

РОБАСТНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ЛИНЕЙНЫМИ СИНГУЛЯРНО-ВОЗМУЩЕННЫМИ ОБЪЕКТАМИ¹

А.М. Цыкунов

Решена задача управления линейным объектом, математическая модель которого описывается сингулярно-возмущенными дифференциальными уравнениями с априорно неизвестными параметрами. Получены алгоритмы управления, обеспечивающие компенсацию параметрических и внешних возмущений с требуемой точностью, а также условия, когда исходную модель можно декомпозировать путем выделения быстрой и медленной составляющих. Полученные результаты проиллюстрированы числовым примером.

Ключевые слова: робастное управление, наблюдатель производных, сингулярно-возмущенная система, вектор состояния, вспомогательный контур.

ВВЕДЕНИЕ

Трудности решения прикладных задач проектирования систем управления зачастую связаны со сложностью математических моделей объектов управления, а также с отсутствием информации о точных значениях их параметров. Для упрощения процедуры синтеза алгоритмов управления эффективно применяются различные методы декомпозиции [1], когда исходная математическая модель разделяется на более мелкие и простые, для которых автономно решаются необходимые задачи и тем самым в совокупности обеспечивается решение исходной проблемы. Один из таких методов состоит в декомпозиции, основанной на разделении разнотемповых движений. В результате получается сингулярно-возмущенная система дифференциальных уравнений. Задачи адаптивного управления объектами такого класса в условиях неопределенности исследованы в работах [1, 2], а оптимального управления — в работе [3]. В статье [2] выполнен анализ свойств устойчивости возмущенной нелинейной системой, когда в качестве паразитной динамики принимаются быстрые составляющие.

Применение такого способа декомпозиции требует решения вопроса, какие составляющие мож-

но считать быстрыми, чтобы алгоритм управления, синтезированный по упрощенной модели, был работоспособен для исходной системы.

В настоящей статье решается задача проектирования робастной системы управления объектом, для которого осуществлена декомпозиция математической модели на быстрые и медленные составляющие. Алгоритм управления получается с использованием редуцированной модели, и определяются условия, которым должны удовлетворять уравнения быстрых составляющих, чтобы система не потеряла работоспособности.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим объект управления, математическая модель которого в результате декомпозиции описывается системой дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + B\sigma(t) + Df(t), & y(t) &= Lx(t), \\ \theta \dot{z}(t) &= Fz(t) + bu(t), & \sigma(t) &= qz(t), \end{aligned} \quad (1)$$

где $x \in R^{n_1}$, $z \in R^{n_2}$ — векторы состояния медленных и быстрых составляющих соответственно, $y \in R$ и $u \in R$ — регулируемая переменная и управляющее воздействие, $\sigma \in R$ — выходной сигнал модели быстрых составляющих, $f(t)$ — внешнее возмущающее воздействие, $\theta > 0$ — малый параметр, A , B ,

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 09-08-00237).



D, L, F, b и q — числовые матрицы соответствующих порядков.

Требуется спроектировать систему слежения за эталонным сигналом $y_m(t)$ в условиях неопределенности параметров модели (1), чтобы было выполнено целевое условие

$$|y(t) - y_m(t)| < \delta \text{ при } t > T, \quad (2)$$

где $\delta > 0, T$ — время, по истечении которого с начала работы системы должно выполняться неравенство (2). Кроме того, будем считать, что производные входных и выходных сигналов, а также возмущение не измеряются, и в алгоритме управления не должны использоваться переменные быстрых составляющих $\sigma(t)$ и $z(t)$. Будем решать сформулированную задачу при следующих *предположениях*.

- Элементы матриц A, B, D, L, F, b и q принадлежат известному ограниченному множеству возможных значений Ξ .
- Пары (AB) и (Fb) — управляемы, (AL) и (Fq) — наблюдаемы.
- Передаточные функции $L(\lambda I - A)^{-1}B = kR(\lambda)/Q(\lambda), q(\lambda I - F)^{-1}b = \alpha(\lambda)/\beta(\lambda)$ минимально фазовые, полином $\beta(\lambda)$ — гурвицев, где λ — комплексная переменная в преобразовании Лапласа, многочлены $R(\lambda), Q(\lambda), \beta(\lambda)$ нормированы, I — единичная матрица соответствующего порядка, $k > 0$.
- Матрица F не вырождена.
- Известны порядки многочленов $\deg Q(\lambda) = n_1, \deg R(\lambda) = m_1, \gamma = n_1 - m_1, \deg \beta(\lambda) = n_2, \deg \alpha(\lambda) = m_2$.
- Внешнее воздействие $f(t)$ и эталонный сигнал $y_m(t)$ — гладкие ограниченные функции. Возмущение является неизмеряемой переменной.

2. МЕТОД РЕШЕНИЯ

Решение сформулированной задачи состоит из двух этапов.

1. Составляется редуцированная модель объекта управления, для чего полагаем, что $\theta = 0$ в уравнении (1):

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + B\chi u(t) + Df(t), \quad y(t) = Lx(t),$$

$$F\bar{z}(t) + bu(t) = 0, \quad \sigma(t) = q\bar{z}(t), \quad \chi = -qF^{-1}b. \quad (3)$$

Для модели (3) проектируется алгоритм управления, обеспечивающий выполнение целевого неравенства (2).

Обосновывается работоспособность полученной системы управления для исходной модели (1) и выясняются ограничения, которым должна удовлетворять величина θ , чтобы для замкнутой системы было выполнено условие (2) для любых значений параметров модели из заданного класса неопределенности.

Преобразуем первое из уравнений (3) в эквивалентное уравнение относительно регулируемой переменной $y(t)$:

$$Q(P)y(t) = k_0R(P)u(t) + K(P)f(t). \quad (4)$$

Здесь $k_0 = k\chi, P = d/dt$ — оператор дифференцирования, $Q(P), R(P)$ и $K(P)$ — линейные дифференциальные операторы порядков n_1, m_1 и k_1 соответственно.

Используя хорошо известную процедуру [3], преобразуем уравнение (4):

$$Q_m(P)y(t) = k_0 \left(u(t) + \frac{N_1(P)}{M(P)} u(t) + \frac{N_2(P)}{M(P)} y(t) + \frac{S(P)K(P)}{M(P)} f(t) \right) + v(t). \quad (5)$$

Здесь $Q_m(\lambda), M(\lambda)$ и $S(\lambda)$ — гурвицевы многочлены степени $\gamma, n_1 - 1$ и $\gamma - 1$ соответственно, $\deg N_1(P) = n_1 - 2, \deg N_2(P) = n_1 - 1, v(t)$ — функция, которая мажорируется затухающей экспонентой.

