$, $k_2(w)$ содержат только чётные или только нечётные степени w , и редуцирования системы (36) недостаточно. В этом случае кривая оказывается кратной самой себе, а система имеет дополнительное решение $w = -u$. Его также надо исключить, дополнительно разделив систему (36) на член $w+u$. Это эквивалентно исключению решений $w^2 = u^2$.

Ситуации с чётным и нечётными функциями $k_1(w)$, $k_2(w)$ часто встречаются при анализе устойчивости полиномов с вещественными коэффициентами, с симметричной относительно вещественной оси областью локализации корней \mathbf{D} . Это связано с тем, что при указанных условиях корни полинома комплексно-сопряжённые, и точке k на границе областей D-разбиения соответствуют два корня на границе $\partial\mathbf{D}$. Этим корням соответствуют два значения параметров, допустим, w_1 и w_2 . Если функция $s(w)$ обладает свойством сопряжённости $s(-w) = \overline{s(w)}$, как в формуле (7) или в примере 1 ниже, то эти параметры явно связаны: $w_2 = -w_1$. В таком случае функция $k(w)$ чётная и, так как она дробно-рациональная, её числитель и знаменатель содержат члены, зависящие от чётных степеней w , что позволяет упростить вычисления, понизив степень полинома вдвое заменой $v = w^2$.



4.3. Определение соседних областей D-разбиения

Для построенных участков границы области устойчивости, определяемых частями основной кривой или отрезков, на шаге 4 алгоритма 1 необходимо определить области D-разбиения, разделяемые этим участком (отрезком). Для основной кривой D-разбиения можно использовать классическое правило штриховки [7]: так как известно направление нормали к границе Γ внутрь области локализации корней, и по формуле основной кривой (18), как по отображению $w \rightarrow k$, определять нормаль к кривой в сторону области с большим числом устойчивых корней. Для отрезков и прямых, ограничивающих область устойчивости, такого правила нет.

Предлагается численно определять число устойчивых корней по разные стороны от отрезков или кривых: отступив на небольшую величину в обе стороны вдоль нормали от произвольной точки $k_\ell(w_0)$, $w_0 \in W_\ell$, на отрезке или кривой $k_\ell(w_0)$, где w_0 – внутренняя точка интервала W_ℓ , например, его середина. В качестве нормали для участка кривой можно взять вектор $(k'_2(w), -k'_1(w))$, ортогональный касательной $k'(w)$, а для отрезка прямой – вектор $(p_2, -p_1) = (a, b)$, ортогональный направляющей. Можно использовать рандомизированные алгоритмы, в которых случайно выбирается как параметр $w \in W_\ell$, так и величина отступа – например, по распределению Лапласа.

Другой вариант – использовать одномерное D-разбиение вдоль прямой нормали, причём достаточно проверить число корней только на участках прямой, прилегающих к границе.

5. ПРИМЕРЫ

Продemonстрируем конструктивное D-разбиение и его приложения на примерах.

Пример 1 [26, с. 77]. Рассмотрим систему непрерывного времени с передаточной функцией $\frac{(s-1)(s-2)}{(s+1)(s^2+s+1)}$, замкнутую ПИ-регулятором $k_1 + \frac{k_2}{s}$.

Характеристический полином замкнутой системы имеет вид:

$$G(s, k_1, k_2) = k_1 s(s-1)(s-2) + k_2 (s-1)(s-2) + s(s+1)(s^2+s+1). \quad (37)$$

Потребуем, чтобы замкнутая система имела степень устойчивости σ . Тогда граница локализации корней описывается функцией $s(w) = -\sigma + jw$. Выберем $\sigma=0,2$. Поскольку полином (37) имеет вещественные коэффициенты, достаточно взять верхнюю часть грани-

цы, $W=[0, \infty)$. Схематично области D-разбиения, полученные с помощью прямого перебора параметров, изображены на рис. 1, а.

Условие понижения степени имеет вид (при s^4): $0 \cdot k_1 + 0 \cdot k_2 + 1 = 0$. Оно не имеет решения.

