

МОДЕЛИ УТОМЛЕНИЯ И ОТДЫХА ПРИ НАУЧЕНИИ.

Ч. 2. Моторные и когнитивные навыки

Д. И. Гребенков*, А. А. Козлова**, Д. В. Лемтюжникова***, Д. А. Новиков***

*—****Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова РАН, г. Москва

*✉ grebenkov-d-i@mail.ru, **✉ sankamoro@mail.ru, ***✉ darabbt@gmail.com, ****✉ novikov@ipu.ru

Аннотация. Рассмотрены возможности и примеры использования общей модели научения, учитывающей эффекты утомления и отдыха, для объяснения данных экспериментов. Приведены классификация моделей итеративного научения, а также обзор экспериментальных данных по формированию опыта. Предложен алгоритм подбора модели итеративного научения для объяснения этих данных. Приведены примеры обработки данных экспериментов и моделирования, касающиеся формирования моторных и когнитивных навыков, а также зрительно-моторной адаптации, в том числе с периодами длительных перерывов. Проверяется гипотеза о том, что разработанные модели научения соответствуют экспериментальным данным, а отклонения от них представляют собой независимые и одинаково распределенные реализации случайных величин, подчиняющихся нормальному закону с нулевым математическим ожиданием. Статистические критерии не дают оснований отвергнуть данную гипотезу. На основе моделирования сформулированы рекомендации по оптимизации и управлению процессом научения.

Ключевые слова: опыт, итеративное научение, кривая научения, математическое моделирование, утомление, отдых, освоение, забывание, эксперимент.

ВВЕДЕНИЕ

Данная статья является второй частью исследования, посвященного расширению общей модели научения [1, 2] за счет процессов утомления и отдыха. В первой части статьи [3] был представлен обзор основных подходов к описанию процесса научения, а также дополненные классические математические модели формирования опыта. Напомним ключевые понятия и определения, которые были подробно рассмотрены в работе [3].

Научение – процесс и результат приобретения индивидуального опыта – лежит в основе адаптации живых и неживых систем к изменяющимся условиям. В контексте математического моделирования под научением понимается процесс, в ходе которого система (биологическая, техническая или абстрактно-логическая) оптимизирует свои действия для достижения заданной цели. Особый интерес представляет *итеративное научение* (ИН)

– вид обучения, основанный на многократном повторении системой действий, проб и ошибок для достижения фиксированной цели при постоянных внешних условиях [4]. Этот процесс формирует основу для выработки навыков у человека, условных рефлексов у животных, а также алгоритмов адаптации в робототехнике и искусственном интеллекте.

Математические модели ИН описывают динамику уровня научения – так называемые *кривые научения* (КН) – через системы уравнений, графиков или алгоритмов, выявляя универсальные закономерности. Например, КН может быть зависимость вероятности освоения компонента деятельности от времени или числа повторений (итераций).

Классическая экспоненциальная кривая научения имеет вид:

$$q(t) = q_{\max} - (q_{\max} - q_{\min})e^{-\gamma t},$$



где $q(t)$ – текущий уровень научения; q_{\max} – наивысший наблюдаемый уровень научения; q_{\min} – начальный уровень научения; $t \geq 0$ – время; $\gamma > 0$ – скорость научения.

Основываясь на экспериментальных данных, можно сделать вывод, что эти кривые имеют замедленно-асимптотический характер: скорость улучшения показателей со временем снижается, а сама кривая стремится к некоторому пределу [4, 5]. Такие КН часто аппроксимируются экспоненциальными функциями [2, 4].

В первой части исследования были рассмотрены подходы к моделированию научения, а также представлены расширенные варианты для моделей из работ [1, 4]. В настоящей работе они применены к обработке реальных данных, также приведен алгоритм обработки таких данных (см. § 2).

1. ОБЗОР ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ДАННЫХ И КЛАССИФИКАЦИЯ МОДЕЛЕЙ

Для моделирования процесса научения необходимы данные, которые отражают динамику освоения (опыта, навыка), учитывают влияние усталости, роль отдыха и индивидуальные особенности обучающихся. Были рассмотрены 11 наборов данных, охватывающих различные сферы: от образовательных платформ до спортивных тренировок. Эти данные позволяют выделить ключевые процессы (освоение, забывание, утомление, отдых) и параметры (время, предыстория, усталость), которые необходимы для построения моделей научения.

Каждый набор данных уникален по своей структуре и контексту, но все они объединены общей целью – сбором информации о том, как люди учатся, утомляются, отдыхают и забывают, а также предоставлением этой информации для изучения широкому кругу исследователей. Некоторые из датасетов, такие как Duolingo Spaced Repetition Data [6] и ASSISTments [7], фокусируются на когнитивных аспектах, в то время как в других – например, Motor Learning Experiments [8] и Injury Prediction In Competitive Runners [9] – исследуются двигательные навыки и физическая усталость.

В таблице, приведенной в приложении, систематизирована информация о процессах и параметрах, представленных в каждом наборе данных, и выделены общие закономерности, которые могут быть полезны для разработки моделей научения. Анализ этих 11-ти наборов данных позволил выделить ключевые процессы и параметры, которые

необходимо учитывать при моделировании научения.

К этим процессам относятся:

- *Освоение* – это центральный процесс, присутствующий во всех наборах данных. Оно проявляется в улучшении результатов с течением времени: в уменьшении ошибок (ASSISTments, Junyi Academy Online Learning Activity [10]), увеличении точности (Motor Learning Experiments) или сокращении времени выполнения задач [11].

- *Забывание* наблюдается в большинстве наборов данных, особенно в образовательных (Duolingo Spaced Repetition Data, ASSISTments) и двигательных (Motor Learning Experiments). Оно выражается в снижении точности или увеличении ошибок после периодов неактивности.

- *Утомление* – важный фактор, который влияет на производительность в длительных сессиях. Оно проявляется через рост ошибок (ASSISTments), увеличение времени решения задач (Codeforces Codeforces Users Submissions [12]) или субъективные оценки усталости (Injury Prediction In Competitive Runners).

- *Отдых* играет ключевую роль в восстановлении навыков. В наборах данных он представлен как периоды неактивности (Duolingo Spaced Repetition Data, Junyi Academy Online Learning Activity) или дни без тренировок (Injury Prediction In Competitive Runners).

- *Выбор осваиваемого навыка* менее явно представлен, но прослеживается в наборах данных, где задачи имеют разную сложность (Codeforces) или требуют адаптации к изменяющимся условиям (GradualTwoRate [13]).

Параметры и факторы, которые можно учитывать при вычислении текущего уровня научения:

- *Время* – универсальный параметр, присутствующий во всех наборах данных. Он позволяет отслеживать динамику научения, забывания и утомления.

- *Предыстория* – история действий (правильные и неправильные ответы, траектории движений) – помогает понять, как прошлый опыт влияет на текущие результаты.

- *Количество осваиваемых навыков*.

- *Усталость* измеряется через объективные метрики (ошибки, время выполнения) или субъективные оценки (опросы участников).

Эти выводы приближают к следующему шагу в разработке моделей научения – использованию данных из разных источников для создания единых подходов к моделированию процессов науче-



ния в различных сферах человеческой деятельности.

2. ПРИНЦИПЫ ОБРАБОТКИ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ДАННЫХ

Для описания процесса обучения реальных агентов и систем в качестве критерия уровня научения используются различные характеристики. Согласно работе [4] они разбиты на следующие категории:

– временные (время выполнения действия или операции, задания; время реакции; время исправления ошибки);

– скоростные (величины, обратные времени, такие как скорость реакции, скорость движений или производительность труда – например, число или доля (от заданного числа) правильно выполненных действий, произведенный объем продукции в единицу времени);

– точностные (величина ошибки в мерах физических величин, число ошибок или их вероятность);

– информационные (объем информации, перерабатываемой за заданное время; объем восприятия или заучиваемого материала).

В настоящей работе производится анализ экспериментальных данных, использующих в качестве критерия уровня научения точностные и временные характеристики. В работе [5] показано, что независимо от выбора характеристики – временной, скоростной, точностной или информационной – кривая научения будет иметь замедленно-асимптотический характер. Для скоростной характеристики такой вид кривой будет достигаться при преобразовании, в котором обратная зависимость от времени заменяется на прямую.

Возможна также другая классификация, основаниями которой являются единицы измерения уровня научения:

- абсолютные:

- единицы (число правильно или неправильно выполненных действий),
 - время (с),
 - скорость (1/с),
 - угол (рад),
 - длина (м),
 - масса (кг),
 - объем информации (бит) и т. д.;

- относительные:

- доля правильно или неправильно выполненных действий,
 - вероятность правильного ответа,
 - нормированные значения абсолютных единиц.

Отметим, что подавляющее большинство математических моделей научения оперируют относительными (как правило, вероятностными [1]) характеристиками уровня научения (см. обзоры в работах [2, 4]). Переход к ним от абсолютных значений может осуществляться нормировкой на диапазон изменения значений уровня научения, обеспечивающих требуемый характер – возрастания или убывания – кривой научения:

$$\hat{q}(t) = \frac{q(t) - q_{\min}}{q_{\max} - q_{\min}} \text{ или } \hat{q}(t) = \frac{q_{\max} - q(t)}{q_{\max} - q_{\min}}, \quad (1)$$

где $\hat{q}(t)$ – нормированная оценка уровня научения.

Преобразование (1) линейно, поэтому сохраняет качественные свойства кривых научения (в отличие от пороговых преобразований – см. монографию [5]). Также, если исходная кривая научения «зашумлена» некоторой аддитивной случайной величиной:

$$q_{\theta}(t) = q(t) + \theta_t, \quad (2)$$

где $q_{\theta}(t)$ – «зашумленный» уровень научения; $\{\theta_t\}$ – независимые и одинаково распределенные реализации случайной величины с нулевым математическим ожиданием, то преобразование (1) не изменяет математического ожидания шума, и линейное (нормирующее) преобразование сохраняет свойства как кривой научения, так и аддитивных «шумов».

Рассматриваемые в работах [1, 2] модели освоения опыта «бинарны» – состояния обучаемого относительно того или иного фактора неопределенности (компоненты технологии деятельности) принимают два возможных значения – «1» (освоено) или «0» (не освоено, забыто). Поэтому в них в качестве уровня научения (критерия сформированности опыта) используются математические ожидания (числа освоенных компонентов технологии, значений фактора неопределенности и т. д.), что приводит к «непрерывным» кривым научения вида «0», позволяющим описывать практически любые содержательно интерпретируемые ситуации и (или) экспериментальные данные.

Кривая научения «0» обладает многими полезными свойствами. Пусть для простоты $q_{\max} = 1$, $q_{\min} = 0$, т. е.

$$q(t) = 1 - e^{-\gamma t}.$$

Алгоритм подбора модели ИН по имеющимся результатам эксперимента заключается в следующем:

1. Проверить, что имеющее место в эксперименте научение является итеративным – неизменными являются обучаемая система, цель научения и его условия.



2. Проанализировать экспериментальные данные; установить, что является критерием уровня научения; найти его место в приведенной в начале данного параграфа системе классификаций.