Далее воспользуемся результатами [4] и положим $u(t) = \alpha_0 \vartheta(t)$, где $\alpha_0 > 0, \vartheta(t)$ — управляющее воздействие. Составим уравнение для ошибки $e(t) = y(t) - y_m(t)$, принимая во внимание уравнение (5):

$$Q_m(P)e(t) = k_0\alpha_0\vartheta(t) + \varphi(t), \quad (6)$$

где
$$\varphi(t) = \frac{k_0N_1(P)}{M(P)} u(t) + \frac{k_0N_2(P)}{M(P)} y(t) + \frac{k_0S(P)K(P)}{M(P)} f(t) - Q_m(P)y_m(t) + v(t).$$

Введем вспомогательный контур, динамические процессы в котором описываются уравнением

$$Q_m(P)\bar{e}(t) = \beta_0\vartheta(t). \quad (7)$$

Вычитая уравнение (7) из уравнения (6), получим уравнение для сигнала рассогласования $\zeta(t) = e(t) - \bar{e}(t)$:

$$Q_m(P)\zeta(t) = \psi(t), \quad \psi(t) = (k_0\alpha_0 - \beta_0)\vartheta(t) + \varphi(t). \quad (8)$$

Таким образом, сигнал $\zeta(t)$ несет информацию обо всех возмущениях, которые присутствуют в системе $\psi(t)$. Назовем эту переменную обобщенным возмущением. Принимая во внимание, что производные входных и выходных переменных не измеряются, будем формировать сигнал управления $\vartheta(t)$ в виде

$$\vartheta(t) = -\frac{1}{\beta_0} g_m^T \xi(t), \quad (9)$$

где $\xi^T(t) = [\bar{\zeta}(t), \bar{\zeta}'(t), \dots, \bar{\zeta}^\gamma(t)]$, $\bar{\zeta}^i(t)$ — оценка i -й производной сигнала $\zeta(t)$, g_m — вектор, компонентами которого являются коэффициенты оператора $Q_m(P)$, записанные в обратном порядке. Вектор $\xi(t)$ получается с помощью наблюдателя производных [5]

$$\begin{aligned} \dot{\xi}(t) &= \Gamma_0 \xi(t) + d_0(\zeta(t) - \bar{\zeta}(t)), \\ \bar{\zeta}(t) &= L_1 \xi(t). \end{aligned} \quad (10)$$

Здесь $\zeta(t) \in R^{\gamma+1}$, $\Gamma_0 = \begin{bmatrix} 0 & I_\gamma \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $d_0 = \begin{bmatrix} d_1 \\ \mu \\ \dots \\ d_{\gamma+1} \\ \mu^{\gamma+1} \end{bmatrix}$, $L_1 = [1, 0, \dots, 0]$, числа $d_1, \dots, d_{\gamma+1}$ выбираются так, чтобы матрица $\Gamma = \Gamma_0 + \bar{d} L_1$ была гурвицевой, $\bar{d} = [d_1, \dots, d_{\gamma+1}]$, $\mu > 0$ — достаточно малая величина. Отметим, что порядок уравнения (10) на единицу больше, чем это необходимо при реализации. Это сделано для упрощения преобразований при доказательстве работоспособности.

Условия работоспособности полученного алгоритма управления для редуцированной модели объекта управления (3) можно сформулировать следующим образом.

Утверждение 1 [4]. *Если полином $R(\lambda)$ гурвицев, $k_0 > 0$, а возмущение $f(t)$ и эталонный сигнал $y_m(t)$ — гладкие ограниченные функции, то для любого числа $\delta > 0$ существуют числа α_0, β_0, μ_0 такие, что при $\mu < \mu_0$ алгоритм управления, состоящий из вспомогательного контура (7), наблюдателя производных (10) и устройства, реализующего формулу (9), обеспечивает выполнение неравенства (2) при $t > T$, и все сигналы в замкнутой системе ограничены. ♦*

Доказательство имеется в статье [4], поэтому здесь не приводится.

Для анализа работоспособности полученного алгоритма управления для исходной модели объекта управления введем вектор отклонений для

быстрых составляющих $\Delta z(t) = z(t) - \bar{z}(t) = z(t) + F^{-1}bu(t)$. Тогда из второго из уравнений (1) будем иметь

$$\begin{aligned} \Delta \dot{z}(t) &= \frac{1}{\theta} F \Delta z(t) + F^{-1}b\dot{u}(t), \\ \sigma(t) &= qz(t) = q\Delta z(t) + \chi u(t). \end{aligned} \quad (11)$$

Подставив значение $\sigma(t)$ в первое уравнение (1), получим

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + B\chi u(t) + Bq\Delta z(t) + Df(t), \\ y(t) &= Lx(t). \end{aligned}$$

В результате преобразований, аналогичных осуществленным при получении уравнения (6), будем иметь уравнение для ошибки не редуцированной системы:

$$Q_m(P)e(t) = \beta_0 \vartheta(t) + \bar{\psi}(t), \quad (12)$$

где $\bar{\psi}(t) = \psi(t) + \frac{S(P)R(P)}{M(P)} q\Delta z(t)$. Тогда уравнение для сигнала рассогласования (8) будет иметь вид

$$Q_m(P)\zeta(t) = \bar{\psi}(t). \quad (13)$$

Вектор управления $\vartheta(t)$ формируется в соответствии с формулой (9) и в редуцированной системе компенсирует обобщенное возмущение $\psi(t)$. В уравнении (13) появляется еще одна составляющая $\frac{S(P)R(P)}{M(P)} q\Delta z(t)$, ограниченность которой нельзя гарантировать. Следовательно, либо необходимо доказать, что эта компонента ограничена, и тогда полученный алгоритм управления будет работоспособен для не редуцированной модели (1), либо выяснить условия, которые обеспечивали бы ограниченность этой составляющей. Иными словами, требуется выяснить условия работоспособности алгоритма управления для исходной модели (1), хотя он был спроектирован для редуцированной модели (3).

