УДК 519.865.7;330.46

# ИНВЕСТИЦИИ И СБАЛАНСИРОВАННЫЙ РОСТ В МОДЕЛИ ДЕЦЕНТРАЛИЗОВАННОЙ ЭКОНОМИКИ[1]

А.П. Абрамов

Рассмотрены две схемы выхода на неймановскую траекторию в модели децентрализованной экономики с учетом инвестиций. Первая из них базируется на натуральных показателях, вторая — на денежных расчетах хозяйствующих субъектов. Приведены условия, при которых эти схемы обеспечивают асимптотическое решение указанной задачи.

**Ключевые слова:** децентрализованная экономика, сбалансированный рост, инвестиции.

## ВВЕДЕНИЕ

Теория сбалансированного роста — классический раздел математической экономики, с ее основными результатами можно ознакомиться в работе [1]. Модели экономики, изучаемые этой теорией, неявно предполагают существование единого управляющего центра, обладающего всей информацией об экономической системе. Этот центр полностью контролирует производство и распределение продукции, а все его решения выполняются абсолютно точно. Ясно, что подобные модели не соответствуют принципам рыночной экономики, в которой хозяйствующие субъекты самостоятельно планируют и организуют свою работу. Один из возможных подходов к построению общей схемы линейной теории экономического роста для децентрализованной экономики предложен в статье [2]. Он базируется на стандартной гейловской теории в совокупности с моделью равновесия Вальраса. Однако анализ данного подхода показывает необходимость централизованного распределения избыточных продуктов. Альтернативный подход, не использующий равновесие по Вальрасу, предложен в работе [3]. В настоящей статье развивается это направление и исследуются возможные схемы выхода на неймановскую траекторию децентрализованной экономики с учетом фактора инвестиций.

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 10-07-00286).

## 1. ОПИСАНИЕ МОДЕЛИ

Рассмотрим замкнутую динамическую модель производства и товарообмена, в которой фигурирует $n$ монопродуктовых отраслей, причем каждый из видов продукции производится только одной отраслью. Состояние данной экономической системы отслеживается в дискретные моменты времени, которые обозначаются индексом $t$, $t = 0, 1, 2, ...$ Шаги модели, т. е. промежутки времени между соседними моментами, будем помечать тем же индексом $t$, причем номер шага соответствует правой границе. Длительности всех шагов предполагаются одинаковыми и равными одному производственному циклу во всех отраслях. Продукция, произведенная на некотором шаге, должна быть использована до окончания следующего шага.

Введем обозначения:

$i = 1, ..., n$ — индекс отрасли;

$N_i^{r+}$ — подмножество отраслей, продукция которых необходима отрасли $i$ в качестве сырья или комплектующих для выпуска продукции;

$N_i^{k+}$ — подмножество отраслей, продукция которых необходима отрасли $i$ для наращивания производственных мощностей;

$N_i^{r-}$ — подмножество отраслей, потребляющих продукцию отрасли $i$ в качестве сырья или комплектующих;

$N_i^{k-}$ — подмножество отраслей, потребляющих продукцию отрасли $i$ в качестве фондообразующей;

$\xi_i(t)$ — производственные мощности отрасли $i$ на шаге $t$, равные максимально возможному объему производства на данном шаге;

$x_i(t)$ — объем выпуска продукции отраслью $i$ на шаге $t$;

$y_{ji}(t)$ — объем производственного ресурса вида $j$, $j \in N_i^{r+}$, которым располагает отрасль $i$ в начале шага $t$;

$z_{ji}(t)$ — объем капитального ресурса вида $j$, $j \in N_i^{k+}$, которым располагает отрасль $i$ в начале шага $t$.

Вообще говоря, номенклатуры производственных и капитальных ресурсов не совпадают. Однако чтобы не усложнять описание модели, явно этот факт не будет учитываться. Предполагается, что множества $N_i^{r+}$, $N_i^{k+}$, $N_i^{r-}$, $N_i^{k-}$, $i = 1, ..., n$ не пусты, а производственная функция отрасли $i$ имеет вид

$$x_i(t) = \min\left\{\xi_i(t), \min_{j \in N_i^{r+}}\left\{\frac{y_{ji}(t)}{y_{ji}^0}\right\}\right\}, \quad i = 1, ..., n, \quad (1)$$

где $y_{ji}^0 > 0$ — минимально необходимое количество продукта вида $j$, которое требуется для производства одной единицы продукции вида $i$. Эту функцию называют производственной функцией Леонтьева, а также производственной функцией с фиксированными пропорциями факторов [4, 5].

