

УПРАВЛЕНИЕ КОМПЛЕКСОМ РАБОТ С НЕОПРЕДЕЛЕННЫМИ МОМЕНТАМИ ПОСТУПЛЕНИЯ ЗАПРОСОВ НА ВЫПОЛНЕНИЕ

Д. А. Кононов*, М. Г. Фуругян**

*Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова РАН, г. Москва

**Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» РАН, г. Москва

*✉ dmitrykon52@gmail.com, **✉ rtscas@yandex.ru

Аннотация. Рассматривается задача составления графика выполнения комплекса основных работ при условии, что в некоторые неопределенные моменты времени поступают заявки на выполнение дополнительных, более приоритетных работ. Если при выполнении основного задания поступает заявка на дополнительную работу, то выполнение этого задания завершается и должно быть начато заново в некоторый момент времени после окончания выполнения дополнительной работы. Все работы (основные и дополнительные) выполняются без прерываний. Предполагается, что при выполнении основного задания поступление более чем одной заявки на выполнение дополнительной работы маловероятно; такие случаи не рассматриваются. Кроме того, заявка на выполнение дополнительной работы может прийти только после завершения обслуживания предыдущей дополнительной заявки. Исследуются две формальные постановки задачи. В первой показателем эффективности является момент завершения комплекса основных работ, и задача заключается в его минимизации. Во второй постановке минимизируется вероятность коллизии, т.е. ситуации, когда заявка на выполнение дополнительной работы поступает в момент выполнения основного задания. Решение указанных задач основано на сведении их к бесконечным антагонистическим играм и дискретной аппроксимации последних конечными играми. Рассмотрены модельные примеры. Исследована также постановка с нефиксированными длительностями выполнения основных работ, линейно зависящими от объема выделенных им дополнительных ресурсов. В этом случае поиск допустимого расписания сводится к решению задачи линейного программирования.

Ключевые слова: системы реального времени, планирование работ, коллизия, антагонистическая игра, невозобновляемые ресурсы, смешанная стратегия, оптимальная стратегия.

ВВЕДЕНИЕ

При разработке, эксплуатации и управлении сложными объектами широко применяются специализированные автоматизированные системы управления (АСУ) различного класса и назначения. Такие системы ориентированы на выполнение ряда функций управления в заданных предметных областях и имеют ряд существенных свойств (системных параметров) и характеристик, отражающих эффективность их реализации [1].

В современных условиях важное значение имеют задачи разработки управляющих воздействий в автоматизированных системах реального времени. Их основная характеристика заключается в том, что существенно ограничен сверху интервал времени, за который необходимо произвести обработку входной информации и выдать результат вычислений в виде управляющих воздействий на объект или в виде сообщений пользователю. Еще более сложной становится задача в условиях неопределенности, когда следует найти расписание в меняющейся обстановке – при поступлении новых,

заранее не предусмотренных заявок на выработку управляющих сигналов.

Рассматриваемый класс задач имеет, помимо чисто научной, большую практическую ценность. Потребность в быстрых алгоритмах, составляющих многопроцессорные расписания, часто возникает в задачах распределенных вычислений в реальном времени и в задачах оперативного управления на основе обработки и анализа поступающих в реальном времени данных. В качестве иллюстрации широкой практической распространенности многопроцессорных АСУ реального времени и важности эффективных алгоритмов для выполнения расчетов и управления можно привести следующие примеры.

- Современные системы космического мониторинга представляют собой системы реального времени, непрерывно обрабатывающие поступающие данные о движении объектов в околоземном космическом пространстве.

- Системы управления ядерными реакторами на АЭС получают в режиме реального времени данные с множества датчиков и должны на их основе оперативно осуществлять управляющие воздействия на реактор.

- В аналитических центрах при правительствах развитых стран системы реального времени используются для мониторинга и анализа непрерывно поступающей из различных точек экономической или экологической информации. Такие системы должны эффективно обрабатывать огромные массивы данных и, исходя из них, оперативно оповещать о каких-то замеченных проблемах на ранних стадиях их возникновения.

- При испытаниях летательных аппаратов и других сложных технических объектов большое значение приобретают получение и оперативная обработка вычислительной системой реального времени периодически поступающей информации о состоянии различных узлов объекта.

- В современном аэропорту с большим количеством взлетно-посадочных полос постоянно принимаются решения о назначении тех или иных самолетов на различные полосы и порядке, в котором этим самолетам следует взлетать и садиться.

- В сложных логистических системах решения должны приниматься в режиме реального времени при возникновении критических ситуаций.

- В чрезвычайных ситуациях необходимо экстренно обрабатывать поступающую информацию и в реальном времени рассчитывать силы и средства (составлять графики), направляемые на их ликвидацию.

Необходимо отметить, что корректность АСУ реального времени зависит не только от правильности результатов ее вычислений, но и от времени, за которое эти результаты были получены. Составление расписаний реального времени – важная часть подобных систем, так как проектировщик системы должен быть уверен в том, что все задания будут исполнены в срок.