3. Осуществить, в случае необходимости, нормировку типа (1).

4. Проанализировать с содержательной точки зрения, какая из моделей ИН, рассмотренных в работах [1–4], лучше соответствует эксперименту.

5. Проанализировать, какая из моделей ИН лучше аппроксимирует экспериментальные данные (методом наименьших квадратов или иным методом, в том числе с учетом представления (2) с нулевым математическим ожиданием аддитивного шума, подчиняющегося нормальному или иному симметричному распределению).

6. Проанализировать содержательные интерпретации идентифицированных параметров; в случае нескольких обучаемых и (или) серий экспериментов провести их сравнение.

7. Сравнить результаты подобранный модели с соответствующими «оптимальными» условиями научения – например, с оптимальным (с точки зрения максимизации итогового значения уровня научения) временем начала перерыва из первой части статьи [3]. Сформулировать рекомендации по оптимизации процесса научения.

Проиллюстрируем применение данного алгоритма.

3. ПРИМЕРЫ ОБРАБОТКИ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ДАННЫХ

С целью проверки на соответствие отклонений модели от экспериментальных данных нормальному закону распределения применяются различные статистические критерии. В настоящей работе выбраны критерии Шапиро – Уилка и Эппса – Палли [14], а также критерий Колмогорова – Смирнова [15].

Для расчета значений статистики критериев Шапиро – Уилка и Колмогорова – Смирнова использовалась библиотека `scipy.stats` для языка Python. В реализации применяется расширенная версия критерия Шапиро – Уилка для работы с выборками объемом до 5000 элементов. Для расчета значений статистики критерия Эппса – Палли использовалась программная реализация [16], основанная на тесте, предложенном в работе [17]. Табличные значения для критерия Шапиро – Уилка взяты из работ [18] и [19], для критерия Колмогорова – Смирнова – из книги [20], для критерия Эппса – Палли – из стандарта [14] и книги [21].

Для численной оценки параметров моделей применялся метод `curve_fit` из библиотеки `scipy.optimize`, где для минимизации по умолчанию используется алгоритм Левенберга – Марквардта.

3.1. Эксперимент: метание шаров в коробку

Рассмотрим данные эксперимента, описанного в статье [22]. Он заключался в том, чтобы забросить мячи в коробку. Конечной целью эксперимента было изучение способности к обучению методом проб и ошибок, когда обучение растягивается на значительный период времени.

Всего в один день тренировки совершалось 200 попыток забросить мяч в коробку. В засчет шли только те шары, которые упали в коробку. Ежедневные тренировки проводились в девять часов утра. Воскресенье было днем отдыха. Эксперимент продолжался 100 дней. Результаты отражены на рис. 1.

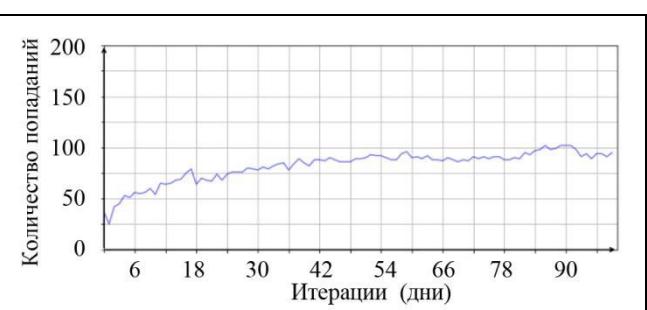


Рис. 1. Данные эксперимента из работы [22]

На протяжении первых 20–30 итераций наблюдается выраженное улучшение результата, что свидетельствует о быстром формировании навыка. Далее кривая стабилизируется, указывая на насыщение процесса научения. Данная закономерность обычна для процессов формирования индивидуального опыта.

Значением $q(t)$ критерия индивидуального опыта (так называемого уровня научения) агента (обучаемого) в случае одного рассматриваемого навыка считается вероятность того, что в периоде t его опыт будет сформирован и не забыт [3]. Выберем в качестве критерия уровня научения $q(t)$ среднюю частоту попаданий мяча в коробку в день t , что соответствует применению преобразования (1). Согласно приведенной ранее классификации, это – относительная точностная характеристика (величина, «обратная» вероятности ошибки, т. е. промаха при броске шара в корзину). Построим по данным эксперимента кривую научения (рис. 2).

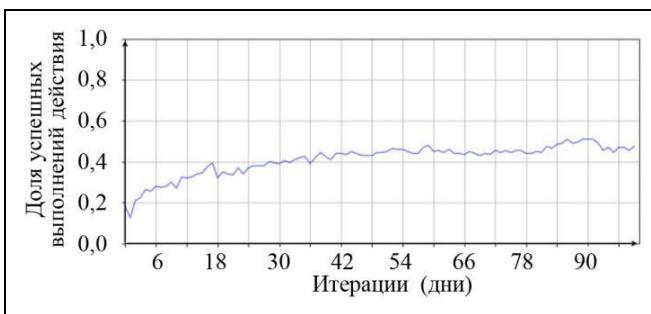


Рис. 2. Эмпирическая кривая научения по данным эксперимента из работы [22]

У данной кривой наблюдается асимптота, к которой она стремится и от которой с течением времени отклоняется незначительно. Из первой части статьи [3] возьмем две простых модели, позволяющих отразить такую динамику.

В модели 3 [3] имеют место освоение и забывание, не зависящие от времени:

$$q(t+1) = q(t) + (1 - q(t))w - q(t)(1 - u), \quad (3)$$

$$q(t) = \frac{w}{w+u} - \left(\frac{w}{w+u} - q(0) \right) e^{-(w+u)t}, \quad (4)$$

где w – вероятность освоить навык на итерации t ; u – вероятность забыть освоенный навык на итерации t ; $q(0)$ – начальный уровень освоения навыка.

Кривая (4) при $q(0) < \frac{w}{w+u}$ не убывает и асимптотически стремится к $\frac{w}{w+u}$. Аппроксимируем данные, приведенные на рис. 2, кривой (4), подбирая значения w , u и $q(0)$ так, чтобы минимизировать сумму квадратов отклонений. В результате численной оценки параметры модели приобретают следующие значения: $q(0) \approx 0,187$, $w \approx 0,022$, $u \approx 0,025$. Теоретическая асимптота – $y=0,468$. Подставим вычисленные параметры в модель и получим график уровня научения, приведенный на рис. 3.

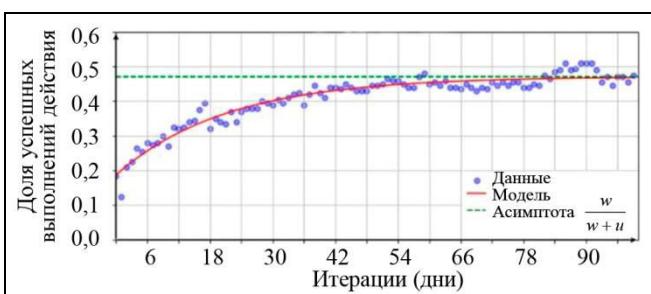


Рис. 3. Аппроксимация данных эксперимента из работы [22] с помощью модели (4)

Кривая научения на рис. 3 имеет замедленно-асимптотический характер и стремится к асимптоте $y=0,468$. При известной асимптоте можно заранее спрогнозировать достижимый уровень освоения навыка и оптимизировать длительность обучения, останавливая его при достаточном приближении к этому уровню.

Предположим, что модель (4) соответствует экспериментальным данным, но имеет место аддитивная случайная погрешность, обусловленная «шумом» в данных или влиянием тех или иных независимых случайных факторов на ход эксперимента:

$$q_0(t) = q(t) + \theta_t,$$

причем реализации θ_t – независимые и одинаково распределенные по нормальному закону с нулевым математическим ожиданием.

Гистограмма отклонений предсказаний модели (4) от данных эксперимента $q_0(t)$ представлена на рис. 4.

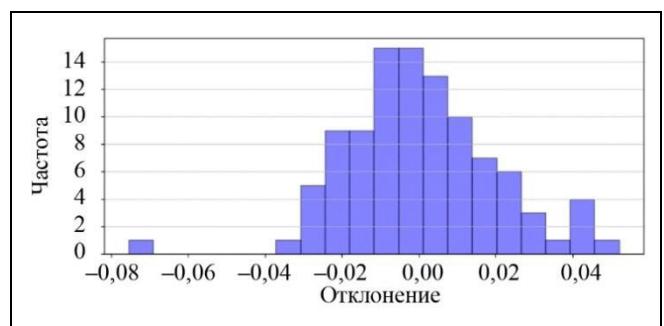


Рис. 4. Гистограмма отклонений модели (4) от данных эксперимента из работы [22]

По рис. 4 видно, что наибольшее количество отклонений $q_0(t)$ находится около нуля, а закон распределения визуально напоминает гауссовский. Выдвинем гипотезу о том, что распределение отклонений – нормальное:

$$\theta \sim N(\mu, \sigma^2). \quad (5)$$

Проверим эту гипотезу с помощью критерия Шапиро – Уилка. Получим значение статистики критерия – 0,972, p -значение – 0,029 (при уровне значимости 0,05). Значит, распределение не является нормальным. В то же время, критерии Эпса – Палли и Колмогорова – Смирнова имеют значения 0,298 и 0,059 соответственно и при сопоставлении с критическими значениями не дают оснований отвергнуть гипотезу о нормальности с тем же уровнем значимости.

Проведем аналогичные действия для модели 4 [3]:

$$q(t+1) = q(t) + w(t)(1 - q(t)), \quad (6)$$

$$q(t) = 1 - (1 - q(0))e^{-W(t)}, \quad (7)$$

для вероятности освоения будем использовать оценку

$$w(t) = w_0 e^{-\alpha t}, \quad (8)$$

$$W(t) = \frac{w_0}{\alpha} (1 - e^{-\alpha t}). \quad (9)$$

Аппроксимируем кривую, приведенную на рис. 2, подбирая значения параметров $q(0)$, w_0 и α для модели (7)–(9): $q(0) \approx 0,1828$, $w_0 \approx 0,0179$, $\alpha \approx 0,0407$. График уровня научения приведен на рис. 5.

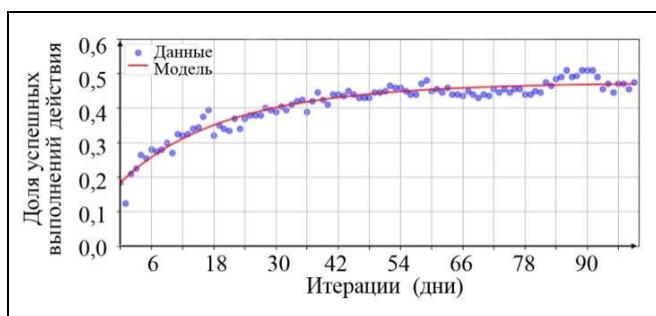


Рис. 5. Аппроксимация данных эксперимента из работы [22] с помощью модели (7)–(9)

Экспериментальные данные демонстрируют быстрое улучшение результата примерно до 30-го дня, после чего наблюдается замедление роста и выход на плато на уровне научения, примерно соответствующем 0,5. Модель (7)–(9) точно описывает эту динамику: начальный рост обеспечивается высокой вероятностью освоения, а дальнейшее замедление – ее экспоненциальным снижением.