Уравнение (37) после подстановки $s(w)$ и разделения на вещественную и мнимую части принимает вид:

$$k_1(3,6w^2 - 0,528) + k_2(-w^2 + 2,64) + w^4 + 1,04w^2 - 0,1344 = 0, \quad (38)$$

$$k_1(-w^3 + 3,32w) + k_2(-3,4w) - 1,2w^3 + 0,408w = 0.$$

Его решение определяет основную кривую $k(w)$, $w \in [0, \infty)$, с компонентами

$$k_1(w) = \frac{4,6w^4 - 7,112w^2 + 0,62016}{-w^4 - 6,28w^2 - 6,9696},$$

$$k_2(w) = \frac{-w^6 + 8,68w^4 - 5,4208w^2 - 0,230784}{-w^4 - 6,28w^2 - 6,9696}.$$

По сравнению с выражениями (13), в них сокращён общий множитель w в числителе и знаменателе. Определитель (17) имеет вид $-(w^4 + 6,28w^2 + 6,9696)w$. Он имеет единственный вещественный корень $w_0=0$. Отметим, что пример удовлетворяет условиям, указанным в конце п. 4.2, и в результате разделения комплексного уравнения на два вещественных одно из них будет содержать только чётные степени w , а второе – только нечётные степени w . При этом функция $k(w)$ содержит только чётные степени, и вместо неё можно было рассматривать эквивалентную запись кривой с дробно-рациональными функциями меньшего порядка:

$$k_1(v) = \frac{4,6v^2 - 7,112v + 0,62016}{-v^2 - 6,28v - 6,9696},$$

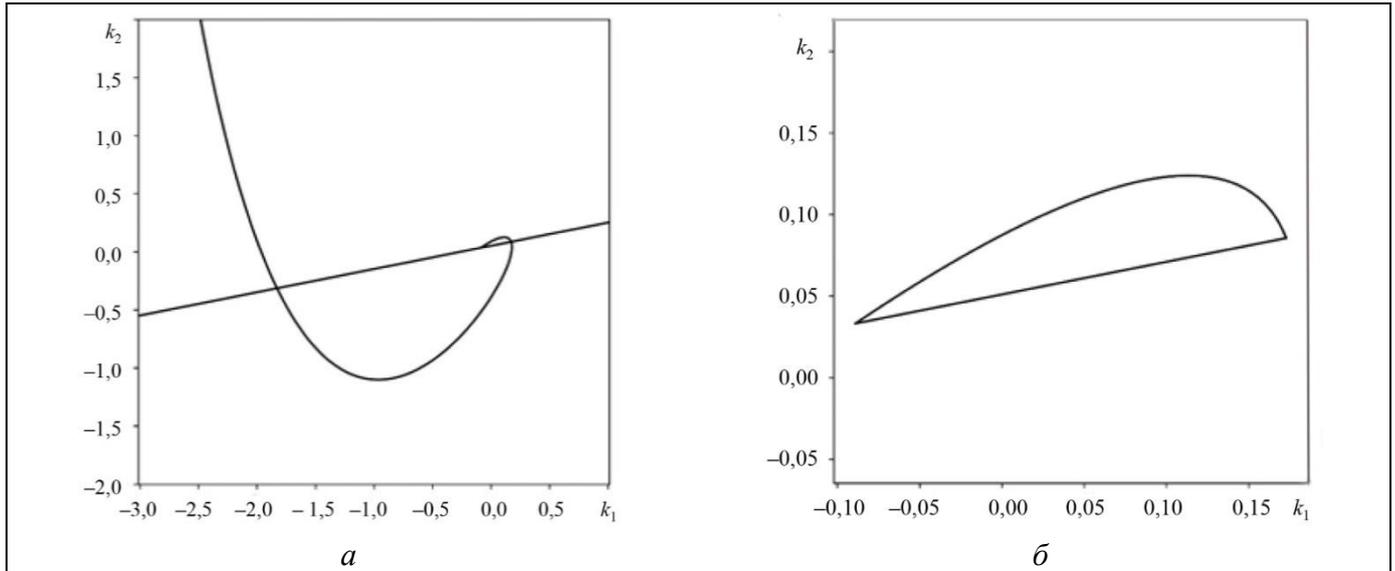
$$k_2(v) = \frac{-v^3 + 8,68v^2 - 5,4208v - 0,230784}{-v^2 - 6,28v - 6,9696}, \quad v \in [0, \infty).$$

