

РОБАСТНАЯ синхронизация сети взаимосвязанных нелинейных систем с компенсацией возмущений¹

И.Б. Фуртат

Предложен алгоритм робастной синхронизации сети по выходу взаимосвязанных динамических подсистем с ведущей подсистемой (лидером). Рассмотрена динамическая сеть с переменной структурой, в которой математическая модель каждой подсистемы (за исключением ведущей) описывается структурно неопределенным дифференциальным уравнением с одним нелинейным липшицевым членом. Подсистемы сети подвержены действию внутренних и внешних неконтролируемых возмущений. Получен алгоритм децентрализованного управления, обеспечивающий синхронизацию сети и компенсирующий неизвестные возмущения с требуемой точностью.

Ключевые слова: робастное управление, синхронизация сети, компенсация возмущений, наблюдатель производных.

ВВЕДЕНИЕ

В последнее время наблюдается повышенный интерес к кооперативному управлению различного рода объектами во многих областях науки и техники: биологии, физике, робототехнике, телекоммуникационных сетях и др. Один из способов управления сложными взаимосвязанными системами, среди которых есть ведущая подсистема (лидер), заключается в синхронизации, принцип которой состоит в поиске регуляторов, обеспечивающих сближение решения каждой подсистемы с решением ведущей подсистемы.

Несмотря на большой интерес к управлению сетью пока решен только ограниченный класс задач. В работе [1] рассмотрена задача группового координатного управления динамической сетью с учетом топологии сети, исследованы свойства робастности сети, предложено обобщение критерия Найквиста с использованием собственных чисел лапласиана графа сети. В работе [2] проблема синхронизации сети, ассоциированной с графом, со-

держащим остоное дерево, решена для объектов с измеряемыми векторными входом и выходом. Получены необходимые и достаточные условия синхронизации сети, зависящие от параметров объектов, регулятора и собственных значений лапласиана графа. В работе [3] рассмотрено управление сетью интеграторов и линейных объектов, ассоциированной с орграфом, содержащим ориентированное остоное дерево. Под ориентированным остоным деревом понимается ориентированное дерево, составленное из ребер орграфа, и такое, что в нем существует путь из корня в любую другую вершину [3, 4]. Хотя многие результаты, приведенные для орграфа в работе [3], были получены ранее в работе [4]. В статье [5] предлагается адаптивная синхронизация сети по выходу, подсистемы которой представлены нелинейными дифференциальными уравнениями в форме Лурье. В статье [6] рассматривается синхронизация сети взаимосвязанных нелинейных объектов на базе нейросети при предположении, что орграф, ассоциированный с сетью, сильно связан.

Отметим, что до сих пор не рассматривались вопросы управления динамической сетью с переменной структурой, подсистемы которой описываются структурно неопределенными дифференциальными уравнениями (под структурной не-

¹ Работа выполнена в Институте проблем машиноведения РАН (г. Санкт-Петербург) при финансовой поддержке РФФИ (гранты № 09-08-00237, 10-08-90707).



определенностью дифференциального уравнения понимается неопределенность его порядка), подверженными действию неконтролируемых внутренних и внешних возмущений. Решение такой задачи рассматривается в настоящей работе.

В статье решается задача робастного децентрализованного управления по выходу динамической сетью с переменной структурой, где каждый ее узел описан линейным структурно неопределенным дифференциальным уравнением с одним нелинейным липшицевым членом. Кроме того, подсистемы сети подвержены действию неконтролируемых внутренних и внешних возмущений. Выделяется ведущая подсистема, которая определяет желаемое поведение остальных локальных объектов сети. Задается орграф, где каждая его вершина ассоциирована с соответствующей подсистемой сети. Неконтролируемые возмущения компенсируются с помощью подхода [7], обобщенного на класс структурно неопределенных объектов [8]. Предложенный алгоритм обеспечивает синхронизацию сети с требуемой точностью. Аналитические результаты проиллюстрированы на численном примере сети, состоящей из четырех узлов и лидера.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим орграф $\Gamma_l = (V, E_l)$, ассоциированный с сетью S , где каждой вершине орграфа Γ_l соответствуют подсистемы $S_i, i = 1, \dots, k$, и подсистема лидера $S_L, V = \{v_1, \dots, v_k, v_L\}$ — множество вершин, $E_l \subseteq V \times V$ — множество ребер. Пусть $C(t) = (c_{ij}(t)), S(t) = (s_{iL}(t))$ — взвешенные матрицы смежности орграфа Γ_l такие, что $c_{ij}(t) > 0$ и $s_{iL}(t) > 0$, если $j \in N_{jL}$, иначе $c_{ij}(t) = 0$ и $s_{iL}(t) = 0, N_{jL} = \{v_j \in V: (v_j, v_i), (v_i, v_L) \in E_l\}$ — множество смежных вершин для узла v_i . Запись $(v_j, v_i), (v_i, v_L) \in E_l$ означает, что информация поступает от подсистемы S_i к подсистеме S_j и от подсистемы лидера S_L к S_i . Понятно, что матрицы смежности $C(t)$ и $S(t)$ характеризуют топологию и «силы» связей между узлами орграфа сети Γ_l , что необходимо учитывать при синтезе системы управления. Считается, что в процессе функционирования системы структура связей орграфа может изменяться. Обозначим $\Gamma = \{\Gamma_l: l = 1, \dots, m\}$ — множество возможных значений топологий орграфа.