Выпишем балансовое уравнение для продукции, произведенной отраслью $i$ на шаге $t$:

$$x_i(t) = \sum_{j \in N_i^{r-}} y_{ij}(t+1) + \sum_{j \in N_i^{k-}} z_{ij}(t+1) + v_i(t), \quad (2)$$

где переменная $v_i(t)$, равна объему нераспределенной продукции.

Динамику производственных мощностей отрасли $i$ будем описывать уравнением вида

$$\xi_i(t) = (1-\mu)\xi_i(t-1) + \min_{j \in N_i^{k+}}\left\{\frac{z_{ji}(t-\tau)}{z_{ji}^0}\right\},$$
$$i = 1, ..., n, \quad (3)$$

где $\mu$ — коэффициент амортизации, который считается одинаковым для всех отраслей; $z_{ji}^0$ — минимально необходимый объем продукции вида $j$; необходимый для увеличения на единицу производственных мощностей отрасли $i$, $\tau$ — временной лаг, характеризующий запаздывание в создании новых мощностей. Этот параметр предполагается одинаковым для всех отраслей и всех видов фондообразующей продукции и равным числу шагов, за которое происходит освоение этой продукции. Случай $\tau = 0$ означает возможность ее использования в качестве основных производственных фондов уже на следующем производственном цикле. Предположим, что система функционирует так, что на всех шагах вся продукция полностью распределяется, и в процессах (1) и (3) нет избыточных ресурсов (в том числе мощностей в процессе (1)). Это означает, что $x_i(t) = \xi_i(t)$ при всех $i$ и $t$. В этом случае из выражений (1)—(3) имеем матричное уравнение вида

$$x(t) = Yx(t+1) + $$
$$+ Z(x(t+\tau+1) - (1-\mu)x(t+\tau)), \quad (4)$$

где $x(\cdot)$ — вектор-столбцы, а элементы $\bar{y}_{ij}$ и $\bar{z}_{ij}$ квадратных матриц $Y$ и $Z$ порядка $n$ определены соответственно так:

$$\bar{y}_{ij} = \begin{cases} y_{ij}^0, & i \in N_j^{r+}; \\ 0, & i \notin N_j^{r+}, \end{cases} \qquad \bar{z}_{ij} = \begin{cases} z_{ij}^0, & i \in N_j^{k+}; \\ 0, & i \notin N_j^{k+}. \end{cases}$$

Легко видеть, что указанный режим может быть обеспечен при постоянном темпе роста $\gamma$ объемов выпуска всех видов продукции: $x_i(t+1)/x_i(t) = \gamma$ для всех $i$ и $t$. В этом случае уравнение (4) принимает вид

$$(1/\gamma)x(t) = (Y + (\gamma^{\tau} - (1-\mu)\gamma^{\tau-1})Z)x(t).$$

Оно показывает, что достаточное условие такого режима состоит в наличии у матрицы

$$M(\gamma) = Y + (\gamma^{\tau} - (1-\mu)\gamma^{\tau-1}) \quad (5)$$

положительного собственного числа $1/\gamma$ и соответствующего строго положительного собственного вектора $x$, а начальный вектор $x(0)$ должен быть коллинеарен вектору $x$. Поскольку интерес представляют только экономические системы с возможностью расширенного воспроизводства, сформулируем условия, при которых существует такое $\gamma > 1$, что матрица $M(\gamma)$ имеет собственное число $1/\gamma$. Для удобства заменим в матрице (5) параметр $\gamma$ на параметр $\lambda = 1/\gamma$ и рассмотрим матрицу $\tilde{M}(\lambda) \equiv M(1/\lambda)$.

**Теорема 1.** *Пусть матрица* $(Y + Z)$ *неразложима, и все ее столбцевые суммы строго меньше единицы, т. е.*

$$\sum_{i=1}^{n}(\bar{y}_{ij} + \bar{z}_{ij}) < 1, \quad j = 1, ..., n.$$

*Тогда существует скаляр* $\lambda^* \in (0, 1)$*, являющийся собственным числом матрицы* $\tilde{M}(\lambda^*)$*, которому отвечает единственный (с точностью до скалярного множителя) собственный вектор* $x^*$*, все координаты которого ненулевые и одного знака. Если найдется такой скаляр* $\tilde{\lambda} \in (0, \lambda^*)$*, что он также является собственным числом матрицы* $\tilde{M}(\tilde{\lambda})$*, то любой со-*