Наряду с задачей построения допустимого расписания для известной вычислительной системы реального времени актуальной является также и обратная задача построения (синтеза) системы реального времени некоторой минимально возможной конфигурации, в которой всегда может быть найдено допустимое расписание при заданном наборе работ. Особенно актуальной эта проблема является для бортовых вычислительных комплексов, при проектировании которых обычно стремятся минимизировать необходимые вычислительные ресурсы с целью экономии их массы и потребляемой электроэнергии. В работе [2] описан алгоритм синтеза таких систем.

Задачи планирования работ возникают во многих сферах деятельности человека, таких как строительство, экономика, военное дело, экология, разработка полезных ископаемых, управление сложными техническими объектами (самолеты, электростанции, ядерные реакторы), составление расписаний движения транспорта, управление вычислительными процессами, в частности в системах реального времени, в других отраслях. Данной тематике посвящено большое число научных работ. Отметим фундаментальные монографии [3, 4]. В них авторы исследуют различные задачи по теории расписаний и дискретной оптимизации, проводят их классификацию (полиномиально разрешимые и NP-трудные задачи) и приводят алгоритмы их решения. Кроме того, проводится анализ вычислительной сложности предлагаемых алгоритмов. В книге [5] на основе понятия расстояния между задачами разработаны методы решения ряда NP-трудных задач для критерия минимизации максимального запаздывания, а также для задач на быстроедействие.

При решении задач составления расписаний используется разнообразный математический аппарат. Так, в статьях [6, 7] описана методика управления вычислительными процессами с директивными сроками. Методика основана на использовании конечных автоматов с остановкой таймера и построения временных диаграмм. Данный подход особенно актуален при проектировании систем реального времени.



Большой интерес представляют задачи планирования работ в условиях неопределенности и риска. Так, в работах [8–10] исследованы задачи с нефиксированными параметрами. Предполагается, что длительности выполнения работ, а также имеющиеся и требуемые ресурсы задаются вероятностными характеристиками либо интервалами, в пределах которых они могут принимать значения. В последнем случае разработан алгоритм разбиения множества всех возможных значений указанных параметров на так называемые многогранники устойчивости. Каждый такой многогранник характеризуется тем, что для всех принадлежащих ему значений параметров структура оптимального расписания остается неизменной. Это позволяет заранее построить расписание для каждого многогранника, а при проведении вычислений в реальном масштабе времени, когда будут известны значения неопределенных параметров, выбрать нужное решение. Данный подход особенно актуален при проектировании и функционировании систем реального времени, когда на проведение вычислений отводится жестко ограниченное время.

В публикации [11] предлагается методика планирования производства, в которой расписание выполнения работ составляется совместно с анализом возможных изменений производственных мощностей. При этом исходная задача сведена к нелинейной целочисленной задаче математического программирования. В статье [12] исследована задача планирования сроков завершения работ с учетом стохастической изменчивости объемов ресурсов, необходимых для их выполнения.

В настоящей статье продолжены исследования, начатые в работах [13, 14]. Рассматривается задача планирования комплекса работ (основных заданий) в условиях неопределенности. Предполагается, что в некоторые неопределенные моменты времени поступают заявки на выполнение дополнительных (более приоритетных) работ. С применением игрового подхода исследуются две постановки задачи. В первой минимизируется момент завершения выполнения комплекса основных работ. Во второй постановке показателем эффективности является вероятность невозникновения коллизии (т. е. ситуации, при которой заявка на выполнение дополнительной работы поступает в момент выполнения основного задания). Исследована также постановка с нефиксированными длительностями выполнения основных работ, линейно зависящими от объема выделенных для этого дополнительных ресурсов. В этом случае поиск допустимого расписания сводится к решению задачи линейного программирования.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Имеется комплекс основных работ (заданий) $W = \{w_1, w_2, \dots, w_n\}$, для которых известны длительности $t_1, t_2, \dots, t_n$ и последовательность выполнения $w_1 \rightarrow w_2 \rightarrow \dots \rightarrow w_n$.

В некоторые неопределенные моменты времени $0 \leq y_1 \leq y_2 \leq \dots \leq y_m \leq T$ могут поступать заявки на выполнение дополнительных работ $Z = \{z_1, z_2, \dots, z_m\}$, длительности выполнения которых составляют $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_m$ соответственно. Величина T является заданной:

$$T \geq \sum_{i=1}^n t_i.$$

Дополнительные работы являются более приоритетными, чем основные. Если при выполнении основного задания поступает заявка на дополнительную работу, то выполнение этого задания завершается и должно быть заново начато в некоторый момент времени после окончания дополнительной работы. Такая ситуация называется коллизией.