Изменение вероятности формирования опыта $w(t)$ представлено на рис. 6.

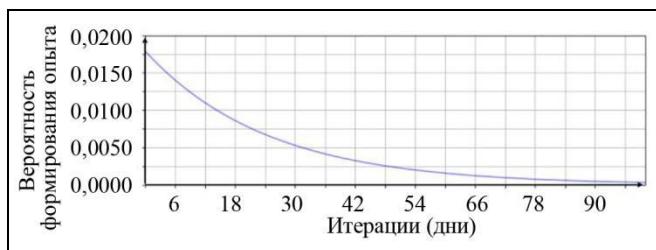


Рис. 6. Изменение вероятности формирования опыта со временем в модели (7)–(9) для данных эксперимента из работы [22]

В начале обучения $w(0) \approx 0,018$, но уже к 20-му дню вероятность формирования опыта падает ниже 0,01, к 50-му – ниже 0,005, а к концу экспери-

мента приближается к нулю. Это экспоненциальное убывание помогает описать явление снижения роста уровня научения с течением времени.

Для оценки качества аппроксимации модели (4) проанализируем распределение отклонений между ее предсказаниями и фактическими значениями уровня научения. Гистограмма представлена на рис. 7.

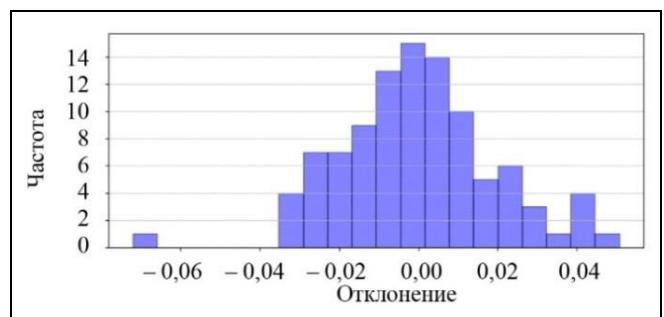


Рис. 7. Гистограмма отклонений модели (7)–(9) от данных эксперимента из работы [22]

Большинство отклонений лежит в диапазоне от -0,02 до 0,02, распределение визуально симметрично и центрировано около нуля. Это предоставляет основания для предположения о том, что модель не имеет выраженного смещения и соответствует экспериментальным данным.

Проверим гипотезу (5) с помощью критерия Шапиро – Уилка. Получим значение статистики критерия – 0,977, т. е. не можем отвергнуть гипотезу о нормальности распределения отклонений с параметрами $\mu \approx 0$, $\sigma \approx 0,02$ на уровне значимости 0,05. По критериям Эппса – Палли и Колмогорова – Смирнова гипотеза о нормальности также не отвергается. Значит, принимаем гипотезу о том, что данные нормальны. Это дает основание предполагать, что отклонения модели от реальных данных случайны, а систематические ошибки отсутствуют.

Таким образом, модель (7)–(9) соответствует данным эксперимента из работы [22]. При этом отклонения подчиняются нормальному закону распределения с нулевым средним. В результате два из трех критериев подтверждают нормальность отклонений для модели (4); для модели (7)–(9) нормальность подтверждается всеми тремя критериями.

Эксперимент по приобретению моторного навыка – метания шаров – отражает итеративный процесс формирования опыта. Эмпирическая кривая демонстрирует плавный рост и выход на асимптоту, типичный для замедленно-асимптотических КН. Аппроксимация экспери-

ментальных данных показала, что модели из первой части статьи [3] воспроизводят как начальный этап активного освоения, так и этап насыщения. Отклонения от эмпирических данных распределены нормально с оклонуловым математическим ожиданием. Динамика уровня научения подтверждает необходимость управления длительностью тренировочного процесса. Так, на этапе замедления роста эффективности может быть целесообразным изменить стратегию обучения или прекратить его (завершить обучение при приближении КН к горизонтальной асимптоте).

3.2. Эксперимент: умножение чисел в уме

Далее рассмотрим данные эксперимента из статьи [11]: испытуемый ежедневно решал набор (модуль) из 63 примеров с перемножением в уме двух двузначных чисел. Фиксировалось время выполнения модуля в минутах. На рис. 8 приведен график зависимости времени выполнения работы от количества решенных наборов (дней).



Рис. 8. Данные эксперимента из работы [11]

В начале эксперимента время колеблется между 15 и 20 мин, затем постепенно снижается и после 15-й итерации стабилизируется в районе 9–10 мин. Отчетливо прослеживается выход на плато: дальнейшие тренировки не приводят к заметному ускорению. Это указывает на то, что к 15–17-й итерации достигается почти максимальный уровень формирования навыка, после чего продолжение обучения в прежних условиях становится неэффективным.

Для описания процессов формирования опыта по экспериментальным данным моделями из первой части статьи [3] необходимо преобразовать их так, чтобы они имели возрастающий замедленно-асимптотический характер, а значения «уровня научения» принадлежали отрезку $[0; 1]$. Переведем временные абсолютные значения критерия уровня научения в относительные – величины, характеризующие близость к минимально возможному вре-

мени выполнения задачи (см. также более общее преобразование (1)):

$$\hat{q}(t) = \frac{\tau_{\max} - \tau(t)}{\tau_{\max} - \tau_{\min}}, \quad (10)$$

где τ_{\min} – минимальное время выполнения задачи; τ_{\max} – максимальное время выполнения задачи; $\tau(t)$ – время выполнения задачи на итерации t .

Возьмем за минимальное время τ_{\min} выполнения задачи 5 мин, за максимальное время τ_{\max} – 25 мин. Построим по полученным данным кривую научения (рис. 9).



Рис. 9. Эмпирическая кривая научения по данным эксперимента из работы [11]

Уже к 3–4-й итерации показатель превышает 0,6, а начиная с 10-й – стабилизируется в диапазоне 0,75–0,8. Это указывает на быстрое освоение навыка вначале и выход на устойчивый уровень выполнения после 10-го повторения.

Аппроксимируем данные с помощью моделей (4) и (7)–(9). Подберем значения параметров $q(0)$, w и u для модели (4): $q_0 = 0,136$, $w = 0,490$, $u = 0,170$. Итоги аппроксимации приведены на рис. 10.

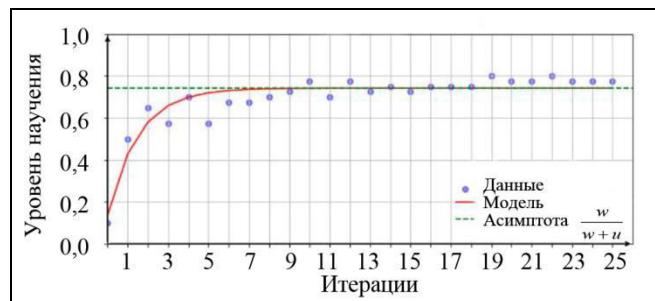


Рис. 10. Аппроксимация данных эксперимента из работы [11] с помощью модели (4)

Модель (4) описывает резкий рост уровня научения до 6–7-й итерации и приближение к асимптоте на уровне 0,75. Дальнейшие итерации не приводят к существенному росту, а фактиче-

ские значения колеблются вокруг модельной кривой. Это подтверждает, что модель (4) способна отражать процесс быстрого начального научения и последующего насыщения.

Гистограмма отклонений модели (4) представлена на рис. 11.

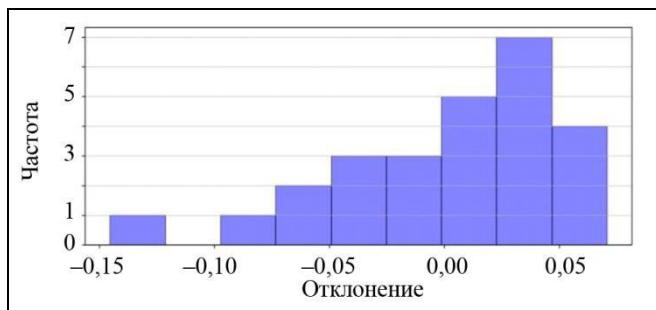


Рис. 11. Гистограмма отклонений модели (4) от данных эксперимента из работы [11]

Распределение асимметрично: основная часть положительных отклонений сосредоточена в правой части (от 0,02 до 0,06), тогда как отрицательные отклонения более рассеяны. Это может указывать на небольшую систематическую недооценку уровня научения на поздних итерациях, т. е. модель «занижает» показания по сравнению с реальным плато. При изменении значения τ_{\min} сохраняются те же закономерности: предсказания модели ниже реальных, а форма распределения отклонений (см. рис. 11) остается неизменной.

Статистика Шапиро – Уилка составила 0,929, p -значение равно 0,075. Гипотеза о нормальности распределения не отклоняется на уровне значимости 0,05 (далее по умолчанию будем использовать именно это значение уровня статистической значимости). Критерии Эппса – Палли и Колмогорова – Смирнова также не дают оснований отвергнуть гипотезу. Параметры распределения: $\mu \approx 0$, $\sigma \approx 0,05$.

Для сравнения рассмотрим аппроксимацию тех же данных с помощью модели (7)–(9), в которой вероятность освоения уменьшается со временем. Результатирующая кривая научения показана на рис. 12.

Кривая воспроизводит быстрый рост показателя научения в первые 5–7 итераций и его насыщение около уровня 0,75. В отличие от модели (4), эта аппроксимация лучше отражает сглаженную динамику выхода на плато благодаря переменной вероятности освоения. Отклонения от эмпирических точек меньше, особенно в средней и поздней фазах, что указывает на большую гибкость модели в случае постепенного снижения темпа освоения.

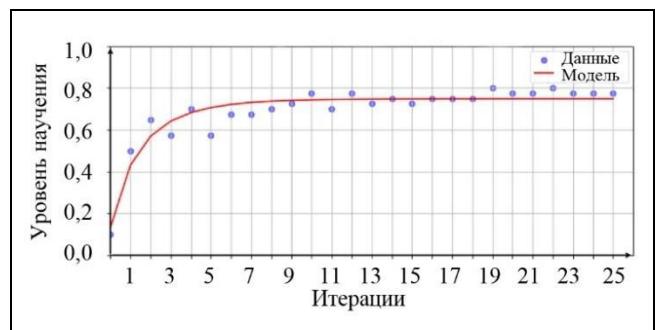


Рис. 12. Аппроксимация данных эксперимента из работы [11] с помощью модели (7)–(9)

В результате численной оценки параметры модели приобретают следующие значения: $q_0 = 0,132$, $w_0 = 0,517$, $\alpha = 0,417$. Гистограмма отклонений модели представлена на рис. 13.