Введем вектор $\xi_0^T(t) = [\zeta(t), \zeta'(t), \dots, \zeta^\gamma(t)]$ и составим уравнение для нормированного вектора ошибок оценивания производных, принимая во внимание выражение (10):

$$\begin{aligned} \eta(t) &= T^{-1}(\xi(t) - \xi_0(t)), \quad T = \text{diag}\{\mu^\gamma, \dots, \mu, 1\}, \\ \dot{\eta}(t) &= \frac{1}{\mu} \Gamma \eta(t) - b_1 \zeta^{\gamma+1}(t), \\ \zeta(t) - \bar{\zeta}(t) &= \mu^\gamma L_1 \eta(t), \end{aligned} \quad (14)$$



где $b_1^T = [0, \dots, 0, 1]$. Подставим значение переменной $\vartheta(t)$ из формулы (9) в уравнения (11) и (12), принимая во внимание выражения (10) и (14), а после подстановки преобразуем уравнение (12) в векторно-матричную форму

$$\Delta \dot{z}(t) = \frac{1}{\theta} F \Delta z(t) - F^{-1} b \frac{\alpha_0}{\beta_0} g_m^T (\Gamma_0 \xi(t) + d_0 \mu^T L_1 \eta(t)), \quad (15)$$

$$\dot{\varepsilon} = A_m \varepsilon(t) - b_1 T \eta(t), \quad e(t) = L_1 \varepsilon(t).$$

Утверждение 2. Пусть выполнены условия предположений и существует число θ_0 , такое, что решением матричного уравнения

$$HF + F^T H + 2\theta_0 HGH = \frac{\theta_0}{\mu} I \quad (16)$$

является положительно определенная матрица H ,

где $G = F^{-1} b \frac{\alpha_0}{\beta_0} g_m^T (F^{-1} b \frac{\alpha_0}{\beta_0} g_m^T)^T$. Тогда при $\theta < \theta_0$

система управления, состоящая из вспомогательного контура (7), наблюдателя производных (10) и устройства, реализующего формулу (9), обеспечивает выполнение целевого условия (2) для модели объекта управления (1). ♦

Доказательство приведено в Приложении.

Отметим, что условие (16) справедливо только для приведенного алгоритма управления и является довольно грубым, но оно гарантирует, что не редуцированная система будет работоспособна для любых параметров модели из заданного класса неопределенности Ξ , что будет проиллюстрировано в примере. Величина θ_0 , удовлетворяющая условию (16) является оценкой параметра θ , при котором второе из уравнений (1) описывает быстрые составляющие для выбранных параметров алгоритма управления.

3. ОБОБЩЕНИЕ ДЛЯ МНОГОСВЯЗНЫХ ОБЪЕКТОВ

Рассмотрим многосвязный объект управления, математическая модель которого подвергнута декомпозиции

$$\dot{x}_i(t) = A_i x_i(t) + B_i \sigma_i(t) + D_i f_i(t), \quad y_i(t) = L_i x_i(t),$$

$$\begin{aligned} \theta_i \dot{z}_i(t) &= F_i z_i(t) + \sum_{j=1, i=1}^{\pi} C_{ij} y_j(t) + b_i u_i(t), \\ \sigma_i(t) &= q_i z_i(t), \quad i = 1, \dots, \pi. \end{aligned} \quad (17)$$

Здесь π — число локальных подсистем, $x_i \in R^{n_{1i}}$ и $z_i \in R^{n_{2i}}$ — векторы состояния медленных и быстрых составляющих локальных подсистем соответственно, $y_i \in R$, $u_i \in R$ — регулируемые переменные и управляющие воздействия, $\sigma_i \in R$ — выходные сигналы модели быстрых составляющих, $f_i(t)$ — внешние возмущающие воздействия, $\theta_i > 0$ — малые параметры, $A_i, B_i, D_i, L_i, F_i, b_i$ и q_i — числовые матрицы соответствующих порядков, C_{ij} — числовые матрицы перекрестных связей.

Требуется спроектировать децентрализованную систему управления, обеспечивающую выполнение следующих целевых условий:

$$|y_i(t) - y_{mi}(t)| < \delta \text{ при } t > T, \quad (18)$$

где $y_{mi}(t)$ — эталонные сигналы для локальных подсистем, $\delta > 0$, T — время, по истечении которого с начала работы системы должны выполняться неравенства (18). Кроме того, будем считать, что производные входных и выходных сигналов не измеряются, и в алгоритмах управления локальных подсистем не должны использоваться переменные быстрых составляющих $\sigma_i(t)$, $z_i(t)$ и переменные других подсистем. Будем решать сформулированную задачу при следующих предположениях.

- Элементы матриц $A_j, B_j, D_j, L_j, F_j, C_{ij}, b_j, q_j$, $i = 1, \dots, \pi, j = 1, \dots, \pi$ принадлежат известному ограниченному множеству возможных значений Ξ .
- Пары $(A_i B_i)$ и $(F_i b_i)$ — управляемы, $(A_i L_i)$ и $(F_i q_i)$ — наблюдаемы.
- Передаточные функции $L_i(\lambda I - A_i)^{-1} B_i = k_i R_i(\lambda) / Q_i(\lambda)$, $q_i(\lambda I - F_i)^{-1} b_i = \alpha_i(\lambda) / \beta_i(\lambda)$ минимально фазовые, полиномы $\beta_i(\lambda)$ — гурвицевы, многочлены $R_i(\lambda)$, $Q_i(\lambda)$ и $\beta_i(\lambda)$ нормированы, $k_i > 0$.
- Матрицы F_i не вырождены.
- Известны порядки многочленов $\deg Q_i(\lambda) = n_{1i}$, $\deg R_i(\lambda) = m_{1i}$, $\gamma_i = n_{1i} - m_{1i}$, $\deg \beta_i(\lambda) = n_{2i}$, $\deg \alpha_i(\lambda) = m_{2i}$.
- Внешние воздействия $f_i(t)$ и эталонные сигналы $y_{mi}(t)$ — гладкие ограниченные функции. Возмущения $f_i(t)$ не доступны измерению.

Составляем редуцированную модель объекта управления, для чего полагаем, что $\theta_i = 0$ в уравнении (17):

$$\begin{aligned} \dot{x}_i(t) &= A_i x_i(t) + B_i \sigma_i(t) + D_i f_i(t), \quad y_i(t) = L_i x_i(t), \\ F_i \bar{z}_i(t) + \sum_{j=1, i \neq j}^{\pi} C_{ij} y_j(t) + b_i u_i(t) &= 0, \\ \sigma_i(t) &= q_i \bar{z}_i(t), \quad i = 1, \dots, \pi. \end{aligned} \quad (19)$$

Определяем $\bar{z}_i(t)$ и $\sigma_i(t)$ из второго из уравнений (19):

$$\begin{aligned} \bar{z}_i(t) &= - \sum_{j=1, i \neq j}^{\pi} F_i^{-1} C_{ij} y_j(t) - F_i^{-1} b_i u_i(t), \\ \sigma_i(t) &= - \sum_{j=1, i \neq j}^{\pi} q_i F_i^{-1} C_{ij} y_j(t) - q_i F_i^{-1} b_i u_i(t) \end{aligned}$$

и подставляем их значения в первое из уравнений (19), в результате

$$\begin{aligned} \dot{x}_i(t) &= A_i x_i(t) + B_i \sum_{j=1, i \neq j}^{\pi} \bar{C}_{ij} y_j(t) + B_i \chi_i u_i(t) + D_i f_i(t), \\ y_i(t) &= L_i x_i(t), \end{aligned} \quad (20)$$

где $\chi_i = -q_i F_i^{-1} b_i$, $\bar{C}_{ij} = -q_i F_i^{-1} C_{ij}$.