Все работы (основные и дополнительные) выполняются без прерываний. Предполагается, что при выполнении основного задания поступление более чем одной заявки на выполнение дополнительной работы маловероятно и такие случаи не рассматриваются. Кроме того, заявка на выполнение дополнительной работы может прийти только после завершения обслуживания предыдущей дополнительной заявки. В дальнейшем предполагается, что основные и дополнительные работы представляют из себя программные модули, решающие некоторые прикладные задачи, для выполнения которых имеется вычислительное устройство. Оно является возобновляемым ресурсом, т. е. может использоваться многократно. При поступлении заявки на дополнительную работу это устройство немедленно передается для ее выполнения. Предполагается также, что в случае невозникновения коллизий основные работы должны завершиться не позднее срока T . Рассматриваются две постановки задачи.

Задача 1. Требуется выработать такую стратегию выполнения комплекса основных работ, при которой минимизируется момент завершения последнего задания w_n (полного комплекса работ с учетом дополнительных).

Задача 2. Предполагается, что требования на выполнение комплекса основных работ W и заявки на выполнение дополнительных заданий Z посту-

пают многократно. Требуется выработать такую стратегию выполнения основных работ, при которой максимизируется вероятность невозникновения коллизии.

Отметим, что в обеих постановках о поступлении заявки на выполнение дополнительной работы z_j становится известно только в момент времени y_j , $j = \overline{1, m}$. Подобные задачи возникают, например, при проведении летных испытаний. В штатном режиме выполняются вычисления с помощью прикладных модулей w_i , $i = \overline{1, n}$. В неопределенные моменты времени y_j , $j = \overline{1, m}$, может возникнуть нештатная ситуация, заключающаяся, например, в том, что значения некоторых важных параметров вышли за пределы допустимых значений. В этом случае запланированные заранее вычисления прерываются и выполняются дополнительные, более приоритетные работы.

Рассматривается также постановка, в которой длительности основных работ не являются фиксированными и линейно зависят от выделенных им дополнительных (невозобновляемых) ресурсов.

2. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ 1

Рассмотрим сначала случай $m = 1$. Пусть заявка на выполнение дополнительной работы z приходит в момент времени y , а длительность ее выполнения составляет τ . Определим антагонистическую игру с платежной функцией $F(x_1, x_2, \dots, x_n, y)$. В этой игре стратегия первого игрока определяет моменты времени x_i начала выполнения основных работ $w_i \in W$, $i = \overline{1, n}$, а стратегия второго игрока – момент времени y прихода заявки на выполнение дополнительного задания z . Платежная функция определяется следующим образом:

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n, y) = \begin{cases} x_n + t_n, & \text{если } 0 \leq y \leq x_1 - \tau, \\ \text{или если } x_k + t_k \leq y \leq x_{k+1} - \tau \\ \text{при некотором } 1 \leq k \leq n-1, \\ \text{или если } x_n + t_n \leq y \leq T; \\ y + \tau + \sum_{i=k}^n t_i, \\ \text{если } x_k \leq y < x_k + t_k \text{ при некотором } 1 \leq k \leq n \\ \text{или если } x_k - \tau < y \leq x_k \text{ некотором } 1 \leq k \leq n-1. \end{cases}$$

Иными словами, при отсутствии коллизии $F(x_1, x_2, \dots, x_n, y) = x_n + t_n$. В случае, когда коллизия возникает при выполнении некоторой работы $w_k \in W$,

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n, y) = y + \tau + \sum_{i=k}^n t_i.$$

Это означает, что оптимальная гарантирующая стратегия первого игрока в планировании выполнения работ W следующая: $x_1^0 = 0$, $x_i^0 = x_{i-1}^0 + t_{i-1}$, $i = \overline{2, n}$. В этом случае при отсутствии коллизии комплекс работ W завершится в момент времени $x_n^0 + t_n$, а при возникновении коллизии – в момент времени $x_n^0 + t_n + \tau$. При любой другой стратегии $x_1, x_2, \dots, x_n$ в худшем случае комплекс работ W завершится в момент времени $x_n + t_n + \tau > x_n^0 + t_n + \tau$, поскольку $x_n > x_n^0$. Таким образом, стратегия $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ является оптимальной гарантирующей стратегией при $m = 1$.

Проиллюстрируем это на следующем примере.

Пример 1. Пусть $n = m = 1$. Тогда

$$F(x, y) = \begin{cases} x + t, \\ \text{если } 0 \leq y \leq x - \tau \\ \text{или если } x + t \leq y \leq T, \\ \text{т.е. при отсутствии коллизии;} \\ y + \tau + t, \\ \text{если } x - \tau < y < x + t, \\ \text{т.е. при возникновении коллизии.} \end{cases}$$

Данная платежная функция схематично изображена на рис. 1.