Рассмотрим подсистему S_i , соответствующую i -й вершине орграфа Γ_l сети S , динамические про-

цессы в которой описываются следующим уравнением

$$Q_i(p)y_i(t) = k_i R_i(p)u_i(t) + K_i(p)\Psi_i(y_i)h_i + D_i(p)f_i(t), \quad (1)$$

где $y_i(t) \in R$ — измеряемая регулируемая переменная, $u_i(t) \in R$ — сигнал управления, $f_i(t)$ — гладкое внешнее неконтролируемое ограниченное возмущение; $Q_i(p), R_i(p), K_i(p)$ и $D_i(p)$ — линейные дифференциальные операторы, $\deg Q_i(p) = n_i, \deg R_i(p) = m_i, n_i - m_i \geq 1, \deg D_i(p) = s_i$ и $\deg K_i(p) = z_i \leq n_i - 1, \Psi_i^T(y_i) \in R^{n_i}$ — нелинейность, $h_i \in R^{n_i}$ — вектор неизвестных параметров, $k_i > 0$.

Ведущая подсистема S_L , соответствующая L -й вершине орграфа Γ_l сети S , описывается уравнением

$$Q_L(p)y_L(t) = k_L r(t). \quad (2)$$

Здесь $y_L(t) \in R$ — измеряемый выход, $r(t) \in R$ — ограниченное задающее воздействие, $Q_L(p)$ и $k_L > 0$ — известный оператор и высокочастотный коэффициент усиления, $\deg Q_L(p) = \gamma$.

Цель управления состоит в обеспечении ε -синхронизации [9] сети S с заданной точностью:

$$|y_i(t) - y_L(t)| < \varepsilon \text{ при } t > T, \quad (3)$$

где T — время, по истечении которого с начала работы системы должно выполняться неравенство (3), ε — заданное число. Решим сформулированную задачу при следующих ограничениях.

Предположения

1. Орграфы $\Gamma_l, l = 1, \dots, m$, содержат ориентированные остовные деревья, в корне которых находится ведущая подсистема (2).

2. Неизвестные коэффициенты операторов $Q_i(p), R_i(p), K_i(p)$ и $D_i(p)$, элементы матриц $C(t)$ и $S(t)$, коэффициенты вектора h_i и число $k_i > 0$ принадлежат известному ограниченному множеству возможных значений Ξ . Порядки операторов $Q_i(p), R_i(p), K_i(p)$ и $D_i(p)$ неизвестны. Известно, что $\gamma \geq \max_{i=1, \dots, k} \{n_i - m_i\}$.

3. Гладкие нелинейности $\Psi_i(y_i)$ удовлетворяют глобальному условию Липшица.

4. Объект управления (1) — минимально фазовый.

Отметим, что решение задачи синхронизации сети взаимосвязанных нелинейных объектов носит важный прикладной характер. Например, в

работе [3] упоминается о задаче управления группой роботов, математические модели которых заданы линейными дифференциальными уравнениями. В работе [10] рассматривается управление сетью роботов-манипуляторов, модели которых представлены нелинейными дифференциальными уравнениями третьего порядка. В работе [11] ставится задача управления энергосетью, в узлах которой расположены электрические генераторы. Узлы такой сети связаны между собой через линии передачи, параметры которых неизвестны и изменяются, в зависимости от нагрузок на линиях. В работе [12] впервые ставится проблема управления электроэнергетической системой, исходя из топологии сети. В общем случае будем рассматривать сеть, в узлах которой расположены объекты, имеющие разные математические модели и качество связи между которыми зависит от их взаимного расположения.

2. МЕТОД РЕШЕНИЯ

Представим линейные операторы $Q_i(p)$ и $R_i(p)$ (1) в виде сумм [8]:

$$\begin{aligned} Q_i(p) &= Q_m(p) + \Delta Q_i(p), \\ R_i(p) &= R_m(p) + \Delta R_i(p), \end{aligned} \quad (4)$$

где $Q_m(\lambda)$ и $R_m(\lambda)$ — гурвицевы многочлены и такие, что $Q_m(\lambda)/R_m(\lambda) = Q_L(\lambda)$, λ — комплексная переменная, $\deg Q_m(p) = n \geq n_p$, $\deg R_m(p) = n - \gamma$, $\Delta Q_i(p)$ и $\Delta R_i(p)$ — линейные дифференциальные операторы. Порядок линейного оператора $\Delta Q_i(p)$ не превосходит n . Относительно второй формулы в выражении (4) можно сказать, что всегда существует такой вектор $c_{0i} \in R^n$, составленный из коэффициентов оператора $R_i(p) - R_m(p)$, что выполнено второе разложение (4), где $\Delta R_i(p) = c_{0i}^T [1, p, \dots, p^{n-1}]^T$. Так, если $m_i < n - \gamma$, то $\deg \Delta R_i(p) = n - \gamma$; если $m_i = n - \gamma$, то $\deg \Delta R_i(p) \leq n - \gamma$; если $m_i > n - \gamma$, то $\deg \Delta R_i(p) = m_i$.