*ответствующий ему собственный вектор имеет компоненты разных знаков.* ♦

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству теоремы 2.6 в книге [6, *гл. 2*]. Таким образом, если $x(0)$ — фробениусов вектор матрицы $\tilde{M}(\lambda^*)$, то экономическая система может функционировать в режиме *неймановского процесса,* т. е. иметь *сбалансированный рост с максимальным темпом* $\gamma$ [6]. При этом траектория выпусков будет принадлежать *неймановскому лучу*, называемому также *магистралью* [1]. Для краткости, указанный режим функционирования будем именовать *магистральным.*

Всюду далее предполагается, что параметры экономической системы удовлетворяют условиям теоремы 1 и, значит, $\gamma \equiv 1/\lambda^* > 1$.

## 2. ПЛАНИРОВАНИЕ НА ОСНОВЕ МАКСИМИЗАЦИИ ПРИБЫЛИ

До сих пор в модели неявно предполагалось наличие централизованной системы управления, которая полностью контролирует производство и распределение продукции. Далее будем считать, что отрасли работают в условиях хозяйственной автономии. При этом каждая отрасль $i$ стремится максимизировать свою прибыль $\Pi_i(t)$ на текущем шаге $t$, определяемую как разность между выручкой и соответствующими затратами:

$$\Pi_i(t) = p_i(t)x_i(t) - \sum_{j \in N_i^{r+}} p_j(t-1)y_{ji}(t) - \sum_{j \in N_i^{k+}} p_j(t-1)z_{ji}(t), \qquad (6)$$

где цена $p_i(t)$ связана с объемом продаж, равным на магистрали объему производства, $x_i(t)$ линейным уравнением вида

$$p_i(t) = a_i(t) + b_i(t)x_i(t),\quad i = 1, ..., n, \quad t = 0, 1, ..., \qquad (7)$$

в котором параметры $a_i(t) > 0$, $b_i(t) < 0$ имеют фиксированные значения при данных $i$ и $t$. Таким образом, отрицательное значение $b_i(t)$ в уравнении (7) снижает цену с ростом объема продаж.

Ясно, что параметр $a_i(t)$ равен предельному значению цены, когда объем реализации (производства) данного вида продукции стремится к нулю. Параметр $b_i(t)$ указывает, насколько снижается цена при увеличении объема реализации (производства) на единицу. Будем называть их соответственно *базовой ценой* и *параметром скидки*. При этом цена должна быть положительной:

$$a_i(t) + b_i(t)x_i(t) > 0, \quad i = 1, ..., n; \quad t = 0, 1...$$

В магистральном режиме выражение (6) принимает вид

$$\Pi_i(t) = (a_i(t) + b_i(t)x_i(t))x_i(t) - \sum_{j \in N_i^{r+}} (a_j(t-1) + b_j(t-1)x_j(t-1))y_{ji}^0 x_i(t) - \gamma^{\tau-1}(\gamma - (1-\mu)) \times \sum_{j \in N_i^{k+}} (a_j(t-1) + b_j(t-1)x_j(t-1)z_{ji}^0 x_i(t).$$

Так как выбор переменной $x_i(t)$ происходит при фиксированных ценах предыдущего шага, и $b_i(t) < 0$, то максимум прибыли отрасли $i$ на шаге $t$ достигается при

$$x_i(t) = -\frac{1}{2b_i(t)}\Big(a_i(t) - \sum_{j \in N_i^{r+}} (a_j(t-1) + b_j(t-1)x_j(t-1))y_{ji}^0 - \gamma^{\tau-1}(\gamma - (1-\mu)) \times \sum_{j \in N_i^{k+}} (a_j(t-1) + b_j(t-1)x_j(t-1))z_{ji}^0\Big). \qquad (8)$$

Отсюда следует, что в магистральном режиме коэффициенты $a_i(t)$ и $b_i(t)$ должны удовлетворять при всех $i$ и $t$ системе уравнений вида

$$a_i(t) + 2\gamma^t b_i(t)x_i(0) - \sum_{j \in N_i^{r+}} (a_j(t-1) + \gamma^{t-1}b_j(t-1)x_j(0))y_{ji}^0 - \gamma^{\tau-1}(\gamma - (1-\mu)) \times \sum_{j \in N_i^{k+}} (a_j(t-1) + \gamma^{t-1}b_j(t-1)x_j(0))z_{ji}^0) = 0.$$