Преобразуем выражение (20) в равносильную относительно переменных $y_i(t)$ систему уравнений

$$\begin{aligned} Q_i(P) y_i(t) &= k_{0i} R_i(P) u_i(t) + \sum_{j=1, i \neq j}^{\pi} \tau_{ij} R_i(P) y_j(t) + \\ &+ K_i(P) f_i(t), \quad i = 1, \dots, \pi, \end{aligned} \quad (21)$$

где $k_{0i} = k_i \chi_i$, $\tau_{ij} = k_i \bar{C}_{ij}$, $K_i(P) = L_i (PI - A_i)^+ D_i$, $(PI - A_i)^+$ — транспонированная матрица алгебраических дополнений матрицы $PI - A$, $R_i(P) = L_i (PI - A_i)^+ B_i$, $Q_i(P) = \det(PI - A_i)$. Таким образом, имеем π редуцированных моделей, если рассматривать перекрестные связи как возмущения. Поэтому дальнейшие преобразования аналогичны тем, которые выполнены в § 2. Из системы уравнений (21) имеем

$$\begin{aligned} Q_{mi}(P) y_i(t) &= k_{0i} \left(u_i(t) + \frac{N_{1i}(P)}{M_i(P)} u_i(t) + \frac{N_{2i}(P)}{M_i(P)} y_i(t) + \right. \\ &+ \left. \sum_{j=1, i \neq j}^{\pi} \tau_{ij} \frac{R_i(P) S_i(P)}{M_i(P)} y_j(t) + \frac{S_i(P) K_i(P)}{M_i(P)} f_i(t) \right) + v_i(t). \end{aligned}$$

Здесь $Q_{mi}(\lambda)$, $M_i(\lambda)$ и $S_i(\lambda)$ — гурвицевы многочлены степени γ_i , $n_{1i} - 1$ и $\gamma_i - 1$ соответственно, $\deg N_{1i}(P) = n_{1i} - 2$, $\deg N_{2i}(P) = n_{1i} - 1$. Далее со-

ставляем уравнения для ошибок $e_i(t) = y_i(t) - y_{mi}(t)$, формируя $u_i(t)$ в виде $u_i(t) = \alpha_{0i} \vartheta_i(t)$:

$$\begin{aligned} Q_{mi}(P) e_i(t) &= k_{0i} \alpha_{0i} \vartheta_i(t) + \varphi_i(t), \quad (22) \\ \varphi_i(t) &= \frac{k_{0i} N_{1i}(P)}{M_i(P)} u_i(t) + \frac{k_{0i} N_{2i}(P)}{M_i(P)} y_i(t) + \\ &+ \frac{k_{0i} S_i(P) K_i(P)}{M_i(P)} f_i(t) + \sum_{j=1, i \neq j}^{\pi} k_{0i} \tau_{ij} \frac{R_i(P) S_i(P)}{M_i(P)} y_j(t) - \\ &- Q_{mi}(P) y_{mi}(t) + v_i(t). \end{aligned}$$

Для каждой локальной подсистемы берем систему управления, состоящую из вспомогательного контура

$$Q_{mi}(P) \bar{e}_i(t) = \beta_{0i} \vartheta_i(t), \quad (23)$$

и наблюдателя производных

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_i(t) &= \Gamma_{0i} \xi_i(t) + d_{0i} (\zeta_i(t) - \bar{\zeta}_i(t)), \quad \bar{\zeta}_i(t) = L_i \xi_i(t), \\ \vartheta_i(t) &= \frac{1}{\beta_{0i}} g_{mi}^T \xi_i(t), \quad i = 1, \dots, \pi. \end{aligned} \quad (24)$$

Здесь $\zeta_i(t) \in R^{\gamma_i+1}$, $\Gamma_{0i} = \begin{bmatrix} 0 & I_{\gamma_i} \\ \mu_i & 0 \end{bmatrix}$, $d_{0i} = \begin{bmatrix} d_{i1} \\ \dots \\ d_{i\gamma_i+1} \end{bmatrix}$,

числа $d_{i1}, \dots, d_{i\gamma_i+1}$ выбираются так, чтобы матрицы $\Gamma_i = \Gamma_{0i} + \bar{d}_i L_i$ были гурвицевы, $\bar{d}_i = [d_{i1}, \dots, d_{i\gamma_i+1}]$, $\mu_i > 0$ — достаточно малые величины.

Для каждой из подсистем (22)–(24) справедливо утверждение 1, а для не редуцированной модели объекта управления (17) справедливо следующее

Утверждение 3. Пусть выполнены условия предположений и существует числа θ_{0i} , такие, что решением матричных уравнений

$$H_i F_i + F_i^T H_i + 2\theta_{0i} H_i G_i H_i = -\frac{\theta_{0i}}{\mu_i} I$$

являются положительно определенные матрицы H_i ,

где $G_i = F_i^{-1} b_i \frac{\alpha_{0i}}{\beta_{0i}} g_{mi}^T \left(F_i^{-1} b_i \frac{\alpha_{0i}}{\beta_{0i}} g_{mi}^T \right)^T$. Тогда при $\theta_i < \theta_{0i}$

система управления, состоящая из устройств, реализующих формулы (23) и (24), обеспечивает выполнение целевых условий (18) для модели объекта управления (17). ♦

Доказательство полностью аналогично доказательству утверждения 2, поэтому здесь не приводится.

Замечание. Утверждение 3 справедливо, если во втором из уравнений (17) в перекрестных связях вместо $y_j(t)$ будут присутствовать векторы $x_j(t)$, а также в случае, когда в первом уравнении будут



присутствовать дополнительные составляющие с запаздыванием $x_i(t - h_i)$, $x_j(t - h_j)$, где h_i , h_j — времена запаздывания.