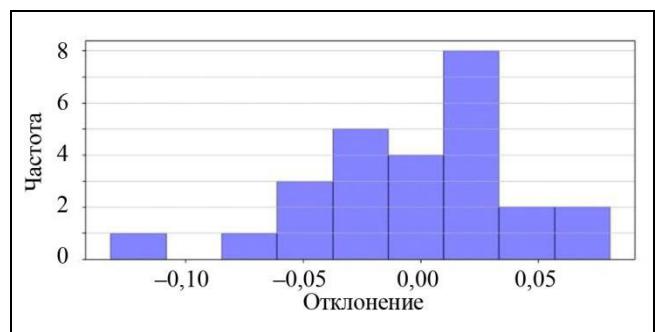


Рис. 13. Гистограмма отклонений модели (7)–(9) от данных эксперимента из работы [11]

Большинство отклонений находится в диапазоне от -0,05 до 0,05, максимум частоты приходится на области, находящиеся вблизи нуля. В отличие от предыдущей модели, здесь распределение более симметрично.

Статистика Шапиро – Уилка составляет 0,956, p -значение равно 0,311. Гипотеза о нормальности распределения не отклоняется на уровне значимости 0,05. По критериям Эппса – Палли и Колмогорова – Смирнова гипотеза о нормальности также не отвергается. Параметры распределения: $\mu \approx 0$, $\sigma \approx 0,05$ (отличие математического ожидания от нуля в данном примере наблюдается более явное: уже в четвертом знаке после запятой: -0,000332 против 0,000000).

Данные эксперимента по умножению в уме отражают процесс постепенного освоения когнитивного навыка с характерным снижением времени выполнения задачи. Эмпирическая кривая демонстрирует быстрый этап улучшения, за которым следует насыщение, что соответствует классической форме кривой итеративного научения. Моде-

ли из первой части статьи [3] соответствуют полученным данным после их нормировки преобразованием (10). Проверка отклонений показывает, что нет оснований отвергнуть гипотезу об их нормальном распределении с математическим ожиданием, близким к нулю. Это демонстрирует возможность применения моделей научения из работы [3] к описанию формирования когнитивных навыков при регулярной и однотипной тренировке.

3.3. Эксперимент: зрительно-моторная адаптация

Рассмотрим данные эксперимента из статьи [13]. Эксперимент состоял из четырех частей, каждая из которых включала три блока по 20 проб. В каждом блоке участники выполняли движения рукой по направлению к мишени, отображаемой на экране монитора. Ключевым элементом эксперимента была манипуляция с визуальной обратной связью о движении руки и положением мишени. В первом варианте эксперимента в базовом блоке визуальная обратная связь была повернута на 10° по часовой стрелке относительно реального движения руки. В интерференционном блоке обратная связь поворачивалась еще на 20° против часовой стрелки относительно базового состояния, в то время как положение мишени на экране оставалось неизменным. Третий блок повторял базовое условие. Фиксировалась величина ошибки. На рис. 14 приведен график зависимости величины ошибки (усреднена по участникам) от количества упражнений.



Рис. 14. Данные эксперимента из работы [13]

К пятой итерации ошибка снижается примерно с 15° до 2° , после чего стабилизируется. Последующие колебания находятся в диапазоне от $1,5^\circ$ до 3° и не демонстрируют явной тенденции. Это указывает на быстрое освоение необходимого моторного шаблона действий в начале эксперимента и достижение устойчивого уровня адаптации с минимальной ошибкой.

Выполним преобразование, аналогичное формулам (1) и (10). Возьмем за минимальную ошибку

0° , за максимальную – 20° . Построим по полученным данным кривую научения (рис. 15).

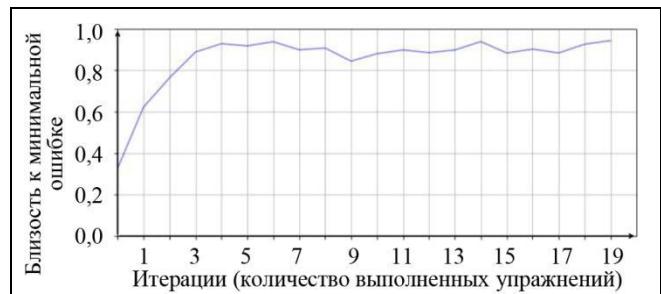


Рис. 15. Эмпирическая кривая научения по данным эксперимента из работы [13]

В первые три итерации кривая поднимается с $0,4$ до $0,85$, затем выходит на уровень выше $0,9$ и удерживается на нем с небольшими колебаниями до конца эксперимента. Эмпирическая кривая демонстрирует плавный переход к асимптоте без значительных провалов, что позволяет описывать ее стандартными моделями с насыщением.

Аппроксимируем данные с помощью моделей (4) и (7)–(9). Результат для модели (4) представлен на рис. 16.

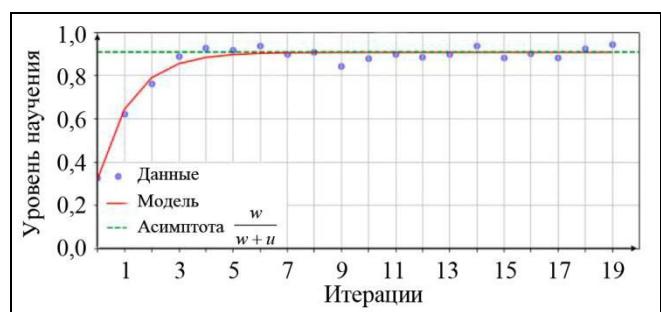


Рис. 16. Аппроксимация данных эксперимента из работы [13] с помощью модели (4)

Кривая научения для модели (7)–(9) со значениями параметров $q_0 = 0,319$, $w = 0,729$ и $u = 0,075$ воспроизводит резкий рост в первые 3–5 итераций и затем стабилизируется на уровне около $0,9$, что соответствует асимптоте модели. Эмпирические данные лежат вблизи кривой модели по всей длине интервала, однако в центральной части (итерации 6–12) наблюдаются отклонения – модель завышает предсказания. Таким образом, несмотря на общее соответствие, модель (4) может не в полной мере отражать особенности траектории обучения на среднем и позднем этапах.

Гистограмма отклонений предсказаний модели (4) от данных эксперимента представлена на рис. 17.

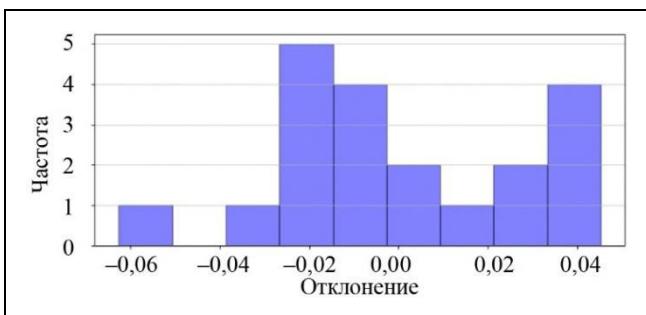


Рис. 17. Гистограмма отклонений модели (4) от данных эксперимента из работы [13]

Распределение несимметрично: наблюдается смещение влево – большинство отклонений лежит в отрицательной области (от -0,03 до -0,01), при этом в правой части также присутствует выраженный пик при значении 0,04. Данное наблюдение может указывать на то, что модель занижает значения на одном участке и переоценивает уровень научения на другом.

Статистика Шапиро – Уилка составила 0,943. Нет оснований отвергнуть гипотезу о нормальности распределения отклонений на уровне значимости 0,05. Критерии Эпписа – Палли и Колмогорова – Смирнова также не дают оснований отвергнуть гипотезу. Параметры распределения: $\mu \approx 0$, $\sigma \approx 0,028$.

Для уточнения аппроксимации используем модель (7)–(9), в которой вероятность освоения уменьшается со временем. Это позволяет учесть влияние утомления на форму кривой научения. На рис. 18 представлена соответствующая аппроксимация экспериментальных данных.

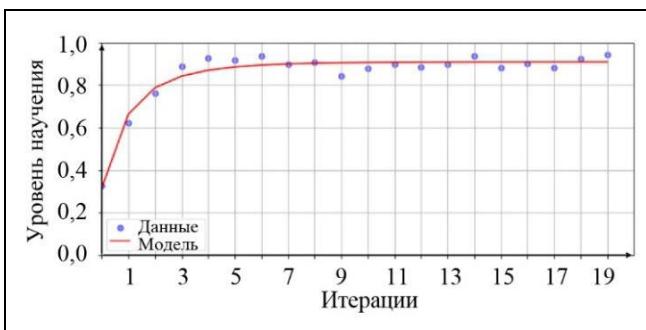


Рис. 18. Аппроксимация данных эксперимента из работы [13] с помощью модели (7)–(9)

Модель воспроизводит резкий рост показателя в первые три итерации (с 0,2 до 0,85), а затем точно выходит на уровень насыщения около 0,93. В отличие от модели (4), здесь кривая моделирует процесс более плавно: наклон уменьшается не сразу, а постепенно. В результате численной оценки

параметры модели приобретают следующие значения: $q_0 = 0,317$, $w_0 = 0,876$, $\alpha = 0,432$. Гистограмма отклонений предсказаний модели (7)–(9) от данных эксперимента представлена на рис. 19.

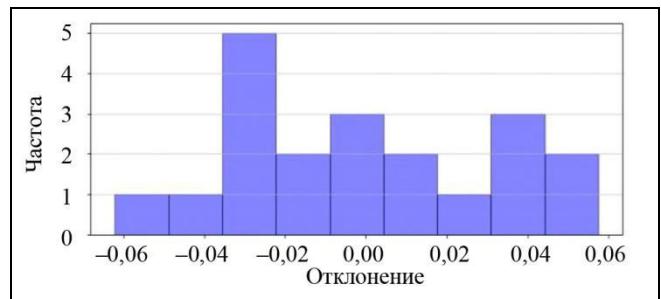


Рис. 19. Гистограмма отклонений модели (7)–(9) от данных эксперимента из работы [13]

Большинство отклонений сконцентрировано в диапазоне от -0,03 до 0,05. Визуально распределение выглядит более симметричным по сравнению с аналогичной гистограммой (см. рис. 17) для модели (4), однако заметен слабый сдвиг в отрицательную сторону. Это может свидетельствовать о частичном завышении предсказаний модели на отдельных этапах.

Статистика Шапиро – Уилка составила 0,968. Гипотеза о нормальности распределения не отклоняется на уровне значимости 0,05. Критерии Эпписа – Палли и Колмогорова – Смирнова также не дают оснований отвергнуть гипотезу. Параметры распределения: $\mu \approx 0$ (но математическое ожидание сильнее отклоняется от нуля: его значение составляет 0,000267), $\sigma \approx 0,032$.

Эксперимент по зрительно-моторной адаптации показывает быстрое освоение двигательных шаблонов при изменении визуальной обратной связи и последующее удержание достигнутого уровня. Эмпирическая кривая характеризуется резким ростом уровня научения и плавным выходом на насыщение. Распределения отклонений рассматриваемых моделей приближено к нормальному и имеют оклонулевое математическое ожидание, что подтверждает применимость экспоненциальных закономерностей для описания данного типа двигательных задач.

