

# НОВЫЕ ИНТЕРВАЛЬНЫЕ БАЙЕСОВСКИЕ МОДЕЛИ НАДЕЖНОСТИ ПРОГРАММНОГО ОБЕСПЕЧЕНИЯ НА ОСНОВЕ НЕОДНОРОДНЫХ ПРОЦЕССОВ ПУАССОНА

Л.В. Уткин, С.И. Затенко, Ф. Коолен

Предложен новый класс моделей надежности программного обеспечения, в основу которых положены известные модели, использующие неоднородные процессы Пуассона, например, модели Мусса — Окомото и Джоэл — Окомото. Показано, что основная идея построения моделей заключается в комбинированном применении обобщенного байесовского вывода и метода максимума правдоподобия. Приведены примеры, когда предложенные модели дают более высокое качество прогноза надежности по сравнению с известными.

**Ключевые слова:** надежность, программное обеспечение, байесовский вывод, распределение вероятностей, неоднородные процессы Пуассона, метод максимума функции правдоподобия, модель.

## ВВЕДЕНИЕ

Проявление ошибок в программном обеспечении (ПО) интенсивно изучалось в целях улучшения характеристик программ [1]. Большое число моделей надежности программного обеспечения (МНПО) было разработано в последние десятилетия, но нельзя выбрать одну МНПО, которую можно было бы использовать для самых различных программ. Причина состоит в том, что для многих программ ряд предположений, принятых в МНПО, нереалистичны. Детальный критический обзор известных вероятностных МНПО приведен в работах [2, 3].

Основная идея моделирования надежности ПО состоит в попытке статистически описать процесс отладки программного обеспечения (исправления ошибок и тестового диагностирования до момента проявления очередной ошибки). Обычно предполагается, что после исправления очередной ошибки их общее число почти всегда уменьшается или программа становится лучше в смысле надежности. В данном случае говорят о росте надежности программы. Таким образом, для анализа надежности ПО с использованием статистических моделей их параметры оцениваются на основе имеющихся отладочных данных и данных об отказах. Одна часть параметров модели характеризует рост надежности в результате исправления ошибок, а

другая — случайные изменения времен до отказов или числа отказов в рамках заданного роста надежности.

В работе предлагается новый класс МНПО, в основу которых положены модели, использующие неоднородные процессы Пуассона (МНПП) [4—7] для описания роста надежности и особенностей ПО. Предлагаемые модели будут называться интервальными моделями, так как основные показатели надежности ПО, вычисляемые с их помощью, интервальные. Основная идея построения класса МНПО заключается в комбинированном применении обобщенного байесовского вывода [8], где вместо одного априорного распределения вероятностей рассматривается множество распределений, и метода максимума правдоподобия. При этом каждый из методов ориентирован на определенный набор исходных параметров модели. В разрабатываемых МНПО предполагается: статистическая независимость отказов; равномерность тестовых наборов на множестве всех используемых исходных данных; тесты отражают режим эксплуатации ПО.

Численный анализ предлагаемых МНПО с использованием реальных статистических данных, опубликованных в литературе, наглядно демонстрирует ситуации, когда модели дают более высокое качество прогноза надежности по сравнению с известными моделями надежности.



## 1. СТАНДАРТНЫЕ МНПП

Одним из инструментов для создания класса МНПО, исходными данными для которых являются значения числа отказов ПО, обозначаемые  $N(t)$ , за определенный период времени  $t$ , служат неоднородные процессы Пуассона. Для любых временных точек  $0 < t_1 < t_2 < \dots$  вероятность того, что число отказов между моментами времен  $t_{i-1}$  и  $t_i$  равно  $k$ , может быть записана в виде

$$\Pr\{N(t_i) - N(t_{i-1}) = k\} = \frac{\{m(t_i) - m(t_{i-1})\}}{k!} \exp\{-(m(t_i) - m(t_{i-1}))\},$$

$$k = 0, 1, 2, \dots$$

Здесь  $m(t)$  — среднее значение числа отказов до момента времени  $t$ . Модели, основанные на неоднородных процессах Пуассона, различаются функцией  $m(t)$ . Примеры этих функций:  $m(t) = at^b$  (модель Дуэйна [6]),  $m(t) = a(1 - \exp(-bt))$  (модель Джоэл — Окомото (Д-О) [5]),  $m(t) = a \ln(1 + bt)$  (модель Муса — Окомото (М-О) [7]). Приведенные примеры лишь малая часть возможных функций  $m(t)$ . Их расширенный список можно найти в работе [4], где каждая из функций  $m(t)$  наилучшим образом отражает поведение статистических данных об отказах конкретных программ.

Параметры  $a$  и  $b$  для большинства МНПО имеют схожий смысл. В модели Д-О, например, параметр  $a$  интерпретируется, как неизвестное число оставшихся ошибок в ПО, а параметр  $b$  — неизвестная интенсивность обнаружения ошибок, которая характеризует рост надежности программы в процессе отладки. Однако не для всех МНПП имеется физическая интерпретация параметров.

