CONTROL SCIENCES

Научно-технический журнал
6 номеров в год
ISSN 1819-3161

УЧРЕДИТЕЛЬ
Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН

Главный редактор
Д.А. Новиков

Заместители главного редактора
Л.П. Боровских, Ф.Ф. Пащенко

Редактор
Т.А. Гладкова

Выпускающий редактор
Л.В. Петракова

Издатель
ООО «СенСиДат-Контрол»

Адрес редакции
117997, ГСП-7, Москва,
ул. Профсоюзная, д. 65, к. 410.
Тел./факс (495) 334-92-00

E-mail: pu@ipu.ru

Интернет: http://pu.mtas.ru

Оригинал-макет
и электронная версия
подготовлены
ООО «Адвансед Солюшнз»

Отпечатано в
ИПУ им. В.А. Трапезникова РАН

Заказ № 72

Подписано в печать
17.09.2009 г.

Журнал зарегистрирован
в Министерстве
Российской Федерации
по делам печати,
телерадиовещания
и средств массовых
коммуникаций

Свидетельство о регистрации
ПИ №77-11963
от 06 марта 2002 г.

Журнал входит в Перечень ведущих рецензируемых журналов и изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученой степени доктора и кандидата наук

Подписные индексы:
80508 и **81708** в каталоге Роспечати
38006 в объединенном каталоге
«Пресса России»

Цена свободная

© Учреждение Российской академии наук
Институт проблем управления
им. В.А. Трапезникова РАН

ПРОБЛЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ

5.2009

СОДЕРЖАНИЕ

Анализ и синтез систем управления

Бунич А.Л. Вырожденные задачи синтеза систем управления линейными дискретными объектами 2
Щербаков П.С. Построение регуляторов заданной структуры при соблюдении инженерных требований 9

Управление в социально-экономических системах

Бухарин С.Н. О причинах экологических информационных войн в регионе 18
Попов Е.В., Шматов Г.А. Теория вычисления охвата СМИ 22
Губанов Д.А., Новиков Д.А., Чхартишвили А.Г. Модели информационного влияния и информационного управления в социальных сетях. 28
Федосеев С.А., Вожаков А.В., Гитман М.Б. Управление производством на тактическом уровне планирования в условиях нечеткой исходной информации 36

Управление в медико-биологических системах

Болодурина И.П., Луговскова Ю.П. Оптимальное управление иммунологическими реакциями организма человека 44

Управление техническими системами и технологическими процессами

Кубышкин В.А., Финягина В.И. Оптимизация температурных режимов электродов плазмотронов методами подвижного управления. 53

Управление подвижными объектами

Абрамянц Т.Г., Беланов Ю.А., Маслов Е.П. Яхно В.П. Поиск подвижного объекта по информационному признаку «след». Ч. 1. Общая структура оптимальной поисковой траектории 61
Твердохлебов В.А. Оценка сложности управления движением по известному маршруту 69

Философские вопросы управления

Алексеева А.И. О методологическом обосновании науки и практики экономического анализа хозяйственной деятельности 74

Хроника

Идентификация систем на пути создания методологических и логико-математических основ наукоемких технологий структурной идентификации 81

Станислав Данилович Земляков 87

* * *

Contents and abstracts. 88

УДК 681.511

ВЫРОЖДЕННЫЕ ЗАДАЧИ СИНТЕЗА СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ ЛИНЕЙНЫМИ ДИСКРЕТНЫМИ ОБЪЕКТАМИ

А.Л. Бунич

Рассматриваются задачи управления многомерными дискретными объектами со стационарными сингулярными возмущениями. Показано, что такие задачи вырождены и приведен метод построения регулятора.

Ключевые слова: вырожденные задачи синтеза, линейные дискретные объекты, нулевая цена управления.

ВВЕДЕНИЕ

Построение высокоточных систем относится к центральным проблемам теории автоматического управления. Классическая задача об абсолютной инвариантности линейных систем с неизмеряемыми возмущениями в классе детектирующих звеньев неразрешима, и усилия специалистов сосредоточились на определении условий приближенной инвариантности по двум направлениям — при ограничениях на класс объектов либо на класс возмущений.

К первому направлению относятся «мееровские структуры», в которых норма реакции на возмущение неограниченно уменьшается с ростом коэффициента усиления [1]. Приближенно инвариантные многомерные системы для минимально-фазовых объектов с ограниченными возмущениями построены в работе [2], где показано, что условие минимально-фазовости близко к необходимому для разрешимости задачи о приближенной инвариантности. Как и в мееровских структурах, недостаток регулятора, непреодолимый в рамках линейных систем, состоит в большом усилении помех при высоких требованиях к точности стабилизации [2, 3].

Начало второму направлению было положено идеей В.С. Кулебакина об аннулирующем возмущение $K(D)$-операторе [4], аналог которого («полином поглощения») впоследствии использовался при синтезе систем с дискретным временем [5]. Дальнейшее продвижение в этом направлении было обусловлено неполнотой априорной информации о спектральном составе возмущений, характерной для большинства приложений.

Простой пример звена задержки с аддитивным стационарным возмущением демонстрирует связь между разрешимостью задачи синтеза высокоточной системы и свойством линейной сингулярности возмущения, полностью определяемым его спектральной функцией. Для линейных стохастических систем со стационарными возмущениями задача построения универсального регулятора решена в работе [6]. В статьях [7, 8] рассмотрена задача синтеза дискретных и непрерывных систем с сингулярными возмущениями специального класса. Методика синтеза основана на аппроксимации физически нереализуемых звеньев реализуемыми фильтрами, возможность которой вытекает из условия сингулярности. Сингулярность возмущения может быть обусловлена наличием лакун, «исчезновением» спектра в некотором диапазоне частот, несовместимым с условиями применимости метода факторизации [9]. Интересно, что пример лакуны приведен автором метода факторизации (при исследовании энцефалограмм было обнаружено «исчезновение спектра» процесса вблизи частоты 9,05 Гц [10]). Сингулярные возмущения представляют также самостоятельный интерес в связи с рядом смежных к теории регулирования проблем безошибочной нелинейной [11] и линейной фильтрации [12].

Таким образом, синтез высокоточных линейных систем естественно связать с априорной ин-

формацией о возмущении и использовать эту информацию при построении регулятора, гарантирующего требуемую стоимость управления в установившемся режиме. С другой стороны, в задаче оптимальной стабилизации линейного объекта с несингулярными возмущениями требование линейности допустимых стратегий, вообще говоря, необоснованно и оптимальная стратегия может порождаться нелинейным регулятором [13, 14]. Сложности решения задач нелинейной оптимизации достаточно очевидны, не говоря уже об эффективной реализации оптимальной стратегии. И, напротив, для объектов с лакунарными возмущениями задача синтеза эффективно разрешима и алгоритм построения регулятора допускает простую интерпретацию в частотной области [7, 8].

В настоящей статье результаты работы [7] обобщены на более широкий класс объектов и возмущений, компоненты которых могут иметь различные локализации спектров, а стабилизируемые переменные необязательно совпадают с измеряемыми выходами. В рамках такой постановки задачи может рассматриваться и задача стабилизации неустойчивого по выходу объекта с предписанным уровнем расходов на управление. Показана возможность синтеза высокоточных систем с (необязательно линейно) предсказуемыми возмущениями во временной области. Для негауссовских возмущений обратные связи, вообще говоря, нелинейны, и используются оценки возмущений по наблюдениям на соответствующих тактах.

1. ТИПИЧНОСТЬ ПРЕДСКАЗУЕМЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ И ЦЕНА УПРАВЛЕНИЯ

К сингулярным относятся, например, все процессы с дискретным спектром, а также процессы, спектр которых имеет лакуны (интервалы нулевой спектральной меры). Следующий простой пример демонстрирует связь между наличием лакун и разрешимостью задачи синтеза системы с предписанной стоимостью управления — дисперсией ошибки установившейся реакции.

Принятые обозначения и сокращения:

д. р. ф. — дробно-рациональная функция; п. ф. — передаточная функция; с. в. — случайная величина; с. к. о. — средняя квадратическая ошибка; ∇ — оператор сдвига на один такт назад; $\Re$ — класс п. ф. допустимых регуляторов; $\Im_n$ — кольцо $n \times n$ матричных устойчивых д. р. ф.; $I(K)$ — стоимость управления в системе с регулятором $K \in \Re$; E — математическое ожидание; $adj(A)$ — матрица, присоединенная к квадратной матрице A; W_y, W_u и W_w — п. ф. замкнутой системы от v к y, u и w; W_y^0, W_u^0 и W_w^0 — п. ф. системы с опорным регулятором.

Пример 1. Объект — звено однотактовой задержки $y_t = u_{t-1} + v_t$, где спектр стационарного линейно сингулярного возмущения $\mathrm{v} = \{v_t\}_{t \in Z}$ с дискретным временем $t \in Z = \{0, \pm 1, \ldots\}$ сосредоточен на множестве $\Delta = \{\omega \in [-\pi, \pi]: |\sin\omega/2| \leqslant 1/2\}$, u — управление, y — стабилизируемый выход. Допустимы стабилизирующие обратные связи по выходу, а стоимость управления — дисперсия установившейся реакции замкнутой системы Ey_t^2. Регулятор с п. ф. $K(z) = p_N(zp_N - 1)^{-1}$, где $p_N(z) = \sum_{k=0}^{N} (1 - z)^k$, допустим, и обеспечивает экспоненциальное по порядку при $N \uparrow \infty$ уменьшение стоимости управления $Ey_t^2 = \int_{\Delta} |1 - e^{-j\omega} p_N(e^{-j\omega})|^2 dS$, где S — спектральная функция v, при равномерно по N ограниченных расходах на управление $Eu_t^2 = \int_{\Delta} |p_N(e^{-j\omega})|^2 dS$. ♦

Пример 1 отражает общую ситуацию: вырожденность задачи синтеза (нулевая цена — нижняя граница стоимости) для сингулярных возмущений не зависит от п. ф. объекта по управлению и спектрального состава возмущения с фиксированной дисперсией и локализацией спектра. Для решения задачи синтеза существенно указать лишь лакуну спектра (дополнения $[-\pi, \pi] \backslash \Delta$), причем в силу экспоненциальной сходимости предписанная стоимость обеспечивается регуляторами порядков тем меньших, чем шире лакуна спектра.

Очевидно, сингулярность возмущения несовместима со стандартной методикой построения регуляторов методом факторизации. Естественно возникает вопрос об универсальности такой стандартной процедуры или, в эквивалентной форме, о представительности, «массивности» класса спектральных плотностей линейно регулярных возмущений. При положительном ответе можно было бы обоснованно считать вырожденность задачи синтеза исключительным, «нетипичным» свойством. Однако более подробный анализ опровергает такое предположение.

Типичность определим в категорном смысле Бэра по отношению к естественной L^1-метризации семейства спектральных плотностей из класса $M = \{s \in L^1: 0 \leqslant s \leqslant 1\}$. Введем пространство L_s^2 функций с квадратично интегрируемым модулем по весу $s \in M$ и нормой $\|*\|_s$. Как установлено в работе [12], для некоторого положительного веса $s \in M$ каждая функция $f \in L_s^2$ представима сходящимся по норме $\|*\|_s$ рядом $\sum_{n>0} c_n z^n$, и совокупность M^* таких весов представляет множество $M^* \subset M$ второй категории Бэра. Если $s \in M^*$, то ряд схо-

дится и для функции $f(z) = 1$, поэтому возмущения со спектральной плотностью s сингулярны и свойство вырожденности задачи синтеза типично. Используя анонсированный результат, построим регулятор, обеспечивающий предписанную стоимость управления. Приведем это построение для скалярного объекта $a(\nabla)y_t = b(\nabla)u_t + v_t$ с выходом y, управлением u и стационарным центрированным возмущением v со спектральной плотностью $s \in M^*$, взаимно простые полиномы a, b ($a(0) = 1$, $b(0) = 0$, $b(z) \neq 0$ при $|z| = 1$) известны. Фиксируем некоторый опорный регулятор и п. ф. W_y^0, W_u^0 системы управления с опорным регулятором. Регулятор с п. ф. K_n определим соотношениями $K_n = W_u^n (W_y^n)^{-1}$, $W_y^n = (1 - bf_n) W_y^0$, $W_u^n = W_u^0 - af_n W_y^0$, где $W_{y,u}^n$ — п. ф. замкнутой системы, а f_n — n-я частичная сумма разложения д. р. ф. $b^{-1} \in L_s^2$, $s \in M^*$. Регулятор K_n допустим (стабилизирует объект), а вырожденность задачи синтеза (нулевая цена управления) вытекает из соотношений $\lim\limits_{n\to\infty} \| W_y^n \|_s \leqslant \sup\limits_{|z|=1} |(b W_y^0)(z)| \lim\limits_{n\to\infty} \| b^{-1} - f_n \|_s = 0$, справедливых для любых плотностей $s \in M^*$.

Рассмотрим вопрос об определении нижней границы стоимости (цены) управления, когда проектировщик вместо точно известной спектральной функции возмущения S располагает ее достаточно точной оценкой S^*. Замена $J(S) \to J(S^*)$ (метод подстановки) обоснован в предположении непрерывности функционала $J(S)$. В противном случае метод подстановки искажает цену управления, а реально достижимая стоимость управления выявляется лишь на этапе натурных испытаний.

Определим точность оценки в смысле метрики топологии сходимости по вариации на конусе спектральных функций Q. Используя аффинную параметризацию п. ф. системы управления [14], представим цену управления в форме

$$J(S) = \inf_{f \in \Im} \int_{-\pi}^{\pi} | W_y^0 - bf |^2 dS, \quad S \in Q. \qquad (1)$$

Выражение (1) определяет полунепрерывное сверху отображение J: $Q \to [0, \infty)$. Однако, как видно из следующего примера, свойство полунепрерывности снизу нарушается и применение метода подстановки необоснованно.

Пример 2. Пусть S имеет факторизуемую плотность $s \in M$, а в остальном выполнены условия примера 1. Цена управления $J(S) > 0$ совпадает с с. к. о. оптимального линейного прогноза на такт и определяется формулой Сеге [15]. Так как множество M^* плотно в M, то спектральная плотность $s \in M \backslash M^*$ аппроксимируется по L^1-норме плотностью $s^* \in M^*$ некоторой близкой к S спектральной функции S^* ($S^* \approx S$), для которой $J(S^*) = 0$, т. е. метод подстановки занижает цену управления (по сравнению с истинной при точно известной функции S). ♦

Высокая чувствительность цены управления согласуется с хорошо известным фактом негрубости винеровских регуляторов к вариациям спектрального состава возмущения [16]. На практике проблема чувствительности решается дополнительными ограничениями на класс допустимых регуляторов, что подтверждается высокой долей промышленных регуляторов малых порядков, построенных эмпирически без учета рекомендаций современной теории [17, 18].

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Постановка задачи синтеза включает в себя описание класса объектов, допустимых возмущений, допустимых обратных связей и критерия качества.

Линейный объект с дискретным временем t описывается уравнением

$$a(\nabla)y_t = b(\nabla)u_t + v_t, \qquad (2)$$

где стабилизируемый выход y_t, управление u_t и неизмеряемое возмущение v_t имеют одинаковую размерность n, $n \times n$-взаимно простые справа матричные полиномы a и b заданы и удовлетворяют условиям $a(0) = I_n$, $b(0) = 0$, $\det b(z) \neq 0$ при $|z| = 1$. Начальные условия при $t < 0$ представляют собой с. в. с конечными моментами второго порядка.

Возмущение $v = \{ v_t^k \}_{t \in Z}^{k = 1, \ldots, n}$ — стационарный центрированный процесс с $n \times n$-матричной спектральной функцией S специальной структуры, спектр каждой компоненты которого v_t^k сосредоточен на заданном собственном замкнутом подмножестве $\Delta_k = -\Delta_k$ отрезка $[-\pi, \pi]$ $k = 1, \ldots, n$. Класс всех таких возмущений v удовлетворяющих дополнительному условию $E\|v_t\|^2 \leqslant \sigma^2$ с фиксированной константой $\sigma > 0$, обозначим L. Здесь и далее для краткости стационарные в широком смысле процессы называются стационарными, а линейно регулярные (линейно сингулярные) процессы — регулярными (сингулярными).

Допустимы любые стабилизирующие объект линейные обратные связи по выходу $\alpha(\nabla)u_t = \beta(\nabla)y_t$, $\alpha(0) = I_n$ с $n \times n$-матричными полиномами α и β (обратная связь стабилизирующая, если характеристический полином замкнутой системы $g(z)$ шу-

ровский). Класс допустимых регуляторов обозначим $\Re$.

Стоимость управления в системе с регулятором $K \in \Re$ определяется величиной $I(K) = \|W_y\|_v^2$, где $\|*\|_v$ — норма в гильбертовом пространстве $L^2(S)$ со скалярным произведением $(\varphi, \psi) = \mathrm{tr}\left\{\int\limits_{-\pi}^{\pi} \varphi dS \psi^*\right\}$ (функции, различающиеся на множествах нулевой S-меры, отождествляются, tr — след квадратной $n \times n$-матрицы, * — знак эрмитова сопряжения).

Для заданного уровня стоимости управления $d > 0$ необходимо построить регулятор $K = K_d \in \Re$, для которого $\sup\limits_{v \in L} I(K) \leqslant d$. Если последнее неравенство разрешимо относительно $K \in \Re$ для любого уровня $d > 0$, то задача синтеза называется вырожденной.

Прокомментируем постановку задачи. Требование одинаковой размерности управления и стабилизируемой переменной естественно: «дефицит размерности управления» ($\dim u < \dim y$) препятствует вырожденности задачи синтеза для объекта общего положения. Очевидно, возмущения $v \in L$ сингулярны и задача линейного прогноза таких возмущений допускает скаляризацию, т. е. может быть решена покомпонентно. В частном случае $\Delta_1 = \Delta_2 = ... = \Delta_n$ вырожденность поставленной задачи синтеза установлена в работе [7]. Если $L = \{v\}$ (синтез в «условиях полной определенности»), то определение вырожденности согласуется с аналогичным из § 1. Класс L определяется априорной информацией о внешней среде, причем точность локализации спектров возмущений влияет на порядок регулятора, гарантирующего предписанную стоимость управления. Требование $\sup\limits_{v \in L} I(K) < d$ гарантирует робастность регулятора по отношению к вариациям возмущений внутри класса допустимых.

Для возмущений с конечным спектром частот задача синтеза разрешима и в предельном случае $d = 0$ на основе многомерной версии принципа поглощения [5]. Свойство вырожденности можно интерпретировать как приближенную инвариантность системы по отношению к классу возмущений с априорной информацией о локализации их спектров.