Для этого достаточно, чтобы переменные $a_i(t)$ удовлетворяли системе уравнений

$$a_i(t) = \sum_{j \in N_i^{r+}} y_{ji}^0 a_j(t-1) + \gamma^{\tau-1}(\gamma - (1-\mu)) \times \sum_{j \in N_i^{k+}} z_{ji}^0 a_j(t-1), \qquad (9)$$

а переменные $b_i(t)$ — системе уравнений

$$b_i(t) = \frac{1}{2\gamma x_i(0)}\Big(\sum_{j \in N_i^{r+}} y_{ji}^0 x_j(0)b_j(t-1) + \gamma^{\tau-1}(\gamma - (1-\mu)) \sum_{j \in N_i^{k+}} z_{ji}^0 x_j(0)b_j(t-1)\Big). \qquad (10)$$

Обозначим через $a(0)$ и $b(0)$ вектор-строки, образованные из начальных значений ценовых коэффициентов. Пусть $a(0) = p^*$, где $p^*$ — левый фробениусов вектор матрицы $\tilde{M}(\lambda^*)$, а $-b(0)$ — левый фробениусов вектор матрицы $\hat{M}(\lambda^*)$, элементы которой связаны с элементами матрицы $\tilde{M}(\lambda^*)$ равенствами вида $\hat{m}_{ij} = x_i(0)/x_j(0)\tilde{m}_{ij}$. При $t \geqslant 1$ положим

$$a_i(t) = \gamma^{-1}a_i(t-1),\ b_i(t) = 0{,}5\gamma^{-2}b_i(t-1),\quad i = 1, \dots, n. \qquad (11)$$

Элементарные вычисления показывают, что при такой динамике ценовых коэффициентов в магистральном режиме справедливы следующие утверждения:

— выполняются динамические уравнения (9) и (10);

— если $a_i(0)$ и $b_i(0)$ таковы, что $p_i(0) > 0$, то $p_i(t) > 0$ при всех $t \geqslant 1$;

— все отрасли имеют положительную прибыль на всех шагах $\Pi_i(t) = -b_i(t)x_i^2(t) > 0$;

— все отрасли имеют нулевые платежные балансы $B_i(t)$ на всех шагах

$$B_i(t) \equiv (a_i(t) + b_i(t)x_i(t))x_i(t) - \sum_{j \in N_i^{r+}} (a_j(t) + b_j(t)x_j(t))y_{ji}(t+1) - \sum_{j \in N_i^{k+}} (a_j(t) + b_j(t)x_j(t))z_{ji}(t+1) = 0.$$

Отметим, что положительная прибыль всех отраслей на каждом шаге не противоречит последнему равенству, так как закупка ресурсов и продажа произведенной продукции происходят со сдвигом в один временной шаг.

Легко видеть, что планирование выпуска согласно выражению (8) в совокупности с соотношениями (11) обеспечивает системе магистральный режим при соответствующих начальных условиях.

## 3. ПЕРВАЯ СХЕМА ВЫХОДА НА НЕЙМАНОВСКУЮ ТРАЕКТОРИЮ

Рассмотренный в § 2 подход решает задачу удержания экономической системы на луче Неймана. Ясно, что для его применения векторы $x(0)$, $\xi(1)$, ..., $\xi(\tau - 2)$ должны иметь согласованные значения, а всем отраслям должен быть известен максимальный темп сбалансированного роста $\gamma$. Если требуется, чтобы все отрасли имели нулевые платежные балансы на всех шагах, то вектор-строки $a(0)$ и $-b(0)$, образованные из соответствующих ценовых коэффициентов, должны быть фробениусовыми векторами для матриц $\tilde{M}(\lambda^*)$и $\hat{M}(\lambda^*)$соответственно. В этом случае отрасли, определяя цены на свою продукцию на основе динамических уравнений (11), и планируя производство исходя из максимума прибыли, обеспечивают системе магистральный режим.

Выполнение на практике всех этих условий представляется маловероятным. Кроме того, любые сбои в работе системы сразу уводят систему с магистрали, при этом для некоторых видов продукции возникает превышение спроса над предложением. В этих обстоятельствах данный механизм планирования перестает работать ввиду отсутствия процедур принятия управленческих решений в таких ситуациях. Поэтому заслуживают изучения схемы планирования со следующими свойствами:

— не требуют централизованного управления;

— могут вырабатывать решения вне магистрального режима и при этом (асимптотически) выводят систему на магистраль;

— не уводят систему с магистрали, если она работает в этом режиме;

— имеют ясное экономическое обоснование.