Параметры МНПО оцениваются с помощью метода максимума функции правдоподобия, в качестве исходных данных используются значения числа отказов в заданные интервалы тестового диагностирования и отладки. Однако качество прогноза может быть низким вследствие отсутствия достаточного объема статистических данных или их неоднородности. Это можно учитывать в МНПО, рассматривая осторожные или интервальные модели надежности ПО.

## 2. ИНТЕРВАЛЬНЫЕ МНПО

Пусть  $X_i = N(t_i) - N(t_{i-1})$  — случайное число отказов в интервале между  $t_{i-1}$  и  $t_i$ . Предполагается, что существует функция распределения вероятностей величины  $X_i$ , но она неизвестна. Известно только, что она принадлежит множеству  $\mathcal{M}_i(\mathbf{d})$ , зависящему от множества параметров модели  $\mathbf{d}$ .

Множество  $\mathcal{M}_i(\mathbf{d})$  взаимно однозначно определяется границами, т. е. нижней  $\underline{F}_i$  и верхней  $\bar{F}_i$  функциями распределения вероятностей

$$\underline{F}_i(k|\mathbf{d}) = \inf_{\mathcal{M}_i(\mathbf{d})} F(k), \quad \bar{F}_i(k|\mathbf{d}) = \sup_{\mathcal{M}_i(\mathbf{d})} F(k).$$

Отметим, что  $\mathcal{M}_i(\mathbf{d})$  — это множество всех функций распределения, ограниченное функциями  $\underline{F}_i(k|\mathbf{d})$  и  $\bar{F}_i(k|\mathbf{d})$ , а не множество параметрических распределений, имеющих ту же форму, что и граничные распределения. Это очень важная особенность предлагаемого в данной работе подхода для комбинирования байесовского метода и метода максимума функции правдоподобия.

Обозначим  $\mathbf{K} = (k_1, \dots, k_r)$ . Функция правдоподобия записывается в виде:

$$L(\mathbf{K}|\mathbf{d}) = \Pr\{X_1 = k_1, \dots, X_n = k_n\}.$$

Утверждение 1 объясняет, как функция правдоподобия максимизируется по всем распределениям вероятностей, принадлежащим множествам  $\mathcal{M}_1(\mathbf{d}), \dots, \mathcal{M}_n(\mathbf{d})$ .

**Утверждение 1.** Если случайные величины  $X_1, \dots, X_n$  являются независимыми и дискретными, то

$$\max_{\mathcal{M}_1, \dots, \mathcal{M}_n} \Pr\{X_1 = k_1, \dots, X_r = k_r\} = \prod_{i=1}^n \{\bar{F}_i(k_i) - \underline{F}_i(k_i - 1)\}, \quad (1)$$

где  $\underline{F}_i$  и  $\bar{F}_i$  — границы множества  $\mathcal{M}_i, i = 1, \dots, n$ . ♦

Доказательство. Обозначим  $\mathbf{M} = (m_1, \dots, m_n)$ . Пусть  $I_{\{1, \dots, k_i\}}(m)$  — индикаторная функция, принимающая значение 1, если  $m \leq k_i$ . Верхняя граница совместной вероятности  $\Pr\{X_1 = k_1, \dots, X_n = k_n\}$  может быть найдена как решение следующей задачи оптимизации:

$$\max \sum_{m_1=1}^{\infty} \dots \sum_{m_n=1}^{\infty} I_{\{1, \dots, k_n\}}(\mathbf{M}) \prod_{i=1}^n p_i(m_i)$$

при ограничениях  $\sum_{m=1}^{\infty} p_i(m) = 1, \quad \underline{F}_i(j) \leq$

$$\leq \sum_{m=1}^{\infty} I_{\{1, \dots, k_i\}}(m) p_i(m) \leq \bar{F}_i(j), \quad i = 1, \dots, n, j = 1, 2, \dots$$

Целевую функцию можно переписать как  $\prod_{i=1}^n \sum_{m_i=1}^{\infty} (I_{\{1, \dots, k_i\}}(m_i) - I_{\{1, \dots, k_{i-1}\}}(m_i) p_i(m_i))$ . Введем

новые переменные  $F_i(k_i) = \sum_{m_i=1}^{\infty} I_{\{1, \dots, k_i\}}(m_i) p_i(m_i)$ .

Тогда задача оптимизации приобретает вид

$$\max \prod_{i=1}^n \{F_i(k_i) - F_i(k_i - 1)\},$$

при ограничениях  $\underline{F}_i(k_i) \leq F_i(k_i) \leq \bar{F}_i(k_i)$ ,  $\underline{F}_i(k_i - 1) \leq F_i(k_i - 1) \leq \bar{F}_i(k_i - 1)$ ,  $i = 1, \dots, n$ .