4. ПРИМЕРЫ

Пример 1. Рассмотрим объект управления, динамические процессы в котором описываются уравнениями

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = x_3 + f, \\ \dot{x}_3 = a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \sigma + f, \\ y = l_1x_1 + l_2x_2, \end{cases} \quad (25)$$

$$\begin{cases} \theta \dot{z}_1 = -6z_1 + z_2, \\ \theta \dot{z}_2 = -12z_1 + z_3 + u, \\ \theta \dot{z}_3 = -8z_1 + 2u, \\ \sigma = z_1. \end{cases}$$

Класс неопределенности Ξ задан неравенствами: $-4 \leq a_i \leq 4$, $i = 1, 2, 3$, $1 \leq l_j \leq 4$, $j = 1, 2$, $|f| \leq 1$. Составляем редуцированную модель объекта

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}}_1 = \bar{x}_2, \\ \dot{\bar{x}}_2 = \bar{x}_3 + f, \\ \dot{\bar{x}}_3 = a_1\bar{x}_1 + a_2\bar{x}_2 + a_3\bar{x}_3 + \sigma + f, \\ y = l_1\bar{x}_1 + l_2\bar{x}_2, \end{cases}$$

$$\begin{cases} -6\bar{z}_1 + \bar{z}_2 = 0, \\ -12\bar{z}_1 + \bar{z}_3 + u = 0, \\ -8\bar{z}_1 + 2u = 0, \\ \sigma = \bar{z}_1. \end{cases}$$

Определим из второй системы уравнений вектор $\bar{z}^T = [\bar{z}_1, \bar{z}_2, \bar{z}_3]$ и переменную σ : $\bar{z}^T = [0,25; 1,5; 2]u$, $\sigma = 0,25u$. Подставив значение σ в первую систему уравнений, получим

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = x_3 + f, \\ \dot{x}_3 = a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + 0,25u + f, \\ y = l_1x_1 + l_2x_2, \quad e = y - y_m. \end{cases} \quad (26)$$

Возьмем число $\beta_0 = 10$, $u = \alpha_0 \vartheta$ и, принимая во внимание, что $n_1 = 3$, $m_1 = 1$, $\gamma = 2$, возьмем вспомогательный контур (7), который описывается уравнением

$$\bar{e}'' + 3\bar{e}' + 2\bar{e} = 10\vartheta, \quad \varsigma = e - \bar{e}. \quad (27)$$

Уравнения наблюдателя производных сигнала ς (10) имеют вид

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_1 &= \xi_2 + \frac{9}{\mu}(\varsigma - \xi_1), \quad \dot{\xi}_2 = \frac{16}{\mu^2} + (\varsigma - \xi_1), \\ \mu &= 0,01. \end{aligned} \quad (28)$$

Тогда управляющее воздействие ϑ (9) формируется в соответствии с формулой

$$\vartheta = -0,1(2\xi_1 + 3\xi_2 + \xi_2), \quad u = \alpha_0\vartheta. \quad (29)$$

Система управления (27)–(29) обеспечивает выполнение целевого условия (2) для редуцированной модели (26), если $\alpha_0 \geq 2$. С увеличением α_0 значение числа δ в условии (2) уменьшается. Определим величину θ_0 из условия (16), когда $\alpha_0 = 2$. Решая уравнение (16), получаем, что $\theta_0 \in (0,0476; 0,05]$. Как уже говорилось, это грубая оценка величины θ_0 . Фактическое значение θ_0 , полученное экспериментальным путем, равно 0,0695. В этом случае

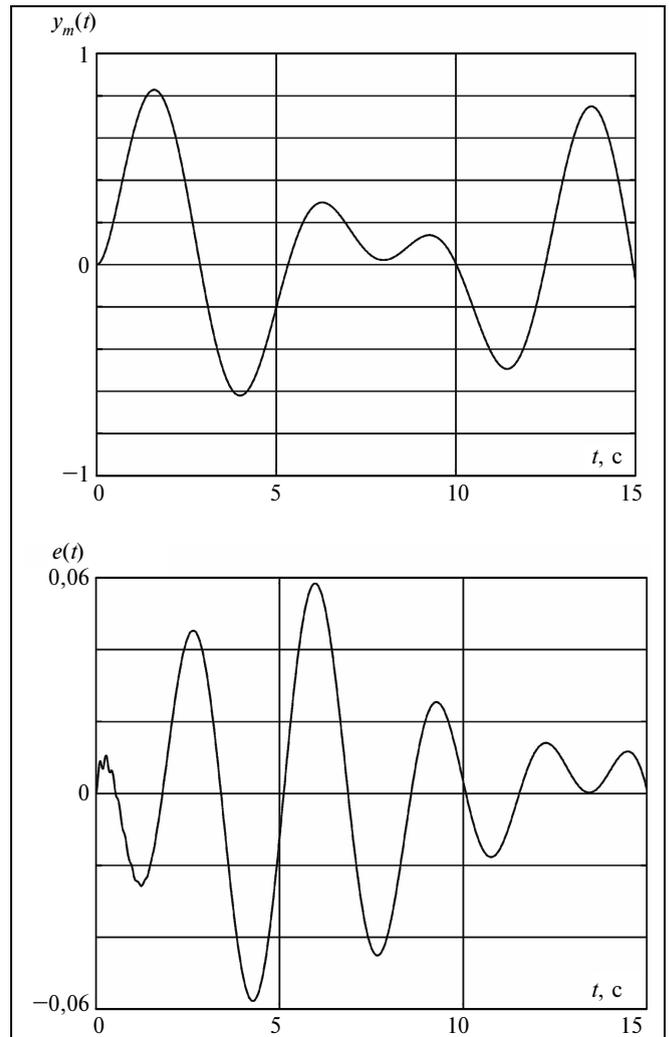
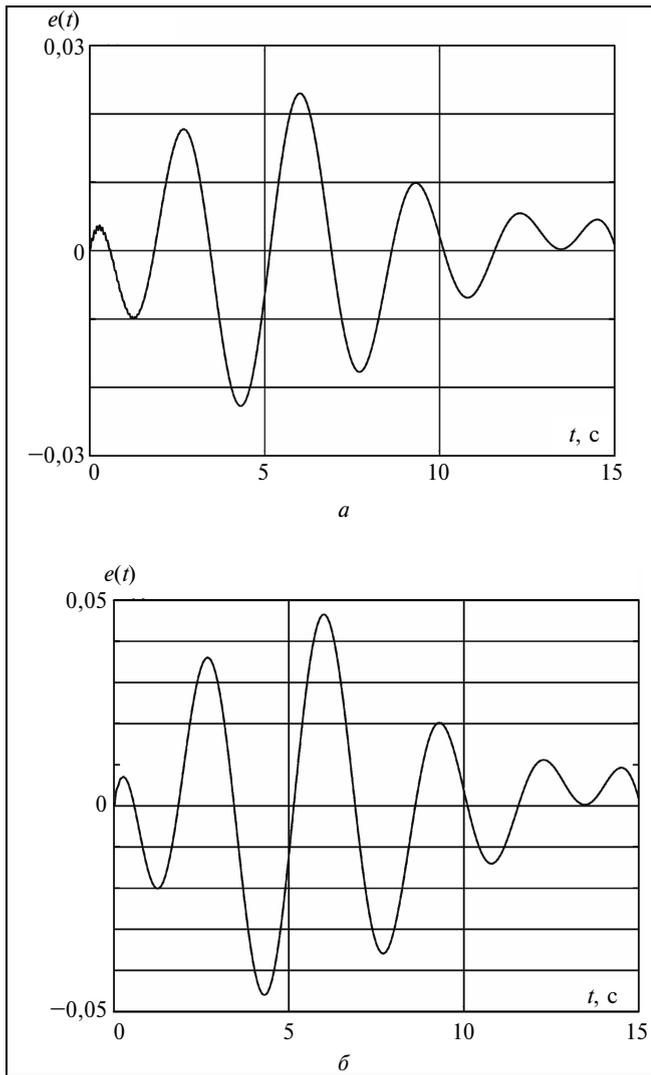


Рис. 1. Графики изменения эталонного сигнала и ошибки


Рис. 2. Переходные процессы по ошибке:

$a - \alpha_0 = 10, \theta_0 = 0,021, \theta = 0,02; \delta - \alpha_0 = 5, \theta_0 = 0,039, \theta = 0,02$

при $\theta < 0,0695, \alpha_0 = 2$ система управления обеспечивает выполнение целевого условия для любых значений параметров из заданного класса неопределенности.