Подставим разложение (4) в уравнение (1) и составим уравнение ошибки $e_i(t) = \sum_{j \in N_{jL}} c_{ij}(t)(y_j(t) - y_L(t)) + s_{iL}(t)(y_i(t) - y_L(t))$ в виде:

$$\begin{aligned} Q_L(p)e_i(t) &= \sum_{j \in N_j} c_{ij}(t)(\varphi_i(t) - \varphi_j(t)) + \\ &+ s_{iL}(t)(\varphi_i(t) - k_L r(t)). \end{aligned} \quad (5)$$

Здесь $R_m(p)\varphi_i(t) = k_i u_i(t) + k_i \Delta R_i(p)u_i(t) - \Delta Q_i(p)y_i(t) + K_i(p)\Psi_i(y_i)h_i + D_i(p)f_i(t)$ — функция, содержащая в себе неопределенности объекта (1).

Для выделения возмущений, действующих на объект (1), введем вспомогательный контур [7, 8]:

$$Q_L(p)e_{ai}(t) = \alpha u_i(t), \quad (6)$$

$\alpha > 0$. Принимая во внимание выражения (5) и (6), составим функцию рассогласования $\zeta_i(t) = e_i(t) - e_{ai}(t)$:

$$Q_L(p)\zeta_i(t) = \phi_i(t).$$

Здесь $\phi_i(t) = \sum_{j \in N_{jL}} c_{ij}(t)(\varphi_i(t) - \varphi_j(t)) + s_{iL}(\varphi_i(t) - k_L r(t)) - \alpha u_i(t)$ — новая функция возмущения, содержащая в себе неопределенности i -й локальной подсистемы и смежных ей подсистем, а также неопределенности связей между ними. Выразив в последнем выражении $\sum_{j \in N_{jL}} c_{ij}(t)(\varphi_i(t) - \varphi_j(t)) + s_{iL}(\varphi_i(t) - k_L r(t)) = \alpha u_i(t) + Q_L(p)\zeta_i(t)$ и подставив его в формулу (5), получим $Q_L(p)e_i(t) = \alpha u_i(t) + Q_L(p)\zeta_i(t)$. Задав закон управления $u_i(t) = -\alpha^{-1} Q_L(p)\zeta_i(t)$, получили бы точную компенсацию возмущений: $Q_L(p)e_i(t) = 0$. Однако из постановки задачи производные сигнала $\zeta_i(t)$ не доступны измерению. Тогда сформируем закон управления в виде

$$u_i(t) = -\alpha^{-1} Q_L(p)\bar{\zeta}_i(t). \quad (7)$$

Здесь $\bar{\zeta}_i(t)$ — оценка функции $\zeta_i(t)$. С учетом закона управления (7), перепишем формулу (5) как

$$Q_L(p)e_i(t) = g^T \delta_i(t), \quad (8)$$

где $g \in R^{\gamma+1}$ — вектор, компонентами которого являются коэффициенты полинома $Q_L(\lambda)$, записанные в обратном порядке, $\delta_i^T(t) = [\zeta_i(t), \zeta_i'(t), \dots, \zeta_i^{(\gamma)}(t)]^T - [\bar{\zeta}_i(t), \bar{\zeta}_i'(t), \dots, \bar{\zeta}_i^{(\gamma)}(t)]^T$ — ошибка оценки производных.

Для реализации закона управления (7) используем наблюдатель:

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_i(t) &= G_0 \xi_i(t) + D_0(\bar{\zeta}_i(t) - \zeta_i(t)), \\ \bar{\zeta}_i(t) &= L \xi_i(t), \end{aligned} \quad (9)$$



$\xi_i(t) \in R^\gamma$, параметры которого выбираются согласно работе [13]: $G_0 = \begin{bmatrix} 0 & I_{\gamma-1} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $I_{\gamma-1}$ — единичная матрица порядка $\gamma - 1$, $D_0 = -[d_1\mu^{-1}, d_2\mu^{-2}, \dots, d_\gamma\mu^{-\gamma}]^T$, коэффициенты $d_1, d_2, \dots, d_\gamma$ выбираются так, чтобы матрица $G = G_0 - DL$ была гурвицевой, $D = [d_1, d_2, \dots, d_\gamma]^T$, $L = [1, 0, \dots, 0]^T$, $\mu > 0$ — достаточно малая величина.

Рассмотрим вектор $\bar{\eta}_i(t) = \bar{D}^{-1}\delta_i(t)$, где $\bar{D} = \text{diag}\{\mu^{\gamma-1}, \mu^{\gamma-2}, \dots, \mu, 1\}$. Найдем полную производную по времени от $\bar{\eta}_i(t)$ с учетом выражения (9):

$$\dot{\bar{\eta}}_i(t) = \mu^{-1}G\bar{\eta}_i(t) + \bar{b}\zeta_i^{(\gamma)}(t), \quad \bar{\Delta}_i(t) = \mu^{\gamma-1}L\bar{\eta}_i(t),$$

где $\bar{b} = [0, \dots, 0, 1]^T$. Преобразуем предпоследнее уравнение в эквивалентное относительно выхода $\bar{\Delta}_i(t)$:

$$\begin{aligned} \dot{\eta}_i(t) &= \mu^{-1}G\eta_i(t) + b\zeta_i(t), \\ \bar{\Delta}_i(t) &= \mu^{\gamma-1}L\eta_i(t). \end{aligned} \quad (10)$$

Здесь $\eta_i(t) \in R^\gamma$, $\eta_i^1(t) = \bar{\eta}_i^1(t)$ — первые компоненты векторов $\eta_i(t)$ и $\bar{\eta}_i(t)$, $b = [1, 0, \dots, 0]^T$.