Используя известные правила стандартного интервального анализа, получаем (1). ♦

### 3. ОБОБЩЕННЫЕ БАЙЕСОВСКИЕ МОДЕЛИ ДЛЯ ПОЛУЧЕНИЯ МНОЖЕСТВА $\mathcal{M}$

Один из возможных путей получения множества  $\mathcal{M}(\mathbf{d})$  — это использование идеи обобщенного байесовского подхода Уолли [8].

#### 3.1. Стандартный байесовский подход

Если случайная величина имеет распределение вероятностей с вектором неизвестных параметров  $\mathbf{b} \in \Omega$ , то в соответствии с байесовским подходом [10] эти параметры рассматриваются как случайные величины с априорной плотностью вероятностей  $\pi(\mathbf{b}|\mathbf{c})$  с параметрами  $\mathbf{c}$ . Центральный элемент байесовского подхода состоит в выводе апостериорного распределения неизвестных параметров при получении статистических данных на основе теоремы Байеса. Пусть статистическая информация собрана в виде вектора  $\mathbf{K} = (k_1, \dots, k_n)$  наблюдаемых значений случайных величин  $X_1, \dots, X_n$ . Пусть  $p(k)$  — вероятность того, что наблюдаемое значение числа отказов равно  $k$ . Тогда апостериорная плотность  $\pi(\mathbf{b}|\mathbf{K}, \mathbf{c})$  вычисляется как  $\pi(\mathbf{b}|\mathbf{K}, \mathbf{c}) \propto p(k_1) \dots p(k_n) \cdot \pi(\mathbf{b}|\mathbf{c})$ .

Априорное распределение зачастую выбирается таким образом, чтобы упростить вычисления. Наиболее эффективный путь в этом направлении — это выбор *согласованных априорных распределений* [10]. Если апостериорное распределение  $\pi(\mathbf{b}|\mathbf{K}, \mathbf{c})$  и априорное распределение  $\pi(\mathbf{b}|\mathbf{c})$  принадлежат одному семейству распределений, то  $\pi$  и  $p$  называются согласованными распределениями.

#### 3.2. Интервальные априорные модели

Если отбросить требование простоты вычислений, то предпочтительное априорное распределение должно минимально влиять на апостериорное распределение, а также учитывать отсутствие априорной информации о параметрах. Априорные распределения, моделирующие отсутствие априорной информации, называются *неинформативными*. Существует немало подходов для выбора неинформативного априорного распределения [10],

имеющих свои достоинства и недостатки. Однако определим не одно априорное распределение, а целый класс  $\mathcal{P}$  распределений  $\pi$ , для которого можно найти нижнюю и верхнюю вероятности события  $A$  как

$$\underline{P}(A) = \inf\{P_\pi(A) : \pi \in \mathcal{P}\},$$

$$\bar{P}(A) = \sup\{P_\pi(A) : \pi \in \mathcal{P}\}.$$

Когда априорной информации почти нет, для этого класса  $\underline{P}(A) \rightarrow 0$ , а  $\bar{P}(A) \rightarrow 1$ . Это означает, что априори событие  $A$  может иметь любую вероятность. К наиболее известным классам априорных распределений следует отнести обобщенную модель Дирихле [8], обобщенные модели экспоненциального семейства распределений [9, 11]. В нашем подходе к построению МНПП множество  $\mathcal{P}$  используется для того, чтобы сгенерировать множество  $\mathcal{M}$  прогнозируемых распределений с нижней и верхней границами, которые позволят применить утверждение 1.

#### 3.3. Обобщенная модель отрицательного биномиального распределения

Если число отказов имеет распределение Пуассона, то априорное согласованное распределение является гамма-распределением, обозначаемым  $G(\alpha, \beta)$  с параметрами  $\alpha > 0$ ,  $\beta > 0$ . Предположим, что уже было зафиксировано  $K$  отказов, наблюдаемых за период времени  $T$ . Тогда апостериорным распределением является  $G(\alpha + K, \beta + T)$ . Отсюда прогнозируемое распределение  $k$  отказов за время  $t$  при условии, что  $K$  отказов были зафиксированы за время  $T$ , имеет вид

$$P(k, t) = \int_0^{\infty} \frac{(\lambda t)^k \exp(-\lambda t)}{k!} \cdot G(\alpha + K, \beta + T) d\lambda =$$

$$= \frac{\Gamma(\alpha + K + k)}{\Gamma(\alpha + K)k!} \left(\frac{\beta + T}{\beta + T + t}\right)^{\alpha + K} \left(\frac{t}{\beta + T + t}\right)^k. \quad (2)$$