3. АЛГОРИТМ СИНТЕЗА РЕГУЛЯТОРА

Для допустимого возмущения $v \in L$ замкнутые множества $\Gamma_k = \exp(j\Delta_k) \subset \Gamma$, $k = 1, ..., n$, не разбивают плоскость, поэтому в силу теоремы Лаврентьева [19] любая непрерывная на множестве Γ_k функция допускает равномерную полиномиальную аппроксимацию. Это утверждение совместно с параметрическим представлением некоторого специального класса систем управления позволяет обосновать вырожденность задачи синтеза методом приближенной динамической компенсации. Суть этого метода сводится к следующему.

Пусть W_y^0 и W_u^0 — пара п. ф. системы с регулятором $K_0 \in \Re$ от v к u и от v к y соответственно. Задача синтеза регулятора для объекта (2) решается в классе систем управления, п. ф. которых W_y и W_u заданы в параметрической форме

$$W_y = W_y^0 (I_n - bf), \quad W_u = W_u^0 - (I_n + W_u^0 b)f, \quad f \in \Im_n.$$

Каждая такая пара д. р. ф. W_y, $W_u \in \Im_n$ удовлетворяет линейному уравнению $aW_y - bW_u = I_n$ и представляет собой п. ф. системы управления с некоторым регулятором $K \in \Re$, определяемым стандартно [14]. В силу запаздывания в объекте по управлению условие компенсации $W_y \equiv 0$ несовместимо с условием $f \in \Im_n$ и для построения допустимого регулятора естественно вместо точной динамической компенсации использовать приближенную.

Положим $p = \mathrm{diag}(p_1,..., p_n)$, $q = \det b$, $f = \mathrm{adj}(b)p$, где p_k — равномерная полиномиальная аппроксимация на множества $\Gamma_k = \exp(j\Delta_k)$ скалярной д. р. ф. q^{-1}, $k = 1,..., n$. (существование которой следует из теоремы Лаврентьева). Так как $\|W_y\|_v^2 \leqslant \leqslant \sup\limits_{|z| = 1} \|W_y^0(z)\|^2 E \|(I_n - qp)(\nabla) v_t\|^2$, то в силу аппроксимации $p \approx q^{-1} I_n$ величина в правой части неравенства не превышает предписанного значения $d > 0$ для подходящего полинома $p = p_d$. В системе управления с регулятором $K = K_d \in \Re$ неравенство $\|W_y\|_v^2 < d$ выполняется равномерно по $v \in L$, т. е. задача синтеза вырожденна, что и требовалось доказать.

При одинаковой локализации спектров компонент возмущения на $\Delta = \Delta_1 = \Delta_2 = ... = \Delta_n$ возможна более простая схема синтеза с использованием правой взаимно простой факторизации [20] п. ф. объекта по управлению ($BA^{-1} = a^{-1}b$). Пусть $n \times n$ полином $B^{(-1)}$ удовлетворяет неравенству $\|I_n - B(z)B^{(-1)}(z)\| < 1$ при $z \in \exp(j\Delta)$. Тогда регу-

лятор $K \in \Re$ определяется без вычисления п. ф. замкнутой системы [7]:

$$K = (K_0 - AB^{(-1)})(I_n - BB^{(-1)})^{-1}. \qquad (3)$$

Делитель $(I_n - BB^{(-1)})$ в правой части выражения (3) аналогичен полиному поглощения для случая возмущений с конечными спектрами [5]. Последовательная замена $K_0 \Rightarrow K$ позволяет реализовать регулятор как звено, итеративное по структуре и требуемое для достижения предписанного уровня стоимости d, число итераций N имеет логарифмический порядок роста: $N(d) = O(\ln d^{-1})$ при $d \to 0$ [7]. Определяющий темп снижения стоимости управления при $N \uparrow \infty$ показатель экспоненты допускает оценку снизу через трансфинитный диаметр компакта $\exp(j\Delta)$ [21]. Темп снижения цены управления при росте N тем ниже, чем ближе к окружности Γ расположены корни полинома $\det b(z)$.

4. УПРАВЛЕНИЕ ПО НЕПОЛНЫМ ДАННЫМ

Техника полиномиальной аппроксимации неустойчивых д. р. ф. применима и при решении более общей задачи стабилизации, включая стабилизацию с предписанным уровнем расходов на управление.

Объект описывается уравнениями

$$a_1(\nabla)_{wt} = b_1(\nabla)v_t + c_1(\nabla)u_t + d(\nabla)y_t,$$

$$a_2(\nabla)y_t = b_2(\nabla)v_t + c_2(\nabla)u_t,$$

где все переменные (возмущение $v \in L$, стабилизируемая переменная w измеряемый без помех выход y и управление u имеют одинаковую размерность n, все матричные полиномы заданы и имеют размерность $n \times n$. По предположению полиномы $\det a_1$ и $\det b_2$ устойчивы, полиномы a_2, c_2 $(a_2(0) = L_n)$ взаимно просты справа и выполняется условие $\det(c_1A + dB)(z) \approx 0$ при $z \in \Gamma$, где полиномы A и B определяются правой взаимно простой факторизацией $AB^{-1} = a_2^{-1}c_2$. Класс $\Re$ допустимых регуляторов образован стабилизирующими объект обратными связями по выходу $u = Ky$, стоимость управления $I(K) = \|W_w\|_v^2$. Требуется для произвольно заданного уровня стоимости $d > 0$ построить регулятор $K \in \Re$, удовлетворяющий целевому условию $\sup\limits_{v \in L} I(K) \leqslant d$.

При исследовании разрешимости задачи предположим без ограничения общности изложения $a_1 = I_n$. Фиксируем некоторый опорный регулятор $K_0 \in \Re$ и тройку п. ф. замкнутой системы $\{W_w^0, W_y^0, W_u^0\}$. Решение определим в классе систем с параметрическим представлением п. ф.

$$W_w = W_w^0 - (c_1A + dB)f, \quad W_u = W_w^0 - Af,$$
$$W_y = W_y^0 - Bf, \quad f \in \Im_n. \qquad (4)$$

При $b_1 = c_1 = 0$, $d = b_2 = I_n$ задача рассматривалась в § 3, а при $b_1 = d = 0$, $c_1 = I_n$ получаем практически важную задачу стабилизации при малых расходах на управление (такая задача содержательна при неустойчивом полиноме $\det a_2$).

Если отказаться от требования допустимости регулятора, то решение получается непосредственно из условия компенсации $W_w \equiv 0$, эквивалентного в силу первого из уравнений (4) уравнению $(c_1A + dB)f = W_w^0$ относительно д. р. ф. f. Положим $p = \operatorname{diag}(p_1, \ldots, p_n)$, $q = \det(c_1A + dB)$, $f = [\operatorname{adj}(c_1A + dB)]\, W_w^0 p$, где p_k — равномерная на $\Gamma_k = \exp(j\Delta_k)$ полиномиальная аппроксимация д. р. ф. q^{-1}, $k = 1, \ldots, n$. Искомый регулятор $K \in \Re$ получаем левой факторизацией д. р. ф. $W_u W_y^{-1}$, где $W_{y,u}$ определяются из соотношений (4). В силу выбора $f \in \Im_n$ получим: $W_w = W_w^0 (I_n - qp) \approx 0$, где приближенное равенство понимается в смысле $L^2(S)$-нормы. Таким образом, для заданного уровня $d > 0$ выполняется целевое неравенство $\sup\limits_{v \in L} I(K) \leqslant d$, что и требовалось доказать.

5. НЕЛИНЕЙНЫЕ РЕГУЛЯТОРЫ

Естественно предположить, что возможность синтеза высокоточной системы управления объектом (2) обусловлена именно предсказуемостью (сингулярностью) возмущения и требование линейности прогноза (линейной сингулярности возмущения) несущественно. Методика построения регулятора, обеспечивающего предписанную стоимость управления, сводится к следующему. Расширим класс допустимых стратегий управления в предположении наблюдаемости возмущения в прошлом, настоящем и будущем. Такой методический прием расширения применялся для решения линейно-квадратичной задачи синтеза и возмущений авторегрессия — скользящее среднее, когда закон регулирования получают из комбинированного заменой возмущений их оптимальными оценками по наблюдениям на соответствующих

тактах [14]. Если же процесс v предсказуем, то сужение класса стратегий при переходе от комбинированного закона с упреждением по возмущению к обратной связи по выходу не снижает стоимости управления. Для негауссовских возмущений такой прием замены возмущений их оптимальными оценками приводит, вообще говоря, к некоторой нелинейной стратегии. Перейдем к описанию алгоритма синтеза.

По предположению возмущение v в объекте (2) представляет собой центрированный стационарный в узком смысле сингулярный процесс с конечными моментами второго порядка. Начальные данные нулевые ($y_t = u_t = 0$ при $t < 0$). Объект (2) стабилизируется некоторым опорным регулятором $\alpha_0(\nabla)u_t = \beta_0(\nabla)y_t$, $\alpha(0) = I_n$ (характеристический полином замкнутой системы $g = \det\begin{pmatrix} a & -b \\ -\beta_0 & \alpha_0 \end{pmatrix}$ устойчив), и выполняется частотное условие $\det b(z) \neq 0$ при $z \in \Gamma$. Введем стационарный процесс ξ — реакцию (некаузального) фильтра с частотной характеристикой $b^{-1}(e^{-j\omega})$ на стационарный процесс v и построим комбинированную систему с законом управления $\alpha_0(\nabla)u_t = \beta_0(\nabla)y_t - \alpha_0(\nabla)\xi_t$. Замкнутая система имеет стационарное решение ($y_t = 0$, $u_t = -\xi_t$) и в силу устойчивости полинома g независимо от начальных данных для любого решения этой системы (y_t, u_t) справедливо равенство

$$\lim_{t\to\infty} E\|y_t\|^2 = 0. \qquad (5)$$

Заменим с. в. ξ_t ее оценкой $\xi_t^N = E(\xi_t | y_{t-N-n}^t, u_{t-N-n}^{t-1})$ при $t > N + n$, $\xi_t^N = 0$ при $t \leqslant N + n$, где $y_{t-N-n}^t = (y_t, ..., y_{t-N-n})$, $u_{t-N-n}^{t-1} = (u_{t-1}, ..., u_{t-N-n})$, $N \gg 1$. Закон управления определим нелинейной обратной связью по выходу

$$\alpha_0(\nabla)u_t = \beta_0(\nabla)y_t - \alpha_0(\nabla)\xi_t^N. \qquad (6)$$

Замена $\xi_t \Rightarrow \xi_t^N$ обосновывается следующей леммой, доказанной в Приложении.

Лемма. *Если возмущение v сингулярно, то* $\lim\limits_{N\to\infty} \limsup\limits_{t\to\infty} E\|\xi_t - \xi_t^N\|^2 = 0$. ♦

В силу устойчивости полинома g из приведенной леммы вытекают соотношения $\lim\limits_{N\to\infty} \limsup\limits_{t\to\infty} E \times \times \|y_t - y_t^N\|^2 = 0$, $\lim\limits_{N\to\infty} \sup \limsup\limits_{t\to\infty} E\|u_t - u_t^N\|^2 < \infty$ для решения (y_t^N, u_t^N) замкнутой системы (2), (6), и с учетом равенства (5) получим $\lim\limits_{N\to\infty} J_N = 0$, где $J_N = \limsup\limits_{t\to\infty} E\|y_t^N\|^2$.

Для заданного уровня стоимости управления $d > 0$ регулятор (5) достаточно большой глубины памяти $T = T(N)$ (при $N > N_d \gg 1$) гарантирует выполнение целевого неравенства $J_N < d$ при ограниченных расходах на управление $\sup\limits_N \limsup\limits_{t\to\infty} E\|u_t^N\|^2 < \infty$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предложен метод приближенной динамической компенсации для линейных дискретных объектов с предсказуемыми (сингулярными) возмущениями. Возможность синтеза высокоточной системы обусловлена эквивалентностью канала измерения сингулярных возмущений их прогнозу относительно прошлых наблюдений «вход — выход» на соответствующих тактах. Предписанная стоимость управления (в смысле среднеквадратической нормы установившейся реакции) гарантируется в классе допустимых регуляторов, глубина памяти которых растет с ужесточением требований к точности стабилизации.

Результаты работы допускают обобщение на задачи с более сложными целями, например, стабилизации части регулируемых переменных при ограничениях на расходы по некоторым каналам управления. Алгоритмом синтеза можно воспользоваться, например, для компенсации гармонического возмущения, частота которого локализована в априорно заданном диапазоне.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство леммы. Пусть F_{Nt} = σ-алгебра, порожденная системой с. в. $(y_{t-N-n}^t, u_{t-N-n}^{t-1})$, и $\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} \gamma_k v_{t+k}$ — представление процесса ξ сходящимся п. н. (почти наверное) и в среднем квадратическом рядом, где $\{\gamma_k\}_{k\in Z}$ — $n \times n$ матричные коэффициенты ряда Фурье для д. р. ф. $b^{-1}(z)$. Утверждение леммы можно представить в виде $\lim\limits_{N\to\infty} \limsup\limits_{t\to\infty} E\|\xi_t - E(\xi_t|F_{Nt})\|^2 = 0$. С учетом экспоненциальной сходимости $\|\gamma_k\| \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$ при $k \to \infty$ достаточно доказать следующее предельное равенство:

$$\lim_{N\to\infty} \limsup_{t\to\infty} \tau_{Ntk} = 0, \quad \tau_{Ntk} = E\|v_{t+k} - E(v_{t+k}|F_{Nt})\|^2. \qquad (П1)$$

Последовательность $\{\tau_{Ntk}\}_{N \in Z^+}$, $Z^+ = \{1, 2, ...\}$ монотонно не возрастает при $N \uparrow \infty$, поэтому $\limsup_{N\to\infty} \limsup_{t\to\infty} \tau_{Ntk} \leqslant \limsup_{t\to\infty} \tau_{Mtk}$ для любых $M \in Z^+$, и при нарушении равенства (П1) имеем: $\limsup_{t\to\infty} \tau_{Mtk} \geqslant c_k$ с некоторой константой $c_k > 0$. В силу уравнения объекта (2) при $t > M + n$ справедливы включения $G_{Mt} = \sigma\{v_{t-M}^t\} \subset F_{Mt}$, поэтому $\limsup_{t\to\infty} E\|v_{t+k} - E(v_{t+k}|G_{Mt})\|^2 \geqslant \limsup_{t\to\infty} \tau_{Mtk} \geqslant c_k$. Процесс v стационарен, поэтому величины под знаком предела в левой части последнего неравенства не зависят от t, и $E\|v_{t+k} - \mu_{tkM}\|^2 \geqslant c_k$, где $\mu_{tkM} = E(v_{t+k}|G_{Mt})$, $M \in Z^+$. После перехода к пределу при $M \uparrow \infty$ получим неравенство

$$\limsup_{M\to\infty} E\|v_{t+k} - \mu_{tkM}\|^2 > 0. \qquad (П2)$$

Процесс $\mu = \{\mu_{tkM}, G_{Mt}\}_{M \in Z^+}$ — мартингал Леви, удовлетворяющий неравенству

$$\sup_{M \in Z^+} E\|\mu_{tkM}\|^2 \leqslant E\|v_t\|^2, \qquad (П3)$$

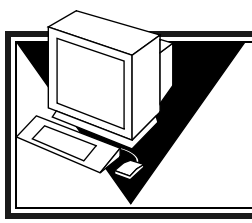
поэтому $\mu_{tkM} \overset{M\to\infty}{\longrightarrow} \mu_{tk\infty} = E(v_{t+k}|G_{\infty t})$ при $M \to \infty$ п. н., где $G_{\infty t} = \sigma(\cup_{M \in Z^+} G_{Mt})$. Но $v_{t+k} = E(v_{t+k}|G_{\infty t})$ п. н. в силу сингулярности процесса v, поэтому $\mu_{tkM} \overset{M\to\infty}{\longrightarrow} v_{t+k}$ при $M \to \infty$ п. н. Субмартингал $\{\|\mu_{tkM}\|, G_{Mt}\}_{M \in Z^+}$ удовлетворяет неравенству (П3), поэтому [22] $\lim_{M\to\infty} \|\mu_{tlM}\|$ существует в L^2, откуда $\lim_{M\to\infty} E\|v_{t+k} - \mu_{tkM}\|^2 = 0$ вопреки неравенству (П2), т. е. предположение $c_k > 0$ приводит к противоречию, и равенство (П1), а вместе с ним и утверждение леммы доказаны.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Мееров М.В.* Синтез систем автоматического регулирования высокой точности. — М.: Наука, 1967. — 434 с.
2. *Проскурников А.В., Якубович В.А.* Синтез регуляторов, обеспечивающих инвариантность системы управления / В кн.: «70 лет теории инвариантности». — М.: Изд-во ЛКИ, 2008. — 256 с.
3. *Неймарк Ю.И.* Синтез и функциональные возможности квазиинвариантного управления // Автоматика и телемеханика. — 2008. — № 10. — С. 48—56.
4. *Кулебакин В.С.* Операторное $K(D)$-изображение функций и его практическое применение // Тр. ВВИА им. Н.Е. Жуковского. — 1958. — Вып. 433.
5. *Цыпкин Я.З.* Скользящая аппроксимация и принцип поглощения // Докл. РАН. — 1997. — Т. 357, № 6. — С. 750—752.
6. *Якубович В.А.* Универсальные регуляторы в стохастических задачах оптимального управления линейными стационарными объектами // Автоматика и телемеханика. — 1997. — № 6. — С. 170—182.
7. *Бунич А.Л.* Вырожденные задачи синтеза системы управления линейным дискретным объектом // Автоматика и телемеханика. — 2005. — № 11. — С. 35—45.
8. *Бунич А.Л.* Высокоточные системы управления с сингулярными возмущениями // Автоматика и телемеханика. — 2008. — № 7. — С. 3—17.
9. *Rosenblatt M., Lii K.S.* Estimation and Deconvolution When the Transfer Function Has Zeros // J. Theor. Probab. — Vol. 1, N 1. — 1988. — P. 93—113.
10. *Винер Н.* Кибернетика, или управление и связь в животном мире и машине. — М.: Сов. радио, 1968. — 268 с.
11. *Пинскер М.С., Прелов В.В.* О безошибочной фильтрации некоторых стационарных процессов // Усп. матем. наук. — 1997. — Т. 52, вып. 2 (314). — С. 109—118.
12. *Олевский А.М.* Представление функций экспонентами с положительными частотами // Усп. матем. наук. — 2004. — Т. 59, вып. 1 (355). — С. 169—178.
13. *Казаринов Ю.Ф.* Нелинейный оптимальный регулятор в стохастических системах с линейным объектом // Автоматика и телемеханика. — 1986. — № 1. — С. 56—64.
14. *Фомин В.Н.* Методы управления линейными дискретными объектами. — Л.: Изд-во ЛГУ, 1985. — 336 с.
15. *Розанов Ю.А.* Стационарные случайные процессы. — М.: Наука, 1990. — 272 с.
16. *Zhou K., Doyl J.C., Glover K.* Robust and Optimal Control. — N.-Y.: Prentice Hall, 1996.
17. *Красовский А.А.* Исторический обзор и современное состояние фундаментальной прикладной науки управления на примере самоорганизующихся регуляторов // Междунар. конф. по проблемам управления / Ин-т пробл. управл. — М., 1999. — С. 4—23.
18. *Qine S.J., Badgwell T.A.* A survey of industrial model predictive control technology // Contr. Engineering Practice. — 2002. — N 11. — P. 733—764.
19. *Суетин П.К.* Ряды по многочленам Фабера. — М.: Наука, 1984. — С. 49.
20. *Kailath T.* Linear Systems. — NJ: Englewood Cliffs, Prentice Hall, 1980.
21. *Голузин Г.М.* Геометрическая теория функций комплексного переменного. — М.: Наука, 1966. — 556 с.
22. *Булинский А.В., Ширяев А.Н.* Теория случайных процессов. — М.: Физматлит, 2005. — С. 124.