Далее для простоты рассмотрим исходные параметры w . Критической частоте $w_0=0$ соответствует единственная особая прямая, отвечающая уравнению (38):

$$-0,528k_1 + 2,64k_2 - 0,1344 = 0$$

с параметризацией $p+td$, где $p=(-0,00979021; 0,04895105)^T$, $d=(-2,64; -0,528)^T$. D-разбиение приведено на рис. 2, а.

Основная кривая пересекается с особой прямой в двух точках $k_{(1)}=(0,17279287; 0,08546766)$, $k_{(2)}=(-1,82840784; -0,31477248)$, соответствующих значениям параметров $w_1=0,70951628$, $w_2=2,70323801$, они вычислены согласно п. 2.1. Самопересечений основной кривой нет. Точкам w_1, w_2 соответствуют значения параметров $t_1=-0,06916025$, $t_2=0,68887031$ на прямой.


 Рис. 2. *a* – D-разбиение для примера 1, *б* – область устойчивости полинома

У основной кривой есть предельная точка $k_{(0)} = k(0) = \begin{pmatrix} -0,62016 \\ -6,9696 \end{pmatrix} = -0,08898072; \begin{pmatrix} -0,230784 \\ -6,9696 \end{pmatrix} = 0,03311295$ при $w \rightarrow 0$, которой соответствует точка на прямой с $t_0 = 0,02999640$.

Область устойчивости ограничена одним участком основной кривой $k(w), w \in [0, w_1]$ и отрезком $p + td, t \in [t_1, t_0]$, см. рис. 2, б.

Пример 2 [10]. Рассмотрим характеристический полином дискретной системы $G_0(z, k_1, k_2) = z^n + k_1 z^{n-1} + (1 + \varepsilon) z^{n-2} + k_2$, D-разбиение для которого в статье [10] было получено с помощью тригонометрических функций. Устойчивость дискретного полинома эквивалентна гурвицевости полинома

$$G(s, k_1, k_2) = (s+1)^5 + (1+\varepsilon)(s-1)^2(s+1)^3 + k_1(s-1)(s+1)^4 + k_2(s-1)^5,$$

полученного из $G_0(z, k_1, k_2)$ преобразованием Мёбиуса. Граница области локализации корней (2) описывается функцией $s = jw, w \in [0, \infty)$ с учётом симметрии относительно вещественной оси. Выберем $n = 5$ и $\varepsilon = 0,1$.

С помощью прямого перебора параметров получены приблизительные границы областей D-разбиения на рис. 1, б.

Граница областей D-разбиения состоит из одной основной кривой

$$k_1(w) = \frac{-16,6 w^8 + 128,8 w^6 - 221,2 w^4 + 128,8 w^2 - 16,6}{8(w^8 - 6 w^6 + 6 w^2 - 1)},$$

$$k_2(w) = \frac{-0,2 w^8 - 0,8 w^6 - 1,2 w^4 - 0,8 w^2 - 0,2}{8(w^8 - 6 w^6 + 6 w^2 - 1)}$$

и двух особых прямых. Определитель (17) имеет вид $8w(w^8 - 6w^6 + 6w^2 - 1)$. Он имеет четыре неотрицательных вещественных корня $\{0; -1 + \sqrt{2}; 1; 1 + \sqrt{2}\}$, определяющих интервалы, на которых основная кривая непрерывна. Их них только нулевой корень соответствует первой особой прямой $-k_1 - k_2 + 2,1 = 0$ с параметризацией $dt + p$, где $p = (1,05; 1,05)$, $d = (1; -1)$. При этом существует предельная точка $k_{(0)} = (2,075; 0,025)$ при $w \rightarrow 0$, лежащая, по лемме 1, на этой прямой при $t = 1,025$.