Это выражение для отрицательного биномиального распределения. Если взять вектор  $(\alpha, \beta)$  в треугольнике  $(0, 0)$ ,  $(s, 0)$ ,  $(0, s)$ , то все возможные априорные ожидаемые интенсивности отказов попадают в интервал  $(0, \infty)$ , так как математическое ожидание случайной величины  $\lambda$ , имеющей гамма-распределение, равно  $\alpha/\beta$ . Множество всех параметров в треугольнике образует обобщенную модель отрицательного биномиального распределения [9]. Параметр  $s > 0$  определяет влияние априорного распределения на апостериорное. Он также определяет, как быстро нижняя и верхняя границы вероятностей событий сходятся по мере накопления статистических данных. Меньшие значения  $s$  приводят к быстрой сходимости и более строгим заключениям. Большие значения  $s$  дают более осторожный статистический вывод. Принимая множество распределений вместо одного



распределения вероятностей, мы можем искать только нижнюю и верхнюю границы вероятностей событий вместо точных значений для одного распределения. Эти границы могут быть получены минимизацией и максимизацией этих вероятностей по всему множеству значений  $(\alpha, \beta)$  в треугольнике.

#### 4. ОБЩАЯ СХЕМА ПОСТРОЕНИЯ ИНТЕРВАЛЬНОЙ МНПП

С одной стороны, большая часть возможных функций среднего значения числа отказов  $m(t)$  представляется как  $m(t; a, b) = a \cdot \tau(t, b)$ . С другой стороны, параметр  $\lambda$  распределения Пуассона в выражении (2) и его аргумент  $t$  можно заменить параметром  $a$  и дискретным временем  $\tau(t_j, b) - \tau(t_{j-1}, b)$  соответственно. Фактически, заменяя  $\lambda$  на  $a$ , получаем процесс Пуассона с масштабированным временем тестового диагностирования ПО, т. е. каждый интервал времени  $[t_{j-1}, t_j]$  заменяется интервалом  $[\tau(t_{j-1}, b), \tau(t_j, b)]$ . Используя результаты предыдущих разделов, можно записать функцию распределения вероятностей числа отказов в дискретные интервалы времени между  $t$  и  $t_j$  ( $t > t_j$ ) после  $r$  периодов отладки:

$$P_j(k, t | \alpha, \beta, b) = \frac{\Gamma(\alpha + K + k)}{\Gamma(\alpha + K)k!} \left( \frac{\beta + T_r}{\beta + T_r + \tau(t, b) - \tau(t_j, b)} \right)^{\alpha + K_r} \times \left( \frac{\tau(t, b) - \tau(t_j, b)}{\beta + T_r + \tau(t, b) - \tau(t_j, b)} \right)^k.$$

Здесь  $T_r$  — полное масштабированное время для  $r$ -го периода, определяемое как

$$T_r = \sum_{i=1}^r [\tau(t_i, b) - \tau(t_{i-1}, b)] = \tau(t_r, b),$$

$$t_0 = 0, \quad k_0 = 0,$$

$K_r$  полное число отказов до момента времени за  $r$  периодов отладки, определяемое как  $K_r = \sum_{i=1}^r k_i$

Функция распределения вероятностей для момента времени  $t \in [t_{j-1}, t_j]$  после  $r$  периодов отладочного процесса имеет вид

$$F_j(k, t | \alpha, \beta, b) = \sum_{l=0}^j \frac{\Gamma(\alpha + K_r + l)}{\Gamma(\alpha + K_r)l!} \left( \frac{\beta + \tau(t_r, b)}{\beta + T_j(t, b) + \tau(t_r, b)} \right)^{\alpha + K_r} \times \left( \frac{T_j(t, b)}{\beta + T_j(t, b) + \tau(t_r, b)} \right)^l.$$

Здесь  $T_j(t, b) = \tau(t, b) - \tau(t_{j-1}, b)$ .

Из приведенных выражений видно, что модифицированная модель не зависит от параметра  $a$ , но зависит от новых параметров априорного гамма-распределения  $\alpha$  и  $\beta$ . Кроме того, модель зависит от параметра роста  $b$ . Заметим, что альтернативная форма функции распределения вероятностей имеет вид:

$$F_j(k, t | \alpha, \beta, b) = 1 - I(q(j, t, b), k + 1, \alpha + K_r).$$

Здесь

$$q(j, t, b) = \frac{T_j(t, b)}{\beta + \tau(t_r, b) + T_j(t, b)},$$

$V_a(b, c)$  — неполная бета-функция;  $V(b, c)$  — бета-функция;  $I(a, b, c) = V_a(b, c)/V(b, c)$ .

Предлагается следующая схема для построения МНПП и для вычисления функции распределения вероятностей  $F_{r+1}$  после  $r$  периодов отладочного процесса. Построив обобщенную байесовскую модель и используя ее, получим множество распределений вероятностей  $\mathcal{M}_j$  с некоторыми границами  $\underline{F}_j$  и  $\bar{F}_j$ . Далее будет показано, что эти границы не зависят от параметров  $\alpha$  и  $\beta$  и определяются только параметром  $b$  (параметр  $s$  фиксирован). Отсюда следует, что получаем однопараметрическую модель. Тогда из утверждения 1 следует, что максимум функции правдоподобия по множеству  $\mathcal{M}_j(b)$  записывается на основе выражения (1). Максимизируя эту функцию по параметру  $b$  при фиксированном  $s$ , находим оптимальное значение этого параметра. Далее, получив параметр  $b$ , функция распределения вероятностей  $F_{r+1}$  после  $r$  периодов отладки вычисляется посредством построенной обобщенной байесовской модели, но теперь с полученным оптимальным значением  $b$ .