Статья представлена к публикации членом редколлегии А.Г. Бутковским.

Бунич Александр Львович — д-р техн. наук, вед. науч. сотрудник, Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, г. Москва, ☎(495) 334-87-59, ✉ bunfone@ipu.ru.



Внимание!

Наш новый адрес в Интернете: **http://pu.mtas.ru**

Редакция

УДК 62-55

ПОСТРОЕНИЕ РЕГУЛЯТОРОВ ЗАДАННОЙ СТРУКТУРЫ ПРИ СОБЛЮДЕНИИ ИНЖЕНЕРНЫХ ТРЕБОВАНИЙ

П.С. Щербаков

Работа посвящена развитию простого и эффективного подхода к синтезу регуляторов, предложенного в 1999 г. О.Н. Киселевым и Б.Т. Поляком, и его исследованию применительно к решению задачи стабилизации режима электроэнергетической системы. Подход заключается в построении множества всех допустимых регуляторов заданной структуры (либо генерировании их случайным образом) с последующей возможностью выбора среди них наилучшего по тому или иному инженерному критерию. Исследован также робастный вариант метода при наличии параметрической неопределенности в системе и дано обобщение на регуляторы более сложной структуры.

Ключевые слова: регуляторы фиксированной структуры, *D*-разбиение, робастность, рандомизация.

ВВЕДЕНИЕ

При стабилизации систем на практике повсеместно используются комбинации простых типовых регуляторов, что, прежде всего, объясняется простотой их настройки. Этому посвящена обширная литература, например, [1, 2]. В общем случае, как известно [3, 4], задача построения стабилизирующего регулятора заданной структуры сложна, поскольку сводится к отысканию устойчивого полинома в данном семействе полиномов.

Обеспечение для замкнутой системы заданных свойств (помимо устойчивости) часто наталкивается на дополнительные трудности, связанные с тем, что в технических системах эти свойства обычно представлены в инженерных терминах и поэтому трудно формализуемы. Еще сложнее выбрать оптимальный регулятор в этих условиях, поскольку, как правило, не удается сформировать единый функционал качества. Не будет преувеличением сказать, что к решению задач такого рода в общем виде не существует универсального подхода; имеются лишь рецепты для различных частных случаев, использующие специфику конкретной задачи (см., например, работы [5—7]. Имеющиеся в литературе «регулярные» методики построения регуляторов, оптимальных по тому или иному критерию, имеют ряд недостатков: они сложны в реализации, приводят к регуляторам высоких порядков, получающиеся регуляторы часто теряют свойство стабилизируемости при малых изменениях своих параметров и т. д., [8, 9].

В работе [10] была предложена следующая полуэвристическая схема построения простых регуляторов. Ограничившись передаточной функцией регулятора вида $(\tau s + 1)/(\nu s + 1)$, содержащей два настраиваемых вещественных параметра τ и ν, видим, что характеристический полином замкнутой системы зависит от них линейно. С помощью техники *D*-разбиения ([11, 12]) на плоскости $\{\tau, \nu\}$ можно построить область, отвечающую устойчивости. Далее, выбирая с помощью «мыши» на экране компьютера ту или иную точку в этой области допустимых регуляторов, вычисляем значение оптимизируемого критерия. Процесс завершается по нахождении приемлемого регулятора. Такая интерактивная процедура проста с вычислительной точки зрения, дает все множество допустимых регуляторов и, кроме того, часто приводит к лучшим значениям критерия.

В настоящей статье этот подход развивается в нескольких направлениях (предварительный вариант данной работы см. в публикации [13]). Прежде всего, при построении допустимой области учитывается ряд дополнительных — помимо устойчивости — требований к регулятору и замкнутой системе, таких как устойчивость и минимально-фазовость регулятора, ограничение сверху на его коэффициент усиления, ограничения снизу на степень устойчивости и коэффициент затухания замкнутой системы. Это достигается путем элементарной модификации процедуры *D*-разбиения.

Далее, за критерий оптимальности приняты типичные инженерные показатели — время успокоения и значение перерегулирования. Кроме того, все построения обобщаются на робастную постановку задачи, когда в коэффициентах передаточной функции объекта присутствует интервальная неопределенность; это достигается путем робастной модификации процедуры *D*-разбиения. Наконец, поскольку в «бедном» семействе двухпараметрических регуляторов, возможно, не удастся найти приемлемый (или даже стабилизирующий), то рассматривается обобщение подхода на регуляторы, содержащие более двух параметров. В этом случае наглядная визуализация допустимой области затруднена, однако удается описывать ее неявно, путем случайного генерирования точек в ней на основе метода случайных блужданий типа Hit-and-Run [14, 15].

Рассматриваемая методика предоставляет проектировщику целый спектр регуляторов, отвечающих заданным спецификациям; из них легко выбрать наиболее приемлемый, руководствуясь указанными инженерными требованиями.

Рассматриваемый подход применен к широко распространенной модели Хеффрона—Филипса [16], описывающей процессы перетока мощностей в реальных электроэнергетических системах. Задача заключается в построении такого регулятора заданной структуры (типового), который бы сохранял устойчивость системы и некоторым оптимальным образом переводил ее в установившийся послеаварийный режим работы. Результаты моделирования показывают, что, применяя указанную методику, удается легко построить регулятор, зависящий всего от двух параметров, который по всем показателям значительно превосходит гораздо более сложный регулятор третьего порядка (содержащий шесть параметров), известный из литературы [17, 18]. Более того, и для робастной постановки задачи удается построить простой регулятор, который стабилизирует интервальное семейство объектов при более высоком уровне неопределенности, чем регулятор из работ [17, 18], и обладает более высоким качеством для случайно выбираемого элемента семейства.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ЕЕ АНАЛИЗ

1.1. Задачи стабилизации энергосистем

Современные электроэнергетические сети представляют собой сложные многосвязные динамические системы, подверженные различного рода возмущениям. Так, в нормальном режиме работы постоянно имеют место изменения нагрузки, которые сопровождаются перетоками мощности по линиям электропередач и должны покрываться генераторами. При некоторых конфигурациях сети небольшие изменения нагрузки или генерации приводят к существенным колебаниям мощности между подсистемами. С другой стороны, короткие замыкания, отключения цепей линий электропередач, отказы оборудования и другие неполадки требуют в некотором смысле оптимального перевода системы в установившийся (послеаварийный) режим. Основная цель при управлении переходными процессами в энергосистеме состоит в сохранении ею устойчивости или переводе ее в такой новый режим с минимально возможным числом качаний роторов генераторов [6].

Для описания элементов энергосистем с большим числом генераторов, линий передач и нагрузок, действующих в условиях возмущений и реализующих некоторые простейшие схемы, традиционно применяются линейные дифференциальные уравнения. Одной из таких наиболее распространенных моделей является модель Хеффрона—Филипса [16], которая и будет рассматриваться далее.

Для обеспечения устойчивости энергосистемы необходимо надлежащим образом изменять мощность генераторов путем подачи дополнительных сигналов от управляющего органа — так называемого системного стабилизатора. По современным представлениям системный стабилизатор следует выбирать в виде динамического регулятора (по возможности минимального порядка), реализующего ту или иную форму закона ПИД-управления [6].

1.2. Математическая постановка и требования к системе

Исходя из сказанного, рассматриваем следующую математическую модель. Имеется скалярный объект с передаточной функцией

$$G(s) = \frac{n_G(s)}{d_G(s)}, \qquad (1)$$

где полиномы $n_G(s)$, $d_G(s)$ известны, и регулятор $C(s) = \dfrac{n_C(s)}{d_C(s)}$ заданной структуры:

$$C(s) = \frac{\tau_1 s}{\nu_1 s + 1} \cdot \frac{\tau_2 s + 1}{\nu_2 s + 1} \ldots \frac{\tau_m s + 1}{\nu_m s + 1}, \qquad (2)$$

где τ_i, $\nu_i \in \mathbb{R}$ — параметры, подлежащие выбору, а m — число звеньев, которое по возможности следует минимизировать.

Цель состоит в отыскании значений параметров (если таковые имеются), которые бы обеспе-

чивали замкнутой системе заданные свойства. Под свойствами понимаем следующее.

Р1. Устойчивость и степень устойчивости $\sigma = -\max_i \mathrm{Re}s_i$, где s_i — корни характеристического полинома замкнутой системы.

Р2. Степень колебательности $\chi = 1/\xi$, $\xi = \min_i |\mathrm{Re}s_i/\mathrm{Im}s_i|$.

Р3. Время успокоения $t_s = \min\{T: |\pi(t)| < \varepsilon \ \forall t \geqslant T\}$ для некоторого заданного $\varepsilon > 0$ (время попадания в ε-трубку).

Р4. Перерегулирование $h = \max_{t \geq 0} |\pi(t)|$ (максимальное по абсолютной величине значение переходной функции).

Для удовлетворительного функционирования системы требуется так выбирать коэффициенты регулятора, чтобы величины σ и ξ принимали большие значения, а t_s и h были бы по возможности малы. Исходя из технологических требований, предъявляемых к современным энергосистемам [6], за желаемые показатели качества системы принимаются следующие:

$$\sigma \geqslant 0{,}4; \quad \xi \geqslant 0{,}15; \quad t_s \leqslant 2 \text{ при } \varepsilon = 0{,}005; \quad h \leqslant 0{,}015. \qquad (3)$$

Особенность модели (1) Хеффрона—Филлипса состоит в ее асимптотической устойчивости и наличии длиннопериодических слабозатухающих колебаний. Поэтому обычно синтез регуляторов для этой модели осуществляется прежде всего в целях гашения таких колебаний, причем за возможно более короткое время. Таким образом, основные оптимизируемые показатели в данной модели — время успокоения t_s, перерегулирование h и степень колебательности χ.

Кроме того, сам регулятор должен обладать следующими свойствами.

С1. Быть устойчивым и минимально-фазовым: τ_i, $\nu_i > 0$.

С2. Иметь невысокий коэффициент усиления, т. е. величина $g = \prod_{i=1}^{m} \tau_i / \prod_{i=1}^{m} \nu_i$ не должна быть очень большой.

С3. Иметь порядок m не выше заданного.

Выбор структуры регулятора в виде (2) объясняется тем, что при реализации регуляторов на практике часто применяются типовые звенья вида $(\tau s + 1)/(\nu s + 1)$, и при этом имеется возможность наращивать такую структуру, повышая при необходимости порядок регулятора.

С технической точки зрения, инженерный характер предъявляемых к системе требований определяется сложностью формализации нормативных ограничений, что приводит, в частности, к многокритериальности общей задачи управления энергосистемой и, как следствие, невозможности полностью удовлетворить всем требованиям, в том числе и в рамках рассматриваемого подхода. Предлагаемая методика ставит своей целью предложить проектировщику набор субоптимальных решений; окончательный выбор осуществляется им на основе опыта и иных неформальных соображений.

1.3. Модель объекта и анализ свойств известного регулятора

Моделью конкретного объекта, изучаемого в работе, служит скалярная передаточная функция

$$G(s) = -(73{,}321s^3 + 153{,}74s^2 + 146{,}419s)/(s^7 + 42{,}373s^6 + 549{,}823s^5 + 2349{,}217s^4 + 8667{,}712s^3 + 20561{,}931s^2 + 27641{,}875s + 21389{,}004), \qquad (4)$$

которая описывает изменения скольжения генератора при изменении управляющего сигнала, поступающего от системного стабилизатора. В установившемся режиме скольжение равно нулю, что соответствует успокоению качаний ротора генератора.

Для этого объекта в работе [17] со ссылкой на статью [18] приведен регулятор третьего порядка

$$C(s) = \frac{10s}{10s+1}\left(\frac{0{,}44s+1}{0{,}092s+1}\right)^2, \qquad (5)$$

подключаемый с положительной обратной связью и предназначенный для демпфирования электромеханических колебаний в электроэнергетической системе.

Отметим, что регулятор (5) имеет коэффициент усиления $\bar{g} \approx 22{,}8733$; далее при построении простых регуляторов в § 2 будем ограничивать их коэффициент усиления g этой величиной: $g \leqslant \bar{g}$.

Вычисляя значения показателей качества (см. таблицу), видим, что регулятор (5) не удовлетворяет требованиям (3) и даже ухудшает степень устойчивости замкнутой системы.

Показатель	σ	ξ	t_s	h
Желаемое значение	0,4	0,15	2,0	0,015
Разомкнутая система	0,2114	0,0663	5,9700	0,0171
Замкнутая система	0,1001	0,0920	4,0600	0,0166

Более того, оказывается, что более простой регулятор второго порядка

$$C(s) = \frac{47{,}826s}{10s+1} \cdot \frac{0{,}44s+1}{0{,}092s+1}, \qquad (6)$$

который получается из регулятора (5) исключением одного звена и выравниванием коэффициента усиления до $g = \bar{g}$, приводит к лучшим показателям для замкнутой системы.

Это наблюдение говорит в пользу того, что в классе более простых регуляторов, возможно, удастся найти приемлемый. Таким образом, цель последующего изложения состоит в нахождении такого регулятора для объекта (4), который бы, прежде всего, удовлетворял указанным выше требованиям, а также был бы как можно более простым.

2. ПРЯМОЙ ПОИСК В ПРОСТРАНСТВЕ ПАРАМЕТРОВ

2.1. Метод *D*-разбиения

Обратимся к предлагаемому способу построения простых регуляторов. Прежде всего, в семействе (2) ограничимся регуляторами первого порядка вида

$$C_2(s, k_1, k_2) = \frac{k_1 s}{k_2 s + 1}, \qquad (7)$$

которые зависят лишь от двух параметров k_1 и k_2. Тогда характеристический полином системы, замкнутой регулятором (7) в цепи положительной обратной связи, имеет вид

$$p_c(s, k) = p_0(s) + k_1 p_1(s) + k_2 p_2(s), \quad \deg p_c(s, k) = n, \qquad (8)$$

где обозначено $p_0(s) = d_G(s)$, $p_1(s) = -sn_G(s)$, $p_2(s) = sd_G(s)$, а $n_G(s)$ и $d_G(s)$ — полиномы в числителе и знаменателе передаточной функции объекта (1). Этот полином линейно зависит от двух параметров, поэтому, пользуясь методом *D*-разбиения плоскости $\{k_1, k_2\}$, можем построить область $D_{st} = \{(k_1, k_2)$: $p_c(s, k)$ устойчив$\}$ *всех* регуляторов вида (7), стабилизирующих объект (1).

Для того чтобы подчеркнуть вычислительную простоту метода, предлагаемого ниже для построения стабилизирующих регуляторов, кратко напомним идею метода *D*-разбиения.

Если при каком-то значении параметров k_1 и k_2 полином $p_c(s, k)$ (8) имеет ровно $m \le n$ устойчивых корней $\mathrm{Re}s_i < 0$, то при варьировании k_1 и k_2 их число может измениться, лишь если изменится степень полинома или некоторые из корней пересекут мнимую ось. Второй случай соответствует существованию решения уравнения $p_c(j\omega, k_1, k_2) = 0$ при некотором $\omega \geqslant 0$. При фиксированном ω это уравнение представляет собой систему двух *линейных* относительно k_1 и k_2 уравнений, соответствующих вещественной и мнимой частям полинома $p_c(j\omega, k_1, k_2)$, и их решение не представляет труда. Эти решения, таким образом, дают параметрические уравнения границы области D_m на плоскости $\{k_1, k_2\}$, внутри которой число устойчивых корней неизменно, и нас интересует лишь область устойчивости $D_n = D_{st}$. Мы не приводим аккуратного описания методики построения *D*-разбиения и выделения области D_{st}; эта техника подробно разработана, детали и обобщения можно найти, например, в работах [11, 12].

Теперь осталось учесть дополнительные ограничения; именно, в области D_{st} выбираем лишь точки, удовлетворяющие условиям $k_2 > 0$ (требование устойчивости регулятора) и $k_1/k_2 \leqslant \bar{g}$ (ограничение на коэффициент усиления). Все такие регуляторы называем *допустимыми*, а соответствующую область на плоскости обозначаем через D_{feas}.

В результате такой простой вычислительной процедуры получаем явное описание *всех* регуляторов вида (7), которые стабилизируют объект и удовлетворяют требованиям С1 — С3. Далее, выбираем с помощью «мыши» на экране компьютера ту или иную точку в двумерной области D_{feas}, строим переходную функцию замкнутой системы, например, с помощью стандартной процедуры step в системе Matlab, и вычисляем значения показателей качества. Работа прекращается по нахождении регулятора, удовлетворяющего проектировщика.

Впервые общая идея такого подхода была сформулирована в работе [10]; там же его работоспособность была продемонстрирована на ряде простых тестовых задач, известных из литературы, но не имеющих реального физического происхождения. В настоящей работе ставится цель продемонстрировать эффективность этого подхода к решению важной практической задачи — стабилизации режимов электроэнергетической системы. При этом вместо H_∞-критерия оптимальности регуляторов, который в основном использовался в работе [10], мы рассматриваем инженерные критерии п. 1.2. Наконец, в работе [10] допустимая область представляла собой лишь множество стабилизирующих регуляторов, причем первого порядка (т. е. зависящих от двух параметров). В настоящей работе при построении допустимой области поми-

мо устойчивости учитываются и некоторые иные требования; кроме того, обсуждается один из путей построения регуляторов более высокого порядка, зависящих от большего числа параметров.

Предлагаемый подход не гарантирует отыскания желаемого регулятора. Более того, область D_{feas} может оказаться пустой, что означает невозможность даже стабилизировать имеющийся объект простыми регуляторами вида (7) при предъявляемых к ним требованиях. Однако такой прямой поиск дает удобное средство отыскания инженерного решения, условия самого существования которого трудно формализуемы.