Условию понижения степени отвечает вторая особая прямая $k_1 + k_2 + 2,1 = 0$, с параметризацией $dt + p$, где $p = (-1,05; -1,05)$, $d = (-1; 1)$. У основной кривой есть вторая предельная точка $k_{(\infty)} = (-2,075; -0,025)$ при $w \rightarrow \infty$, лежащая, согласно лемме 4, на особой прямой понижения степени при $t = 1,025$.

Выберем область локализации $\mathbf{K} = [-2,5; 2,5] \times [-1,5; 1,5]$. Основная кривая находится в области \mathbf{K} при $w \in [0; 0,40398478], [0,42121903; 0,98346081], [1,01681733; 2,37406180], [2,47534075, \infty)$. Особые прямые принадлежат области \mathbf{K} при $t \in [-0,45; 1,45]$, $t \in [-0,45; 1,45]$ соответственно (интервалы одинаковые для обеих прямых). Локализованное D-разбиение приведено на рис. 3, а.

На первом интервале $[0; 0,40398478]$ основная кривая начинается ($w \rightarrow 0$) на первой особой прямой и пересекает её при $w = 0,37796447$. На последнем интервале $[2,47534075, \infty)$ основная кривая пересекает вторую особую прямую при $w = 2,64575131$ и заканчивается на ней при $w \rightarrow \infty$.

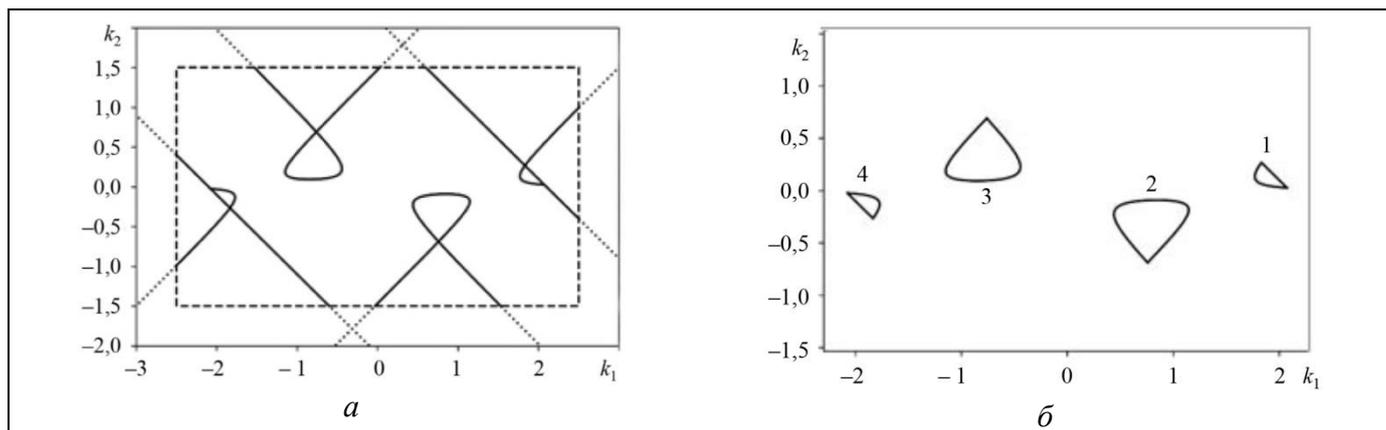


Рис. 3. а – D-разбиение для примера 2 и его локализация в прямоугольнике, б – компоненты области устойчивости

На интервалах $[0, 42121903; 0, 98346081]$ и $[1, 01681733; 2, 37406180]$ кривая пересекает саму себя при $w=0, 42972375$ и $0, 96431209$ (первое самопересечение), а также при $w=1, 03700867$ и $2, 32707640$ (второе самопересечение).