Следуя представленной выше схеме, построим сначала обобщенную байесовскую модель. Достаточно просто доказать, что минимум функции  $F_j(k, t | \alpha, \beta, b)$  по всем  $(\alpha, \beta)$  в треугольнике  $(0, 0)$ ,  $(s, 0)$ ,  $(0, s)$  достигается при  $(\alpha, \beta) = (s, 0)$  и ее нижняя граница определяется как

$$\underline{F}_j(k, t | s, b) = 1 - I\left(\frac{T_j(t, b)}{\tau(t_r, b) + T_j(t, b)}, k + 1, s + K_r\right).$$

Максимум функции  $F_j(k, t | \alpha, \beta, b)$  достигается при  $(\alpha, \beta) = (0, s)$ , и ее верхняя граница

$$\bar{F}_j(k, t | s, b) = 1 - I\left(\frac{T_j(t, b)}{s + \tau(t_r, b) + T_j(t, b)}, k + 1, K_r\right).$$

Следующий шаг — использование утверждения 1 и максимизация функции правдоподобия (1) по  $b$ . В результате получаем оптимальное значение  $b^0$ :

$$b^0 = \arg \max_b \ln L(\mathbf{K}|s, b) =$$

$$= \arg \max_b \sum_{j=1}^r \ln \left( I\left(\frac{T_j(t_j, b)}{\tau(t_r, b) + T_j(t_j, b)}, k_j + 1, s + K_r\right) - I\left(\frac{T_j(t_j, b)}{s + \tau(t_r, b) + T_j(t_j, b)}, k_j + 1, K_r\right) \right).$$

Завершающий шаг — запись границ функций распределения вероятностей числа отказов в интервале времени  $[t_r, t]$  после  $r$  периодов отладочного процесса

$$\underline{F}_{r+1}(k, t|s, b^0) =$$

$$= 1 - I\left(\frac{T_{r+1}(t, b^0)}{\tau(t_r, b^0) + T_{r+1}(t, b^0)}, k + 1, s + K_r\right),$$

$$\bar{F}_{r+1}(k, t|s, b^0) =$$

$$= 1 - I\left(\frac{T_{r+1}(t, b^0)}{s + \tau(t_r, b^0) + T_{r+1}(t, b^0)}, k + 1, K_r\right).$$

Нижняя  $\underline{E}^{(s)}X_{r+1}$  и верхняя  $\bar{E}^{(s)}X_{r+1}$  границы ожидаемого числа отказов в интервале  $[t_r, t]$  после  $r$  периодов отладочного процесса определяются через известные выражения для математического ожидания случайной величины, имеющей отрицательное биномиальное распределение, как

$$\underline{E}^{(s)}X_{r+1} = \frac{K_r T_{r+1}(t, b^0)}{s + \tau(t_r, b^0)},$$

$$\bar{E}^{(s)}X_{r+1} = (s + K_r) \frac{T_{r+1}(t, b^0)}{\tau(t_r, b^0)}.$$

## 5. ЧАСТНЫЕ СЛУЧАИ ИНТЕРВАЛЬНЫХ МНПП

Из приведенных выражений для обобщенных байесовских моделей видно, что они отличаются только функцией  $m(t; b)$ . Следовательно, используя функции известных МНПП, можно построить интервальные модификации МНПО в рамках предложенного подхода.

Модифицируем модель М-О [7], как одну из наиболее распространенных МНПО. Используя введенные обозначения, можно записать для модели  $\tau(t, b) = \ln(1 + bt)$ . Отсюда функция правдоподобия

$$L^{(s)}(\mathbf{K}|s, b) = \prod_{j=1}^r \left( I\left(\frac{\ln(1 + bt)}{\ln W}, k_j + 1, s + K_j\right) - I\left(\frac{\ln(1 + bt)}{s + \ln W}, k_j + 1, K_j\right) \right).$$

Здесь  $W = (1 + bt_r)(1 + bt)/(1 + bt_{j-1})$ .

Другой МНПО, основанной на неоднородных процессах Пуассона, является модель Д-О [5]. Для нее можно записать  $\tau(t, b) = 1 - \exp(-bt)$ . Функция правдоподобия тогда имеет вид

$$L^{(s)}(\mathbf{K}|s, b) = \prod_{j=1}^r \left( I\left(\frac{1 - \exp(-bt)}{V}, k_j + 1, s + K_j\right) - I\left(\frac{1 - \exp(-bt)}{s + V}, k_j + 1, K_j\right) \right).$$

Здесь  $V = 1 - \exp(-bt_r) - \exp(-bt) + \exp(-bt_{j-1})$ .