2.2. Результаты численного решения

Перейдем к решению поставленной задачи для объекта (4). На рис. 1 в плоскости параметров $\{k_1, k_2\}$ изображена область D_{st} всех регуляторов вида (7), стабилизирующих объект (4) (ограничена жирными кривыми), построенная с помощью D-разбиения. Прямая $k_1 = \bar{g}k_2$ учитывает ограничение на коэффициент усиления. Если по природе задачи имеются дополнительные ограничения на параметры типа $\underline{k}_i \leqslant k_i \leqslant \bar{k}_i$, то учесть их также не составляет труда.

Видим, что область D_{st} не ограничена, что может затруднить поиск. Однако видоизменив процедуру D-разбиения, можно вместо области D_{st} строить ограниченную область D_σ, внутри которой полином (8) имеет *степень устойчивости* не

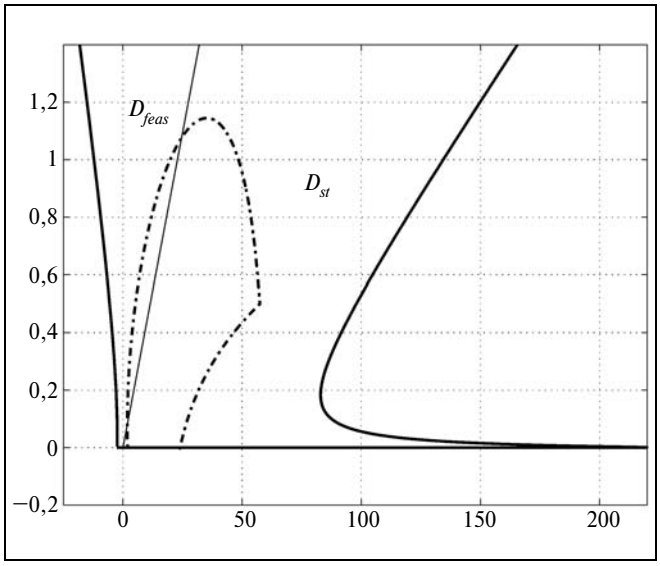


Рис. 1. Область стабилизирующих и допустимых регуляторов вида (7)

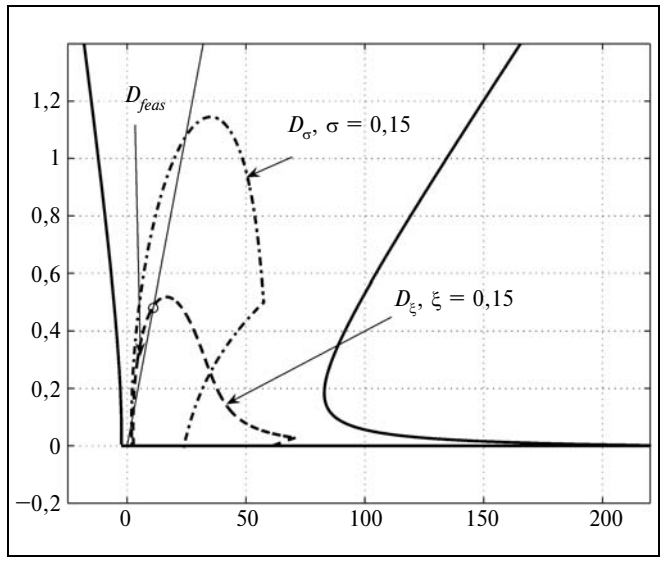


Рис. 2. Область D_ξ заданной степени колебательности $\xi \geqslant 0{,}15$ для объекта, замкнутого регулятором вида (7)

меньше некоторой σ (тем самым выполняя требование Р1 с заданной степенью устойчивости σ). Для этого при изменении параметров k_1 и k_2 надо учитывать пересечение корнями не мнимой оси $\{j\omega\}$, а прямой $\{-\sigma + j\omega\}$. На рис. 1 граница соответствующей области при $\sigma = 0{,}4$ изображена штрих-пунктирной линией, а ее пересечение с полуплоскостью $k_1 \leqslant \bar{g}k_2$ выделяет ту часть области D_{feas}, в которой и надо производить поиск.

Более того, используя аналогичную модификацию D-разбиения, можно с ее помощью строить область D_ξ, внутри которой значение *показателя колебательности* замкнутой системы не меньше заданного ξ (тем самым выполняя требование Р2). Для этого при изменении параметров k_1 и k_2 надо учитывать пересечение корнями границы сектора $\{-\xi\omega \pm j\omega, \omega \geqslant 0\}$. На рис. 2 область D_ξ изображена штриховой линией. Теперь в качестве области D_{feas} нужно принять пересечение всех полученных областей.

В результате поиска в полученной области несложно получить один из регуляторов

$$C_2(s, k_1, k_2) = \frac{11s}{0{,}4809s + 1} \qquad (9)$$

(изображен кружком на рис. 2), который дает лучший, чем регулятор (5), переходный процесс (рис. 3) с показателями $\sigma \approx 0{,}5633$, $\xi \approx 0{,}1511$, $t_s \approx 2{,}04$, $h \approx 0{,}0153$.

Таким образом, среди очень простых регуляторов (зависящих всего от двух параметров) легко

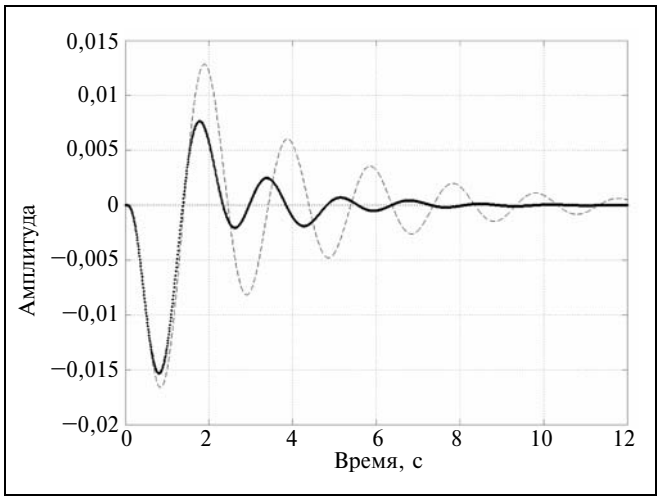


Рис. 3. Переходные функции для системы с исходным регулятором (5) и регулятором (9) (жирная линия)

нашли тот, который по всем показателям существенно лучше гораздо более сложного исходного регулятора (5) и в целом удовлетворяет ограничениям С1—С3 и требованиям (3).

3. РОБАСТНАЯ МОДИФИКАЦИЯ МЕТОДИКИ

3.1. Параметрическая неопределенность в объекте

На практике математическая модель объекта управления, как правило, не бывает известна точно. В настоящем исследовании мы придерживаемся концепции параметрической неопределенности, полагая, что степени полиномов в числителе и знаменателе передаточной функции объекта известны (и неизменны), а их коэффициенты p_i содержат неопределенность интервального характера, причем отклонения от номиналов составляет не более 100γ процентов:

$$\underline{p}_i = p_i^0 - \gamma|p_i^0| \leqslant p_i \leqslant p_i^0 + \gamma|p_i^0| = \bar{p}_i, \quad \gamma \geqslant 0, \tag{10}$$

где p_i^0 — номинальные значения, равные заданным в передаточной функции (4). Такая модель соответствует ситуации, когда значения параметров объекта известны с точностью до некоторых технологических допусков, получены в результате идентификации по наблюдениям, зашумленным случайными помехами и т. д. Эта ситуация характерна и для электроэнергетики: на практике математические модели энергосистем строятся на основе информации, получаемой от различных систем мониторинга, имеющих различную достоверность и точность. В рассматриваемых задачах эта неопределенность составляет единицы процентов, т. е. $\gamma = 0{,}03 \div 0{,}07$.

В такой более реалистичной постановке имеем интервальное семейство передаточных функций, и задача теперь заключается в построении регулятора, который бы робастно стабилизировал семейство и обладал приемлемым качеством для всех объектов семейства. При синтезе регулятора (5) в работах [17, 18] возможная неопределенность в объекте не учитывалась и робастные качества полученного регулятора не исследовались.

3.2. Робастная стабилизация

Как и ранее, обратимся к простым регуляторам, имеющим вид (7). Известно [3], что регулятор первого порядка стабилизирует интервальный объект тогда и только тогда, когда он стабилизирует 16 объектов, отвечающих харитоновским полиномам. Именно, для интервальных числителя и знаменателя строим по четыре харитоновских полинома и говорим, что 16 передаточных функций, соответствующих всем полученным комбинациям, отвечают *харитоновским объектам*. Для робастной стабилизации семейства необходимо и достаточно стабилизировать все эти объекты (детали см. в работе [19]).

Как и при отсутствии неопределенности, характеристический полином замкнутой системы с регулятором (7) линейно зависит от двух параметров k_1 и k_2. Воспользуемся тем же подходом на основе D-разбиения: построим с его помощью области устойчивости D_{st}^i для каждого из 16-ти харитоновских объектов и возьмем их пересечение D_{st}^{rob}. Полученная область отвечает всем регуляторам, робастно стабилизирующим интервальный объект (как и в ситуации без неопределенности, несложно построить область $D_{\sigma}^{rob} \subset D_{st}^{rob}$, внутри которой робастность гарантируется со степенью устойчивости не ниже σ). Возможны и иные способы построения области D_{st}^{rob}; подробно техника робастного D-разбиения описана в работах [3, 20].

Дальнейшие действия аналогичны предлагавшимся в § 2. Неравенство $g \leqslant \bar{g}$ выделяет внутри D_{st}^{rob} область допустимых робастно стабилизирующих регуляторов D_{feas}^{rob}. Выбирая «мышью» ту или иную точку в этой области, принимаем решение о пригодности соответствующего робастно стабилизирующего регулятора.

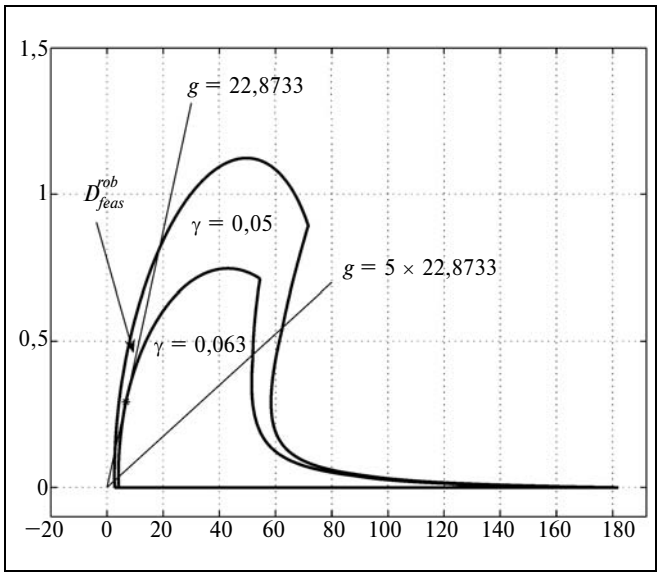


Рис. 4. Области робастно стабилизирующих регуляторов вида (7) при разных уровнях неопределенности

В соответствии с инженерным характером предлагаемой методики это решение может приниматься на основе анализа построенных переходных характеристик для нескольких случайно выбранных представителей интервального семейства: регулятор признается пригодным, если для «большинства» объектов он демонстрирует приемлемое качество. Альтернативно, можно анализировать переходные процессы или вычисленные значения показателей σ, ξ, t_s и h для 16-ти харитоновских объектов. Однако следует признать, что гарантированное качество переходного процесса для интервального семейства не определяется наихудшим из харитоновских объектов, хотя и дает представление о поведении семейства в целом.

Область на рис. 4, ограниченная прямой $k_2 = 0$ и «внешней» кривой, отвечает регуляторам вида (7), робастно стабилизирующим объект (4), (10) при уровне неопределенности $\gamma = 0{,}05$.

Левый луч задает ограничение на коэффициент усиления; неравенство $g \leqslant \bar{g}$ выделяет область допустимых робастно стабилизирующих регуляторов D^{rob}_{feas}. Эта область мала, т. е. $\gamma = 0{,}05$ близкó к максимальному уровню неопределенности, при котором интервальное семейство робастно стабилизируется регуляторами вида (7). С ростом γ область D^{rob}_{st} уменьшается; максимальное значение, при котором стабилизация объекта (4), (10) возможна (радиус стабилизируемости), оказывается равным $\gamma \approx 0{,}063$ («внутренняя» кривая на рис. 5), ему соответствует регулятор

$$C_2(s,\, k_1,\, k_2) = \frac{6{,}7s}{0{,}2929s + 1}, \qquad (11)$$

который отмечен «звездочкой» на рис. 4. Для сравнения, исходный регулятор (5) имеет гораздо меньший радиус стабилизируемости, $\gamma \approx 0{,}033$.

Ранее предполагалось, что коэффициент усиления допустимых регуляторов ограничен сверху величиной $\bar{g}$, соответствующей исходному регулятору (5), однако в ряде случаев расходы энергии на управление могут быть увеличены [6]. Так, если разрешить в 5 раз большие коэффициенты усиления $g = 5\bar{g}$ (правый луч на рисунке), то получаем гораздо более широкую область допустимых регуляторов, и с их помощью робастная стабилизация возможна до уровня неопределенности $\gamma \approx 0{,}135$.

Для $N = 1000$ случайно выбранных объектов из интервального семейства с уровнем неопределенности $\gamma = 0{,}03$ регулятор (11) демонстрирует значительно более высокие показатели качества, чем регулятор (5). Так, средние значения степени колебательности составляют $\xi^{(11)} = 0{,}1988$ и $\xi^{(5)} = 0{,}0940$, а времени установления $t_s^{(11)} = 2{,}14$ и $t_s^{(5)} = 4{,}4217$.

Таким образом, методика § 2 успешно распространяется и на наличие неопределенности в объекте: предложен более простой регулятор, робастно стабилизирующий интервальное семейство при более высоком уровне неопределенности и обладающий более высоким качеством для «случайно выбираемого» элемента семейства.

4. РЕГУЛЯТОРЫ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА

Ранее мы ограничивались регуляторами, зависящими от двух параметров. Кратко опишем идею подхода к синтезу регуляторов более высоких порядков и приведем результат его реализации.

Прежде всего, область D_{feas}, построенная в § 2, могла бы оказаться пустой. Это означает, что двухпараметрическими регуляторами вида (7) при наложенных на них требованиях объект невозможно даже стабилизировать, не говоря уже об удовлетворении требований Р2—Р4. Далее, регулятор (5) взят из более широкого класса, чем регулятор (7); в этом классе, возможно, найдутся регуляторы, гораздо более успешные, чем регулятор (9).

Обозначим все параметры τ_i, ν_i регулятора (2) через k_1, ..., k_l, тогда характеристический полином замкнутой системы $p_c(s,\, k) = d_G(s)d_C(s,\, k) -$

$- n_G(s)n_C(s, k)$. В этой ситуации (при наличии $m > 1$ звеньев регулятора) применение техники D-разбиения затруднено как в силу того, что коэффициенты полинома $p_c(s, k)$ теперь нелинейно зависят от параметров k_i, так и вследствие большого их числа; в результате, визуализация области D_{feas} невозможна. Заметим, что в ряде случаев, когда регуляторы имеют иную структуру (например, ПИД-регуляторы вида $(\tau s^2 + \nu s + \mu)/s$) и линейность по параметрам сохранена, можно проводить D-разбиение и по трем параметрам.

Воспользуемся той же идеей, что и ранее: «опишем» всю область D_{feas}, но теперь осуществим это путем случайного генерирования в ней точек.

Рассмотрим, например, класс всех допустимых регуляторов второго порядка вида

$$C(s) = \frac{k_1 s}{k_2 s + 1} \cdot \frac{k_3 s + 1}{k_4 s + 1}.$$

Под допустимостью, как и раньше, понимаем устойчивость замкнутой системы и ограничения $k_i > 0$ (минимально-фазовость и устойчивость регулятора) и $k_1 k_3 \leqslant \bar{g} k_2 k_4$ (ограничение на коэффициент усиления регулятора). При желании можем наложить ограничения сверху на параметры, чтобы гарантировать ограниченность области $D_{feas} \subset \mathbb{R}^4$.

Опишем кратко, как может осуществляться случайное генерирование точек в D_{feas}. Пусть $(k_1, k_2, k_3, k_4) = k^0 \in D_{feas} \subset \mathbb{R}^4$ отвечает некоторому допустимому регулятору, например, (6), а $d \in \mathbb{R}^4$ — случайное *направление* (генерируемое равномерно на единичной сфере в $\mathbb{R}^4$). Рассмотрим однопараметрическое семейство полиномов $p_c(s, k^0 + \lambda d)$, и пусть $\lambda_{\min}$ и $\lambda_{\max}$ — минимальное и максимальное значения параметра λ, при которых (i) полином $p_c(s, k^0 + \lambda d)$ устойчив при всех $\lambda \in (\lambda_{\min}, \lambda_{\max})$, и (ii) регулятор, соответствующий значениям коэффициентов $k^0 + \lambda d$, $\lambda \in (\lambda_{\min}, \lambda_{\max})$, является допустимым. Для случайно выбранного $\lambda^1 \in [\lambda_{\min}, \lambda_{\max}]$ положим $k^1 = k^0 + \lambda^1 d$, рассмотрим полином $p_c(s, k^1)$, выберем случайное направление движения из точки k^1 и т. д. Такая процедура носит название Hit-and-Run ([14]); она представляет собой один из методов случайных блужданий на ограниченных многомерных областях.

Ключевым местом при реализации этой процедуры является нахождение величин $\lambda_{\min}$ и $\lambda_{\max}$, т. е. точек пересечения произвольного одномерного луча с границей области D_{feas}. В работе [15] показано, что в случае, когда D_{feas} — область гурвицевости полинома, технически дело сводится к решению некоторого полиномиального уравнения относительно λ, что может быть осуществлено, например, с помощью процедуры fsolve в системе Matlab. Остальные ограничения ($k_i > 0$, $k_1 k_3 \leqslant \bar{g} k_2 k_4$) учитываются аналогично.