3.4. Перерывы в эксперименте по метанию шаров

В постановке эксперимента из статьи [22] присутствовало несколько периодов, первый из которых был рассмотрен в п. 3.1. Периоды активного проведения эксперимента перемежались перерывами: между первым и вторым этапами – 22 мес., между вторым и третьим – 6 мес. Применив пре-

образование (1), опишем данные моделями (3), (4) и (6)–(11) в периоды научения. Для описания процесса забывания в периоды отдыха воспользуемся моделью 2 [3]:

$$q(t) = q(0)e^{-ut}, \quad (11)$$

где в качестве $q(0)$ возьмем уровень научения, достигнутый к концу периода активного проведения эксперимента.

Вероятность забывания в последнем случае вычислим, используя известные значения уровней научения в начале и в конце перерыва. Результаты представлены на рис. 20–25.

На рис. 20 представлены три периода эксперимента с длительными перерывами между ними. Для каждого периода отдельно строится аппроксимация моделью (4), а период забывания между ними описывается экспоненциальным убыванием уровня научения согласно модели (11). Видно, что после каждого периода отдыха (между 100 и 657 днями, между 675 и 881 днями) происходит снижение уровня освоения, после чего начинается повторный рост.

Для того чтобы проследить динамику уровня научения, на рис. 20 отмечены точки начала (A_1, A_2, A_3) и конца (B_1, B_2, B_3) каждого из трех периодов активного освоения. Падение от B_1 к A_2 , а за-

тем от B_2 к A_3 , показывает эффект забывания после долгих перерывов. При этом снижение между B_2 и A_3 выражено слабее, что согласуется с меньшей длительностью второго перерыва по сравнению с первым (6 мес. против 22). Значение A_2 не ниже, чем A_1 , а A_3 – не ниже, чем A_2 , т. е. полного забывания за время перерыва не происходит. Также значения B_2 и B_3 оказываются выше, чем B_1 , что может свидетельствовать о постепенном накоплении устойчивого навыка или о формировании более эффективной стратегии при повторном освоении.

В общем случае, при наличии нескольких периодов активного обучения или продуктивной деятельности, перемежаемых перерывами, соотношение точек типа $A_1-A_2-\dots$ и (или) $B_1-B_2-\dots$ может говорить о формировании устойчивого навыка, полном забывании, эффективности последующих повторений и т. п.

Рассмотрим вариант аппроксимации, в котором данные каждого периода обрабатываются независимо, без учета интервалов между ними, так как данных для оценки постепенного забывания в статье [22] не предоставлено. На рис. 21 показано приближение каждого участка с помощью модели (4) с подбором параметров по отдельности для каждого этапа активного освоения навыка.

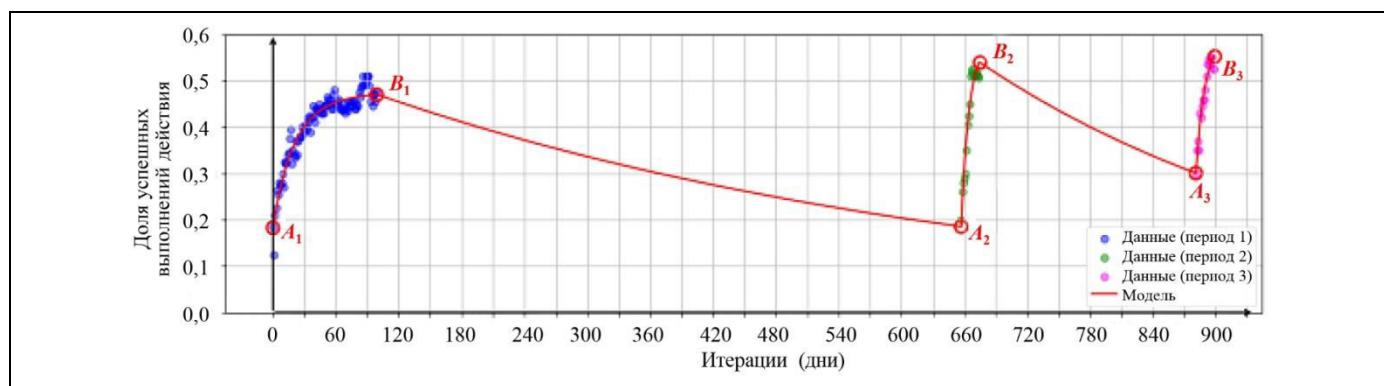


Рис. 20. Аппроксимация данных эксперимента из работы [22] с перерывами с помощью моделей (4) и (11)

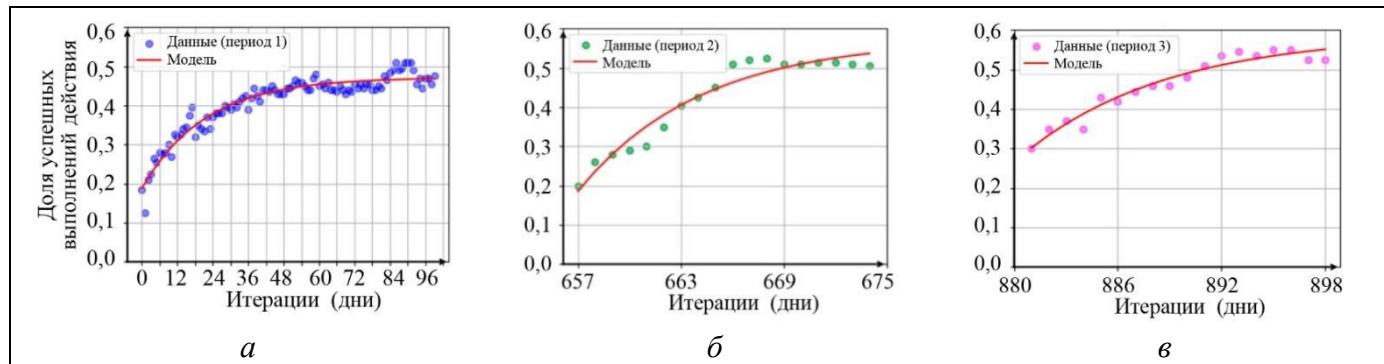


Рис. 21. Аппроксимация данных эксперимента из работы [22] без перерывов с помощью модели (4): *а* – период 1, *б* – период 2, *в* – период 3

На рис. 21 видно, что форма кривой научения различается между периодами: в первом наблюдается плавное насыщение, во втором – быстрый рост с последующим резким выходом на плато, а в третьем кривая почти линейна. Это может свидетельствовать о разных закономерностях для первичного и повторного приобретения (закрепления) навыков.

Оценки параметров кривой приобретают значения $q_0 = 0,188$, $w = 0,022$, $u = 0,025$ для первого участка, $q_0 = 0,186$, $w = 0,079$, $u = 0,059$ для второго и $q_0 = 0,301$, $w = 0,070$, $u = 0,049$ для третьего. значение параметра u во время перерывов оценивается как 0,00166 и 0,00281 соответственно.

Гистограммы отклонений модели (4) от данных эксперимента в разные периоды представлены на рис. 22.

В первом периоде распределение близко к нормальному и центрировано вблизи нуля, что говорит о хорошей аппроксимации. Во втором и третьем периодах выборки малочисленны, но отклонения также не демонстрируют систематического смещения. По критериям Шапиро – Уилка, Эппса – Палли и Колмогорова – Смирнова гипотеза о нормальности отклонений показаний модели (4) от данных не отвергается.

Для повышения точности аппроксимации применим модель (7)–(9), в которой вероятность освоения навыка убывает со временем, что позволяет учитывать эффект утомления. Результат ее применения представлен на рис. 23.

Учет утомления позволяет более гибко моделировать не только рост навыка в пределах тренировочного периода, но и снижение темпа освоения со временем. В отличие от модели с постоянными параметрами, где рост навыка затухает по мере приближения к асимптоте, модель с убывающей вероятностью освоения описывает замедление как результат исчерпания ресурса освоения. Это особенно важно для задач с длительным обучением, где скорость прироста навыка может снижаться не из-за достижения предела, а из-за эффекта утомления. При этом переход к плато моделируется не как «остановка» на заранее заданном уровне, а как продолжение роста с убывающим темпом. Это делает аппроксимацию более реалистичной в долгосрочной перспективе.

Из-за длительных интервалов между фазами и отсутствия показаний забывания в эти периоды построенная кривая оказывается малоинформативной с точки зрения динамики. Поэтому далее для анализа используются только участки актив-

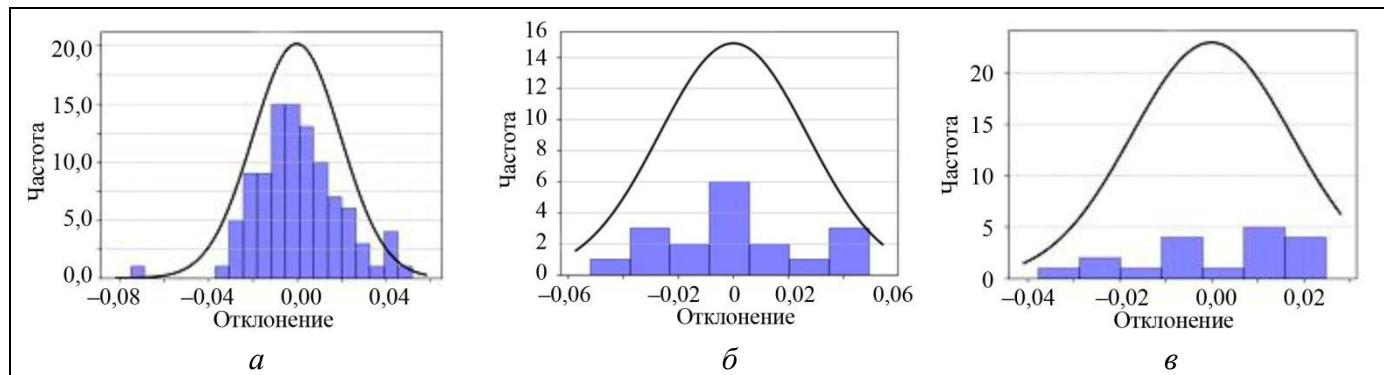


Рис. 22. Отклонения модели (4) от данных эксперимента из работы [22] без перерывов: *а* – период 1, *б* – период 2, *в* – период 3

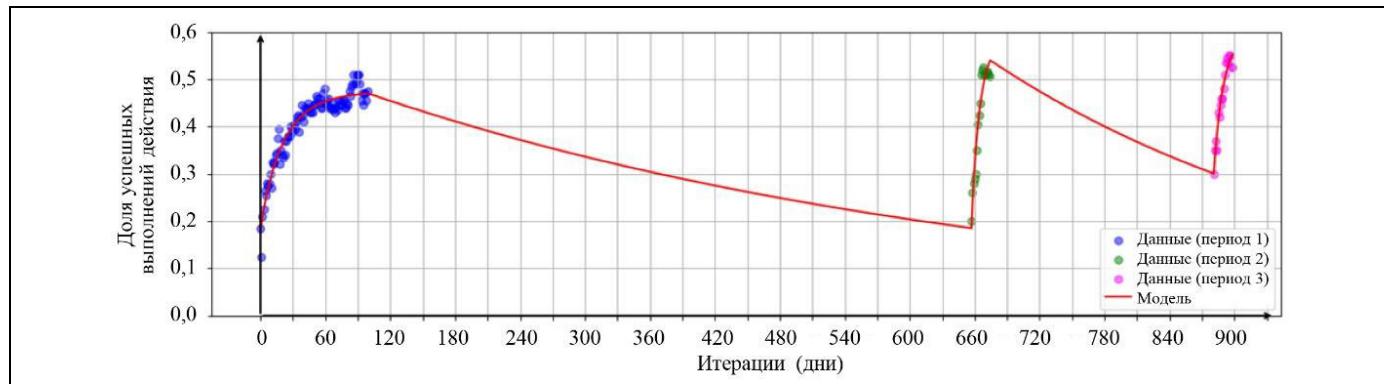


Рис. 23. Аппроксимация данных эксперимента из работы [22] с перерывами с помощью моделей (7)–(9) и (11)

ного освоения навыка, представленные на рис. 24. Модель передает рост внутри каждого периода, а также выход на плато и замедление прогресса.