Описание работы многосекторной экономики вне магистрального режима требует введения дополнительных переменных для отрасли $i$, $i = 1, \dots, n$, в которых явно проявляется ее экономическая самостоятельность, и которые должны быть определены к моменту перехода от шага $t - 1$ к шагу $t$:

$x_i^p(t)$ — планируемый объем выпуска на шаге $t$;

$\Delta k_i^p(t + \tau)$ — план ввода производственных мощностей к началу шага $t + \tau$;

$x_i^s(t-2)$ — объем реализованной (отгруженной потребителям) продукции, которая была произведена на шаге $t - 2$.

Совокупность указанных планов позволяет определить для отрасли $i$ показатель $x_i^d(t-1)$ — суммарный спрос потребителей на продукцию шага $t - 1$, вычисляемый по формуле

$$x_i^d(t-1) = \sum_{j \in N_i^{r-}} y_{ij}^0 x_j^p(t) + \sum_{j \in N_i^{k-}} z_{ij}^0 \Delta k_j^p(t+\tau),\quad i = 1, \dots, n,$$

которая предполагает, что все потребители стремятся достичь планируемых показателей наиболее экономным способом.

Опишем схему функционирования данной экономической системы, которая при некоторых условиях выводит систему на магистраль, а также обеспечивает сохранение магистрального режима.

**Базовая схема функционирования системы**. Первоначальный план выпуска отрасли $i$ на шаге $t$, а также план ввода мощностей этой отрасли к началу шага $t + \tau$ однозначно определяются объемом реализации продукции, произведенной на шаге $t - 2$:

$$x_i^p(t) = \alpha x_i^s(t-2),\ \Delta k_i^p(t+\tau) = \beta x_i^s(t-2),\quad t \geqslant 2,\quad i = 1, \dots, n, \qquad (12)$$

где коэффициенты $\alpha$ и $\beta$ одни и те же для всех отраслей на всех шагах. Наряду с показателями (12) отрасль $i$ вычисляет коэффициент

$$\chi_i(t) = x_i^p(t)/\xi_i(t), \quad i = 1, ..., n,$$

который соизмеряет первоначальный план выпуска с имеющимися мощностями. Далее, суммируя заявки от потребителей, отрасль $i$ определяет показатель $x_i^d(t-1)$ первоначального спроса на свою продукцию. Поскольку в момент перехода к шагу $t$ уже известен реальный объем выпуска $x_i(t-1)$, то отрасль $t$ вычисляет коэффициент

$$\eta_i(t) = x_i^d(t-1)/x_i(t-1), \quad i = 1, ..., n,$$

характеризующий обеспеченность планов ресурсом, который она произвела. Далее все отрасли обмениваются коэффициентами $\chi_i(t)$, $\eta_i(t)$ и каждая из отраслей (или некий информационный центр) вычисляет максимальное значение этих показателей:

$$\sigma(t) = \max_i\{\chi_i(t), \eta_i(t)\}.$$

Если окажется, что $\sigma(t) \leqslant 1$, то производственные мощности позволяют выполнить намеченные планы, спрос каждой из отраслей на ресурсы удовлетворяется полностью, объемы поставок определяются так:

$$y_{ij}(t) = y_{ij}^0 x_j^p(t), \quad j \in N_i^{r-},$$

$$z_{ij}(t) = z_{ij}^0 \Delta k_j^p(t+\tau), \quad j \in N_i^{k-}, \quad i = 1, ..., n,$$

и выпуск продукции равен первоначальному плану: $x_i(t) = x_i^p(t)$, $i = 1, ..., n$.

Ясно, что при $\sigma(t) > 1$ полное выполнение исходных планов становится невозможным. В этом случае все отрасли, используя данный параметр, уменьшают планы выпусков и планы развития:

$$x_i^p(t) := x_i^p(t)/\sigma(t), \ \Delta k_i^p(t+\tau) := \Delta k_i^p(t+\tau)/\sigma(t), \quad i = 1, ..., n. \qquad (13)$$

Соответственно, потребность в мощностях и спрос на все ресурсы также уменьшаются в $\sigma(t)$ раз, все скорректированные планы полностью выполнимы, а вновь вычисленный показатель $\sigma(t)$ равен единице.

Если причина корректировки состоит в нехватке ресурсов, то выражение (13) означает, что планы пересчитываются по наиболее дефицитному ресурсу, и этот ресурс распределяется пропорционально размерам спроса. Тем самым в модели ни у одной из отраслей нет привилегий по ресурсному обеспечению.