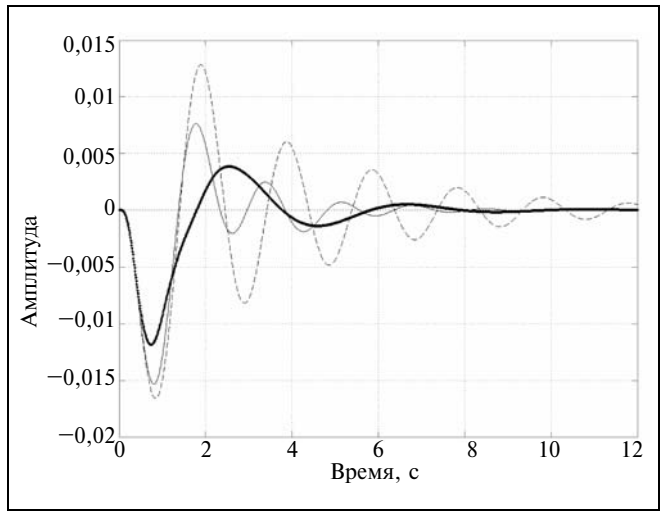


Рис. 5. Переходные функции для объекта, замкнутого исходным регулятором (5) (штриховая линия), регулятором C_2 (9) (сплошная) и регулятором C_4 (жирная)

Генерируя таким случайным образом допустимые регуляторы (точки в области D_{feas}), вычисляем показатели соответствующей замкнутой системы или строим ее переходную функцию и принимаем решение о пригодности этого регулятора.

Один из приемлемых регуляторов, полученных в результате реализации описанного подхода, имеет вид

$$C_4(s) = \frac{20{,}1241 s}{0{,}0088 s + 1} \cdot \frac{0{,}0012 s + 1}{0{,}1200 s + 1}$$

и дает ощутимо лучшие показатели, чем регулятор (9): $\sigma = 0{,}5022$, $\xi = 0{,}3273$; $t_s = 1{,}2800$; $h = 0{,}0119$, его переходная функция дана на рис. 5.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассмотрен возможный подход к решению реальной трудно формализуемой задачи стабилизации энергетической системы регуляторами заданной структуры при ограничениях на качество переходного процесса. Продемонстрировано преимущество предложенного подхода по сравнению

с рассмотренным в работах [17, 18]. Основное внимание уделяется простоте процедуры синтеза регулятора низкого порядка, а для численного решения применяются стандартные вычислительные средства системы Matlab. Отличительная черта рассмотренной техники состоит в предоставлении проектировщику целого набора допустимых регуляторов и возможности учета неопределенности в модели объекта.

Дальнейшее развитие данного подхода предполагает разработку численно устойчивых робастных вариантов алгоритма Hit-and-Run для генерирования робастно стабилизирующих регуляторов, описанных в § 4, исследование чувствительности синтезированных регуляторов по отношению к возможным неопределенностям (неточности численной реализации) в их коэффициентах (так называемой проблеме «хрупкости») и др.

Автор глубоко признателен М.Ш. Мисриханову и В.Н. Рябченко за предоставление модели (4)—(5), обсуждения постановки задачи и указания на литературу.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Datta A., Ho M.-T., Bhattacharyya S.P.* Structure and synthesis of PID controllers. — London: Springer, 2000.
2. *Åström K.J., Hägglund T.* Advanced PID Control. — Research Triangle Park: Instrumentation, Systems, and Automation Society, 2006.
3. *Поляк Б.Т., Щербаков П.С.* Робастная устойчивость и управление. — М.: Наука, 2002.
4. *Поляк Б.Т., Щербаков П.С.* Трудные задачи линейной теории управления. Некоторые подходы к решению // Автоматика и телемеханика. — 2005. — № 5. — С. 7—46.
5. *Первозванский А.А.* Курс теории автоматического управления. — М.: Наука, 1986.
6. *Kundur P.* Power system stability and control. — NY: McGraw-Hill, 1994.
7. *Андерсон П., Фауд А.* Управление энергосистемами и устойчивость. — М.: Энергия, 1980.
8. *Zhou K., Doyle J.C., Glover K.* Robust and optimal control. — Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, 1996.
9. *Keel L.H., Bhattacharyya S.P.* Robust, fragile, or optimal? // IEEE Trans. Autom. Control. — 1997. — Vol. 42, N 8. — P. 1098—1105.
10. *Киселев О.Н., Поляк Б.Т.* Синтез регуляторов низкого порядка по критерию H^∞ и критерию максимальной робастности // Автоматика и телемеханика. — 1999. — № 3. — С. 119—130.
11. *Неймарк Ю.И.* Устойчивость линеаризованных систем. — Л.: ЛКВВИА, 1949.
12. *Грязина Е.Н., Поляк Б.Т., Тремба А.А.* Современное состояние метода *D*-разбиения (обзор) // Автоматика и телемеханика. — 2008. — № 12. — С. 3—40.
13. *Мисриханов М.Ш., Рябченко В.Н., Щербаков П.С.* Стабилизация электроэнергетической системы простыми регуляторами с обеспечением желаемого качества переходного процесса // Электро-Инфо. — 2008. — № 10 (57). — С. 46—55.
14. *Smith R.L.* Efficient Monte Carlo procedures for generating points uniformly distributed over bounded regions // Operations Research. — 1984. — Vol. 32. — P. 1296—1308.
15. *Gryazina E.N., Polyak B.T.* Stability regions in the parameter space: *D*-decomposition revisited // Automatica. — 2006. — Vol. 42, N 1. — P. 13—26.
16. *Heffron W.G., Fillips R.A.* Effect of modern amplidyne voltage regulators on underexcited operation of large turbine generators // AIEE Trans. — 1952. — Vol. PAS-71. — P. 692—697.
17. *Parmar G., Mukherjee S., Prasad R.* Reduced order modeling of linear MIMO systems using genetic algorithm // Int. J. Simul. Model. — 2007. — N 6. — P. 173—184.
18. *Papadopoulos D. P.* Order reduction of linear system models with a time-frequency domain method // J. Franklin Inst. — 1986. — Vol. 322, N 4. — P. 209—220.
19. *Barmish B.R., Hollot C.V., Kraus F., Tempo R.* Extreme point results for robust stabilization of interval plants with first order compensators // IEEE Trans. Automat. Control. — 1992. — Vol. 37. — P. 707—714.
20. *Петров Н.П., Поляк Б.Т.* Робастное *D*-разбиение // Автоматика и телемеханика. — 1991. — № 11. — С. 41—53.

Статья представлена к публикации членом редколлегии В.Н. Афанасьевым.

Щербаков Павел Сергеевич — д-р физ.-мат. наук,
вед. науч. сотрудник, Институт проблем управления
им. В.А. Трапезникова РАН, г. Москва,
☎(495) 334-76-41, ✉ sherba@ipu.ru.

Новая книга

Твердохлебов В.А. **Геометрические образы законов функционирования автоматов.** — Саратов: Научная книга, 2008. — 183 с.

Представлены основные положения, определяющие новый способ задания дискретных детерминированных динамических систем (автоматов с конечным или бесконечным множеством состояний) геометрическими образами законов функционирования, описаны модели и методы анализа и синтеза этих геометрических образов. Отмечено, что главным является совмещение дискретных символьных автоматных структур с числовыми структурами непрерывной математики, в частности, геометрическими кривыми и числовыми последовательностями. Изложены методы построения законов функционирования автоматов по произвольным последовательностям и по произвольным геометрическим кривым. Приведены методы определения эквивалентных состояний автоматов по геометрическим образам и методы интерполяции геометрических образов. Для классификации и оценки сложности законов функционирования автоматов разработан спектр числовых показателей и показано применение спектра для оценки сложности маршрутов движения.

Для специалистов, занимающихся применением и развитием теории автоматов.

УДК 330

О ПРИЧИНАХ ЭКОЛОГИЧЕСКИХ ИНФОРМАЦИОННЫХ ВОЙН В РЕГИОНЕ

С.Н. Бухарин

Отмечено, что проблемы экологической безопасности становятся, как правило, поводом для информационных войн, цель которых — овладение властью и ресурсами. Ярким примером подобных войн служит борьба за контроль над финансовыми потоками, направляемыми в регионы на реализацию крупных инвестиционных проектов. В данной работе решается связанная с настоящей проблемой задача академика Н.Н. Моисеева для современных условий, когда, кроме интересов федерального центра, учитываются интересы регионов.

Ключевые слова: загрязнение окружающей среды, объем производства, штраф, развитие региона, местная администрация, федеральный центр, компромисс.

ВВЕДЕНИЕ

Опыт работы в области прикладной экологии по заказам Минобороны России, ряда федеральных министерств и ведомств, а также участие в течение ряда лет в семинаре НАТО по проблемам экологической безопасности бывших военных объектов позволяют сделать следующий вывод: проблемы экологии служат лишь поводом для решения корыстных задач, которые ставят перед собой инициаторы конфликта.

К таким задачам относятся, в частности попытки Польши и стран Балтии под видом заботы о фауне и флоре Балтийского моря сорвать реализацию проекта «Северный поток», поскольку в случае ввода в строй газопровода эти страны лишаются не только солидных финансовых вливаний, но и возможности шантажа России. Финляндия не согласовывает материалы экологической экспертизы того же проекта и тем самым пытается оказывать давление на Россию в целях смягчения ее тарифной политики в области экспорта российской необработанной древесины.

В самой России реализация любого сколь значительного инвестиционного проекта сопровождается информационной экологической войной, в ходе которой региональные власти пытаются взять под свой контроль как можно больше финансовых ресурсов, направленных федеральным ведомством на реализацию проекта [1]. Более того, любое предприятие федерального подчинения оказывается постоянным объектом нападок со стороны местных природоохранных органов, экологических и правозащитных неправительственных организаций. В результате подобных войн все без исключения стороны терпят убытки, тогда как есть решение проблемы.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Посмотрим, как можно избежать региональной экологической информационной войны за инвестиции. Руководство региона должно сделать выбор между экологическим благополучием и экономическим развитием. Рассмотрим решение задачи такого выбора, пользуясь моделью академика Н.Н. Моисеева [2]. Руководство региона выбирает параметр штрафа за загрязнение окружающей среды. После этого предприятия выбирают оптимальный для себя уровень производства, который приводит к некоторому уровню загрязнения. Таким образом, администрация получает отклик в производстве и загрязнении, зависящий от параметра штрафа. Цели администрации — рост эко-

номического потенциала региона и снижение загрязнения окружающей среды. Вообще говоря, оптимумы по этим двум целям не могут быть достигнуты одновременно. Поэтому они противоречивы. Начиная с некоторого уровня, улучшение одного критерия ведет к ухудшению другого. Руководство решает задачу двухкритериальной оптимизации по параметру штрафа.

2. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ В УСЛОВИЯХ ОДНОГО ЦЕНТРА УПРАВЛЕНИЯ

Обозначим через c параметр, равный штрафу за единицу загрязнения окружающей среды. Этот параметр представляет собой управляющее воздействие Центра на предприятие. Обозначим через $J_0^1(c)$ критерий загрязнения окружающей среды, как функцию c. Тогда задача выбора параметра c, обеспечивающего минимум загрязнения, имеет вид [2]:

$$J_0^1(c) = A(1/\sqrt{c} - \mu\sqrt{c}) \to \min, \qquad (1)$$

где $A = \sum_{i=1}^{n} (l_i S_i \Phi_i)^{1/2}$, l_i — параметр, характеризующий выброс загрязнителей i-м предприятием, S_i — параметр, характеризующий эффективность использования i-м предприятием своих производственных мощностей, Φ_i — размер основных производственных фондов i-го предприятия, $i = \overline{1, n}$, n — общее число предприятий в регионе. Параметр μ характеризует максимальное значение параметра c, при достижении которого загрязнение окружающей среды отсутствует ($J_0^1(c) = 0$).

Обозначим через $J_0^2(c)$ критерий объема производства как функцию c. Тогда задача выбора параметра c, обеспечивающего максимум объема производства, имеет вид [2]:

$$J_0^2(c) = B - 2A\sqrt{c} \to \max,$$

$$B = \sum_{i=1}^{n} (k_i \Phi_i + a_i),\ k_i = S_i - k_i, \qquad (2),$$

где a_i — параметр, характеризующий выброс загрязнителей i-м предприятием, k_i — коэффициент выбытия производственных фондов, $i = \overline{1, n}$. Решая задачу многокритериальной оптимизации (1), (2), администрация может обеспечить сбалансированное развитие региона, рост его экономики и экологическое благополучие.

3. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ В УСЛОВИЯХ ФЕДЕРАЛЬНОГО И РЕГИОНАЛЬНОГО ЦЕНТРОВ УПРАВЛЕНИЯ

Предположим теперь, что в регионе работают предприятия федерального подчинения. Руководство региона должно защищать окружающую среду и создать условия для экономического роста. Комплексное использование потенциала местных и федеральных предприятий должно обеспечить рост налоговых поступлений. Однако в некоторых регионах принято считать, что федеральные предприятия платят меньше налогов, чем местные. Чтобы пополнить бюджет, администрация вводит разные штрафы за загрязнение для местных и федеральных предприятий. Хотя законодательно может быть установлена одна ставка штрафа за загрязнение для всех, местные власти де-факто создают разные условия для «своих» и «чужих». Для этого используются неофициальные методы воздействия — завышение требований экологической безопасности и штрафов для федеральных объектов, при одновременном ослаблении требований к местным предприятиям. Например, не известны случаи представления исков гражданским аэродромам, находящимся в ведении местной администрации. Одновременно, практически нет ни одного военного аэродрома, которому бы не предъявлялись претензии. А ведь гражданские и военные аэродромы строились по одним и тем же проектам.

Модифицируем постановку задачи автономного развития региона для рассматриваемого случая. Предположим, что наряду с местными предприятиями в регионе работают предприятия федерального подчинения. Тогда можно поставить отдельно две задачи оптимизации развития региона — для местных и федеральных предприятий. Снабдим все введенные ранее символы для местных предприятий дополнительным индексом 1, а для федеральных — индексом 2.

Задача выбора параметра c_1, обеспечивающего минимум загрязнения окружающей среды местными предприятиями и максимум их производства, имеет вид

$$J_0^1(c_1) = A_1(1/\sqrt{c_1} - \mu\sqrt{c_1}) \to \min, \qquad (3)$$

$$J_0^2(c_1) = B_1 - 2A_1\sqrt{c_1} \to \max. \qquad (4)$$

Задача выбора параметра c_2, обеспечивающего минимум загрязнения окружающей среды феде-

ральными предприятиями и максимум их производства, имеет вид

$$J_0^1(c_2) = A_2(1/\sqrt{c_2} - \mu\sqrt{c_2}) \to \min, \quad (5)$$

$$J_0^2(c_2) = B_2 - 2A_2\sqrt{c_2} \to \max. \quad (6)$$

Задача экологического управления развитием региона заключается в выборе параметров c_1 и c_2, обеспечивающих минимум загрязнения окружающей среды предприятиями региона и максимум их производства. Обозначим через $J_0^1(c_1, c_2)$ критерий загрязнения окружающей среды как функцию c_1 и c_2. Обозначим через $J_0^2(c_1, c_2)$ критерий объема производства как функцию c_1 и c_2. Тогда постановка задачи экологического управления развитием региона получается путем объединения постановок (3), (4) и (5), (6) и имеет вид:

$$J_0^1(c_1, c_2) = A_1(1/\sqrt{c_1} - \mu\sqrt{c_1}) + A_2(1/\sqrt{c_2} - \mu\sqrt{c_2}) \to \min, \quad (7)$$

$$J_0^2(c_1, c_2) = B_1 - 2A_1\sqrt{c_1} + B_2 - 2A_2\sqrt{c_2} \to \max. \quad (8)$$

Обозначим через t_1 и t_2 ставки регионального налога с прибыли, соответственно, для местных и федеральных предприятий. Поскольку налоги с федеральных предприятий получает в основном федеральный бюджет, то предполагается, что $t_1 > t_2$. Согласно выражению (8), налоговые поступления от местных и федеральных предприятий в местный бюджет равны

$$J_0^3(c_1, c_2) = t_1(B_1 - 2A_1\sqrt{c_1}) + t_2(B_2 - 2A_2\sqrt{c_2}). \quad (9)$$

Задача оптимизации налогообложения состоит в выборе оптимальных ставок регионального налога с прибыли t_1 и t_2, при которых достигается максимум поступлений в местный бюджет (9):

$$J_0^3(c_1, c_2) = t_1(B_1 - A_1\sqrt{c_1}) + t_2(B_2 - 2A_2\sqrt{c_2}) \to \max. \quad (10)$$

Задача оптимального управления развитием региона заключается в выборе оптимальных ставок штрафов за загрязнение (c_1 и c_2) и оптимальных ставок регионального налога с прибыли (t_1 и t_2), обеспечивающих минимум загрязнения окружающей среды (7), максимум объемов производства (8) и поступлений в местный бюджет (10).

Теорема. *При оптимальном управлении комплексным развитием региона ставки штрафа за загрязнения (c_1 и c_2) и налога с прибыли (t_1 и t_2) удовлетворяют неравенствам*

$$c_1 \geqslant c_2/[c_2\mu(r-1) + r], \quad (11)$$

$$r > 1/[1 + (c_2\mu)^{-1}], \quad (12)$$

где r — отношение ставок налоговых отчислений местных и федеральных предприятий в региональный бюджет: $r = t_1/t_2$. ♦

Доказательство. Пусть выбраны оптимальные ставки штрафа за загрязнение c_1 и c_2 и налога с прибыли (t_1 и t_2). Рассмотрим теперь их малые изменения, при которых $\sqrt{c_1} \to \sqrt{c_1} + \delta A_2 t_2$, $\sqrt{c_2} \to \sqrt{c_2} - \delta A_1 t_1$, $\delta \to 0$. Тогда, согласно выражению (9), величина $J_0^3(c_1, c_2)$ не изменится. Далее, измененное значение критерия (8)

$$J_0^2(c_1^\delta, c_2^\delta) = B_1 - 2A_1(\sqrt{c_1} + \delta A_2 t_2) + B_2 - 2A_2(\sqrt{c_2} - \delta A_1 t_1) = J_0^2(c_1, c_2) + 2A_1A_2\delta(t_1 - t_2).$$

Поскольку, согласно выражению (8), $t_1 > t_2$, то

$$J_0^2(c_1, c_2) + 2A_1A_2\delta(t_1 - t_2) > J_0^2(c_1, c_2),$$

т. е. критерий (8) увеличится. Поскольку ставки c_1, c_2, t_1 и t_2 оптимальны, то это означает, что рост критерия $J_0^2(c_1, c_2)$, при неизменном значении $J_0^3(c_1, c_2)$, должен сопровождаться ростом критерия $J_0^1(c_1, c_2)$. С другой стороны, полный дифференциал $dJ_0^1(c_1, c_2)$ имеет вид:

$$dJ_0^1(c_1, c_2) = \frac{\partial J_0^1(c_1, c_2)}{\partial\sqrt{c_1}} d\sqrt{c_1} + \frac{\partial J_0^1(c_1, c_2)}{\partial\sqrt{c_2}} d\sqrt{c_2} = A_1(-1/c_1 - \mu)(\delta A_2 t_2) + A_2(-1/c_2 - \mu)(-\delta A_1 t_1) = \delta A_1A_2(t_1/c_2 - t_2/c_1 + \mu(t_1 - t_2)). \quad (13)$$

Условие роста критерия $J_0^1(c_1, c_2)$ означает, что

$$dJ_0^1(c_1, c_2) \geqslant 0. \quad (14)$$

Обозначим $r = t_1/t_2$. Тогда, учитывая формулу (13), условие (14) можно переписать в виде:

$$c_1[c_2\mu(r-1) + r] \geqslant c_2. \quad (15)$$

Поскольку $c_1 \geqslant 0$, $c_2 \geqslant 0$, то из условия (15) следует, что

$$c_2\mu(r-1) + r > 0. \quad (16)$$

Неравенство (16) выполняется, если

$$r > 1/[1 + (c_2\mu)^{-1}]. \quad (17)$$

Тогда из условия (15) получаем

$$c_1 \geqslant c_2/[c_2\mu(r-1)+r]. \qquad (18)$$

Из неравенств (17) и (18) следуют неравенства (11) и (12), что и требовалось доказать. ♦

Рассмотрим теперь решение задачи оптимального управления развитием региона на основе теоремы и условий (11) и (12). Неравенство (12) означает, что отношение ставок налоговых отчислений местных и федеральных предприятий в региональный бюджет должно быть больше некоторой величины r_0. Однако, поскольку сама эта величина меньше единицы, то ставки налоговых отчислений федеральных предприятий в региональный бюджет могут быть меньше, чем местных.