На рис. 24 видно, что, как и в случае модели (4), форма кривой научения меняется в зависимости от периода: плавное насыщение в первом, быстрый рост и выход на плато в остальных.

Оценки параметров кривой приобретают значения $q_0 = 0,183$, $w_0 = 0,018$, $\alpha = 0,041$ для первого участка, $q_0 = 0,185$, $w_0 = 0,069$, $\alpha = 0,099$ для второго и $q_0 = 0,301$, $w_0 = 0,051$, $\alpha = 0,089$ для третьего. Значение параметра u во время перерывов оценивается как 0,00167 и 0,00284 соответственно.

Гистограммы отклонений моделей представлены на рис. 25.

Гистограммы отклонений показывают, что модель (7)–(9) в целом обеспечивает более симметричное распределение ошибок по сравнению с моделью (4) (см. рис. 22). В первом и третьем периодах отклонения сгруппированы ближе к нулю, а их амплитуда ниже, что указывает на более точное приближение. Во втором периоде наблюдается небольшая асимметрия, но она менее выражена, чем при аппроксимации моделью с постоянными

параметрами. Таким образом, модель с убывающей вероятностью освоения позволяет лучше учитывать особенности темпа обучения в разные периоды.

По критериям Шапиро – Уилка, Эпса – Палли и Колмогорова – Смирнова гипотеза о нормальности отклонений показаний моделей (4) и (7)–(9) от данных не отвергается. Однако для каждого из периодов необходимо было подбирать параметры отдельно: модель со значениями параметров, полученными на первом этапе, не соответствовала данным на следующих этапах.

Кроме того, проанализировать отклонения модели от экспериментальных данных во время этапов отдыха для значений из статьи [22] не представляется возможным, так как в постановке эксперимента отсутствуют измерения во время перерывов. Более того, такие измерения сами по себе являлись бы тренировкой – частью процесса научения – и могли бы повлиять на итоговый результат.

Заметим также, что при настолько большом перерыве между этапами эксперимента приходится подбирать «новые» параметры модели, так как

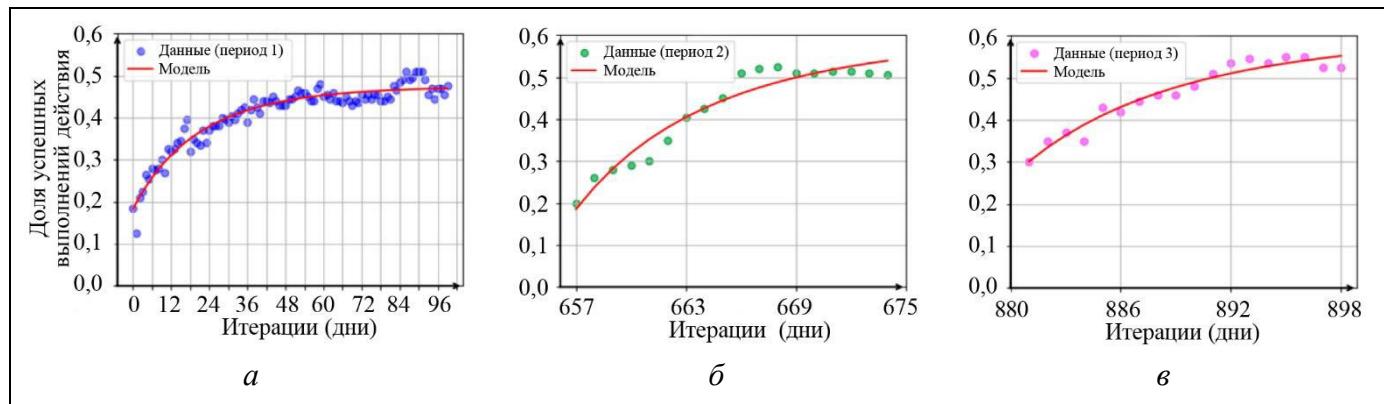


Рис. 24. Аппроксимация данных эксперимента из работы [22] с перерывами с помощью моделей (7)–(9): *а* – период 1, *б* – период 2, *в* – период 3

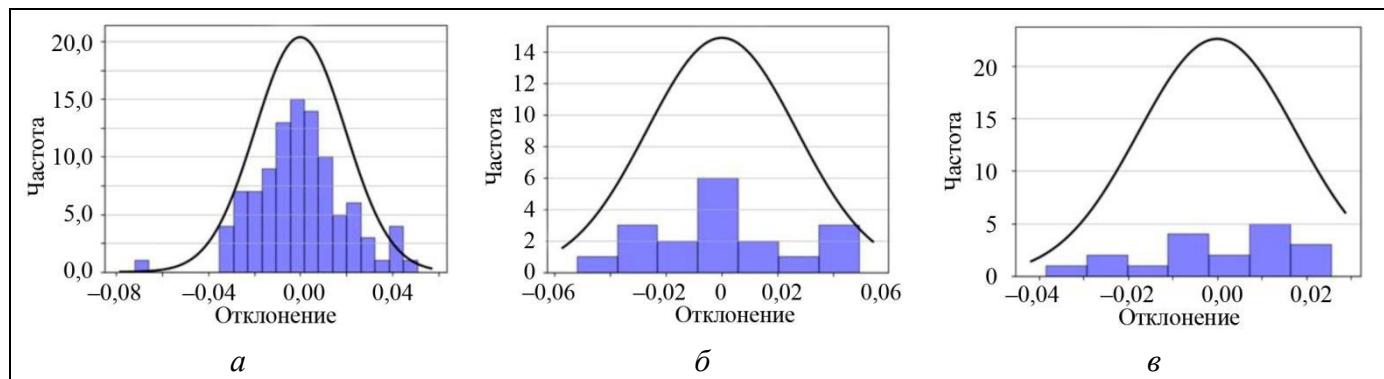


Рис. 25. Отклонения модели (7)–(9) от данных эксперимента из работы [22] без перерывов: *а* – период 1, *б* – период 2, *в* – период 3



полученные на предыдущих этапах оценки параметров не соответствуют имеющимся данным. Параметр забывания во время отдыха не сопоставляется с аналогом во время обучения, в том числе из-за существенного различия в протяженности этапов.

Эксперимент по приобретению навыка метания шаров с долговременными перерывами показывает различия между первичным и повторным освоением навыка. Поэтапная аппроксимация эмпирических данных показала, что модели из первой части статьи [3] описывают динамику уровня научения, отклонения от эмпирических данных распределены нормально с оклонуловым математическим ожиданием. В постановке экспериментов с перерывами присутствуют несколько управляемых факторов. В основном представляется возможным управлять длительностью периодов обучения и перерывов, чтобы минимизировать потерю навыка из-за забывания и при этом предоставить возможность для «перезапуска» обучения, что может снять систематическое утомление и привести к появлению новых стратегий для достижения обучаемым цели.

4. СРАВНЕНИЕ МОДЕЛЕЙ НА ОСНОВЕ ПОЛУЧЕННЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

Сравнение качества аппроксимации моделей 1, 3, 4 и 5 из первой части статьи [3] с постоянной и убывающей вероятностью освоения (соответственно, без и с учетом утомления) представлено в таблице. Для каждой аппроксимации параметры моделей подбирались методом наименьших квадратов. Далее для проверки точности соответствия модели экспериментальным данным рассчитывал-

ся коэффициент детерминации R^2 .

Результаты сравнения показывают, что учет утомления или забывания в большинстве случаев позволяет обеспечить большее соответствие модели данным по сравнению с вариантами без этих процессов. При отсутствии утомления или забывания модель воспроизводит общий замедленно-асимптотический характер кривой, однако хуже отражает постепенное снижение темпа роста уровня научения на поздних этапах.

В то же время разница в значениях коэффициента детерминации R^2 между моделями часто невелика, это видно при сравнении моделей 4 и 5. Особенно заметное улучшение наблюдается при описании когнитивного навыка (умножение в уме), что может быть связано с более выраженным снижением темпа освоения.

Исключением является эксперимент по зрительно-моторной адаптации, где модель с постоянными параметрами показала незначительно более высокое значение коэффициента детерминации. Это может быть связано с особенностями самой задачи: в отличие от других экспериментов, здесь испытуемому было явно задана конечная цель – попасть в нужную точку, – и ее достижение сопровождалось постоянной обратной связью. Такой тип эксперимента снижает когнитивную нагрузку, поскольку не предполагает постоянного пересмотра стратегии или стремления к абстрактному максимуму. В результате утомление либо не возникает, либо слабо влияет на динамику формирования навыка. В других же задачах участники действовали без однозначной точки завершения, что повышает неопределенность, усложняет фокусировку и может способствовать накоплению утомления.

Сравнение качества моделей

Эксперимент	Модель			
	Модель 1 $w = \text{const}$	Модель 3 $w = \text{const}$, $u = \text{const}$	Модель 4 $w = w(t) = w_0 e^{-\alpha t}$	Модель 5 $w(t) = w_0 e^{-\alpha t}$, $u = \text{const}$
Метание шаров (этап 1)	0,76076	0,93025	0,93200	0,93473
Умножение в уме	0,56702	0,87209	0,89110	0,94287
Зрительно-моторная адаптация	0,65981	0,96134	0,94981	0,96137

В итоге модели с тремя и более параметрами (модели 3–5) демонстрируют существенно большую точность по сравнению с двухпараметрической (модель 1). При этом модель с убывающей вероятностью освоения (модель 4) в двух случаях из трех обеспечивает лучшее приближение данных по сравнению с моделью с постоянными параметрами (модель 3). Преимущество модели 5 перед моделью 4 минимально, что указывает: учет утомления дает основной вклад в повышение точности, тогда как дополнительный учет забывания во время обучения заметно не влияет на значение R^2 для представленных экспериментов.