Итого область устойчивости состоит из четырёх компонент, см. рис. 3, б:

1) из участка первой особой прямой при $t \in [1, 025; 1, 45]$ и участка основной кривой при $w \in [0; 0, 37796447]$,

2) участка основной кривой при $w \in [0, 42972375; 0, 96431209]$,

3) участка основной кривой при $w \in [1, 03700867; 2, 32707640]$,

4) участка второй особой прямой при $t \in [1, 025; 1, 45]$ и участка основной кривой при $w \in [2, 64575131, \infty)$.

Последний участок кривой можно записать с изменённой параметризацией, см. доказательство теоремы 1, как $k_u(u) = k_\ell(1/u)$, $u \in [0; 0, 37796447]$, при этом значение в $u = 0$ определено и совпадает с $k_{(\infty)}$:

$$k_{u,1}(u) = \frac{16,6 u^8 - 128,8 u^6 + 221,2 u^4 - 128,8 u^2 + 16,6}{8(u^8 - 6 u^6 + 6 u^2 - 1)},$$

$$k_{u,2}(u) = \frac{0,2 u^8 + 0,8 u^6 + 1,2 u^4 + 0,8 u^2 + 0,2}{8(u^8 - 6 u^6 + 6 u^2 - 1)}.$$

Отметим, что полученная параметризация совпадает с исходной параметризацией по w с точностью до знака, а интервал совпадает с интервалом первого участка. Это связано с симметрией исходного множества локализации корней дискретной системы в виде единичного круга и его параметризации. ♦

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Для полинома, линейно зависящего от двух параметров, получено явное описание границ каждой

из областей D-разбиения, в том числе области устойчивости, с помощью параметризации кривых и отрезков на плоскости параметров. Устойчивость полинома понимается в обобщённом смысле: все его корни лежат в заданном подмножестве комплексной плоскости – множестве локализации корней, которое может отличаться от левой полуплоскости. Предложен метод конструктивного D-разбиения, включающий алгоритм нахождения границы всех компонент области устойчивости, без лишних участков. Если граница множества локализации корней описывается кусочно-дробно-рациональной кривой, то граница области устойчивости также является набором конечного числа участков дробно-рациональных кривых и отрезков. При этом участки дробно-рациональных кривых определены на замкнутых конечных интервалах параметров. Полученные результаты применяются для аппроксимации области устойчивости и её границы, а также для анализа робастности, см. вторую часть статьи.

Благодарности. Автор выражает благодарность анонимным рецензентам, чьи замечания позволили улучшить статью.

ЛИТЕРАТУРА

1. Duffin, R.J. Algorithms for Classical Stability Problems // SIAM Review. – 1969. – Vol. 11, no. 2. – P. 196–213.
2. Дидук Г.А. Машинные методы исследования автоматических систем. – Л.: Энергоатомиздат. Ленингр. отд-ние, 1983. – 176 с. [Diduk, G.A. Machine methods for studying automatic systems. – Leningrad: Energoatomizdat, 1983. – 176 s. (In Russian)]
3. Ackermann, J. Robust Control: The Parameter Space Approach. (2nd ed.). – London: Springer, 2002. – 483 p.
4. Violet, G. Continuity Argument Revisited: Geometry of Root Clustering via Symmetric Products / arXiv:1512.08645. – 2016. – P. 1–45. – DOI: <https://doi.org/10.48550/arXiv.1512.08645>