Принимая во внимание уравнение (10), преобразуем выражение (8) к форме:

$$\dot{x}_i(t) = Ax_i(t) + \mu^{\gamma-1}bg^T\Delta_i(t), \quad e_i(t) = Lx_i(t), \quad (11)$$

где $x_i(t) \in R^\gamma$ — вектор состояния (11), A — матрица в форме Фробениуса с характеристическим многочленом $Q_L(\lambda)$, $\Delta_i(t) = [\eta_i^1(t), \eta_i^1(t), \dots, (\eta_i^1(t))^{(\gamma)}]^T$.

Утверждение. Пусть выполнены предположения 1–4. Тогда для чисел $\alpha > 0$, $\mu_0 > 0$ и

$$\mu_0 \leq \min \left\{ \|Q_2\| \|Hb\|^{-2}, \gamma^{-1} \sqrt{0,5 \|Q_1\| \|P\bar{b}g^T\|^{-2}} \right\}, \quad (12)$$

где P и H — решения матричных уравнений

$$\begin{aligned} A^T P + PA &= -Q_1, & G^T H + HG &= -Q_2, \\ Q_1 &= Q_1^T > 0, & Q_2 &= Q_2^T > 0, \end{aligned} \quad (13)$$

система управления (6), (7), (9) при $\mu \leq \mu_0$ обеспечивает выполнение условия синхронизации (3). ♦

Доказательство утверждения см. в Приложении.

3. ПРИМЕР

Рассмотрим орграфы Γ_l , $l = 1, \dots, 6$ (рис. 1), описывающие информационные связи сети S , состоящей из четырех подсистем S_i , $i = 1, \dots, 4$, и лидера S_L .

Пусть S_i подсистема (1) описывается следующим уравнением:

$$\begin{aligned} (q_{3i}p^3 + q_{2i}p^2 + q_{1i}p + q_{0i})y_i(t) &= k_i(r_{1i}p + r_{0i})u_i(t) + \\ &+ (\tilde{k}_{1i}p + \tilde{k}_{0i})\Psi_i(y_i)h_i + d_i f_i(t). \end{aligned} \quad (14)$$

Класс неопределенности Ξ задан неравенствами: $0 \leq q_{3i} \leq 1$, $0 < q_{2i} \leq 1$, $|q_{ji}| \leq 5$, $j = 0, 1$, $0 \leq r_{1i} \leq 1$, $0 < r_{0i} \leq 5$, $|\tilde{k}_{ji}| \leq 2$, $h_i = [h_i^1 \ h_i^2]^T$, $|h_i^1| \leq 2$, $|h_i^2| \leq 2$,