План, допустимый по ресурсам, однозначно определяет для отрасли $i$ показатель $x_i^s(t-1)$ — объем реализации продукции, произведенной на шаге $t-1$:

$$x_i^s(t-1) = \sum_{j \in N_i^{r-}} y_{ij}^0 x_j^p(t) + \sum_{j \in N_i^{k-}} z_{ij}^0 \Delta k_j^p(t+\tau), \quad i = 1, ..., n.$$

Далее начинается производственный цикл на шаге $t$, после завершения которого по показателям (12) определяются начальные значения векторов $x^p(t+1)$, $\Delta k_i^p(t+\tau+1)$ и т. д. Что касается начала работы схемы при $t = 2$, то вместо $x_i^s(0)$ в выражении (12) можно выбрать параметр $\xi_i(0)$. Кроме того, должны быть заданы векторы $x(1)$, $\xi(2)$, ..., $\xi(\tau+1)$. Легко видеть, что базовая схема функционирования системы позволяет вырабатывать все необходимые управленческие решения вне магистрали. С другой стороны, элементарная индукция показывает, что экономическая система будет функционировать в магистральном режиме, если выполнены следующие условия:

$$\beta/\alpha = \gamma^{\tau-1}(\gamma - (1-\mu)), \quad \alpha \geqslant \gamma^2, \qquad (14)$$

а) векторы $x(1) \equiv \xi(1) \equiv \gamma\xi(0)$ суть фробениусовы матрицы $M(\gamma)$,

b) производственные мощности растут с темпом $\gamma$ на шагах 2, ..., $\tau + 1$.

В общем случае имеет место следующий результат.

**Теорема 2.** *Пусть в условиях теоремы 1 матрица* $Y + Z$ *примитивна, векторы* $x(1)$, $\xi(1)$, ..., $\xi(\tau+1)$ *строго положительны и выполняются ограничения* (14). *Тогда базовая схема функционирования либо асимптотически выводит систему на магистраль, либо оставляет систему на магистрали при выполнении условий* а) *и* b). ♦

Доказательство. Введем параметр $\rho(t)$, показывающий степень выполнения первоначальных планов на шаге $t$:

$$\rho(t) = \begin{cases} 1, & \sigma(t) \le 1; \\ 1/\sigma(t), & \sigma(t) > 1. \end{cases}$$

Применяя индукцию, выпишем зависимость между векторами $x(t)$ и $x^p(2)$:

$$x(t) = \rho(t)\rho(t-1)...\rho(2)\alpha^{t-2}\tilde{M}(\lambda^*)^{t-2}x^p(2).$$

Используя фробениусово число $\lambda^*$ матрицы $\tilde{M}(\lambda^*)$, запишем последнее равенство так:

$$x(t) = \rho(t)\rho(t-1)...\rho(2)(\lambda^*\alpha)^{t-2}\left(\frac{\tilde{M}(\lambda^*)}{\lambda^*}\right)^{t-2}x^p(2).$$

Так как матрица $\tilde{M}(\lambda^*)$ неразложима и примитивна, то (см. книгу [6]) последовательность

$(\tilde{M}(\lambda^*)/\lambda^*)^t x^p(2)$ сходится к пределу $vx^*$ при $t \to \infty$, где $v = \|x^p(2)\|/\|x^*\|$, а $x^*$ — фробениусов вектор матрицы $M(\lambda^*)$. Это означает, что последовательность нормированных векторов вида $x(t)/\|x(t)\|$ при $t \to \infty$ сходится к пределу $x^*/\|x^*\|$, т. е. к нормированному фробениусову вектору матрицы $\tilde{M}(\lambda^*)$. Отсюда следует, что равенство $x(t + 1) = \gamma x(t)$ будет выполняться сколь угодно точно при достаточно больших $t$. ♦

## 4. ВТОРАЯ СХЕМА ВЫХОДА НА НЕЙМАНОВСКУЮ ТРАЕКТОРИЮ

В базовой схеме функционирования экономической системы применялись только натуральные показатели. Рассмотрим схему выхода на магистраль, основанную на финансовых показателях. Предположим, что в каждой отрасли есть собственник, которому принадлежат производственные мощности, а также (наемный) управляющий, который занимается текущей работой данной отрасли. Последний берет в аренду производственные мощности у собственника, выплачивая ему определенные платежи. В свою очередь, владелец капитала контролирует динамику мощностей посредством закупок фондообразующей продукции.