Проверим работоспособность системы управления (27)–(29) для модели объекта управления (25) при следующих значениях параметров: $a_1 = a_3 = 4, a_2 = -4, l_1 = 3, l_2 = 2$. Модель медленных составляющих при этих значениях коэффициентов неустойчива, и полюса передаточной функции имеют значения $3,1304$ и $0,4348j$. Возмущающее воздействие формируется в соответствии с формулой $f = 0,5\sin 2t + 0,5\sin 1,3t$. Начальные условия нулевые, $\alpha_0 = 4$, величина $\theta_0 = 0,0695$. На рис. 1 приведены графики эталонного сигнала и ошибки слежения, когда $\theta_0 = 0,0435$, а на рис. 2 — переходные процессы по ошибке.

Пример 2. Рассмотрим двухсвязный объект управления, математическая модель которого после декомпозиции имеет вид:

$$\dot{x}_i(t) = A_i x_i(t) + B_i \sigma_i(t) + D_i f_i(t), \quad y_i(t) = L_i x_i(t),$$

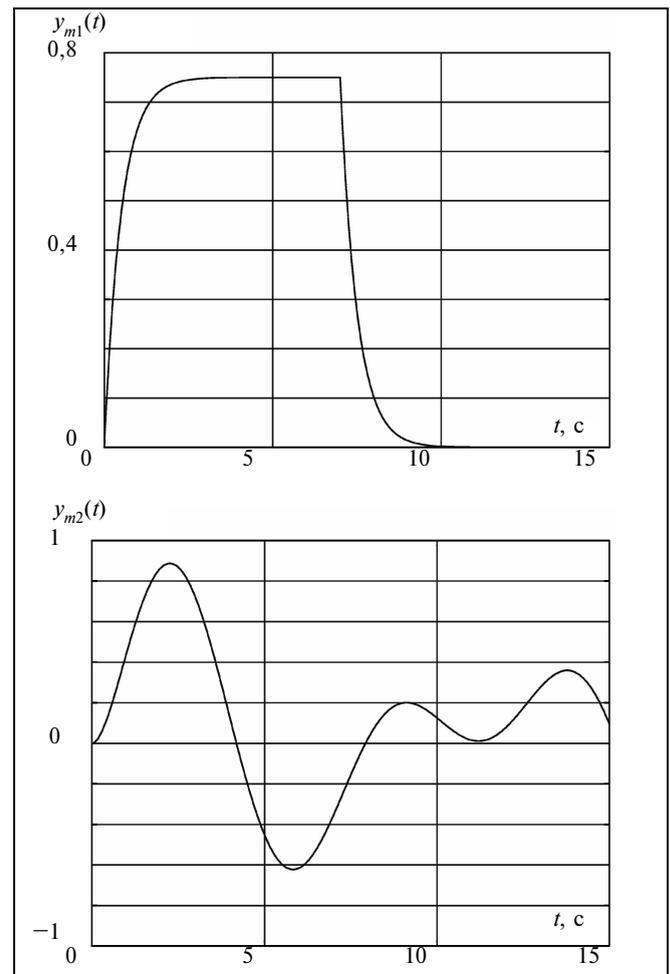
$$\theta_i \dot{z}_i(t) = F_i z_i(t) + \sum_{j=1, i \neq j}^2 C_{ij} x_j(t) + b_i u_i(t),$$

$$\sigma_i(t) = q_i z_i(t), \quad i = 1, 2.$$

Здесь $A_1 = \begin{bmatrix} a_1 & 1 & 0 \\ a_2 & 0 & 1 \\ a_3 & 0 & 0 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} a_4 & 1 \\ a_5 & 0 \end{bmatrix}, F_1 = \begin{bmatrix} -6 & 1 & 0 \\ -12 & 0 & 1 \\ -8 & 0 & 0 \end{bmatrix},$

$$F_2 = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ b_3 \end{bmatrix}, D_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, D_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$C_{12} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \\ c_{31} & c_{32} \end{bmatrix}, C_{21} = \begin{bmatrix} c_{23} & 0 & 0 \\ c_{33} & 0 & 0 \end{bmatrix}, b_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, b_2^T = [1 \ 2],$$