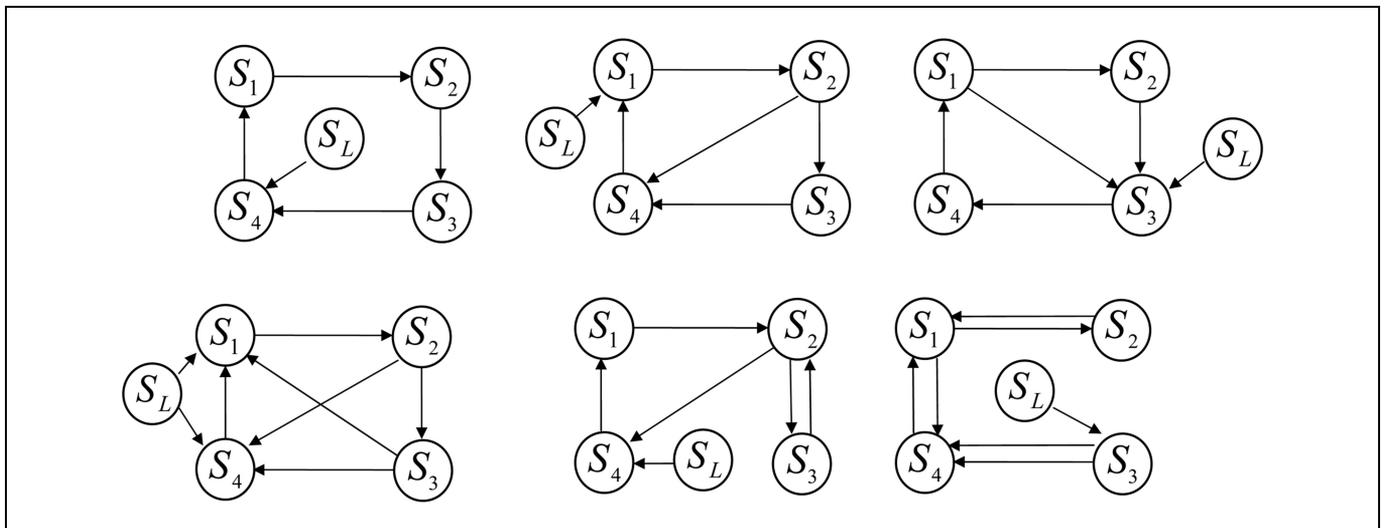
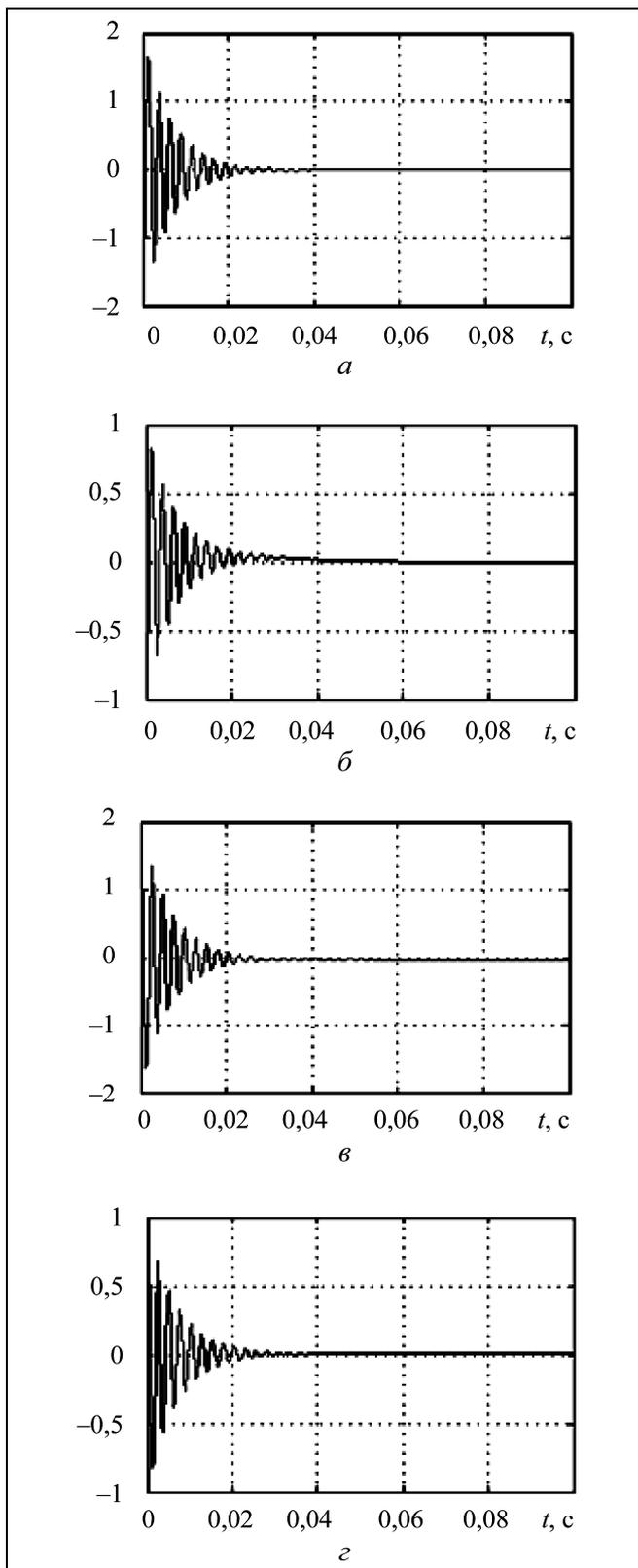


Рис. 1. Орграфы Γ_l сети S


Рис. 2. Переходные процессы:

a — по ошибке $\tilde{y}_1(t)$; *б* — по ошибке $\tilde{y}_2(t)$; *в* — по ошибке $\tilde{y}_3(t)$;
г — по ошибке $\tilde{y}_4(t)$

$|d_i| \leq 10$, $|f_i(t)| \leq 10$, $0,5 \leq c_{ij}(t) \leq 5$, $0,5 \leq s_{iL}(t) \leq 5$. Нелинейность $\Psi_i(y_i) = [\ln^2(1 + |y_i(t)|) \ln^2(1 + |y_i(t)| + 0,5\sin y_i(t))]$.

Из уравнения (14) видно, что относительная степень каждой локальной подсистемы не превосходит 3. Положим $\gamma = 3$.

Сформируем уравнение лидера (2) в виде: $(p^3 + 3p^2 + 3p + 1)y_L(t) = 1 + \sin t$.

Цель управления состоит в обеспечении условия ε -синхронизации (3).

Вспомогательный контур (6) сформируем как: $(p^3 + 3p^2 + 3p + 1)e_{ai}(t) = \alpha u_i(t)$.

Пусть в уравнении (9) $D_i = [3 \ 3 \ 1]^T$. Тогда уравнения наблюдателей производных сигнала $\xi_i(t)$ примут вид:

$$\dot{\xi}_i^1(t) = \xi_i^2(t) - 3\mu^{-1}(\xi_i^1(t) - \zeta_i(t)),$$

$$\dot{\xi}_i^2(t) = \xi_i^3(t) - 3\mu^{-1}(\xi_i^2(t) - \zeta_i(t)),$$

$$\dot{\xi}_i^3(t) = -\mu^{-2}(\xi_i^3(t) - \zeta_i(t)), \quad \xi_i(0) = [0 \ 0 \ 0]^T.$$

Закон управления (7) можно сформировать как $u_i(t) = -\alpha^{-1}(\dot{\xi}_i^3 + \xi_i^3 + 2\xi_i^2 + \xi_i^1)$.