5. Грязина Е.Н., Поляк В.Т., Тремба А.А. Современное состояние метода D-разбиения // Автоматика и телемеханика. – 2008. – № 12. – С. 3–40. [Gryazina, E.N., Polyak, V.T., Tremba, A.A. D-decomposition Technique State-of-the-Art // Automation and Remote Control. – 2008. – Vol. 69, no. 12. – P. 1991–2026.]
6. Неймарк Ю.И. Об определении значений параметров, при которых система автоматического регулирования устойчива // Автоматика и телемеханика. – 1948. – Т. 9, № 3. – С. 190–203. [Neimark, Yu.I. On the Determination of the Values of the Parameters at Which the Automatic Control System Is Stable // Automation and Remote Control. – 1948. – Vol. 9, no. 3. – P. 190–203. (In Russian)]
7. Неймарк Ю.И. Динамические системы и управляемые процессы. – М.: Наука, 1978. – 336 с. [Neimark, Yu.I. Dinamicheskie sistemy i upravlyаемые protsessy. – Moscow: Nauka, 1978. – 336 s. (In Russian)]
8. Gryazina, E.N., Polyak, V.T. Stability Regions in the Parameter Space: D-Decomposition Revisited // Automatica. – 2006. – Vol. 42, no. 1. – P. 13–26.
9. Šiljak, D.D. Analysis and Synthesis of Feedback Control Systems in the Parameter Plane, I–Linear Continuous Systems // IEEE Transactions on Applications and Industry. – 1964. – Vol. 83, no. 75. – P. 449–458.
10. Грязина Е.Н. К теории D-разбиения // Автоматика и телемеханика. – 2004. – № 12. – С. 15–28. [Gryazina, E.N. The D-Decomposition Theory // Automation and Remote Control. – 2004. – Vol. 65, no. 12. – P. 1872–1884.]
11. Николаев Ю.П. Геометрия многомерной области устойчивости в пространстве четных (нечетных) коэффициентов характеристического полинома линейных систем // Автоматика и телемеханика. – 2014. – № 9. – С. 3–20. [Nikolaev, Yu.P. Geometry of the Multidimensional Stability Domain in the Space of Even (Odd) Coefficients of the Characteristic Polynomial of Linear Systems // Automation and Remote Control. – 2014. – Vol. 75, no. 9. – P. 1541–1555.]
12. Tremba, A. Constructive Boundary Description of a D-Stable Region for 2-Parameter Controllers // Proceedings of 7th International Conference on Control Systems, Mathematical Modeling, Automation and Energy Efficiency (SUMMA 2025). – Liptsk, 2025. (In press.)
13. Прышников П.Ф. D-разбиение при полиномиальной зависимости коэффициентов многочлена от двух параметров // Автоматика и телемеханика. – 2021. – № 3. – С. 32–46. [Pryashnikova, P.F. D-Decomposition in the Case of Polynomial Dependence of the Coefficients of a Polynomial on Two Parameters // Automation and Remote Control. – 2021. – Vol. 82, no. 3. – P. 398–409.]
14. Прышников П.Ф. Робастное D-разбиение при полиномиальной зависимости коэффициентов многочлена от двух параметров // Автоматика и телемеханика. – 2022. – № 7. – С. 82–99. [Pryashnikova, P.F. Robust D-Decomposition in the Case of Polynomial Dependence of the Coefficients of a Polynomial on Two Parameters // Automation and Remote Control. – 2022. – Vol. 83, no. 3. – P. 1078–1092.]
15. Chilali, M., Gahinet, P. H_∞ Design with Pole Placement Constraints: An LMI Approach // IEEE Transactions on Automatic Control. – 2002. – Vol. 41, no. 3. – P. 358–367.
16. Polyak, V.T., Gryazina, E.N. Randomized Methods Based on New Monte Carlo Schemes for Control and Optimization // Annals of Operations Research. – 2011. – Vol. 189. – P. 343–356.
17. Saydy, L., Tits, A.L., Abed, E.H. Guardian Maps and the Generalized Stability of Parametrized Families of Matrices and Polynomials // Mathematics of Control, Signals and Systems. – 1990. – Vol. 3, no. 4. – P. 345–371.
18. Fatkhullin, I., Polyak, V. Optimizing Static Linear Feedback: Gradient Method // SIAM Journal on Control and Optimization. – 2021. – Vol. 59, no. 5. – P. 3887–3911.
19. Васильев О.О. Исследование D-разбиений методами вычислительной вещественной алгебраической геометрии // Автоматика и телемеханика. – 2012. – № 12. – С. 36–55. [Vasil'ev, O.O. Study of D-Decompositions by the Methods of Computational Real-Valued Algebraic Geometry // Automation and Remote Control. – 2012. – Vol. 73, no. 12. – P. 1978–1993.]
20. Solving Polynomial Equations: Foundations, Algorithms, and Applications / Ed. by A. Dickenstein, I.Z. Emiris. – Berlin: Springer, 2005. – 426 p.
21. Тремба А.А. D-разбиение для сложного множества локализации корней характеристического полинома // Труды XIII Всероссийского совещания по проблемам управления (ВСПУ 2019). – Москва, 2019. – С. 63–67. [Tremba, A.A. D-Decomposition for Complex Set of Characteristic Polynomial Root Regions // Trudy XIII Vserossiyskogo soveshchaniya po problemam upravleniya (VSPU 2019). – Moscow, 2019. – P. 63–67. (In Russian)]
22. Немировский А.С., Поляк В.Т. Необходимые условия устойчивости полиномов и их использование // Автоматика и телемеханика. – 1994. – № 11. – С. 113–119. [Nemirovskii, A.S., Polyak, V.T. Necessary Conditions for the Stability of Polynomials and Their Use // Automation and Remote Control. – 1994. – Vol. 55, no. 11. – P. 1644–1649.]
23. Goldman, R.N., Sederberg, T.W., Anderson, D.C. Vector Elimination: A Technique for the Implicitization, Inversion, and Intersection of Planar Parametric Rational Polynomial Curves // Computer Aided Geometric Design. – 1984. – Vol. 1, no. 4. – P. 327–356.
24. Tan, L., Li, B., Zhang, B., Cheng, J.S. An Algorithm for the Intersection Problem of Planar Parametric Curves // Proceedings of International Workshop on Computer Algebra in Scientific Computing. In: Lecture Notes in Computer Science, vol. 14139. – Cham: Springer Nature Switzerland. – 2023. – P. 312–329.
25. Farouki, R.T. Reduced Difference Polynomials and Self-Intersection Computations // Applied Mathematics and Computation. – 2018. – Vol. 324. – P. 174–190.
26. Francis, B. A Course in H_∞ Control Theory / In: Lecture Notes in Control and Information Sciences, vol. 88. – Berlin: Springer-Verlag, 1987. – 150 p.