Рис. 3. Графики изменения эталонных сигналов

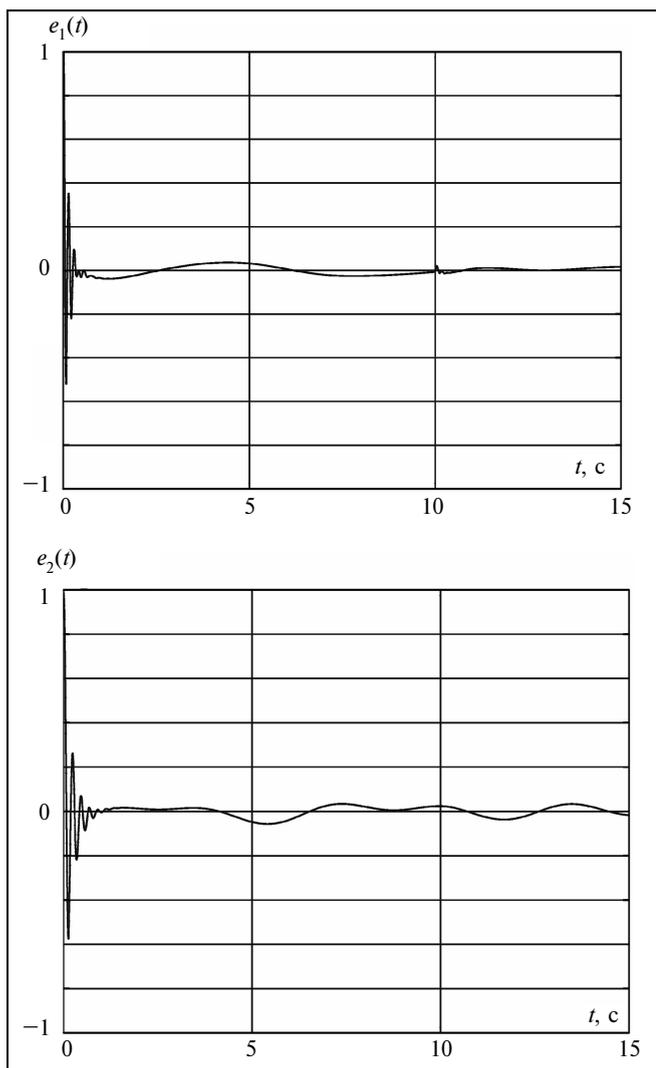


Рис. 4. Переходные процессы в децентрализованной системе по ошибкам

$L_1 = [1 \ 0 \ 0]$, $L_2 = [1 \ 0]$, $\theta_1 = 0,025$, $\theta_2 = 0,02$. Класс неопределенности задан неравенствами: $-4 \leq a_i \leq 4$, $i = 1, \dots, 5$, $1 \leq b_1 \leq 4$, $1 \leq b_2$, $1 \leq b_3 \leq 3$, $-10 \leq c_{ij} \leq 10$, $i = 1, 2, j = 1, 2, 3$, $-5 \leq c_{23} \leq 5$, $-5 \leq c_{33} \leq 5$, $|f_1(t)| \leq 1$, $|f_2(t)| \leq 1$.

Следующая система управления обеспечивает выполнение целевых условий (18) со значением $\delta = 0,04$:

$$\begin{aligned} \bar{e}_1'' + 3\bar{e}_1' + 2\bar{e}_1 &= 10\vartheta_1, \quad \varsigma_1 = e_1 - \bar{e}_1, \\ e_1 &= y_1 - y_{m1}, \quad u_1 = 4\vartheta_1, \\ \vartheta_1 &= -0,1(2\xi_{11} + 3\xi_{12} + \xi_{12}), \\ \dot{\xi}_{11} &= \xi_{12} + \frac{9}{\mu}(\varsigma_1 - \varsigma_{11}), \quad \dot{\xi}_{12} = \frac{16}{\mu^2} + (\varsigma_1 - \xi_{11}), \\ \mu &= 0,01, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{e}_2'' + 3\bar{e}_2' + 2\bar{e}_2 &= 10\vartheta_2, \quad \varsigma_2 = e_2 - \bar{e}_2, \\ e_2 &= y_2 - y_{m2}, \quad u_2 = 0,5\vartheta_2, \\ \vartheta_2 &= -0,1(2\xi_{21} + 3\xi_{22} + \xi_{22}), \\ \dot{\xi}_{21} &= \xi_{22} + \frac{9}{\mu}(\varsigma_2 - \varsigma_{21}), \quad \dot{\xi}_{22} = \frac{16}{\mu^2} + (\varsigma_2 - \xi_{21}), \\ \mu &= 0,01. \end{aligned}$$

На рис. 3 и 4 представлены результаты моделирования системы при следующих исходных данных: $a_1 = a_3 = a_4 = 4$, $a_2 = a_5 = -4$, $b_1 = 3$, $b_2 = b_3 = 2$, $c_{ij} = 10$, $i = 1, 2, j = 1, 2, 3$, $c_{23} = c_{33} = 3$, $f_1(t) = \sin t$, $f_2(t) = \sin 1,3t$, $x_1^T(0) = [1 \ 1 \ 1]$, $x_2^T(0) = [1 \ 1]$, остальные начальные условия нулевые.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Решена задача робастного управления линейным динамическим объектом, математическая модель которого после декомпозиции описывается сингулярно возмущенной системой дифференциальных уравнений. Получены ограничения на малый параметр в уравнениях для быстрых составляющих, при которых система остается сингулярно возмущенной для всего класса неопределенности коэффициентов дифференциальных уравнений. Отметим, что оценка довольно грубая. Показано, что предлагаемый алгоритм управления позволяет частично компенсировать внешние и параметрические возмущения. Полученные результаты обобщены для многосвязных объектов и получена децентрализованная система управления.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство утверждения 2. Запишем уравнения (14) и (15) в виде

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}(t) &= A_m \varepsilon(t) + b_1 T \eta(t), \quad e(t) = L_1 \varepsilon(t), \\ \theta_1 \Delta \dot{z}(t) &= F \Delta z(t) + \theta_2 F^{-1} b \frac{\alpha_0}{\beta_0} g_m^T (\Gamma_0 \xi(t) + d_0 \mu^\gamma L_1 \eta(t)), \quad (\text{П.1}) \end{aligned}$$

$$\dot{\eta}(t) = \frac{1}{\mu} \Gamma \eta(t) - b_1 \varsigma^{\gamma+1}(t),$$

где $\theta = \theta_1 = \theta_2$. Воспользуемся следующим утверждением.

Лемма [6]. Если динамическая система описывается уравнением

$$\dot{x}(t) = f(x, \mu_1, \mu_2), \quad x(t) \in R^n, \quad \mu_1 > 0, \mu_2 > 0, \quad (\text{П.2})$$

где $f(x, \mu_1, \mu_2)$ — непрерывная функция, липшицева по x , и при $\mu_2 = 0$ система (П.2) имеет ограниченную замкнутую область диссипативности

$$D_x = \{x: F(x) \leq K\}, \quad (\text{П.3})$$

где $F(x)$ — непрерывная, кусочно-гладкая, положительно определенная в R^n функция, такая, что при некоторых $\varepsilon > 0$ и $\mu_0 > 0$ выполнено неравенство

$$\sup_{\mu_i \leq \mu_0} \left[\left(\frac{\partial F}{\partial x} \right)^T f(x, \mu_1, 0) \right] \leq -\varepsilon \text{ при } F(x) = C,$$

тогда для всех достаточно малых $\mu_1, \mu_2 \leq \mu_0$ множество (П.3) остается областью диссипативности системы (П.1). ♦

В качестве функции $F(x)$ можно взять функцию Ляпунова

$$V = \varepsilon^T(t) W \varepsilon(t) + \Delta z^T(t) H \Delta z(t) + \eta^T(t) \Lambda \eta(t). \quad (\text{П.4})$$

В случае, когда число $\theta_2 = 0$, второе из уравнений (П.1) асимптотически устойчиво в силу гурвицевости матрицы F . В этом случае составляющая $\frac{S(P)R(P)}{M(P)} q \Delta z(t)$

ограничена. Тогда, в соответствии с утверждением 1, система диссипативна, и все переменные в ней ограничены. Следовательно, векторы $\varepsilon(t), \Delta z(t), \eta(t)$ и их производные ограничены. Тогда ограничены векторы $\xi(t), \xi_0(t)$ и $z(t)$ вместе со своими производными и существуют числа $\delta_1 > 0, \delta_2 > 0$ такие, что $|\xi(t)| < \delta_1, |\zeta^{\gamma+1}(t)| < \delta_2$. Сигнал $\zeta^{\gamma+1}(t)$ является последней компонентой вектора $\xi_0(t)$. Условия леммы выполнены. Однако требуется определить то значение числа θ_0 , при котором исходная система будет диссипативной.