Задав в уравнениях (13) $Q_1 = Q_2 = 0,1I_2$ и воспользовавшись условием (12), получим интервал для μ_0 : $\mu_0 < 0,05$. Выберем $\mu = 0,01$, $\alpha = 1$ и подставим их в уравнения вспомогательного контура, наблюдателя и закона управления.

Проверим работоспособность системы управления при следующих параметрах в каждой локальной подсистеме: S_1 : $q_{31} = 1$, $q_{21} = 1$, $q_{11} = -5$, $q_{01} = -5$, $r_{11} = 0$, $r_{01} = 1$, $d_1 = 5$, $f_1(t) = 2 + \sin t$, $y_1(0) = 1$, $\dot{y}_1(0) = 1$, $\ddot{y}_1(0) = 1$; S_2 : $q_{32} = 0$, $q_{22} = 1$, $q_{12} = -3$, $q_{02} = -3$, $r_{12} = 0$, $r_{02} = 1$, $d_2 = 1$, $f_2(t) = 1 + 8\sin 0,5t$, $y_2(0) = 1$, $\dot{y}_2(0) = -2$; S_3 : $q_{33} = 1$, $q_{23} = 1$, $q_{13} = -2$, $q_{03} = -3$, $r_{13} = 1$, $r_{03} = 1$, $d_3 = 3$, $f_3(t) = 1 - 2\sin 1,5t$, $y_3(0) = -3$, $\dot{y}_3(0) = 1$, $\ddot{y}_3(0) = -2$; S_4 : $q_{34} = 0$, $q_{24} = 1$, $q_{14} = 5$, $q_{04} = -5$, $r_{14} = 1$, $r_{04} = 2$, $d_4 = 1$, $f_4(t) = 2 + 4\sin 2t$, $y_4(0) = 3$, $\dot{y}_4(0) = 1$.

Положим, что структура сети S (см. рис. 1) изменялась последовательно каждые 0,01 с. Ради простоты элементы весовых матриц смежности $C(t)$ и $S(t)$ зададим в виде: $c_{ij}(t) = 1 + 0,5\sin(jt)$ и $s_{iL}(t) = 2 + 0,5\cos(it)$. На рис. 2 приведены результаты переходных процессов по ошибкам $\tilde{y}_1(t) = y_1(t) - y_L(t)$, $\tilde{y}_2(t) = y_2(t) - y_L(t)$, $\tilde{y}_3(t) = y_3(t) - y_L(t)$ и $\tilde{y}_4(t) = y_4(t) - y_L(t)$ соответственно.

Результаты моделирования показали, что предложенная система управления обеспечивает условие ε -синхронизации (3) с заданной точностью. Причем, при уменьшении числа α во вспомогательном контуре (6), законе управления (7) и μ в наблюдателе (9), уменьшается значение ε в целевом условии (3), что подтверждает результаты аналитических расчетов.



ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Решена задача децентрализованного робастного управления по выходу динамической сетью с переменной структурой, где каждая ее подсистема, за исключением лидера, задана структурно неопределенным нелинейным дифференциальным уравнением, подверженным действию неконтролируемых возмущений. При решении рассматривался орграф, вершины которого ассоциированы с соответствующими подсистемами сети. Синтезирован алгоритм, позволяющий обеспечить ε -синхронизацию в сети с заданной точностью и компенсировать неизвестные возмущения, действующие на локальные объекты.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство утверждения. Рассмотрим вспомогательную лемму.

Лемма. Пусть задан орграф Γ_l , у которого есть ориентированное остоное дерево. Рассмотрим квадратичную форму

$$S(t) = \sum_{i=1}^k \left[\sum_{j \in N_{jL}} c_{ij}(t)(y_i(t) - y_j(t)) + s_{iL}(t)(y_i(t) - y_L(t)) \right]^2. \quad (П.1)$$

Тогда (П.1) можно оценить снизу как

$$S(t) \geq 0,5\underline{\rho}_l(y(t) - y_0(t))^T(y(t) - y_0(t)), \quad (П.2)$$

где $\underline{\rho}_l$ — наименьшее ненулевое собственное число симметризованного лапласиана $L(\Gamma) = B^T B$, B — лапласиан орграфа Γ_l [14].

Доказательство леммы. Оценим снизу квадратичную форму (П.1):

$$S(t) = \sum_{i=1}^k \left[\sum_{j \in N_j} c_{ij}(t)(y_i(t) - y_j(t)) + s_{iL}(t)(y_i(t) - y_L(t)) \right]^2 \geq \underline{c} \sum_{i=1}^k \left[\sum_{j \in N_j} \bar{c}_{ij}(t)(y_i(t) - y_j(t)) + \bar{s}_{iL}(t)(y_i(t) - y_L(t)) \right]^2,$$

где $\underline{c} = \min_i \{c_{ij}(t), s_{iL}(t)\}$, $\bar{c}_{ij} = 1$, если $c_{ij}(t) > 0$, $\bar{c}_{ij} = 0$, если $c_{ij}(t) = 0$, $\bar{s}_{iL} = 1$, если $s_{iL}(t) > 0$, $\bar{s}_{iL} = 0$, если $s_{iL}(t) = 0$. Преобразуем последнее выражение к виду

$$\underline{c} \sum_{i=1}^k \left[\sum_{j \in N_j} \bar{c}_{ij}(y_i(t) - y_j(t)) + \bar{s}_{iL}(y_i(t) - y_L(t)) \right]^2 = 0,5\underline{c}(y(t) - y_0(t))^T + L(\Gamma_l)(y(t) - y_0(t)).$$

Здесь $y(t) = [y_1(t), \dots, y_k(t)]^T$, $y_0(t) = [1, \dots, 1]^T \otimes y_L(t)$, \otimes — кронекерово произведение (прямое произведение) [15].