Статья представлена к публикации членом редколлегии С.А. Красновой.

Поступила в редакцию 06.08.2025,
после доработки 08.10.2025.
Принята к публикации 23.10.2025.

Тремба Андрей Александрович – канд. физ.-мат. наук, Институт проблем управления РАН, г. Москва; Московский физико-технический институт, г. Долгопрудный.

✉ atremba@ipu.ru

ORCID iD: <https://orcid.org/0000-0001-5783-7600>

© 2025 г. Тремба А. А.



Эта статья доступна по лицензии Creative Commons «Attribution» («Атрибуция») 4.0 Всемирная.



CONSTRUCTIVE D-PARTITION FOR TWO PARAMETERS ENTERING A POLYNOMIAL LINEARLY. PART I: Description of the Boundaries of D-Partition Regions

A. A. Tremba

Trapeznikov Institute of Control Sciences, Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia
Moscow Institute of Physics and Technology, Dolgoprudny, Russia

✉ atremba@ipu.ru

Abstract. In the stability analysis of linear systems depending on several parameters, the D-partition method is often used, also known as the D-decomposition method in the literature. This method describes the stability region of a characteristic polynomial via the equation of its boundary. A constructive D-partition method proposed below identifies individual parts of curves and straight lines on the parameter plane that form the boundaries of the D-partition regions and, in particular, the stability region. A characteristic polynomial linearly dependent on two parameters and a stability region with a piecewise rational parametric boundary are considered. In this case, the boundary of each D-partition region is a finite set of arcs of rational curves and segments, rays, or straight lines that can be found explicitly. The rational curve arcs are parameterized on intervals whose limits are found by calculating the real roots of auxiliary polynomials. A D-partition, bounded (localized) on a compact set, consists of a finite number of segments and arcs of rational curves parameterized on the segments.

Keywords: constructive D-partition, D-decomposition, root localization, root clustering, rational curves, localized D-partition.

Acknowledgments. The research presented in Sections 3 and 4 was supported by the Russian Science Foundation, project no. 21-71-30005-II, <https://rscf.ru/en/project/21-71-30005/>.