## 6. АНАЛИЗ ИНТЕРВАЛЬНЫХ МОДЕЛЕЙ

Проанализируем предлагаемые интервальные МНПП, используя реальные статистические данные по надежности ПО, опубликованные в работе [7]. Эти данные получены при отладке ПО для управления контроллерами в системе управления. Статистические данные представлены в виде 20-ти тестов и показаны в таблице.

Сначала анализируется предложенная интервальная модификация модели Д-О. Для ее оценки делается прогноз  $(i + 1)$ -го среднего (ожидаемого) числа отказов ПО, начиная с  $i = 3$ . Имея среднее число отказов, можно сравнить этот результат с реальным значением числа отказов в  $(i + 1)$ -м тесте, которое дано в таблице. Кроме того, сравниваются результаты моделирования также со стандартной моделью Д-О. Кривая без маркеров на рис. 1 — множество значений числа отказов из таблицы.

Статистические данные по отказам ПО

| Номер теста | Время теста, ч  | Число отказов |
|-------------|-----------------|---------------|
| $i$         | $t_i - t_{i-1}$ | $k_i$         |
| 1           | 62,5            | 9             |
| 2           | 44              | 4             |
| 3           | 40              | 7             |
| 4           | 68              | 6             |
| 5           | 62              | 5             |
| 6           | 66              | 3             |
| 7           | 73              | 2             |
| 8           | 73,5            | 5             |
| 9           | 92              | 4             |
| 10          | 71,4            | 2             |
| 11          | 64,5            | 4             |
| 12          | 64,7            | 7             |
| 13          | 36              | 0             |
| 14          | 54              | 5             |
| 15          | 39,5            | 3             |
| 16          | 68              | 3             |
| 17          | 61              | 3             |
| 18          | 62,6            | 4             |
| 19          | 98,7            | 10            |
| 20          | 25              | 3             |

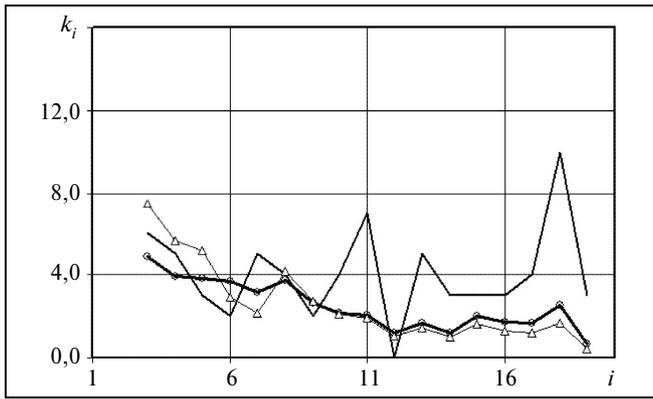


Рис. 1. Прогнозируемые ожидаемые значения числа ошибок для различных моделей, построенных на основе модели Д-О

Жирная кривая с круглыми маркерами — множество прогнозируемых ожидаемых значений числа отказов  $E^{(s)}X_{i+1}$ ,  $i = 3, \dots, 20$ , при  $s = 1$ . Здесь значение  $E^{(s)}X_{i+1}$  вычисляется с учетом нижней и верхней границ математических ожиданий [8] как  $E^{(s)}X_{i+1} = \eta \underline{E}^{(s)}X_{i+1} + (1 - \eta) \bar{E}^{(s)}X_{i+1}$ ,  $\eta = 0,5$ . Тонкая кривая с треугольными маркерами изображает множество точных прогнозируемых значений математического ожидания  $E X_{i+1}$ , вычисленных с использованием модели Д-О. Можно увидеть из приведенных графиков, что интервальная модификация модели Д-О обеспечивает лучший прогноз по сравнению с обычной моделью Д-О.

Введем следующие показатели качества моделей: максимальное отклонение  $R_1$ , среднее значение отклонения  $R_2$ , среднеквадратическое отклонение  $R_3$ .

Используя статистические данные, вычислим соответствующие показатели при  $s = 1$  после прогнозирования 17-ти значений числа отказов (от 3-го теста до 19-го теста) для предлагаемой модели  $R_1 = 7,491$ ,  $R_2 = 2,054$ ,  $R_3 = 1,786$  и для модели Д-О  $R_1^* = 8,311$ ,  $R_2^* = 2,312$ ,  $R_3^* = 1,959$ . Из результатов расчета следует, что качество предлагаемой модификации выше по сравнению с обычной моделью Д-О.