Известно [3, 4], что если орграф Γ_l содержит ориентированное остоное дерево, то это равносильно его связности. Следовательно, симметризованный лапласиан $L(\Gamma)$ — неотрицательная матрица с неотрицательными действительными собственными числами [15]. Но тогда, квадратичную форму (П.1) можно оценить в виде (П.2). ♦

Вернемся к доказательству утверждения. Рассмотрим систему, составленную из уравнений (10), (11) и записанную в виде:

$$\begin{aligned} \dot{x}_i(t) &= Ax_i(t) + \mu_2^{\gamma-1} \bar{b} g^T \Delta_i(t), \\ \mu_1 \dot{\eta}_i(t) &= G\eta_i(t) + \mu_2 b \zeta_i(t). \end{aligned} \quad (П.3)$$

Вспользуемся первой леммой [14]. Согласно работе [16], положим в системе уравнений (П.3) $\mu_2 = 0$. Очевидно, что в этом случае система (П.3) асимптотически устойчива, так как A_N и G — гурвицевы. Следовательно, векторы $x_i(t)$ и $\eta_i(t)$ ограничены вместе со своими первыми производными. Тогда в системе уравнений (П.3) ограничены сигналы $\Delta_i(t)$ и $\zeta_i(t)$ [16]. Из ограниченности $\Delta_i(t)$ следует, что в уравнении (9) $|\xi_i(t)| < \infty$, а значит, из закона управления (7) $|u_i(t)| < \infty$. Однако необходимо определить μ_0 , при котором исходная система будет диссипативной. Пусть $\mu_1 = \mu_2 = \mu_0$. Выберем функцию Ляпунова:

$$V(t) = \sum_{i=1}^k x_i^T(t) P x_i(t) + \sum_{i=1}^k \eta_i^T(t) H \eta_i(t). \quad (П.4)$$

Принимая во внимание уравнения (13), возьмем от функции Ляпунова (П.4) производную по времени вдоль траекторий (П.3):

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &= \sum_{i=1}^k [-x_i^T(t) Q_1 x_i(t) + 2\mu_0^{\gamma-1} x_i^T(t) P \bar{b} g^T \Delta_i(t)] + \\ &+ \sum_{i=1}^k [-\mu_0^{-1} \eta_i^T(t) Q_2 \eta_i(t) + \eta_i^T(t) H b \zeta_i(t)]. \end{aligned} \quad (П.5)$$

Оценим второе и четвертое слагаемые:

$$\begin{aligned} 2\mu_0^{\gamma-1} \sum_{i=1}^k x_i^T(t) P \bar{b} g^T \Delta_i(t) &\leq \\ &\leq 2\mu_0^{\gamma-1} \sum_{i=1}^k [x_i^T(t) P \bar{b} g^T \bar{b}^T P x_i(t) + |\Delta_i(t)|^2]; \\ \sum_{i=1}^k \eta_i^T(t) H b \zeta_i(t) &\leq \sum_{i=1}^k [\mu_0^{-1} \eta_i^T(t) H b b^T H \eta_i(t) + \mu_0 |\zeta_i(t)|^2]. \end{aligned}$$

Примем $\psi = \sup_i \{2\mu_0^{\gamma-2} |\Delta_i(t)|^2 + |\zeta_i(t)|^2\}$. Тогда производную (П.5) можно переписать как

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) \leq & - \sum_{i=1}^k x_i^T(t) (Q_1 - 2\mu_0^{\gamma-1} P \bar{b} g^T g \bar{b}^T P) x_i(t) - \\ & - \mu_0^{-1} \sum_{i=1}^k \eta_i^T(t) (Q_2 - \mu_0 H b b^T H) \eta_i(t) + k\mu_0 \psi. \end{aligned}$$

Если выполнены условия (12), то $\dot{V}(t) \leq -\beta V(t) + k\mu_0 \psi$, $\beta > 0$. Пусть $Q_1 - 2\mu_0^{\gamma-1} P \bar{b} g^T g \bar{b}^T P = R_1 > 0$ и $Q_2 - \mu_0 H b b^T H = R_2 > 0$. Перепишем последнее неравенство как

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) \leq & - \sum_{i=1}^k x_i^T(t) R_1 x_i(t) - \\ & - \mu_0^{-1} \sum_{i=1}^k \eta_i^T(t) R_2 \eta_i(t) + k\mu_0 \psi. \end{aligned} \quad (\text{П.6})$$