Основываясь на этих выводах, можно предположить, что учет утомления целесообразен для моделирования задач с длительной нагрузкой или выраженным снижением темпа освоения, в то время как для коротких и интенсивных экспериментов может быть достаточно моделей с постоянными параметрами.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Обзор наборов экспериментальных данных формирования моторных и когнитивных навыков показывает, что процессы освоения, забывания, утомления и отдыха могут проявляться в разных формах в зависимости от типа эксперимента. Освоение присутствует во всех наборах, что подтверждает применимость общих моделей итеративного обучения. Забывание и утомление проявляются по-разному – через рост ошибок, увеличение времени выполнения или снижение точности после пауз (отдыха). Параметры, такие как время, предыстория действий, число компонентов и оценки усталости, позволяют содержательно настраивать модель под конкретный эксперимент и использовать ее для сравнения, прогнозирования и управления обучением.

Рассмотренные единые принципы обработки экспериментальных данных показывают, что различные критерии уровня обучения (временные, скоростные, точностные, информационные) могут сводиться к точностному, при котором кривая обучения имеет замедленно-асимптотический характер. Кроме того, абсолютные единицы измерения уровня обучения можно преобразовать в относительные (вероятностные), что позволяет использовать общие математические модели для

описания процесса формирования опыта на основании более широкого ряда экспериментов.

Продемонстрированные примеры обработки результатов экспериментов показывают, что модели обучения соответствуют имеющимся данным – статистические критерии не дают оснований отвергнуть гипотезу о том, что отклонения представляют собой независимые и одинаково распределенные реализации случайной величины, подчиняющейся нормальному закону с нулевым математическим ожиданием.

По данным эксперимента с забрасыванием мяча в коробку с отдыхом после длительного перерыва, начальный уровень обучения падает, однако после нескольких дней тренировок достигается результат выше, чем в первом периоде. Это говорит о положительном влиянии перерыва на итоговый уровень обучения, однако определить его оптимальную продолжительность для подтверждения выводов из первой части статьи [3] по имеющимся показаниям не представляется возможным.

В рассмотренных примерах на основании моделей можно формулировать рекомендации к организации процесса обучения. Так, при описании процессов формирования опыта на основании экспериментов по умножению чисел в уме и зрительно-моторной адаптации моделью (4) видно, что кривая обучения почти достигает асимптоты намного раньше последней итерации. Это свидетельствует о том, что подобный процесс при данной постановке эксперимента при подтвержденном достижении максимального уровня обучения целесообразно завершить или сменить стратегию обучения.

Благодаря учету утомления можно описывать снижение темпа освоения навыка в течение тренировки: модель показывает постепенный переход от быстрого прогресса к замедлению, не обрывая рост на фиксированном уровне. Такой подход к моделированию обучения может быть особенно важен при длительном освоении навыка. Для трех рассмотренных экспериментов из четырех коэффициент детерминации модели с убывающей вероятностью освоения был выше. Заметное улучшение наблюдалось при описании когнитивного навыка – умножения чисел в уме, где темп освоения снижался сильнее всего. Однако в эксперименте со зрительно-моторной адаптацией лучшее значение коэффициента детерминации R^2 показала модель (4).

Набор данных или публикация	Описание	Сфера деятельности	Данные	Компоненты научения		Ссылка
				Процессы	Параметры	
ASSISTments	Содержит данные о решении задач по математике. В одном вопросе может быть несколько тегов навыков. В заданиях предусмотрено использование подсказок	Образование. Решение математических задач	Тег пользователя, тег задания, правильный ответ, ответ пользователя, количество попыток, количество использованных подсказок, приобретаемые навыки. Количество участников: более 60 тыс. чел.	Освоение: уменьшение использования подсказок по заданиям внутри навыка, увеличение количества правильных ответов на задания внутри навыка. Забывание: увеличение использования подсказок по заданиям внутри навыка, уменьшение количества правильных ответов на задания внутри навыка. Утомление: со временем используется больше подсказок и увеличивается количество неправильных ответов на задания внутри разных навыков. Отдых: перерыв во взаимодействии с системой между сессиями в тот же день	Время: временные отметки. Предыстория: правильность выполнения заданий. Количество осваиваемых навыков: 1 или больше, тренируется выполнение заданий на разные навыки	Данные 2009 г.: https://sites.google.com/site/assistmentsdata/home/2009-2010-assistment-data/skill-builder-data-2009-2010 (дата обращения: 28.04.2025) Данные 2012 г.: https://sites.google.com/site/assistmentsdata/datasets/2012-13-school-data-with-affect (дата обращения: 28.04.2025) Данные 2015 г.: https://drive.google.com/file/d/0B_hO8cnpcIMgUGZzRnh3bHJrSjQ/view?resourcekey=0-dGtan-IMFc3IjQ749-FgQA (дата обращения: 28.04.2025)
Duolingo Spaced Repetition Data	Содержит данные о запоминании слов, а также их применение в разных контекстах на платформе Duolingo	Образование. Изучение иностранных языков	Тег пользователя, изучаемый язык, тег лексемы, количество показов лексемы пользователю до урока, количество корректных определений слова до урока, количество показов лексемы во время урока,	Освоение: сохранение во времени правильности ответов на перевод слова. Забывание: неправильный ответ после серии правильных ответов на перевод слова. Утомление: увеличение количества неправильных ответов на переводы всех слов.	Время: временные отметки. Предыстория: правильность выполнения заданий. Количество осваиваемых навыков: 1 или больше, тренируется перевод разных слов	https://www.kaggle.com/datasets/aravinii/duolingo-spaced-repetition-data (дата обращения: 07.02.2025)





Набор данных или публикация	Описание	Сфера деятельности	Данные	Компоненты обучения		Ссылка
				Процессы	Параметры	
			количество корректных определений слова на уроке. Количество участников: более 150 тыс. чел.	Отдых: перерыв во взаимодействии с приложением в тот же день. Выбор осваиваемого навыка: системой. Например, система «подкидывает» часто забываемое пользователем слово чаще		
Junyi Academy Online Learning Activity Dataset	Содержит данные об активности пользователей на платформе, предназначеннной для решения задач из разных дисциплин	Образование	Три таблицы, которые содержат метаданные студентов и упражнений, попытки решения задач, временные отметки, количество использованных подсказок. Количество участников: более 72 тыс. чел.	Освоение: уменьшение ошибок при повторных попытках решения задания. Забывание: возврат к ошибкам после прогрессии правильных ответов по заданию. Утомление: со временем используется больше подсказок и увеличивается количество неправильных ответов на разные задания. Отдых: перерыв во взаимодействии с системой между сессиями в тот же день	Время: временные отметки. Предыстория: история ответов и взаимодействий. Количество компонентов деятельности: 1 или больше, тренируется выполнение разных заданий	https://www.kaggle.com/datasets/junyiacademy/learning-activity-public-dataset-by-junyi-academy/data?select=Log_Problem.csv (дата обращения: 24.02.2025)
Junyi Academy Math Practicing Log	Содержит данные об активности пользователей на платформе в рамках решения задач по математике	Образование. Решение математических задач	Метаданные студентов и упражнений, попытки решения задач, временные отметки, количество использованных подсказок.	Освоение: уменьшение ошибок при повторных попытках решения задания. Забывание: возврат к ошибкам после прогрессии правильных ответов по заданию.	Время: временные отметки. Предыстория: история ответов и взаимодействий. Количество осваиваемых навыков: 1 или больше, тренируется	https://pslcdatashop.web.cmu.edu/DatasetInfo?datasetId=1275 (дата обращения: 24.02.2025)

Продолжение таблицы

Набор данных или публикация	Описание	Сфера деятельности	Данные	Компоненты научения		Ссылка
				Процессы	Параметры	
			Количество участников: более 2 тыс. чел.	Утомление: со временем используется больше подсказок и увеличивается количество неправильных ответов на разные задания. Отдых: перерыв во взаимодействии с системой между сессиями в тот же день	выполнение разных заданий	
EdNet	Содержит данные пользователей об обучении на разнопрофильной платформе. Имеются ответы на вопросы и взаимодействия с системой	Образование	Собрано четыре типа наборов данных, внутри них имеются теги пользователей, временные отметки, теги вопросов и правильные ответы, ответы пользователей, а также действия пользователей на платформе, такие как просмотры видеолекций и материалов. Количество участников: более 780 тыс. чел.	Освоение: рост количества правильных ответов на задание. Забывание: снижение точности ответов после прогрессии правильных ответов внутри задания. Утомление: уменьшение активности или рост ошибок на разные задания. Отдых: периоды неактивности между сессиями за день	Время: временные отметки. Предыстория: история ответов и взаимодействий. Количество осваиваемых навыков: 1 или больше, тренируется выполнение разных заданий	https://github.com/riiid/ednet (дата обращения: 26.05.2025)
Codeforces	Содержит данные активности пользователей на платформе, предназначенной для решения задач по программированию	Образование. Решение задач по программированию	Тег пользователя, тег задачи, сложность задачи, результат ответа пользователя, время ответа.	Освоение: рост успешных решений заданий. Забывание: снижение точности ответов после прогрессии правильных ответов внутри задания.	Время: временные отметки. Предыстория: сложность ранее решенных задач. Количество осваиваемых навыков: 1 или больше,	https://huggingface.co/datasets/denkCF/UsersCodeforcesSubmissionsEnd2024 (дата обращения: 20.05.2025)





Набор данных или публикация	Описание	Сфера деятельности	Данные	Компоненты обучения		Ссылка
				Процессы	Параметры	
			Количество участников: более 15 тыс. чел.	Утомление: увеличение времени решения задач в рамках соревнования	тренируется выполнение разных заданий	
A Learning Curve Equation as Fitted to Learning Records [11]	Содержит данные о том, как испытуемый решал набор из 63 упражнений с перемножением в уме двух двузначных чисел	Образование. Решение математических задач	Время выполнения модуля. Количество участников: 1 чел.	Освоение: уменьшение времени, затраченного на выполнение упражнений. Забывание: увеличение времени, затраченного на выполнение упражнений	Время: итерации. Предыстория: результаты предыдущих дней. Количество осваиваемых навыков: 1, тренируется один и тот же навык	https://www.semanticscholar.org/paper/A-learning-curve-equation-as-fitted-to-learning-Barlow/1eb32cea20d374129b85069c93feeeb75330882c
Injury Prediction In Competitive Runners	Содержит подробный журнал тренировок бегунов высокого уровня за период в семь лет (2012–2019 гг.). Включены данные о бегунах на дистанции от 800 м до марафона	Спорт	Номер спортсмена, дистанции бега, количество подходов, наличие силовых тренировок, часы альтернативных занятий, субъективные оценки состояния спортсменов до и после тренировки. Количество участников: 74 чел.	Утомление: субъективные оценки спортсменами усталости после тренировок, влияние – количество разных тренировок, дистанции	Время: даты тренировок. Предыстория: предыдущие тренировки. Количество осваиваемых навыков: 1 или больше, тренируется бег на разные дистанции	https://dataverse.nl/dataset.xhtml?persistentId=doi:10.34894/UWU9PV (дата обращения: 28.02.2025)
An Extensive Experiment in Motor Learning and Re-Learning [22]	Содержит данные о попытках забрасывания мяча в коробку. Конечной целью эксперимента было изучение природы способности к обучению методом проб и ошибок, когда обучение	Движение	Количество заброшенных мячей. Количество участников: 1 чел.	Освоение: увеличение количества заброшенных мячей. Забывание: уменьшение количества заброшенных мячей, особенно после перерыва. Отдых: перерывы в эксперименте	Время: итерации по дням. Предыстория: результаты предыдущих дней. Количество осваиваемых навыков: 1, тренируется один и тот же навык	https://www.semanticscholar.org/paper/An-Extensive-Experiment-in-Motor-Learning-and-Braden/0f288c34ce089188926abfdbe87e40ba7399b499