В этом случае $F(0, y) < 2t + \tau$ при всех $y \in [0; T]$; $F(x, y) > 2t + \tau$ при $x \neq 0$ и любом $y \in (x - \tau; x + t)$. Следовательно, $x_1^0 = 0$ – оптимальная гарантирующая стратегия первого игрока. ♦

С помощью аналогичных рассуждений рассматривается случай $n > 1, m > 1$. В качестве плановой стратегии выбираем $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$. Далее, если в интервале $[x_1^0; x_1^0 + t_1]$ коллизии не возникает, то x_1^0 оставляем без изменения и полагаем $x_2^0 = x_1^0 + t_1$. Если же в интервале $[x_1^0; x_1^0 + t_1]$ возникает коллизия в момент времени y_1 , то полагаем $x_1^0 = y_1 + t_1$. Далее по аналогии в первом случае на возникновение коллизии исследуется интервал



$[x_2^0; x_2^0 + t_2]$, а во втором – интервал $[x_1^0; x_1^0 + t_1]$ и т. д. Таким образом, оптимальная стратегия планирования работ W строится динамически, в зависимости от поступления заявок на выполнение дополнительных заданий.

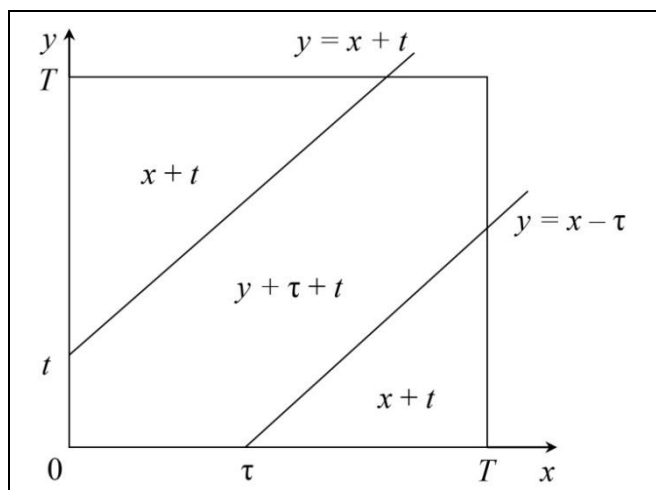


Рис. 1. Платежная функция в задаче 1 при $n = m = 1$

3. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ 2

Определим платежную функцию антагонистической игры следующим образом:

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_m) = \begin{cases} 1, & \text{если при всех } i = \overline{1, n}, j = \overline{1, m} \\ & x_i + t_i \leq y_j \leq x_{i+1} - \tau_j, \\ & \text{или } 0 \leq y_j \leq x_1 - \tau_j, \\ & \text{или } x_n + t_n \leq y_j \leq T; \\ 0, & \text{если при некоторых } 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m \\ & x_i \leq y_j \leq x_i + t_i \\ & \text{или } x_i - \tau_j \leq y_j \leq x_i. \end{cases}$$

Пусть $\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $\bar{y} = (y_1, y_2, \dots, y_m)$. Тогда $F(\bar{x}, \bar{y}) = 1$, если коллизия отсутствует, и $F(\bar{x}, \bar{y}) = 0$ при возникновении коллизии. Пусть $X = \{\bar{x} : x_i + t_i \leq x_{i+1}, i = \overline{1, n-1}, x_1 \geq 0, x_n \leq T\}$, $Y = \{\bar{y} : y_j + \tau_j \leq y_{j+1}, j = \overline{1, m-1}, y_1 \geq 0, y_m \leq T\}$, $f(\bar{x})$ – смешанная стратегия первого игрока, т. е. вероятностная мера на множестве X . Тогда из определения платежной функции $F(\bar{x}, \bar{y})$ следует, что

$$E(f, \bar{y}) = \int_{\mathbf{X}} F(\bar{x}, \bar{y}) df(\bar{x})$$

– вероятность отсутствия коллизии при фиксированном $\bar{y}$. Оптимальная смешанная стратегия первого игрока $f^0(\bar{x})$ максимизирует величину

$$\min_{\bar{y} \in Y} E(f, \bar{y}) : \\ \max_f \min_{\bar{y} \in Y} E(f, \bar{y}) = \min_{\bar{y} \in Y} E(f^0, \bar{y}),$$

где максимум берется по всем вероятностным мерам на множестве X , т. е. $f^0(\bar{x})$ является наилучшей гарантирующей стратегией первого игрока.

Пример 2. Рассмотрим случай, когда $n = m = 1$, $X = [0; 1]$, $Y = [0; 1]$, $T = 1$. Вместо x_1, y_1, t_1, τ_1 будем писать x, y, t, τ соответственно. Пусть $t \leq 0,25$, $\tau \leq 0,25$. Тогда

$$F(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{если } y \geq x + t \\ \text{или если } y \leq x - \tau; \\ 0, & \text{если } x - \tau < y < x + t \end{cases},$$

$$x \in [0; 1], y \in [0; 1].$$

На рис. 2 дано схематическое изображение платежной функции F .