Конкретно, будем предполагать, что в момент перехода от шага $t - 1$ к шагу $t$ управляющий должен определить показатель $\Pi_i^{rp}(t)$ — планируемую величину производственной прибыли отрасли $i$ на шаге $t$. Оценивая показатель $\Pi_i^{rp}(t)$, он полагает, что будет продан весь объем продукции, планируемой к выпуску. Кроме того, ему известна функция $\pi_i(t)$ — размер платежа, которую установил владелец капитала за использование единицы производственных мощностей отрасли $i$ на шаге $t$. Поскольку использование капитальных и производственных ресурсов сверх необходимого минимума приводит к денежным потерям, то данный показатель вычисляется так:

$$\Pi_i^{rp}(t) = p_i(t)x_i^p(t) - \sum_{j \in N_i^{r+}} p_j(t-1)y_{ji}^0 x_i^p(t) - \pi_i(t)x_i^p(t). \qquad (15)$$

Предположим, что цены $p_i(t)$, $\pi_i(t)$ отвечают принципу «базовая ставка — скидка» и являются линейными функциями вида

$$p_i(t) = a_i^r(t) + b_i^r(t)x_i(t),$$
$$\pi_i(t) = a_i^k(t) + b_i^k(t)\xi_i(t), \qquad (16)$$

где $a_i^r(t) > 0$, $a_i^k(t) > 0$, $b_i^r(t) < 0$, $b_i^k(t) < 0$, а $\xi_i(t)$ — объем производственных мощностей, сданных в аренду. Как и ранее, функции $p_i(t)$, $\pi_i(t)$ могут принимать только положительные значения. Если $b_i^r(t) < b_i^k(t)$, то показатель (15) достигает максимума при

$$x_i^p(t) = \frac{1}{2(b_i^r(t) - b_i^k(t))} \times \left( a_i^r(t) - \sum_{j \in N_i^{r+}} p_j(t-1)y_{ji}^0 - a_i^k(t) \right). \qquad (17)$$

Предположим, что параметр $b_i^r(t)$ задан. Определим параметр $a_i^r(t)$ так:

$$a_i^r(t) = \sum_{j \in N_i^{r+}} p_j(t-1)y_{ji}^0 + a_i^k(t) - 2(b_i^r(t) - b_i^k(t))\alpha x_i^s(t-2), \qquad (18)$$

где коэффициент $\alpha$ тот же самый, что и в показателях (12). Подставляя это значение в формулу (17), получаем значение $x_i^p(t)$ из выражения (12). При этом показатель (15) принимает вид

$$\Pi_i^{rp}(t) = -(b_i^r(t) - b_i^k(t))(x_i^p(t))^2, \qquad (19)$$

и планируемая прибыль будет положительной, если $|b_i^r(t)| > |b_i^k(t)|$.

Что касается владельца капитала отрасли $i$, то в начале шага $t$ он планирует финансовые траты в объеме $\sum_{j \in N_i^{k+}} p_j(t-1)z_{ji}^p(t) = \sum_{j \in N_i^{k+}} p_j(t-1)z_{ji}^0 \Delta k_i^p(t+\tau)$ на закупку фондообразующей продукции. Эти траты должны принести доход на шаге $t + \tau$, а также на всех последующих шагах. С другой стороны, доход от сдачи в аренду мощностей на шаге $t + \tau$ зависит и от объема мощностей $\xi_i(t + \tau - 1)$, которые образовались в результате предыдущих капиталовложений. Поэтому, для простоты, будем оценивать ожидаемый эффект от рассматриваемых затрат только на шаге $t + \tau$. При этом введем фактор дисконтирования $\varepsilon = \varepsilon(\tau) < 1$, который приводит ценность денег шага $t + \tau$ к шагу $t$.

Представим планируемый объем мощностей $\xi_i^p(t + \tau)$ отрасли $i$ к началу шага $t + \tau$ в виде

$$\xi_i^p(t+\tau) = (1 - \mu)\xi_i^p(t + \tau - 1) + \Delta k_i^p(t + \tau). \qquad (20)$$

Собственник полагает, что этот объем будет равен соответствующему спросу на мощности.