Предположим, что ставки налоговых отчислений местных и федеральных предприятий в региональный бюджет одинаковы: $r = 1$. Тогда непосредственно из доказательства теоремы следует, что $c_1 = c_2$.

Обозначим через s отношение ставок штрафов за загрязнения местными и федеральными предприятиями: $s = c_1/c_2$. Исследуем взаимосвязь отношений ставок налогов (r) и отношений штрафов (s) для местных и федеральных предприятий. Подставляя $s = c_1/c_2$ в неравенство (11), получаем

$$s \geqslant s_0 = 1/[c_2\mu(r-1)+r]. \qquad (19)$$

Предположим, что ставки налоговых отчислений федеральных предприятий в региональный бюджет меньше, чем местных. Тогда $r < 1$ и, согласно выражению (19),

$$s_0 = 1/[c_2\mu(r-1)+r] > 1/r > 1. \qquad (20)$$

По теореме имеем $s \leqslant s_0$, отсюда получаем, что возможно $s > 1$, и ставки штрафов для федеральных предприятий могут быть как больше, так и меньше, чем для местных. При этом в выражении (20) выполняется условие $[c_2\mu(r-1)+r] > 0$.

Предположим, что ставки налоговых отчислений федеральных предприятий в региональный бюджет больше, чем местных. Тогда $r > 1$ и, согласно выражению (19),

$$s_0 = 1/[c_2\mu(r-1)+r] < 1/r < 1.$$

Учитывая, что, согласно выражению (19), $s \geqslant s_0$, отсюда получаем, что оптимальное управление комплексным развитием региона возможно и при $s < 1$. Следовательно, ставки штрафов за загрязнения для федеральных предприятий в региональный бюджет могут быть даже меньше, чем для местных.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Для оптимального управления развитием региона совершенно не обязательно подвергать федеральные предприятия дискриминации путем увеличения штрафов за выбросы. Достаточно гибко регулировать отношения ставок налогов и штрафов для местных и федеральных предприятий. Заботясь о процветании своей области, администрация может предоставлять одинаковый режим и «своим» предприятиям, и «чужим» ($c_1 = c_2$, $t_1 = t_2$). Эта система оптимального управления регионом прозрачна для всех игроков на рынке. В работе [1] было теоретически доказано, что подобные прозрачные системы управления исключают возможность ведения информационных войн.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бухарин С.Н., Цыганов В.В.* Методы и технологии информационных войн. — М.: Академический проект, 2007. — 382 с.
2. *Моисеев Н.Н.* Математические методы системного анализа. — М.: Наука, 1981. — 488 с.

Статья представлена к публикации членом редколлегии В.В. Кульбой.

Бухарин Сергей Николаевич — канд. физ.-мат. наук, ст. науч. сотрудник, Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, г. Москва,
☎(495) 334-91-91, ✉ buharinsn@yandex.ru.

Новая книга

Кульба В.В., Шелков А.Б., Гладков Ю.М., Павельев С.В. **Мониторинг и аудит информационной безопасности автоматизированных систем.** — М.: ИПУ РАН, 2008. — 94 с.

Работа посвящена анализу технологий и разработке методов и моделей повышения эффективности аудита и мониторинга информационной безопасности автоматизированных систем. Представлены методы организации аудита рассматриваемого типа. Приведены модели и методы анализа и синтеза технологий аудита по критерию минимизации аудиторского риска. Разработана методика комплексного оценивания и выбора проектных решений по повышению уровня информационной безопасности с помощью метода векторной стратификации. Рассмотрен комплекс проблем проектирования детерминированных и случайных систем регистрации в целях осуществления мониторинга информационной безопасности.

УДК 659:519.2

ТЕОРИЯ ВЫЧИСЛЕНИЯ ОХВАТА СМИ

Е.В. Попов, Г.А. Шматов

Развита теория вычисления охвата целевой аудитории в зависимости от числа выходов СМИ. Теория позволяет определить значения полного и эффективного охватов аудитории, найти распределение охвата по числу контактов. Изложенная теория представляет собой часть аналитического аппарата, на основе которого решаются задачи управления рекламным бюджетом и оптимизации размещения рекламы в СМИ.

Ключевые слова: рекламное медиапланирование, оптимизация, охват, размещение рекламы.

ВВЕДЕНИЕ

Задачи планирования рекламы приходится решать каждому специалисту, занятому ее размещением в СМИ. Как сказано в классической книге по медиапланированию Дж. Сиссорса и Р. Бэрона, «...специалист в области медиапланирования использует статистические данные с целью доказательства того, что в план включены лучшие средства распространения рекламы, позволяющие охватить всех потенциальных покупателей» [1].

Теория медиапланирования и занимается разработкой таких доказательств, а также методов их практического применения. Путем оптимального размещения достигается минимизация рекламного бюджета и максимизация эффекта рекламного воздействия. Поскольку медиапланирование относится к количественным наукам, его основные понятия и параметры формулируются на математическом языке. Один из классиков рекламы, К. Хопкинс, подчеркивал: «наиболее убедительные аргументы при рассмотрении рекламных планов — это цифры» [2].

При планировании рекламы неизбежно возникают вопросы:

— какая часть аудитории будет охвачена рекламой?

— какая ее часть будет охвачена тем или иным СМИ?

— сколько контактов с рекламой в среднем будет иметь представитель аудитории?

— какое число СМИ нужно выбрать для рекламы?

— сколько нужно сделать выходов рекламы в каждом из выбранных СМИ?

— с какой периодичностью нужно проводить рекламные кампании и др.?

Все эти вопросы могут быть решены только на основе адекватной *количественной теории*. При этом теория должна быть разработана не только на уровне абстрактной математической теории, содержащей определения понятий и доказательства некоторых теорем, но и на прикладном уровне. Последнее обстоятельство подчеркнем особо, поскольку именно разработка теории на прикладном уровне позволяет применять ее специалистам, занимающимся размещением рекламы в СМИ — сотрудникам рекламных агентств и менеджерам по рекламе любых фирм.

Сказанное подтверждает актуальность разработки вопросов медиапланирования с практической точки зрения. Анализ литературы по количественным аспектам медиапланирования приводит к весьма неутешительным выводам. Несмотря на обилие литературы по рекламе в целом, публикаций, в которых были бы подробно изложены количественные основы планирования и оптимизации размещения рекламы, практически не существует. В учебниках и монографиях по рекламе подробно описываются методы, применяемые на этапах стратегического и тактического планирования рекламы [1—9]. Однако количественным методам оптимизации рекламного бюджета и размещения рекламы уделяется совершенно недостаточное внимание. Например, описанию программ по медиапланированию в книге [5], содержащей 780 страниц текста, уделено только две страницы. В специальных публикациях решены отдельные частные задачи, которыми невозможно воспользоваться в конкретной практической работе большинства отечественных менеджеров по рекламе.

Это связано, в основном, с неполнотой и фрагментарностью представленных в публикациях методов. Эти работы основаны на подходах, требующих данных, технологий и ресурсов, недоступных большинству отечественных пользователей.

В отечественной литературе по медиапланированию приводятся, как правило, определения терминов, используемых в медиапланировании, и дается описание общих принципов планирования рекламы [10—13]. В части этих публикаций описываются некоторые программные продукты по медиапланированию, но только на уровне пользователя, без описания алгоритмов, на которых они основаны [12]. В тех книгах, где имеются элементы количественной теории, как правило, приводятся лишь две—три формулы, к тому же без обоснования и часто с ошибками, см., например, работы [10, *с. 44*; 13, *с. 80*]. Отметим в этой связи, что во многих областях маркетинга и маркетинговых исследованиях математические методы анализа применяются весьма широко, см. например, работы [14—18].

Основная цель данной публикации состоит в разработке основ *аналитического аппарата* медиапланирования, с помощью которого можно проводить оптимизацию рекламных кампаний и управлять рекламным бюджетом. Речь идет, прежде всего, о разработке аналитических методов вычисления медиапараметров, которые можно применять в процессе практической оптимизации размещения рекламы, а не только о разработке абстрактного математического формализма. Основной недостаток чисто абстрактных теорий, не имеющих развитого вычислительного аппарата, состоит в невозможности использования их результатов для реальной практической работы. Если говорить еще более конкретно, основное содержание данной статьи — это вывод формул (11)—(14), которые являются составной частью разработанного аналитического аппарата теории медиапланирования. Обобщение полученных формул, а также дальнейшее развитие математической теории медиапланирования будет изложено в отдельных публикациях. В частности, это касается теории вычисления охватов групп СМИ

1. РЕЙТИНГ И ПРЕДЕЛЬНЫЙ ОХВАТ СМИ

Теория медиапланирования основывается на двух базовых понятиях — понятиях рейтинга и предельного охвата СМИ. Сформулируем определения этих понятий.

Определение 1. *Рейтинг* (R) издания или определенного временно́го интервала в сетке вещания электронных СМИ — это доля целевой аудитории, состоящая из людей, имевших контакт с одним выходом издания или с этим временны́м интервалом. ♦

Определение 2. *Предельный охват* (G^{∞}) издания или временно́го интервала — это доля целевой аудитории, состоящая из людей, имевших хотя бы один контакт со СМИ при сколь угодно большом числе выходов издания или однотипных временных интервалов для электронных СМИ. ♦

Предельный охват является такой же фундаментальной характеристикой СМИ, как и рейтинг. Его значение должно быть определено в результате медиаисследований.

Таким образом, в излагаемой ниже теории имеются всего *два* измеряемых параметра (рейтинг и предельный охват), которым отводится роль *первичных* данных, необходимых и достаточных для построения точной теории медиапланирования, позволяющей вычислять все необходимые охватно-частотные характеристики медиа. Отметим, что число параметров теории может быть увеличено, если это практически необходимо.

2. ОХВАТ И ЕГО ЧАСТОТНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ (СПЕКТР)

Сформулируем определения *охвата* и его *частотного распределения* по числу контактов, используя следующие обозначения: m — число выходов СМИ, число размещений рекламы в СМИ; $G(m)$ — охват целевой аудитории за m выходов одного СМИ.

Вместо используемого в англоязычной литературе обозначения охвата (*Reach*, *Cover*) для упрощения записи формул введем обозначение G. Выходом СМИ будем называть выход издания или один и тот же временной интервал в сетке вещания электронных СМИ, подробнее см. работы [21—23].

Определение 3. *Охват* $G(m)$ — это доля целевой аудитории, состоящая из людей, имевших хотя бы один контакт за m выходов одного СМИ. ♦

Условимся далее число контактов f считать синонимом частоты контакта. Представим полный охват $G(m)$ в виде суммы охватов со всеми возможными числами (частотами) контактов:

$$G(m) = \sum_{f=1}^{m} g_m(f). \qquad (1)$$

Функция $g_m(f)$ представляет собой разложение полного охвата на отдельные охваты, соответствующие конкретным числам контактов. Эту функцию будем называть спектром охвата, наряду с

эквивалентными названиями — «частотное распределение» или «распределение охвата по числу контактов».

Определение 4. *Частотным распределением* (спектром) охвата будем называть функцию $g_m(f)$, с помощью которой полный охват $G(m)$ представляется в виде суммы охватов с частотами контактов, изменяющимися в пределах $1 \leqslant f \leqslant m$. ♦

Разложение охвата в спектр (1) позволяет разделять всех охваченных людей на группы, каждая из которых включает в себя людей, имевших какое-то конкретное число контактов (группы с одним, двумя, ..., m контактами).

Конкретная цель данной статьи состоит в изложении вывода формул для спектра охвата и зависимости полного охвата от числа выходов. Из методических соображений вывод целесообразно провести в два этапа. На первом этапе выводится формула полного охвата для частного случая $G^{\infty} = 1$. На втором — для всех возможных значений G^{∞}.

Для вывода формул нужно переформулировать приведенные выше определения рейтинга и охвата на языке теории вероятностей. Для этого нужно перейти от усреднения по ансамблю к усреднению по времени, используя эргодическую гипотезу, согласно которой среднее по ансамблю равно среднему по времени (см., например, справочник [24, *с. 592*]).

Определение 5. *Рейтинг R* — это вероятность того, что случайно выбранный из *целевой аудитории* человек имел контакт с одним выходом СМИ. ♦

Определение 6. *Полный охват $G(m)$* — это вероятность того, что случайно выбранный из *целевой аудитории* человек имел хотя бы один контакт за m выходов СМИ. ♦

Определение 7. *Спектр охвата*, или охват с фиксированным числом контактов, $g_m(f)$ — это вероятность того, что случайно выбранный из *целевой аудитории* человек имел ровно f контактов со СМИ при условии, что имелось m выходов этого СМИ. ♦

2.1. Охват и его частотное распределение при $G^{\infty} = 1$

Для вывода формул вычисления охвата $G(m)$ и его спектра $g_m(f)$ при $G^{\infty} = 1$ сформулируем следующую вероятностную схему, которая соответствует определению 7. Будем полагать, что выполняются следующие условия.

1) Производится m последовательных *выходов* СМИ (m *испытаний*), в каждом из которых вероятность *наступления контакта* с выходом СМИ (*событие A*) *одинакова* и равна R : $P(A) = R$, где символ $P(A)$ означает вероятность события A.

2) Испытания предполагаются *независимыми*. Независимость испытаний означает, что вероятность осуществления события A (вероятность контакта с выходом СМИ) в каждом из испытаний *не зависит* от того, осуществилось или не осуществилось это событие в других испытаниях.

3) В каждом испытании возможны только *два* исхода. Наступление события A (контакт с выходом СМИ) обычно называют успехом, а ненаступление события A (отсутствие контакта с выходом СМИ) — неудачей. Вероятность неудачи в силу постулата о полной вероятности дается, очевидно, соотношением: $q = 1 - P(A) = 1 - R$.

Сформулированные выше условия представляют собой не что иное, как схему Бернулли для рассматриваемой последовательности испытаний — выходов СМИ. При этих условиях вероятность того, что в m *независимых* испытаниях успех (контакт с выходом СМИ) наступит ровно f раз, выражается формулой Бернулли (см., например, [25, с. *154*; 26, 27]):

$$g_m(f) = C_m^f R^f (1 - R)^{m-f}, \qquad (2)$$

где $C_m^f = m!/f!/(m-f)!$ — биномиальные коэффициенты, R — рейтинг СМИ, вероятность того, что выбранный из целевой аудитории человек имел контакт со СМИ, f — число контактов.

Теперь найдем охват $G(m)$, суммируя выражения (2) по f согласно формуле (1), используя при этом формулу бинома Ньютона:

$$G(m) = \sum_{f=1}^{m} g_m(f) = 1 - (1 - R)^m. \qquad (3)$$

Из формулы (3) следует, что при $m \to \infty$ предельный охват $G^{\infty} \equiv \lim\limits_{m \to \infty} G(m) = 1$.

Таким образом, *из условия независимости* событий и формулы (3), полученной при этом условии, *следует*, что предельный охват G^{∞} равен 100 %.

2.2. Охват и его частотное распределение при $G^{\infty} < 1$

Прежде, чем приступить к обобщению формул для охвата СМИ, необходимо сделать следующее замечание. Поскольку разрабатываемая теория имеет практическую направленность, при выводе обобщенных формул будем рассматривать лишь *один* из возможных типов зависимости событий, которая предпочтительна с точки зрения ее использования на практике. Другие типы зависи-

мости целесообразно рассмотреть в отдельной публикации.

При выводе формулы для охвата при $G^{\infty} < 1$ будем исходить из формулы (3) для случая $G^{\infty} = 1$, которая получена на основе очевидных допущений в соответствии со схемой Бернулли. Соотношение (3) можно записать в виде следующей рекуррентной формулы, которая позволяет найти охват $G(m)$ по охвату предыдущего выхода $G(m-1)$:

$$G(m) = R + (1 - R)G(m - 1). \qquad (4)$$

Для частного случая $m = 2$ формулу (3) можно представить в виде $G(2) = R + R - R^2$, или

$$G(2) = R + (1 - R)G(1), \qquad (5)$$

где $G(1) = R$. Для независимых событий выполняется соотношение ([24, *с. 541*; 25, *с. 131*])

$$P(A_1 \cap A_2) = P(A_1)P(A_2) = R^2. \qquad (6)$$

Теперь откажемся от предположения о независимости событий A_k, В этом случае будем полагать, что вероятность пересечения зависимых событий дается уже не формулой (6), а следующим соотношением, которое и *определяет конкретный тип зависимости* событий:

$$P(A_1 \cap A_2) = \gamma R^2, \qquad (7)$$

где γ — некоторый коэффициент, учитывающий зависимость событий A_k. Смысл этого коэффициента будет выяснен далее.

Отметим, что целесообразность выбора данного типа зависимости событий подтверждается соответствием полученных результатов данным медиаизмерений, а также практическим удобством полученного аналитического аппарата.