Пусть $f^0(x)$ – равномерно распределенная на интервале $[0; 1]$ вероятностная мера. Тогда из определения платежной функции $F(x, y)$ следует, что

$$\int_0^1 F(x, y) df^0(x) \geq 1 - \tau - t$$

при всех $y \in [0; 1]$. Если $f(x)$ – вероятностная мера на интервале $[0; 1]$, не являющаяся равномерно распределенной, то существует отрезок $[x_0; x_0 + \tau + t] \subseteq [0; 1]$ такой, что

$$\int_{x_0}^{x_0+\tau+t} df(x) > \tau + t.$$

Следовательно, существует $y \in [0; 1]$, при котором

$$\int_0^1 F(x, y) df(x) < 1 - \tau - t.$$

Поэтому

$$\int_0^1 F(x, y) df^0(x) = \max_f \min_{y \in [0; 1]} \int_0^1 F(x, y) df(x),$$

где максимум берется по всем вероятностным мерам на отрезке $[0; 1]$. Значит, $f^0(x)$ – оптимальная смешанная стратегия первого игрока. ♦

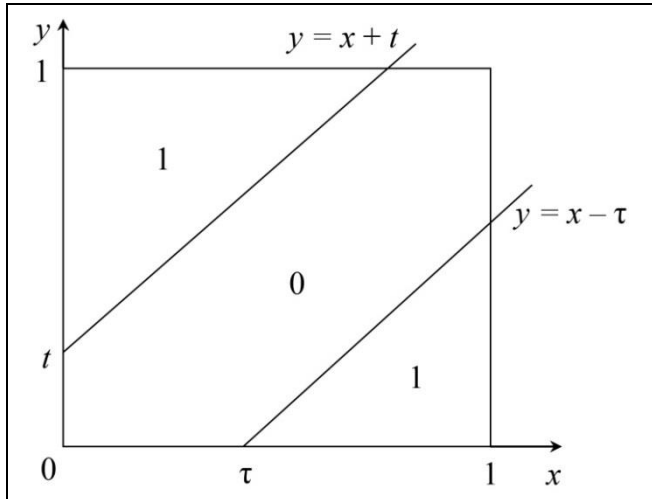


Рис. 2. Платежная функция в задаче 2 при $n = m = 1$, $t \leq 0,25$, $\tau \leq 0,25$, $T = 1$

Далее можно воспользоваться методом дискретной аппроксимации бесконечной игры конечной [15]. В этом случае для любого $\varepsilon > 0$ будет найдена ε -оптимальная смешанная стратегия первого игрока $f_\varepsilon(\bar{x})$, сосредоточенная в конечном числе точек. Пусть $f_\varepsilon(\bar{x})$ сосредоточена в точках $v_1, v_2, \dots, v_p$, в которых имеет скачки

$$q_1, q_2, \dots, q_p, q_j > 0, j = \overline{1, p}, \sum_{j=1}^p q_j = 1.$$

Каждой точке v_j , $j = \overline{1, p}$, соответствует некоторый план выполнения комплекса работ W , который следует применять с вероятностью q_j .

Пример 3. Пусть $n = m = 1$, $X = [0; 1]$, $Y = [0; 1]$, $T = 1$, $t = 0,25$, $\tau = 0,25$. Платежная функция имеет следующий вид:

$$F(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{если } y \geq x + 0,25 \\ & \text{или если } y \leq x - 0,25; \\ 0, & \text{если } x - 0,25 < y < x + 0,25 \end{cases},$$

$$x \in [0; 1], y \in [0; 1].$$

Как было показано в примере 2, $f^0(x)$ – оптимальная смешанная стратегия первого игрока и

$$\int_0^1 F(x, y) df^0(x) \geq 1 - 0,25 - 0,25 = 0,5$$

при всех $y \in [0; 1]$. Пусть $\bar{f}(x)$ – вероятностная мера на отрезке $[0; 1]$, сосредоточенная в двух точках, $x = 0$ и $x = 1$, в которых имеет скачки, равные 0,5. Тогда

$$\int_0^1 F(x, y) d\bar{f}(x) \geq 0,5$$

при всех $y \in [0; 1]$. Следовательно, $\bar{f}(x)$ так же, как и $f^0(x)$, является оптимальной смешанной стратегией первого игрока. Таким образом, с вероятностью 0,5 работу w_1 следует начинать в момент времени 0 и с вероятностью 0,5 – в момент времени 1.

На рис. 3 дано схематическое изображение платежной функции F .