Тогда планируемый размер прибыли $\Pi_i^{rp}(t)$ оценивается так:

$$\Pi_i^{rp}(t) = \varepsilon\pi_i(t+\tau)\xi_i^p(t+\tau) - \\ - \sum_{j \in N_i^{k+}} p_j(t-1)z_{ji}^p(t). \qquad (21)$$

Из выражений (16), (20) и (21) следует, что максимум прибыли, как функции $\Delta k_i^p(t+\tau)$, достигается при

$$\Delta k_i^p(t+\tau) = \\ = -\frac{a_i^k(t+\tau) - \varepsilon^{-1}\sum\limits_{j \in N_i^{k+}} p_j(t-1)z_{ji}^0 + 2b_i^k(t+\tau)(1-\mu)\xi_i^p(t+\tau-1)}{2b_i^k(t+\tau)}. \qquad (22)$$

Предположим, что параметр $b_i^k(t+\tau)$ задан. Определим параметр $a_i^k(t+\tau)$ так:

$$a_i^k(t+\tau) = \varepsilon^{-1}\sum_{j \in N_i^{k+}} p_j(t-1)z_{ji}^0 - 2b_i^k(t+\tau) \times \\ \times ((1-\mu)\xi_i^p(t+\tau-1) + \beta x_i^s(t-2)), \qquad (23)$$

где коэффициент $\beta$ тот же самый, что и в выражении (12). Подстановка этого значения в формулу (22) дает $\Delta k_i^p(t+\tau)$ из выражения (12). При этом формула (21) принимает вид

$$\Pi_i^{rp}(t) = -\varepsilon b_i^k(t+\tau)(\Delta k_i^p(t+\tau))^2 + \varepsilon(a_i^k(t+\tau) + \\ + b_i^k(t+\tau)(1-\mu)\xi_i^p(t+\tau-1))(1-\mu)\xi_i^p(t+\tau-1).$$

Таким образом, в натуральных показателях данная схема идентична базовой схеме и, значит, также обеспечивает асимптотический выход на магистраль либо сохранение магистрального режима. Рассмотрим экономическую интерпретацию соотношений (18) и (23), сформулировав их в виде правил.

**Правило назначения базовой цены**. *В базовую цену закладываются издержки на производство единицы продукции плюс базовая ставка арендной платы плюс компенсация в двойном размере ожидаемых удельных потерь из-за скидок при планируемом объеме продаж.*

**Правило назначения базовой ставки арендной платы.** *Базовая ставка арендной платы должна быть равна издержкам (с учетом дисконта) на ввод в строй единицы мощностей плюс компенсация в двойном размере ожидаемых удельных потерь из-за скидок при сдаче мощностей в аренду.*

Рассмотренный финансовый механизм допускает определенный произвол в выборе параметров $b_i^r(t)$ и $b_i^k(t)$. Например, если их динамика описывается геометрической прогрессией вида $b_i^m(t) = \gamma^{-t}b_i^m(0)$, $m = r, k$; $b_i^r(0) < b_i^k(0) < 0$, $i = 1, ..., n$, то из соотношения (19) видно, что производственная прибыль каждой из отраслей асимптотически выходит на темп роста $\gamma$.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассмотренная модель показывает теоретическую возможность асимптотического выхода многосекторной экономики на неймановскую траекторию, когда отсутствует централизованное планирование и управление, а экономические агенты ориентируются на максимизацию своей прибыли. Тем не менее, некоторая координация планов работ отраслей необходима в рамках предложенной схемы. Задача координирующего органа состоит в определении «правильных» значений параметров $\alpha$ и $\beta$ (см. условия (14)) и передаче этих данных всем отраслям. Кроме того, координирующий орган должен установить такой порядок в сфере экономики, при котором ни одна из отраслей не имеет привилегий по ресурсному обеспечению.

## ЛИТЕРАТУРА


1. *Никайдо Х.* Выпуклые структуры и математическая экономика. — М.: Мир, 1972. — 520 с.
2. *Беленький В.З., Сластников А.Д.* Равновесная динамика замкнутого рынка монопродуктовых производств // Экономика и математические методы. — 1994. — № 4. — С. 112—128.
3. *Абрамов А.П.* О выходе на магистраль сбалансированного роста в модели замкнутой децентрализованной экономики // Математическое моделирование. — 2008. — № 2. — С. 3—12.
4. *Иванилов Ю.П., Лотов А.В.* Математические модели в экономике. — М.: Наука, 1979. — 304 с.
5. *Клейнер Г.Б.* Производственные функции: теория, методы, применение. — М.: Финансы и статистика, 1986. — 240 с.
6. *Ашманов С.А.* Введение в математическую экономику. — М.: Наука, 1984. — 294 с.


*Статья представлена к публикации членом редколлегии В.Н. Бурковым.*

**Абрамов Александр Петрович** — д-р физ.-мат. наук,
гл. науч. сотрудник, Учреждение Российской академии наук Вычислительный центр им. А.А. Дородницына РАН,
☎ (499) 135-00-80, ✉ apabramov@list.ru, apabra@ccas.ru.