Пусть $\theta_1 = \theta_2 = \theta_0$ в уравнениях (П.1) такое, что выполнено условие (16). Матрицы W, H и Λ в функции Ляпунова (П.4) определяются из уравнений:

$$\begin{aligned} WA_m + A_m^T W &= -\frac{1}{\mu} I, \\ HF + F^T H + 2\theta_0 HGH &= -\frac{\theta_0}{\mu} I, \\ G &= F^{-1} b \frac{\alpha_0}{\beta_0} g_m^T \left(F^{-1} b \frac{\alpha_0}{\beta_0} g_m^T \right)^T, \\ \Lambda \Gamma + \Gamma^T \Lambda &= -2I - T^T b_1^T W^T W b_1 T. \end{aligned} \quad (\text{П.5})$$

Вычислим полную производную функции (П.4), принимая во внимание уравнения (П.5):

$$\begin{aligned} \dot{V} &= -\frac{1}{\mu} |\varepsilon(t)|^2 + 2\varepsilon^T(t) W b_1 T \eta(t) - \frac{1}{\mu} |\Delta z(t)|^2 + \\ &+ 2\Delta z^T(t) H F^{-1} b \frac{\alpha_0}{\beta_0} g_m^T (\Gamma_0 \xi(t) + d_0 \mu^\gamma L_1 \eta(t)) - \\ &- \eta^T(t) T^T b_1^T W^T W b_1 T \eta(t) + d_0 \mu^\gamma L_1 \eta(t) - \\ &- \frac{1}{\mu} |\eta(t)| + 2\eta^T(t) \Lambda b_1 \zeta^{\gamma+1}(t). \end{aligned}$$

Воспользуемся оценками:

$$\begin{aligned} 2\varepsilon^T(t) W b_1 T \eta(t) &\leq |\varepsilon(t)|^2 + \frac{1}{\mu} \eta^T(t) T^T b_1^T W^T W b_1 T \eta(t), \\ 2\Delta z^T(t) H F^{-1} b \frac{\alpha_0}{\beta_0} g_m^T (\Gamma_0 \xi(t) + d_0 \mu^\gamma L_1 \eta(t)) &\leq \frac{2}{\mu} \Delta z^T(t) G \Delta z(t) + \\ &+ \mu \delta_3 |\xi(t)|^2 + \mu^{2\gamma+1} \delta_4 |\eta(t)|^2 \leq \frac{2}{\mu} \Delta z^T(t) G \Delta z(t) + \mu \delta_3 \delta_1^2 + \end{aligned}$$

$$+ \mu^{2\gamma+1} \delta_4 |\eta(t)|^2 + 2\eta^T(t) \Lambda b_1 \zeta^{\gamma+1}(t) \leq \frac{1}{\mu} |\eta(t)|^2 + \mu \delta_5 \delta_2^2,$$

$$\delta_3 = |\Gamma_0^T \Gamma_0|, \quad \delta_4 = |d_0|^2, \quad \delta_5 = |b_1^T \Lambda \Lambda b_1|.$$

Подставив эти оценки в формулу производной от функции Ляпунова, получим

$$\begin{aligned} \dot{V} &\leq -\left(\frac{1-\mu}{\mu} \right) |\varepsilon(t)|^2 - \frac{1}{\mu} |\Delta z(t)|^2 - \left(\frac{1-\mu^{2\gamma+2} \delta_4}{\mu} \right) |\eta(t)|^2 + \\ &+ \mu (\delta_3 \delta_1^2 + \delta_5 \delta_2^2). \end{aligned} \quad (\text{П.6})$$

Величина μ значительно меньше единицы, поэтому выберем число τ из условия $\tau = \min \left\{ \frac{1-\mu}{\lambda_{\max}(W)}, \frac{1}{\lambda_{\max}(H)}, \frac{1-\mu^{2\gamma+2} \delta_4}{\lambda_{\max}(\Lambda)} \right\}$, где $\lambda_{\max}(\cdot)$ — максимальное собственное

число соответствующей матрицы. Тогда из формулы (П.6)

$$\dot{V} \leq -\frac{\tau}{\mu} V + \mu (\delta_3 \delta_1^2 + \delta_5 \delta_2^2).$$

Решив данное неравенство, получим $V \leq V(0) e^{-\tau t/\mu} + (1 - e^{-\tau t/\mu}) \frac{\mu^2 (\delta_3 \delta_1^2 + \delta_5 \delta_2^2)}{\tau}$, откуда для фиксированного значения $t = T$ следует оценка величины δ в целевом условии (2) при выбранном значении μ , которое получено при проектировании алгоритма управления по редуцированной модели:

$$\begin{aligned} \delta^2 &\leq \frac{1}{\lambda_1 \min(W)} V \leq \frac{1}{\lambda_1 \min(W)} (V(0) e^{-\tau T/\mu} + \\ &+ (1 - e^{-\tau T/\mu}) \mu^2 (\delta_3 \delta_1^2 + \delta_5 \delta_2^2) / \tau). \end{aligned}$$

Это достаточно грубая оценка, но из нее видно, что уменьшая величину μ , можно получить требуемую точность.

ЛИТЕРАТУРА

1. Фрадков А.Л. Адаптивное управление в сложных системах. — М.: Наука, 1990.
2. Дмитриев М.Г., Курина Г.А. Сингулярные возмущения в задачах управления // Автоматика и телемеханика. — 2006. — № 1. — С. 3–51.
3. Мирошник И.В., Никифоров В.О., Фрадков А.Л. Нелинейное и адаптивное управление сложными динамическими системами. — СПб.: Наука, 2000.
4. Цыкунов А.М. Алгоритмы робастного управления с компенсацией ограниченных возмущений // Автоматика и телемеханика. — 2007. — № 7. — С. 103–105.
5. Atassi A.N., Khalil H.K. Separation principle for the stabilization of class of nonlinear systems // IEEE Trans. on Automat. Control. — 1999. — Vol. 44, N 9. — P. 1672–1687.
6. Бруси́н В.А. Об одном классе сингулярно-возмущенных адаптивных систем // Автоматика и телемеханика. — 1995. — № 4. — С. 119–127.

Статья представлена к публикации членом редколлегии В.Ю. Рутковским.

Цыкунов Александр Михайлович — д-р техн. наук, зав. кафедрой, Астраханский государственный технический университет, ☎ (8512) 61-42-48, ✉ tsygunov_al@mail.ru.