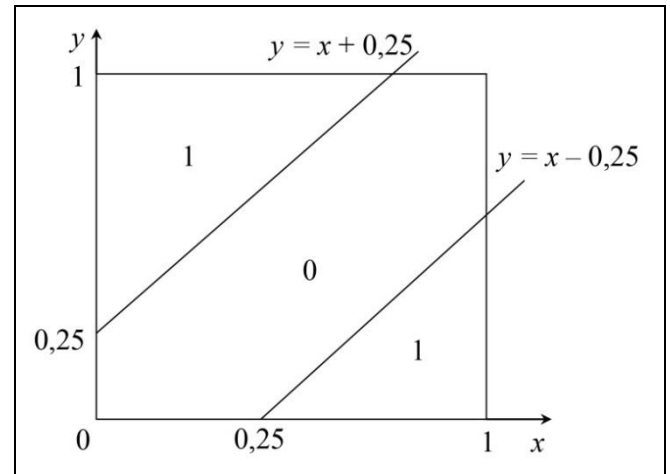


Рис. 3. Платежная функция в задаче 2 при $n = m = 1$, $t = 0,25$, $\tau = 0,25$, $T = 1$

4. ЗАДАЧА С НЕФИКСИРОВАННЫМИ ДЛИТЕЛЬНОСТЯМИ

В настоящем параграфе дополнительно предполагается, что для выполнения основных работ W имеется также L типов дополнительных невозобновляемых ресурсов (т. е. таких ресурсов, которые повторно использоваться не могут), объемы которых составляют $R_1, R_2, \dots, R_L$. Если работе $w_i \in W$ выделено r_{il} ресурсов l -го типа, $l = \overline{1, L}$, то длительность ее выполнения составляет

$$t_i = t_i^0 - \sum_{l=1}^L a_{il} r_{il}, i = \overline{1, n},$$

где a_{il} – заданные неотрицательные числа; t_i^0 – длительность ее выполнения в случае, когда ресурсы ей не выделяются. Предполагается, что выполняются следующие ограничения:

$$0 \leq r_{il} \leq r_{il}^0, i = \overline{1, n}, l = \overline{1, L}, \quad (1)$$

$$\sum_{i=1}^n r_{il} \leq R_l, l = \overline{1, L}, \quad (2)$$

$$t_i^0 - \sum_{l=1}^L a_{il} r_{il}^0 > 0, \quad (3)$$



где r_{il}^0 , $i = \overline{1, n}$, $l = \overline{1, L}$, – заданные положительные числа, означающие предельно допустимые объемы ресурсов, которые могут быть выделены работам. Неравенства (1) задают ограничения на величины каждого типа ресурсов, которые могут быть выделены каждой работе. Неравенства (2) – ограничения на суммарную величину каждого типа ресурса, выделяемую все работам вместе. Неравенства (3) – ограничения на длительности выполнения работ. Распределение ресурсов r_{il} , $i = \overline{1, n}$, $l = \overline{1, L}$, называется допустимым, если выполнены условия (1)–(3).

Цель – определить такое допустимое распределение ресурсов, которое способствовало бы решению задач 1 и 2. Из § 2 и 3 следует, что таким распределением ресурсов будет то, которое минимизирует суммарную длительность выполнения работ W . Таким образом, нужно решить следующую задачу линейного программирования: найти

$$\min_{r_{il}, i=\overline{1, n}, l=\overline{1, L}} \sum_{i=1}^n \left(t_i^0 - \sum_{l=1}^L a_{il} r_{il} \right)$$

при ограничениях (1), (2). Решение этой задачи даст оптимальное допустимое распределение ресурсов.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Исследована задача планирования комплекса основных работ при условии, что в некоторые неопределенные моменты времени поступают заявки на выполнение дополнительных, более приоритетных работ. Последовательность выполнения основных работ фиксирована. Если при выполнении основного задания поступает заявка на дополнительную работу, то выполнение этого задания прекращается и должно быть заново начато в некоторый момент времени после окончания дополнительной работы. Все работы (основные и дополнительные) выполняются без прерываний. Рассмотрены две постановки задачи. В первой в качестве показателя эффективности выбран момент завершения комплекса основных работ, и задача заключается в его минимизации. Во второй постановке минимизируется вероятность коллизии, т. е. ситуации, когда заявка на выполнение дополнительной работы поступает в момент выполнения основного задания. Решение указанных задач основано на сведении их к бесконечным антагонистическим играм. Работа представленной методики продемонстрирована на модельных примерах. Исследована постановка с нефиксированными длительностями выполнения основных работ, линейно зави-

сящими от объема выделенных им дополнительных ресурсов. В этом случае поиск допустимого расписания сведен к решению задачи линейного программирования.

Полученные результаты могут быть использованы при планировании вычислений, выполняемых во время испытания и функционирования сложных технических объектов (самолеты, ядерные реакторы). В плановом режиме выполняются вычисления с помощью прикладных модулей, а в неопределенные моменты времени может наступить нештатная ситуация, заключающаяся, например, в том, что значения некоторых параметров вышли за пределы допустимой области. В этом случае плановые вычисления прерываются и выполняются дополнительные, более приоритетные работы.