Выберем число β из условия $\beta = \min\{\lambda_{\max}^{-1}(P)\lambda_{\min}(R_1), \mu_0^{-1}\lambda_{\max}^{-1}(H)\lambda_{\min}(R_2)\}$. Тогда, с учетом (П.4), перепишем (П.6) как

$$\dot{V}(t) \leq -\beta V(t) + k\mu_0 \psi.$$

Решив последнее неравенство, получим

$$V(t) \leq V(0)e^{-\beta t} + (1 - e^{-\beta t})k\mu_0 \psi.$$

Принимая во внимание систему уравнений (П.3), оценим снизу функцию Ляпунова (П.4):

$$\begin{aligned} V(t) & \geq \sum_{i=1}^k x_i^T(t) P x_i(t) \geq \lambda_{\min}(P) \sum_{i=1}^k x_i^T(t) x_i(t) \geq \\ & \geq \lambda_{\min}(P) \sum_{i=1}^k e_i^2(t) = \lambda_{\min}(P) \sum_{i=1}^k \left[\sum_{j \in N_j} c_{ij}(t)(y_i(t) - y_j(t)) + \right. \\ & \quad \left. + s_i(t)(y_i(t) - y_L(t)) \right]^2 \geq \\ & \geq 0,5 \underline{c} \underline{\rho} \lambda_{\min}(P) (y(t) - y_0(t))^T (y(t) - y_0(t)), \end{aligned}$$

где $\underline{\rho} = \min_{l=1, \dots, m} \{\rho_l\}$. Тогда для фиксированного значения времени $t = T$ следует оценка величины ε в целевом условии (3):

$$\begin{aligned} \varepsilon & \leq \sqrt{2(\underline{c} \underline{\rho} \lambda_{\min}(P))^{-1} V(T)} \leq \\ & \leq \sqrt{2(\underline{c} \underline{\rho} \lambda_{\min}(P))^{-1} [V(0)e^{-\beta T} + (1 - e^{-\beta T})k\mu_0 \psi]}. \end{aligned} \quad (\text{П.7})$$

Оценки (12) и (П.7) достаточно грубые. Но из них видно, что уменьшением числа μ_0 можно получить требуемую точность ε в условии (3).

ЛИТЕРАТУРА

1. Fax J.A., Murray R.M. Information flow and cooperative control of vehicle formations // IEEE Trans. on Automatic Control. — 2004. — Vol. 49, N 9. — P. 1465–1476.
2. Li Z., Duan Z., Huang L. Leader-follower consensus of multi-agent systems // American control conference. — St. Louis, 2009. — P. 3256–3261.
3. Ren W., Beard R.W. Consensus seeking in multiagent systems under dynamically changing interaction topologies // IEEE Trans. on Automatic Control. — 2005. — Vol. 50, N 5. — P. 655–661.
4. Агаев Р.П., Чеботарев П.Ю. Матрица максимальных исходящих лесов орграфа и ее применения // Автоматика и телемеханика. — 2000. — № 9. — С. 15–43.
5. Джунусов И.А., Фрадков А.Л. Адаптивная синхронизация сети взаимосвязанных нелинейных систем Лурье // Автоматика и телемеханика. — 2009. — № 7. — С. 111–126.
6. Das A., Lewis F.L. Distributed adaptive control for synchronization of unknown nonlinear networked systems // Automatica. — 2010. — Vol. 46, N 12. — P. 2014–2021.
7. Цыкунов А.М. Алгоритмы робастного управления с компенсацией ограниченных возмущений // Автоматика и телемеханика. — 2007. — № 7. — С. 103–115.
8. Фуртат И.Б., Цыкунов А.М. Робастное управление нестационарными нелинейными структурно неопределенными объектами // Проблемы управления. — 2008. — № 5. — С. 2–7.
9. Фрадков А.Л. Кибернетическая физика: принципы и примеры. — СПб.: Наука, 2003. — 208 с.
10. Cheng L., Hou Z.-G., Tan M., Liu D., Zou A.-M. Multi-agent based adaptive consensus control for multiple manipulators with kinematic uncertainties // IEEE Int. Symposium on Intelligent Control. — San Antonio, 2008. — P. 189–194.
11. Dib W., Barabanov A., Ortega R., Lamnabhi-Lagarrigue F. On transient stability of multi-machine power systems: a «globally» convergent controller for structure-preserving models // Proc. of the 17-th World Congress IFAC. — Seoul, 2008. — P. 9398–9403.
12. Hill D.J., Chen G. Power systems as dynamic network // Circuits and Systems. — 2006. — ISCAS 2006. — P. 722–725.
13. Atassi A.N., Khalil H.K. A separation principle for the stabilization of class of nonlinear systems // IEEE Trans. on Automatic Control. — 1999. — Vol. 44, N 9. — P. 1672–1687.
14. Godsil C., Royle G. Algebraic graph theory. — New York: Springer-Verlag, 2001. — 232 p.
15. Ланкастер П. Теория матриц. — М.: Наука, 1973. — 280 с.
16. Брусин В.А. Об одном классе сингулярно возмущенных адаптивных систем. I // Автоматика и телемеханика. — 1995. — № 4. — С. 119–127.

Статья представлена к публикации членом редколлегии В.Ю. Рутковским.

Фуртат Игорь Борисович — канд. техн. наук, доцент, Астраханский государственный технический университет, ☎(8512) 61-42-48, ✉cainenash@mail.ru.