Теперь запишем охват двух выходов СМИ с учетом соотношения (7). Вместо формулы (5) будем иметь следующее соотношение

$$G(2) = R + R - \gamma R^2 = R + (1 - \gamma R)G(1). \qquad (8)$$

Из сравнения формул (4) и (8) видно, что рекуррентная формула для случая *зависимых* событий будет выглядеть так:

$$G(m) = R + (1 - \gamma R)G(m - 1). \qquad (9)$$

Нетрудно показать, что отсюда следует равенство

$$G(m) = [1 - (1 - \gamma R)^m]/\gamma. \qquad (10)$$

Теперь найдем константу γ, рассматривая предел выражения (10) при $m \to \infty$:

$$G^{\infty} \equiv \lim_{m \to \infty} G(m) = 1/\gamma,$$

т. е. константа γ, учитывающая наличие зависимости между событиями A, равна величине, обратной предельному охвату G^{∞}. Таким образом, формула для охвата аудитории в зависимости от числа выходов СМИ имеет следующий вид:

$$G(m) = G^{\infty}[1 - (1 - R/G^{\infty})^m]. \qquad (11)$$

При выводе этой формулы вначале был выбран конкретный *вид зависимости* (из соображений согласия с данными измерений), а затем показано, что при данном виде зависимости событий выполняется соотношение $G^{\infty} < 1$.

Вернемся к выводу формулы для спектра охвата $g_m(f)$ в случае $G^{\infty} < 1$. Сопоставляя формулы (2), (3) и (11), получим следующее выражение:

$$g_m(f) = G^{\infty} C_m^f r^f (1 - r)^{m-f}, \qquad (12)$$

где $r = R/G^{\infty}$. Действительно, суммируя, как и раньше, спектр охвата $g_m(f)$ по f и учитывая формулу (1), вновь получим формулу (11):

$$G(m) = \sum_{f=1}^{m} g_m(f) = G^{\infty}[1 - (1 - R/G^{\infty})m]. \qquad (13)$$

Таким образом, формулы (11) и (12) позволяют вычислять как спектр охвата $g_m(f)$, так и полный охват $G(m)$ любого СМИ при произвольном числе выходов m. Эти формулы содержат *два* параметра, в качестве которых выступают предельные значения охвата, а именно охваты при одном, а также очень большом числе выходов — R и G^{∞} соответственно, которые находятся в результате медиаисследований.

Перейдем к рассмотрению следствий полученных соотношений. Формула (11) позволяет легко вычислять охват СМИ, если известны его рейтинг и предельный охват. Приведем конкретный пример вычисления охвата аудитории в зависимости от числа выходов СМИ.

Пример 1. Найти охват шести выходов СМИ с рейтингом $R = 14$ % и предельным охватом $G^{\infty} = 50$ %.

Р е ш е н и е. Подставляя данные из условия задачи в формулу (11), получим

$$G(6) = G^{\infty}[1 - (1 - R/G^{\infty})^m] =$$
$$= 0{,}5 \cdot [1 - (1 - 0{,}14/0{,}5)^6] = 43{,}0\ \%,$$

т. е. охват аудитории за шесть выходов СМИ составил 43 %. ♦

Полученные соотношения позволяют вычислять такие важные медиапараметры, используемые на практике для оптимизации размещения рекламы и управления рекламным бюджетом, как

эффективный охват и число контактов. Рассмотрим методы вычисления данных медиапараметров более детально.

3. ЭФФЕКТИВНЫЙ ОХВАТ

С помощью формулы (12) можно вычислять эффективный охват, который соответствует заданному уровню эффективной частоты $f_{эф}$. Существует несколько способов нахождения эффективной частоты в зависимости от различных факторов. Наиболее известные из них — методы Остроу и Росситера—Перси [1, 2].

Эффективный охват $G_{эф}$, или охват с числом контактов $f_{эф}$ и более, является весьма важной величиной в медиапланировании, поскольку необходим для оптимизации медиаплана по заданному уровню эффективной частоты. Практическая значимость формулы эффективного охвата обусловлена тем, что она позволяет исключать из рассмотрения тех людей, число контактов которых со СМИ меньше эффективного. Например, если известно, что эффективная частота контактов равна 3, то эффективный охват дает процент людей целевой аудитории, имевших не менее трех контактов за m выходов СМИ.

В соответствии с соотношениями (1) и (12) мы имеем точное разложение полного охвата СМИ на сумму охватов со *всеми* возможными числами контактов. Поэтому охват с числом контактов $f_{эф}$ и более запишется, очевидно, следующим образом:

$$G_{эф} = \sum_{k=f_{эф}}^{m} g_m(k), \qquad (14)$$

где k — текущее число контактов ($f_{эф} \leqslant k \leqslant m$). Обобщение формулы эффективного охвата дано в работах [21—23].

Пример 2. Найти охват с числом контактов 3 и более в условиях примера 1.

Р е ш е н и е. Учитывая формулы (12) и (14) при $R = 14$ % и $G^{\infty} = 50$ %, находим:

$$G_{эф} = g_6(3) + g_6(4) + g_6(5) + g_6(6) =$$
$$= 0{,}5 \cdot 6!/(3! \cdot 3!)(0{,}14/0{,}5)^3(1 - 0{,}14/0{,}5)^3 +$$
$$+ 0{,}5 \cdot 6!/(4! \cdot 2!)(0{,}14/0{,}5)^4(1 - 0{,}14/0{,}5)^2 +$$
$$+ 0{,}5 \cdot 6!/5!(0{,}14/0{,}5)^5(1 - 0{,}14/0{,}5) +$$
$$+ 0{,}5 \cdot 6!/6!(0{,}14/0{,}5)^6 = 8{,}194\ \% + 2{,}39\ \% +$$
$$+ 0{,}372\ \% + 0{,}024\ \% = 10{,}98\ \% \approx 11\ \%.$$

Таким образом, эффективный охват составил всего 11 %, почти в 4 раза меньше, чем полный охват (43 %, см. пример 1). ♦

4. ЧИСЛО КОНТАКТОВ

Зная спектр охвата (12), можно найти полное число контактов (в процентах от целевой аудитории) за m выходов СМИ. Как нетрудно убедиться, оно дается суммой $\sum_{f=1}^{m} fg_m(f)$. Действительно, сумма произведений числа контактов на соответствующий процент охваченных людей из целевой аудитории (по определению спектра g_m) даст полное число контактов в процентах от численности целевой аудитории.

Вычислим эту сумму. Используя определение спектра охвата (12) и формулу бинома Ньютона, получим

$$\sum_{f=1}^{m} fg_m(f) = mR. \qquad (15)$$

Таким образом, полное число контактов равно суммарному рейтингу $GRP = mR$, накопленному за m выходов. Тот факт, что суммарный рейтинг (*TRP* или *GRP*) равен полному числу контактов (в процентах от численности целевой группы), также очевиден, поскольку рейтинг — это число контактов за один выход (в процентах).

Пример 3. Покажем справедливость формул (14) и (15) в условиях примеров 1 и 2, т. е. при $m = 6$, $R = 14$ % и $G^{\infty} = 50$ %.

Р е ш е н и е. В предыдущем примере мы нашли, что

$$g_6(3) = 8{,}194\ \%; \quad g_6(4) = 2{,}39\ \%; \quad g_6(5) = 0{,}37\ \%;$$
$$g_6(6) = 0{,}024\ \%; \quad G(3+) = 10{,}978\ \%.$$

Аналогично находим:

$$g_6(1) = 0{,}5 \cdot 6!/(1! \cdot 5!)(0{,}14/0{,}5)^1(1 - 0{,}14/0{,}5)^5 = 16{,}25\ \%;$$

$$g_6(2) = 0{,}5 \cdot 6!/(2! \cdot 4!)(0{,}14/0{,}5)^2(1 - 0{,}14/0{,}5)^4 = 15{,}8\ \%;$$

$$G(1+) = 16{,}253\ \% + 15{,}802\ \% + 10{,}98\ \% = 43{,}03\ \%;$$

$$G(2+) = 15{,}802\ \% + 10{,}98\ \% = 26{,}78\ \%;$$

$$G(4+) = 2{,}39\ \% + 0{,}372\ \% + 0{,}024\ \% = 2{,}8\ \%;$$

$$G(5+) = 0{,}372\ \% + 0{,}024\ \% = 0{,}4\ \%;$$

$$G(6+) = g_6(6) = 0{,}024\ \%.$$

Теперь вычислим суммарный рейтинг *GRP* по формуле (16). С одной стороны,

$$GRP = \sum_{f=1}^{6} fg_6(f) = 16{,}25\ \% + 2 \cdot 15{,}8\ \% + 3 \cdot 8{,}19\ \% +$$
$$+ 4 \cdot 2{,}39\ \% + 5 \cdot 0{,}37\ \% + 6 \cdot 0{,}024\ \% = 84\ \%.$$

С другой стороны, находим $GRP = mR = 6 \cdot 14\ \% = 84\ \%$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Сформулирован ряд понятий медиапланирования и выведены формулы для вычисления охвата СМИ и распределения охвата по числу контактов. Эти медиапараметры используются для оптимизации размещения рекламы и управления рекламным бюджетом. Дальнейшее развитие теории состоит в обобщении полученных формул, а также в выводе формул вычисления других медиапараметров, в частности, охвата нескольких СМИ, доли голоса, планируемой от рекламы прибыли.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Сиссорс Дж.З.*, *Бэрон Р.Е.* Рекламное медиапланирование. — СПб.: Питер, 2004. — С. 34.
2. *Хопкинс К.* Реклама: Научный подход. — М.: Альфа-Пресс, 2000. — С. 78.
3. *Сэндидж Ч.*, *Фрайбургер В.*, *Ротцолл К.* Реклама: теория и практика. — М.: Сирин, 2001.
4. *Росситер Дж. Р.*, *Перси Л.* Реклама и продвижение товаров. — СПб.: Питер, 2000.
5. *Батра Р.*, *Майерс Дж.*, *Аакер Д.* Рекламный менеджмент. — СПб.: Вильямс, 1999. — С. 623—624.
6. *Эрик дю Плесси.* Психология рекламного влияния. — СПб.: Питер, 2007.
7. *Рекламный* бизнес / Под ред. Дж.Ф. Джоунса. — М.: Вильямс, 2005.
8. *Rust R.* Advertising Media Models: A Practical Guide. Lexington, MA: Lexington Books, 1986.
9. *Dayer R.F.*, *Forman E.H.*, *Musstafa M.A.* Decision Support for Media Selection Using the Analytic Hierarchy Process // J. of Advertising. — 1992. — Vol. 21, N 1. — P. 59—72.
10. *Балабанов А.В.* Занимательное медиапланирование. — М.: РИП-холдинг, 2001.
11. *Назайкин А.Н.* Медиапланирование на 100 %. — М.: Альпина Бизнес Букс, 2007.
12. *Бузин В.Н.*, *Бузина Т.С.* Медиапланирование для практиков. — М.: Вершина, 2006.
13. *Кочеткова А.В.* Медиапланирование: социологические и экономические аспекты. — М.: РИП-холдинг, 2005.
14. *Кокрен У.* Методы выборочного исследования. — М.: Статистика, 1976.
15. *Математические* методы анализа и интерпретации социологических данных. — М.: Наука, 1989.
16. *Паниотто В.И.*, *Максименко В.С.* Количественные методы в социологических исследованиях. — Киев: Наукова думка, 1982.
17. *Количественные* методы анализа в маркетинге / Данько Т.П. и др. — СПб.: Питер, 2005.
18. *Мищенко А.В.*, *Джамай Е.В.* Динамическая задача определения оптимальной производственной программы // Менеджмент в России и за рубежом. — 2005. — № 3.
19. *Котляров И.Д.* Математическая модель принятия решения о приобретении франшизы. // Проблемы управления. — 2007. — № 5.
20. *Попов Е.В.*, *Коновалов А.А.* Модель оптимизации издержек поиска информации // Проблемы управления — 2008. — № 3.
21. *Шматов Г.А.* Математические основы медиапланирования // ВИНИТИ 04.06.03, № 1090—В2003. — 108 с.
22. *Шматов Г.А.* Основы медиапланирования: эвристический подход. — Екатеринбург: УрГУ. — 2007. — 376 с.
23. *Шматов Г.А.* Медиапланирование: новый подход // Реклама. Теория и практика. — 2006. — № 1.— С. 10—23.
24. *Корн Г.*, *Корн Т.* Справочник по математике. — М.: Наука, 1984.
25. *Феллер В.* Введение в теорию вероятностей и ее приложения. — М.: Мир, 1967. — Т. 1.
26. *Анго А.* Математика для электро- и радиоинженеров. — М.: Наука, 1964. — 596 с.
27. *Справочник* по вероятностным расчетам // Г.Г. Абенгауз и др. — М.: Воениздат, 1970. — 536 с.

Статья представлена к публикации членом редколлегии В.В. Кульбой.

Попов Евгений Васильевич — д-р экон. наук, д-р физ.-мат. наук, зам. директора, Институт экономики УрО РАН, г. Екатеринбург, ☎(343) 371-18-51, ✉ epopov@mail.ru,

Шматов Георгий Артемович — канд. физ.-мат. наук, ст. науч. сотрудник, Уральский госуниверситет им. А.М. Горького, г. Екатеринбург, ✉ sga36@mail.ru.

Новые книги

Алексеев А.А. Идентификация и диагностика систем: учебник. — М.: Академия, 2009. — 351 с.

Беспилотные летательные аппараты. — М.: МАИ, 2008. — 654 с.

Боровков А.А. Асимптотический анализ случайных блужданий. — М.: Физматлит, 2008. — Т.1. — 650 с.

Булинский А.В. Предельные теоремы для ассоциированных случайных полей и родственных систем. — М.: Физматлит, 2008. — 477 с.

Бурков В.Н. Механизмы управления эколого-экономическими системами. — М.: Физматлит, 2008. — 244 с.

Воройский Ф.С. Основы проектирования автоматизированных библиотечно-информационных систем. — М.: Физматлит, 2008. — 453 с.

Гусев М.Н. Расчет и измерение качества речевых сигналов. — СПб., 2008. — 275 с.

Даниленко Л.В. Начала теории энергетических аналогий. — Братск: БГУ, 2008. — 226 с.

Дартау Л.А. Здоровье человека и качество жизни: проблемы и особенности управления. — М.: СИНТЕГ, 2009. — 400 с.

Дозорцев В.М. Компьютерные тренажеры для обучения операторов технологических процессов. — М.: СИНТЕГ, 2009. — 372 с.

Задачи линейной оптимизации с неточными данными. — М.; Ижевск: ИКИ, 2008. — 286 с.

УДК 519.83,517.977

МОДЕЛИ ИНФОРМАЦИОННОГО ВЛИЯНИЯ И ИНФОРМАЦИОННОГО УПРАВЛЕНИЯ В СОЦИАЛЬНЫХ СЕТЯХ

Д.А. Губанов, Д.А. Новиков, А.Г. Чхартишвили

Формирование и динамика мнений в социальной сети смоделированы при помощи цепей Маркова. Сформулированы и решены для ряда частных случаев задачи управления мнениями агентов, образующих социальную сеть, а также теоретико-игровые задачи информационного противоборства.

Ключевые слова: социальная сеть, информационное влияние, информационное управление, информационное противоборство.

ВВЕДЕНИЕ

С появлением Web 2.0 [1] возрастает важность ресурсов нового типа — онлайновых социальных сетей — как средств распространения мнений, влияющих на действия пользователей сети. Например, в последней президентской избирательной компании США для данных целей Барак Обама и его сторонники широко использовали онлайновые социальные сети, что, по утверждению аналитиков, в немалой степени способствовало его победе [2].

Социальную сеть можно представить графом, вершинами которого являются индивидуумы (агенты), а ребрами — различные отношения между ними. Из социальной психологии [3, 4] известно, что мнение индивидуума в социальной сети в значительной мере определяется мнением влиятельных для него соседей. Зная это, некто за пределами сети или внутри нее для достижения своих целей может попытаться изменить мнения небольшого множества ключевых пользователей в популярных онлайновых социальных сетях (таких как Livejournal (www.livejournal.ru), Habrahabr (habrahabr.ru)), посредством которых произойдет распространение мнений по всей сети.

В социальной сети агенты часто не имеют достаточно информации или не могут обработать ее, решения агентов могут основываться на наблюдаемых ими решениях других агентов. Следует отметить, что несущественные изменения в решениях могут привести к крупным информационным каскадным изменениям в зависимости от структуры сети (того, кто кому доверяет) [5]. Существуют модели, связанные с диффузией информации и такими информационными каскадами, в основе которых лежит некая фиксированная сеть и локальные правила взаимодействия ее членов. В том числе, известны две базовые модели: модель с линейным порогом (Linear Threshold Model) и модель независимых каскадов (Independent Cascade Model). В этих моделях узел сети может быть в двух состояниях: активном и неактивном, причем узел может перейти из активного состояния в неактивное. Если в первой модели [6] узел u испытывает влияние своих соседей $w_{u,v}$ так, что $\Sigma_{v \text{ активный узел—сосед } u} w_{u,v} \leqslant 1$, и становится активным в зависимости от выбранного им порога $t_u \in [0, 1]$ (в некоторых моделях значение фиксируется для всех одинаковым [7], в других моделях выбирается случайно, согласно некоторому вероятностному распределению [8] $\Sigma_{v \text{ активный узел—сосед} u} w_{u,v} > t_u$, то во второй модели [8, 9], когда узел u становится активным в некоторый момент времени, то он получает единственный шанс активировать на следующем шаге каждого из своих соседей v с вероятностью $w_{u,v}$ (причем соседи могут пытаться независимо активировать и другие узлы). В статье [7] предлагается обобщение каждой из перечисленных моделей и показывается их эквивалентность. В работе [10] предлагается расширение модели на основе введения нелинейных пороговых функций; в работе [8] изучаются каскадные эффекты в аспекте топологии сети.

В настоящей работе изучается формирование и динамика мнений в социальной сети, моделируемое при помощи цепей Маркова: динамика влияний описывается марковским процессом, а мнения рассчитываются при помощи графа влияний. Выводы, полученные в рамках модели, согласуются с эвристикой: например, в группе «тесно связанных» вершин устанавливается одинаковое мнение. Формулируются и решаются для ряда частных случаев как задачи управления мнениями агентов, образующих социальную сеть, так и теоретико-игровые задачи информационного противоборства.

1. ПРЯМОЕ И КОСВЕННОЕ ИНФОРМАЦИОННОЕ ВЛИЯНИЕ

Будем описывать агентов, входящих в социальную сеть, множеством $N = \{1, 2, ..., n\}$. Агенты в сети влияют друг на друга, и степень влияния задается *матрицей прямого влияния* t размерности $n \times n$, где $t_{ij} \geqslant 0$ (от англ. *trust*) обозначает степень доверия i-го агента j-му агенту. Здесь и далее мы будем говорить как о влиянии, так и о доверии, и считать, что эти два понятия являются противоположными в следующем смысле: выражение «степень доверия i-го агента j-му равна t_{ij}» тождественно по смыслу выражению «степень влияния j-го агента на i-го равна t_{ij}».

Доверие в социальной сети можно наглядно изображать в виде стрелок с весами, соединяющих вершины. Например, стрелка от i-го агента к j-му с весом t_{ij} (рис. 1) означает соответствующую степень доверия.