Задачи построения расписаний в условиях неопределенности исследовались в работах [8–10]. В этих публикациях предполагалось, что все используемые ресурсы являются возобновляемыми, а нефиксированными являются некоторые параметры, такие как длительности выполнения работ или объемы имеющихся ресурсов. Эти параметры задаются либо интервально, либо вероятностными характеристиками. Алгоритмы решения рассмотренных задач были основаны на методе ветвей и границ. В отличие от этих работ, в настоящей статье рассмотрена задача с неопределенными моментами поступления запросов. Кроме того, рассмотрен также случай, когда помимо возобновляемых ресурсов имеются также невозобновляемые. Задачи с неоднородным комплексом ресурсов рассмотрены также в работах [13, 14] в детерминированном варианте.

В дальнейшем предполагается рассмотреть более общую постановку, в которой для выполнения основных и дополнительных работ имеется несколько вычислительных устройств.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кононов Д.А. Исследование безопасности систем управления на основе анализа их системных параметров / Материалы 28-й Международной конференции «Проблемы управления безопасностью сложных систем» (ПУБСС'2020). – Москва, 2020. – С. 102–108. [Kononov, D.A. Research of Control Systems Security Based on the Analysis of Their System Parameters / Proceedings of the 28th International Conference «Problems of Complex Systems Security Management». – Moscow, 2020. – P. 102–108. (In Russian)]
2. Kononov, D., Furugyan, M. Control of a Complex of Works in Multiprocessor Real-time ACS / Proceedings of the 1st International Conference on Control Systems, Mathematical Modeling, Automation and Energy Efficiency (SUMMA2019). – Lipetsk, 2019. – URL: <https://ieeexplore.ieee.org/document/8947570>.

3. Танаев В.С., Гордон В.С., Шафранский Я.М. Теория расписаний. Одностадийные системы. – М.: Наука, 1984. – 383 с. [Tanaev, V.S., Gordon, V.S., Shafranskii, Ya.M. Theory of Scheduling: Single-Stage Systems. – Moscow: Nauka, 1984. – 383 s. (In Russian)]
 4. Brucker, P. Scheduling Algorithms. – Heidelberg: Springer, 2007. – 378 p.
 5. Лазарев А.А. Теория расписаний. Методы и алгоритмы. – М.: ИПУ РАН, 2019. – 408 с. [Lazarev, A.A. Scheduling Theory. Methods and Algorithms. – M.: ICS RAS, 2019. – 408 s. (In Russian)]
 6. Глонина А.Б., Балашов В.В. О корректности моделирования модульных вычислительных систем реального времени с помощью сетей временных автоматов // Моделирование и анализ информационных систем. – 2018. – Т. 25, № 2. – С. 174–192. [Glonina, A.B., Balashov, V.V. O korrektnosti modelirovaniya modul'nykh vychislitel'nykh sistem real'nogo vremeni s pomoshch'yu setei vremennykh avtomatov // Modelirovanie i analiz informatsionnykh sistem. – 2018. – Vol. 25, no. 2. – P. 174–192. (In Russian)]
 7. Глонина А.Б. Инструментальная система проверки выполнения ограничений реального времени для конфигураций модульных вычислительных систем // Вестн. МГУ. Сер. 15. Вычисл. математика и кибернетика. – 2020. – № 3. – С. 16–29. [Glonina, A.B. Instrumental'naya sistema proverki vypolneniya ogranichenii real'nogo vremeni dlya konfiguratsii modul'nykh vychislitel'nykh sistem // Vestn. MGU. Ser. 15. Vychisl. matematika i kibernetika. – 2020. – No. 3. – P. 16–29. (In Russian)]
 8. Мищенко А.В., Кошелев П.С. Оптимизация управления работами логистического проекта в условиях неопределенности // Изв. РАН. ТиСУ. – 2021. – № 4. – С. 123–134. [Koshchev, P.S., Mishchenko, A.V. Optimizing Management of Jobs in a Logistic Project Under Conditions of Uncertainty // Journal of Computer and Systems Sciences International. – 2018. – Vol. 60, no. 4. – P. 595–609.]
 9. Горский М.А., Мищенко А.В., Нестерович Л.Г., Халиков М.А. Некоторые модификации целочисленных оптимизационных задач с учетом неопределенности и риска // Изв. РАН. ТиСУ. – 2022. – № 5. – С. 106–117. [Gorskii, M.A., Mishchenko, A.V., Nesterovich, L.G., Khalikov, M.A. Some Modifications of Integer Optimization Problems with Uncertainty and Risk // Journal of Computer and Systems Sciences International. – 2022. – Vol. 61, no. 5. – P. 813–823.]
 10. Косоруков О.А., Лемтюжникова Д.В., Мищенко А.В. Методы и модели управления ресурсами проекта в условиях неопределенности // Изв. РАН. ТиСУ. – 2023. – № 3. – С. 38–56. [Kosorukov, O.A., Lemtyuzhnikova, D.V., Mishchenko, A.V. Methods and Models of Project Resource Management under Uncertainty // Journal of Computer and Systems Sciences International. – 2023. – Vol. 62, no. 2. – P. 305–323.]
 11. Yao, X., Almatooq, N., Askin, R.G., Gruber, G. Capacity Planning and Production Scheduling Integration: Improving Operational Efficiency via Detailed Modelling // Intern. J. Production Research. Published Online. – 2022. – Vol. 60, no. 1. – P. 7239–7261.
 12. Graves, S.C. How to Think About Planned Lead Times // Intern. J. Production Research. – 2022. – Vol. 60, no. 1. – DOI: <http://dx.doi.org/10.2139/ssrn.3485059>
 13. Кононов Д.А., Фуругян М.Г. Распределение неоднородного комплекса ресурсов при региональном планировании в условиях неопределенности // Труды 15 междунар. конф. «Управление развитием крупномасштабных систем» (MLSD'2022). – Москва, 2022. – С. 952–958. [Kononov, D.A., Furugyan, M.G. Planning a Complex of Works with Heterogeneous Resources under Uncertainty // Proceedings of 2022 15th International Conference Management of Large-Scale System Development (MLSD). – Moscow, 2022. – DOI: 10.1109/MLSD55143.2022.9934381]
 14. Кононов Д.А., Фуругян М.Г. Оптимизация использования неоднородного комплекса ресурсов при региональном планировании // Труды 14-й междунар. конф. «Управление развитием крупномасштабных систем» (MLSD'2021). – Москва, 2021. – С. 1231–1237. [Kononov, D.A., Furugyan, M.G. Effective Means of Regional Management: Optimal Use of Heterogeneous Resources // Proceedings of 2021 14th International Conference Management of Large-Scale System Development (MLSD'2021). – Moscow, 2021. – DOI: 10.1109/MLSD52249.2021.9600251]
 15. Фуругян М.Г. О приближении решений некоторого класса бесконечных антагонистических игр // Вестн. МГУ. Сер. 15. Вычисл. математика и кибернетика. – 1978. – № 2. – С. 81–85. [Furugyan, M.G. O priblizhenii reshenii nekotorigo klassa beskonечnykh antagonisticheskikh igr // Vestn. MGU. Ser. 15. Vychisl. matematika i kibernetika. – 1978. – No. 2. – P. 81–85. (In Russian)]
- Статья представлена к публикации членом редколлегии А.А. Лазаревым.*
- Поступила в редакцию 14.04.2025,
после доработки 30.06.2025.
Принята к публикации 16.07.2025.*
- Кононов Дмитрий Алексеевич** – д-р техн. наук, Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова РАН, г. Москва,
✉ dmitrykon52@gmail.com
ORCID iD: <https://orcid.org/0000-0002-6059-5590>
- Фуругян Меран Габидуллаевич** – канд. физ.-мат. наук, Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» РАН, г. Москва,
✉ rtscas@yandex.ru
ORCID iD: <https://orcid.org/0000-0003-0373-9233>
- © 2025 г. Кононов Д. А., Фуругян М. Г.