Набор данных или публикация	Описание	Сфера деятельности	Данные	Компоненты научения		Ссылка
				Процессы	Параметры	
	ние растянуто во времени, и особенно изучение кривой повторного обучения					
GradualTwoRate	Содержит данные об адаптации людей разного возраста к резким и постепенным возмущениям внешней среды. Эксперимент заключался в том, чтобы научить человека координировать движения в соответствии с визуальным восприятием, которое менялось с помощью специальной установки	Движение. Адаптация к смене обратной виртуальной связи	Номер участника, номер итерации, угол поворота, отклонения от траектории. Количество участников: 136 чел.	Освоение: адаптация к возмущениям. Утомление: постепенное ухудшение результатов по сравнению с предыдущими итерациями	Время: итерации. Предыстория: значения углов и траекторий в итерациях перед текущей. Количество осваиваемых навыков: 1 или больше, тренируются разные траектории	https://osf.io/c5ezv/ (дата обращения: 13.03.2025)
Motor Learning Experiments	Содержит данные об адаптации людей к возмущениям внешней среды. Эксперимент заключался в том, чтобы научить человека координировать движения в соответствии с визуальным восприятием, которое менялось с помощью специальной установки	Движение. Адаптация к смене обратной виртуальной связи	Номер участника, номер попытки, цлевой угол, достигнутый угол, отклонения от траектории. Количество участников: 10 чел.	Освоение: адаптация к возмущениям на определенный угол. Забывание: ухудшение результатов в попытках после перерыва. Утомление: постепенное ухудшение результатов по сравнению с предыдущими итерациями	Время: итерации. Предыстория: значения углов и траекторий в итерациях перед текущей. Количество осваиваемых навыков: 1 или больше, тренируются разные траектории.	https://figshare.com/articles/dataset/Data_from_motor_learning_experiments/957526/1 (дата обращения: 13.03.2025)



ЛИТЕРАТУРА

1. Белов М.В., Новиков Д.А. Модели опыта // Проблемы управления. – 2021. – № 1. – С. 43–60. – DOI: 10.25728/ru.2021.1.5 [Belov, M.V., Novikov, D.A. Models of Experience // Control Sciences. – 2021. – No. 1. – P. 37–52. – DOI: 10.25728/cs.2021.1.5]
2. Белов М.В., Новиков Д.А. Модели технологий. – М.: Ленианд, 2019. – 160 с. [Belov, M.V. and Novikov, D.A. Models of Technologies. – Cham: Springer, 2020.]
3. Гребенков Д.И., Козлова А.А., Лемтюжникова Д.В., Новиков Д.А. Модели утомления и отдыха при обучении. Ч. I. Расширение общей модели итеративного обучения // Проблемы управления. – 2025. – № 3. – С. 28–37. [Grebennov D.I., Kozlova, A.A., Lemtyuzhnikova, D.V., and Novikov, D.A. Models of Fatigue and Rest in Learning. Part I: Extension of the General Iterative Learning Model // Control Sciences. – 2025. – No. 3. – P. 24–31.]
4. Новиков Д.А. Закономерности итеративного обучения. – М.: Институт проблем управления РАН, 1998. – 96 с. [Novikov, D.A. Zakonomernosti iterativnogo naucheniya. – M.: Institut problem upravleniya RAN, 1998. – 96 s. (In Russian)]
5. Новиков А.М. Процесс и методы формирования трудовых умений. – М.: Высшая школа, 1986. – 288 с. [Novikov, A.M. Process i metody formirovaniya trudovyh umenij. – M.: Vysshaja shkola, 1986. – 288 s. (In Russian)]
6. Duolingo Spaced Repetition Data. – URL: <https://www.kaggle.com/datasets/aravinii/duolingo-spaced-repetition-data> (дата обращения: 07.02.2025). [Accessed February 7, 2025].
7. Assisments Data 2009-2010. – URL: <https://sites.google.com/site/assismentsdata/home/2009-2010-assistment-data/skill-builder-data-2009-2010> (дата обращения: 28.04.2025). [Accessed April 28, 2025].
8. Data from Motor Learning Experiments. – URL: https://figshare.com/articles/dataset/Data_from_motor_learning_experiments/957526/1 (дата обращения: 13.03.2025). [Accessed March 13, 2025].
9. Replication Data for: Injury Prediction in Competitive Runners with Machine Learning. – URL: <https://dataVERSE.nl/dataset.xhtml?persistentId=doi:10.34894/UWU9PV> (дата обращения: 28.02.2025). [Accessed February 28, 2025].
10. Junyi Academy Online Learning Activity Dataset. – URL: <https://www.kaggle.com/junyiacademy/learning-activity-public-dataset-by-junyi-academy> (дата обращения: 04.02.2025). [Accessed February 4, 2025].
11. Barlow, M. A Learning Curve Equation as Fitted to Learning Records // Psychological Review. – 1928. – Vol. 35, no. 2. – P. 142–160.
12. Codeforces Users Submissions Dataset (End of 2024). – URL: <https://huggingface.co/datasets/denkCF/UsersCodeforcesSubmissionsEnd2024> (дата обращения: 13.05.2025). [Accessed May 13, 2025].
13. GdualTwoRate Dataset. – URL: <https://osf.io/c5ezv/> (дата обращения: 13.03.2025). [Accessed March 13, 2025].
14. ГОСТ Р ИСО 5479–2002. Статистические методы. Проверка отклонения распределения вероятностей от нормального распределения. – М.: Изд-во стандартов, 2002. – 30 с. [GOST R ISO 5479–2002. Statisticheskie metody. Proverka otkloneniya raspredeleniya verojatnostey ot normal'nogo raspredeleniya. – M.: Izd-vo standartov, 2002. – 30 s. (In Russian)]
15. Математическая статистика: Учеб. для вузов / В.Б. Горяинов, И.В. Павлов, Г.М. Цветкова и др.; под ред. В.С. Зарубина, А.П. Крищенко. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2001. – 424 с. [Matematicheskaya statistika: Ucheb. dlja vuzov / V.B. Gorjainov, I.V. Pavlov, G.M. Cvetkova i dr.; pod red. V.S. Zarubina, A.P. Krishchenko. – M.: Izd-vo MGTU im. N.E. Baumana, 2001. – 424 s. (In Russian)]
16. Nazarov, A.A. Statistical-methods. – URL: <https://github.com/AANazarov/Statistical-methods/tree/master/Epps-Pally%20test> (дата обращения: 28.02.2025). [Accessed February 28, 2025].
17. Epps, T.W., Pulley, L.B. A Test for Normality Based on the Empirical Characteristic Function // Biometrika. – 1983. – Vol. 70, no. 3. – P. 723–726.
18. Shapiro, S., Wilk, M. An Analysis of Variance Test for Normality (Complete Samples) // Biometrika. – 1965. – Vol. 52, no. 3–4. – P. 591–611.
19. Royston, P. Approximating the Shapiro-Wilk W-test for Non-normality // Statistics and Computing. – 1992. – Vol. 2. – P. 117–119.
20. Большев Л.Н., Смирнов Н.В. Таблицы математической статистики. – М.: Наука, 1983. – 416 с. [Bol'shev, L.N., Smirnov, N.V. Tablitsy matematicheskoy statistiki. – M.: Nauka, 1983. – 416 s. (In Russian)]
21. Лемешко Б.Ю. Критерии проверки отклонения распределения от нормального закона. Руководство по применению. – Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2014. – 192 с. [Lemeshko, B.Ju. Kriterii proverki otkloneniya raspredelenija ot normal'nogo zákona. Rukovodstvo po primeneniju. – Novosibirsk: Izd-vo NGTU, 2014. – 192 s. (In Russian)]
22. Braden, S. An Extensive Experiment in Motor Learning and Re-Learning // Journal of Educational Psychology. – 1924. – Vol. 15, no. 5. – P. 313–315.

Статья представлена к публикации руководителем PPC A. A. Ворониным.

Поступила в редакцию 14.08.2025,

после доработки 20.10.2025.

Принята к публикации 20.10.2025.

Гребенков Дмитрий Игоревич – математик,

✉ grebenkov-d-i@mail.ru,

ORCID iD: <https://orcid.org/0009-0002-7085-5912>

Козлова Анастасия Андреевна – инженер,

✉ sankamoro@mail.ru,

ORCID iD: <https://orcid.org/0009-0005-6105-121X>

Лемтюжникова Дарьяна Владимировна – канд. физ.-мат. наук, ✉ darabtt@gmail.com,
ORCID iD: <https://orcid.org/0000-0002-5311-5552>

Новиков Дмитрий Александрович – д-р техн. наук, акад. РАН, ✉ novikov@ipu.ru.

ORCID iD: <https://orcid.org/0000-0002-9314-3304>

Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, г. Москва.

© 2025 г. Гребенков Д.И., Козлова А.А., Лемтюжникова Д.В., Новиков Д.А.



Эта статья доступна по [лицензии Creative Commons «Attribution» \(«Атрибуция»\) 4.0 Всемирная.](#)



MODELS OF FATIGUE AND REST IN LEARNING. PART II: Motor and Cognitive Skills

D. I. Grebenkov*, A. A. Kozlova**, D. V. Lemtyuzhnikova***, and D. A. Novikov****

Trapeznikov Institute of Control Sciences, Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia

*✉ grebenkov-d-i@mail.ru, **✉ sankamoro@mail.ru, ***✉ darabbt@gmail.com, ****✉ novikov@ipu.ru

Abstract. This paper considers the possibilities and examples of using a general learning model with fatigue and rest effects to describe experimental data. A classification of iterative learning models is provided, and the existing datasets on learning from various fields are overviewed. A general algorithm for selecting an appropriate iterative learning model based on available experimental data is proposed. Examples of processing experimental and modeling data are presented for motor and cognitive skills, visual-motor adaptation, and tasks with long breaks. The following hypothesis is formulated and tested: learning models describe the data with deviations representing independent and identically distributed realizations of Gaussian random variables with zero mean. According to the values of statistical criteria, there are no grounds to reject this hypothesis. Based on the modeling results, recommendations on the optimization and management of the learning process are given.

Keywords: experience, iterative learning, learning curve, mathematical modeling, fatigue, rest, skill acquisition, forgetting, experiment.