Интересно также исследовать, как число тестов влияет на значения тех же самых показателей качества. Вычислим эти показатели после прогнозирования 6-ти значений числа отказов (от 3-го до 8-го теста). В этом случае получаем для новой модели  $R_1 = 1,827$ ,  $R_2 = 1,133$ ,  $R_3 = 0,568$  и для модели Д-О  $R_1^* = 2,854$ ,  $R_2^* = 1,373$ ,  $R_3^* = 1,007$ . Из результатов расчета следует, что качество предлагаемой интервальной модификации повышается по сравнению с обычной моделью Д-О, когда число тестов небольшое. Это видно из рис. 2, где изображены отклонения прогнозируемых ожидаемых значений

числа отказов от реальных данных. Жирная кривая с круглыми маркерами — отклонения, соответствующие предлагаемой модели. Тонкая кривая с треугольными маркерами — отклонения, соответствующие модели Д-О. Очевидно, что новая модель ведет себя лучше при малом числе тестов.

Следующая задача анализа модели заключается в исследовании влияния параметра  $s$  на качество прогноза модели. Используя те же самые статистические данные об отказах, вычислим показатели качества при  $s = 0,5$  после 17 тестов  $R_1 = 7,198$ ,  $R_2 = 1,952$ ,  $R_3 = 1,719$ . Те же самые показатели при  $s = 0,5$  после 6 тестов приобретают значения:  $R_1 = 2,049$ ,  $R_2 = 1,074$ ,  $R_3 = 0,657$ . Можно увидеть, что меньшие значения  $s$  приводят к более высокому качеству прогноза, когда имеется большой объем данных. Однако качество прогноза падает при малом числе статистических данных. Противоположное заключение можно сделать при анализе случая, когда параметр  $s$  возрастает. В частности, при  $s = 2$  и после 17-ти тестов получаем  $R_1 = 7,734$ ,  $R_2 = 2,134$ ,  $R_3 = 1,852$ . Те же самые показатели при  $s = 2$  после 6-ти тестов имеют значения  $R_1 = 2,026$ ,  $R_2 = 1,172$ ,  $R_3 = 0,547$ .

Проанализируем интервальную модификацию модели М-О и сравним ее со стандартной моделью М-О. Соответствующие кривые прогноза для моделей показаны на рис. 3. Отклонения прогнозируемых ожидаемых значений числа отказов от реальных статистических данных изображены на рис. 4. Используя статистические данные, вычисляем показатели качества при  $s = 1$  после прогнозирования 17 значений числа отказов (от 3-го до 19-го теста) для предлагаемой интервальной модификации модели М-О  $R_1 = 7,817$ ,  $R_2 = 2,134$ ,  $R_3 = 1,852$ , и для обычной модели М-О  $R_1^* = 7,445$ ,  $R_2^* = 2,222$ ,  $R_3^* = 1,800$ . Те же самые показатели после 6-ти тестов (от 3-го до 8-го теста):  $R_1 = 1,932$ ,

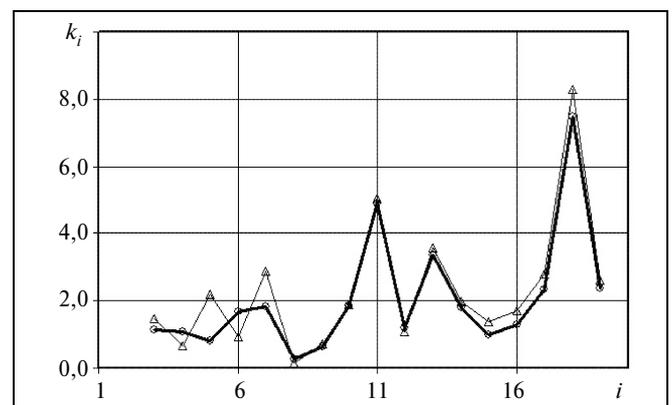


Рис. 2. Отклонения прогнозируемых ожидаемых значений числа ошибок от реальных данных для моделей Д-О

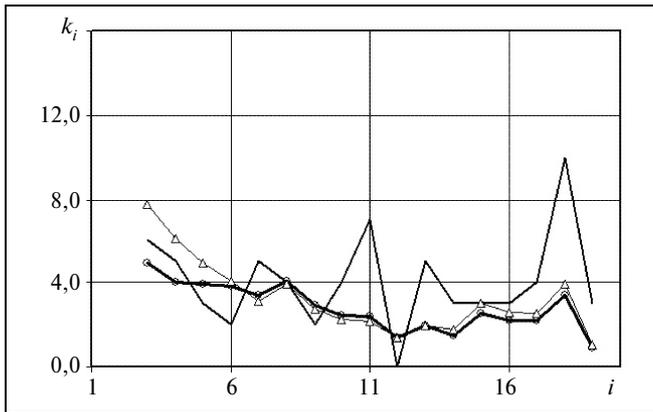


Рис. 3. Прогнозируемые ожидаемые значения числа ошибок для различных моделей, построенных на основе модели М-О