Эта статья доступна по [лицензии Creative Commons «Attribution» \(«Атрибуция»\) 4.0 Всемирная](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/).



MANAGING A COMPLEX OF JOBS WITH UNCERTAIN EXECUTION REQUEST ARRIVALS

D. A. Kononov* and M. G. Furugyan**

*Trapeznikov Institute of Control Sciences, Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia

**Federal Research Center "Computer Science and Control," Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia

*✉ dmitrykon52@gmail.com, **✉ rtscas@yandex.ru

Abstract. This paper considers the scheduling problem for a complex of basic jobs under the condition that at some uncertain times, execution requests for supplementary higher-priority jobs are received. If a supplementary job request arrives during the execution of a basic job, then the latter is terminated and must be restarted at some time upon the complete service of the former. All jobs (basic and supplementary) are executed without interruption. By assumption, during the execution of a basic job, two or more supplementary job requests are unlikely to arrive, and such cases are not analyzed. Also, a supplementary job request can arrive only after the complete service of the previous supplementary request. Two problem formulations are studied as follows. In the first, the performance criterion is the completion time of the basic job complex, and the problem is to minimize this time. In the second formulation, the probability of a collision is minimized, as a situation where a supplementary job request arrives during the execution of a basic job. The problems are solved via their reduction to infinite zero-sum two-player (antagonistic) games and the discrete approximation of the latter by finite games. Model examples are considered. The problem formulation with non-fixed durations of the basic jobs, linearly dependent on the amount of additional resources allocated, is investigated as well. In this case, job scheduling is reduced to a linear programming problem.

Keywords: job scheduling, collision, zero-sum two-player game, antagonistic game, non-renewable resources, mixed strategy, optimal strategy.