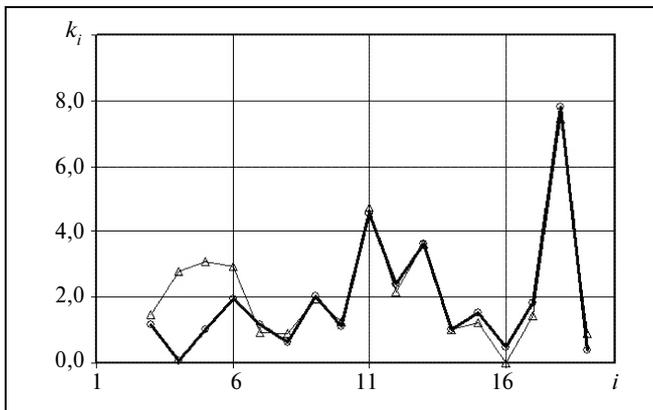


Рис. 4. Отклонения прогнозируемых ожидаемых значений числа ошибок от реальных данных для моделей М-О

$R_2 = 0,990$ ,  $R_3 = 0,620$ ,  $R_1^* = 3,060$ ,  $R_2^* = 2,005$ ,  
 $R_3^* = 1,020$ .

Модель М-О и ее модификации демонстрируют практически те же зависимости показателей качества прогноза от объема выборки и параметра  $s$ , что и модель Д-О.

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предложен подход, направленный на развитие нового класса моделей надежности программного обеспечения. Его основная идея состоит в комбинированном применении обобщенного байесовского подхода и метода максимума функции правдоподобия. Ключевыми элементами подхода являются доказанное утверждение и разделение всех параметров модели на два подмножества, что позволяет уменьшить размерность задачи. Другая важная особенность подхода состоит в возможности получать интервальные оценки надежности программного обеспечения. Точные характеристики надежности, которые обычно стремятся иметь специалисты, далеко не всегда заслуживают доверия,

например, когда статистические данные ограничены и исходная информация бедна. В предложенных моделях результат моделирования представляет собой интервал показателя надежности. Дальнейшее решение принимается исходя из того, насколько высоки требования к надежности анализируемого программного обеспечения.

Предложенный подход носит общий характер. Несмотря на то, что рассмотрены только две частные модели, аналогичным образом можно рассмотреть и другие модификации известных моделей надежности программного обеспечения.

Результаты численного анализа рассмотренных моделей и их сравнение с известными моделями говорят в пользу нового подхода. В то же время, из этих результатов видно, что нельзя выбрать идеальную модель для всех ситуаций. Необходимо пользоваться различными моделями и комбинировать результаты их применения.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Майерс Г. Надёжность программного обеспечения. — М.: Мир, 1980. — 360 с.
2. Cai K.Y., Wen C.Y., Zhang M.L. A critical review on software reliability modeling // Reliability Engineering and System Safety. — 1991. — Vol. 32, N 3. — P. 357–371.
3. Уткин Л.В., Шубинский И.Б. Нетрадиционные методы оценки надежности информационных систем. — СПб.: Любавич, 2000. — 173 с.
4. Cai K.Y. Towards a conceptual framework of software run reliability modeling // Information Sciences. — 2000. — Vol. 126, N 1–4. — P. 137–163.
5. Goel A.L., Okamoto K. Time dependent error detection rate model for software reliability and other performance measures // IEEE Trans. Reliab. — 1979. — Vol. R-28, N 3. — P. 206–211.
6. Duane J.T. Learning curve approach to reliability monitoring // IEEE Transactions on Aerospace. — 1964. — Vol. AS-2, N 2. — P. 563–566.
7. Misra P.N. Software reliability analysis // IBM Systems Journal. — 1983. — Vol. 22, N 3. — P. 262–270.
8. Walley P. Inferences from multinomial data: Learning about a bag of marbles // Journal of the Royal Statistical Society, Ser. B. — 1996. — Vol. 58, N 1. — P. 3–57.
9. Уткин Л.В. Анализ риска и принятие решений при неполной информации. — СПб.: Наука, 2007. — 404 с.
10. Bernardo J.M., Smith A.F.M. Bayesian Theory. — Chichester: Wiley, 1994.
11. Quaeghebeur E., De Cooman G. Imprecise probability models for inference in exponential families // Proc. of the 4rd Int. Symposium on Imprecise Probabilities and Their Applications, ISIPTA'05. — Carnegie Mellon University. Pittsburgh. — 2005. — P. 287–296.

Статья представлена к публикации членом редколлегии П.П. Пархоменко.

Уткин Лев Владимирович — д-р техн. наук, проректор, Санкт-Петербургская государственная лесотехническая академия, ☎(812) 550-02-53, ✉lev.utkin@mail.ru, URL: www.levvu.narod.ru,

Затенко Светлана Ивановна — ст. преподаватель, Санкт-Петербургская государственная лесотехническая академия, ✉s\_lana2004@mail.ru,

Коолен Франк (Frank Coolen) — Professor, PhD, Durham University, UK, Durham, ☎(0191 or +44 191) 334-30-48 (direct), 334-30-50 (secr.), ✉Frank.Coolen@durham.ac.uk, URL: http://maths.dur.ac.uk/stats/people/fc/fc.html.