Будем считать, что агент i достоверно знает только «свою» (i-ю) строчку матрицы $t = \|t_{ij}\|$ — кому и насколько он доверяет.

Будем считать выполненным условие нормировки: $\forall i \in N \sum_{j=1}^{n} t_{ij} = 1$, т. е. предположим, что

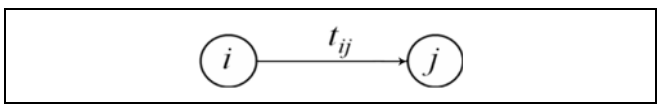


Рис. 1. Прямое (непосредственное) доверие

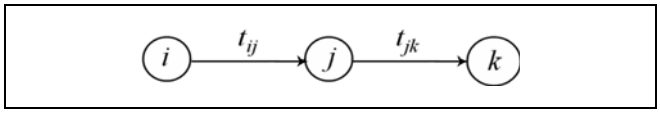


Рис. 2. Косвенное доверие (влияние)

«суммарное доверие» агента равно единице. Это условие означает, что матрица t является стохастической [11]. Отметим, что i-й агент может доверять и самому себе, чему соответствует $t_{ii} > 0$.

Если i-й агент доверяет j-му, а j-й доверяет k-му (рис. 2), то это означает следующее: k-й агент косвенно влияет на i-го (хотя последний может даже не знать о его существовании).

Это соображение побуждает к поиску ответа на вопрос о том, кто в итоге формирует мнение в социальной сети.

2. ФОРМИРОВАНИЕ И ДИНАМИКА МНЕНИЙ АГЕНТОВ

Пусть у каждого агента в некий начальный момент времени имеется мнение по некоторому вопросу, мнение i-го агента отражает вещественное число b_i. Мнение всех агентов сети отражает вектор-столбец мнений b (от англ. *belief*) размерности n.

Агенты в социальной сети взаимодействуют, обмениваясь мнениями. Этот обмен приводит к тому, что мнение каждого агента меняется в соответствии с мнениями агентов, которым данный агент доверяет. Будем считать это изменение линейным, т. е. мнение агента в следующий момент времени представляет собой взвешенную сумму мнений агентов, которым он доверяет (весами служат степени доверия t_{ij}):

$$b_i^{(k)} = \sum_j t_{ij} b_j^{(k-1)},$$

где индекс k означает момент времени.

Нетрудно убедиться, что в векторной записи первое измененное мнение агентов равно произведению матрицы непосредственного доверия на вектор начальных мнений: $b^{(1)} = tb$. Если обмен мнениями продолжается и далее, то вектор мнений агентов становится равным $b^{(2)} = t^2 b$, $b^{(3)} = t^3 b$ и т. д.

Если взаимодействие агентов продолжается достаточно долго, то их мнения стабилизируются — сходятся к результирующему мнению $B = \lim_{n \to \infty} b^{(n)}$ (об условиях существования предела см. далее).

Будем называть *матрицей результирующего влияния* предел $T = \lim_{n \to \infty} t^n$ (об условиях существования предела см. далее). Тогда можно записать соотношение $B = Tb$, где b — вектор начальных мнений, T — матрица результирующего влияния, B — вектор итоговых мнений.

Структуру косвенного доверия (влияния) также удобно изображать в виде ориентированного графа

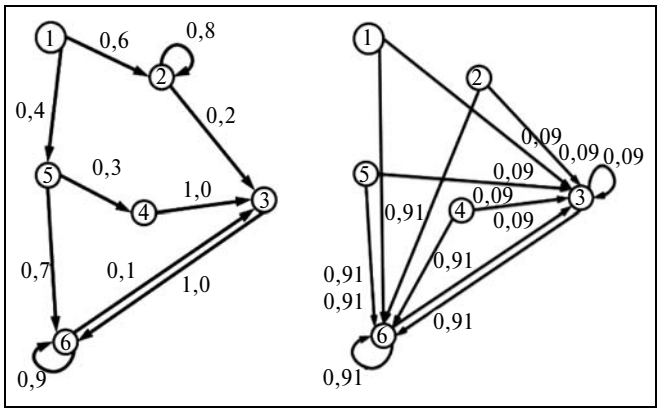


Рис. 3. Преобразование прямых доверий (*а*) в результирующее (*б*)

(агенты — вершины), где стрелками обозначено доверие агентов (стрелка идет от агента к тем агентам, кому он доверяет; если степень доверия равна нулю, то стрелка не проводится).

Пример 1. Пример преобразования прямых доверий (влияний) в результирующие приведен на рис. 3.

На рис. 3, *б* видно, что все доверие агентов сети сосредоточено на двух агентах с номерами *3* и *6*. Именно эти два агента, по сути, определяют мнение в данной социальной сети. ♦

Чтобы описать структуру результирующего доверия (влияния) в общем случае нам понадобятся некоторые понятия, определению которых посвящен следующий параграф данной статьи.

3. ГРУППЫ И СООБЩЕСТВА

Назовем *сообществом* множество агентов, которые не подвергаются влиянию агентов вне него. Формально, сообщество — это подмножество $S \subset N$ такое, что $\forall i \in S \, \forall j \in N \setminus S \, (t_{ij} = 0)$. Обозначим через X множество таких подмножеств.

Назовем *группой* сообщество агентов, которые взаимодействуют таким образом, что каждый агент влияет или подвергается влиянию каждого другого агента группы прямым или косвенным образом. Формально, группа — это «минимальное» сообщество, т. е. такое, внутри которого нельзя выделить никакое другое сообщество, т. е. множество $G \in X$ такое, что $\neg \exists S \in X \, (S \subset G)$.

Спутник — агент, подвергающийся влиянию агентов тех или иных групп, однако не оказывающий влияния ни на одну из них (ни на одного из агентов ни одной из групп). Это агент, не входящий ни в одну из групп.

Таким образом, каждый агент либо принадлежит ровно одной группе, либо является спутником. В то же время, агент может принадлежать нескольким «вложенным» друг в друга сообществам.

На рис. 4 выделены группа, сообщество и спутники в социальной сети примера 1. Здесь имеется единственная группа, включающая в себя агентов *3* и *6*; остальные агенты являются спутниками.

4. СТРУКТУРА РЕЗУЛЬТИРУЮЩИХ ВЛИЯНИЙ

Для описания структуры результирующих влияний мы используем известные результаты, полученные при исследовании конечных цепей Маркова (см., например, работы [12, 14 (*гл. VIII*)]). Для этого установим соответствие между введенными нами понятиями и понятиями теории марковских цепей следующим образом:

агент — состояние марковской цепи;

степень доверия — вероятность перехода из одного состояния в другое;

матрица прямых доверий — матрица переходных вероятностей;

косвенное доверие — достижимость;

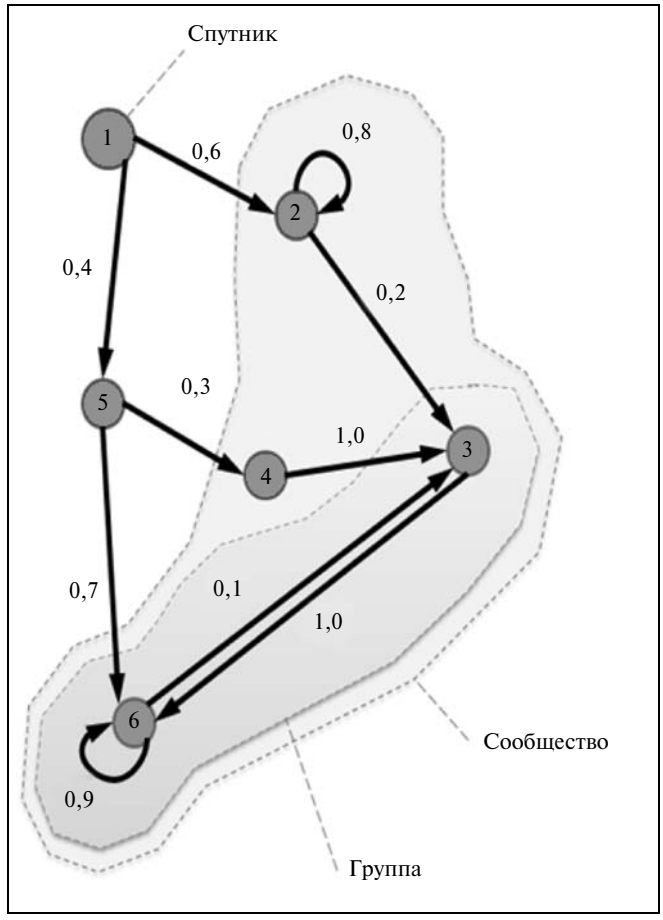


Рис. 4. Сообщество, группа и спутник социальной сети примера 1

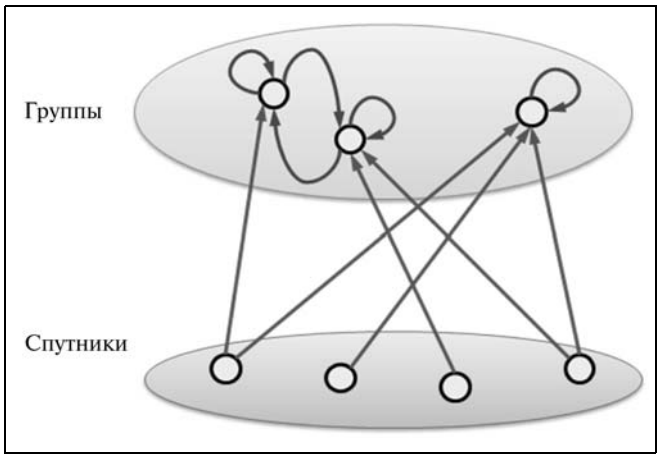


Рис. 5. Структура графа результирующих влияний

группа — неразложимый класс существенных состояний;

спутник — несущественное состояние.

Далее, будем считать выполненным следующее **условие 1**: в каждой группе существует хотя бы один агент $i \in N$, для которого $t_{ii} > 0$. Иными словами, в каждой группе хотя бы один агент хоть сколько-нибудь доверяет своему мнению.

В этом случае каждой группе соответствует (в теории марковских цепей) неразложимый апериодический класс. Поэтому справедливы следующие утверждения, являющиеся следствием известных фактов в теории цепей Маркова (подчеркнем, что условие 1 здесь и далее будем считать выполненным).

Утверждение 1. *Существует матрица результирующих влияний — предел* $T = \lim\limits_{n \to \infty} t^n$.

Утверждение 2. *Мнения агентов стабилизируются, т. е. существует предел* $B = \lim\limits_{n \to \infty} b^{(n)}$.

Утверждение 3. *Результирующее влияние любого спутника на любого агента равно нулю.* Это, в частности, означает, что начальные мнения спутников не оказывают никакого влияния на итоговые мнения каких-либо агентов.

Утверждение 4. *В матрице результирующих влияний строки, соответствующие членам одной группы, совпадают.* Это, в свою очередь, означает, что совпадают итоговые мнения агентов, т. е. каждая группа имеет общее мнение (которое можно считать *мнением группы*). ♦

Отметим, что утверждение 4 соответствует наблюдениям социальных психологов: в группе ее участники, испытывая информационное влияние, приходят к консенсусу [3].

Таким образом, структура результирующих влияний в социальной сети выглядит следующим образом (рис. 5). Имеется некоторое число групп, в каждой из которых итоговые мнения агентов совпадают. Остальные агенты являются спутниками, их итоговые мнения полностью определяются мнением одной или нескольких групп.

В заключение данного параграфа обсудим вопрос информированности самих агентов о создавшейся ситуации. Знает ли агент, является ли он членом одной из групп либо спутником?

Логично считать, что каждый агент в каждый момент времени знает свое мнение, мнение тех агентов, кому он доверяет, а также степень своего доверия каждому их них (здесь идет речь о прямом доверии). Если агент знает, что его итоговое мнение не совпадает с мнением тех, кому он доверяет, то он является спутником и знает это. В то же время, если итоговые мнения агента и тех, кому он доверяет, совпадают, то агент может быть как членом группы, так и спутником.

5. ПРИМЕРЫ ФОРМИРОВАНИЯ И ДИНАМИКИ МНЕНИЙ АГЕНТОВ

В данном параграфе мы рассмотрим несколько модельных примеров, иллюстрирующих формирование мнений агентов.

Начнем с «предельных» случаев.

Пример 2. Пусть имеется агент $i \in N$, который доверяет только самому себе: $\forall j \neq N t_{ij} = 0$, $t_{ii} = 1$. Мнения такого агента меняться во времени не будут: $b_i^{(k)} = b_i$, $k = 0, 1, \ldots$ ♦

Пример 3. Пусть имеется агент, который доверяет в некоторой (отличной от нуля) степени всем остальным агентам, которые все имеют одно и то же мнение и никому, кроме себя, не доверяют. Тогда мнение этого агента со временем будет стремиться ко мнению других агентов, которое меняться не будет. ♦

Пример 4. Пусть имеются два агента, каждый из которых полностью доверяет оппоненту ($t_{12} = t_{21} = 1$). Тогда введенное выше условие 1 не имеет места, и будут наблюдаться колебания мнений агентов с периодом 2. ♦

Пример 5. Пусть имеются два агента и ситуация симметрична: $t_{11} = t_{22} < 1$. Начальные мнения агентов — 0 и 1. Результирующее мнение будет единым и равным 0,5, причем максимальная «скорость сходимости» будет иметь место при $t_{11} + t_{22} = 1$. ♦

Пример 6. Пусть социальная сеть — связный граф, а степени доверия всех агентов друг другу одинаковы. Тогда результирующее мнение будет единым для всех агентов и равным среднему арифметическому их начальных мнений. ♦

Содержательные интерпретации рассмотренных «предельных» случаев прозрачны.

Пример 7. Пусть имеются три агента, каждый из которых в некоторой степени доверяет себе и другим. Начальные мнения агентов различны. Тогда мнения агентов будут сходиться, и результирующее мнение будет единым для всех агентов. ♦

Иллюстрацией данного вывода служит эксперимент Шерифа. Приведем его описание согласно работе [4]. «Вы сидите в темной комнате, и в 4,5 метрах от вас появляется светящаяся точка. Затем она передвигается в течение нескольких секунд, после чего исчезает. А вам нужно ответить на вопрос, на какое расстояние она сместилась. И вы начинаете гадать: «Может быть, сантиметров на 15». Все ваши последующие ответы колеблются вокруг цифры «20». На следующий день, вернувшись в лабораторию, вы оказываетесь в обществе ещё двух испытуемых, которые накануне, как и вы, наблюдали за светящейся точкой поодиночке. Когда заканчивается первая процедура, ваши товарищи предлагают свои ответы, исходя из уже имеющегося у них опыта. «2,5 сантиметра», — говорит первый. «5 сантиметров», — говорит второй. Несколько растерявшись, вы, тем не менее, говорите: «15 сантиметров». Если процедура будет повторяться в том же составе и в течение этого дня, и в течение двух последующих дней, изменится ли ваш ответ? Ответы участников эксперимента Шерифа... изменились весьма существенно... оценки сближались ...обычно складывалась некая групповая норма. Она не соответствовала действительности. Почему? Потому что световая точка вообще не двигалась».

Пример 8. Пусть имеются шесть агентов, пятеро из которых доверяют только себе, а шестой доверяет себе и в некоторой степени всем остальным. Начальные мнения пяти агентов — 0, шестого — 1. Тогда мнение шестого агента со временем будет стремиться к мнению других агентов — 0, которое меняться не будет. ♦

Иллюстрацией данного вывода служит эксперимент Аша. Приведем его описание [4]. «Вы сидите шестым в ряду, в котором всего семь человек. Сначала экспериментатор объясняет вам, что все вы принимаете участие в исследовании процесса восприятия и связанных с ним суждений, а затем просит ответить на вопрос: какой из трех отрезков прямой равен по длине стандартному отрезку? Вам с первого взгляда понятно, что стандартному отрезку равен отрезок № 2. Поэтому нет ничего удивительного в том, что все пять человек, которые ответили до вас, сказали: «Отрезок № 2». Следующее сравнение проходит столь же легко ... Однако третий раунд очень удивляет вас. Хотя правильный ответ кажется таким же бесспорным, как и в первых двух случаях, первый отвечающий дает неверный ответ. А когда и второй говорит то же самое... Четвертый и пятый соглашаются с первыми тремя. И вот взгляд экспериментатора устремлен на вас. Вы испытываете то, что называется «эпистемологической дилеммой»: «Как мне узнать, кто прав? Мои товарищи или мои глаза?» В ходе экспериментов Аша в подобной ситуации оказывались десятки студентов. В целом 37 % ответов оказались «конформными» (или следует сказать, что в 37 % случаев испытуемые «*полагались* на других»?).

Таким образом, выводы примеров 7 и 8 соответствуют практическому опыту и наблюдениям социальных психологов.

6. ЗАДАЧА ИНФОРМАЦИОННОГО УПРАВЛЕНИЯ

Имея «основное уравнение»

$$B = Tb, \qquad (1)$$

связывающее начальные и итоговые мнения агентов, можно ставить и решать задачу управления — воздействия на агентов социальной сети с целью формирования требуемых их мнений. Для сохранения аддитивности модели будем считать, что управляющему органу (центру) известна матрица влияния (доверия), а управляющее (информационное) воздействие заключается в изменении центром начальных мнений агентов путем «добавления» вектора управлений $u \in \Re^n$. Содержательно, управление заключается в изменении мнения i-го агента с b_i на $b_i + u_i$, $i \in N$.

Предположим, что $u_i \in U_i$, $i \in N$ (подобное ограничение имеет прозрачные содержательные интерпретации). Обозначим $U = \prod_{i \in N} U_i$.

Тогда итоговые мнения будут определяться следующим уравнением:

$$B_u = T(b + u) \qquad (2)$$

или в покоординатном виде: $B_{ui} = \sum_{j \in N} T_{ij}(b_j + u_j) =$ $= \sum_{j \in N} T_{ij} b_j + \sum_{j \in N} T_{ij} u_j$, $i \in N$; т. е. результирующее мнение агента, сложившееся в результате информационного управления, является суммой его «невозмущенного» результирующего мнения $\sum_{j \in N} T_{ij} b_j$ и изменений $\sum_{j \in N} T_{ij} u_j$, вызванных управляющими воздействиями.

Обратим внимание, что в силу уравнения (2) «стабильное» состояние социальной сети линейно по управлению! Отметим также, что в соответствии с уравнениями (1) и (2) «стабилизация» или «нестабилизация» мнений зависит только от матрицы доверия и не зависит от начальных мнений агентов (и, следовательно, от управлений).

Пусть целевая функция центра $\Phi(B_u, u)$ — критерий эффективности управления — зависит от итоговых мнений агентов и вектора управлений. Тогда задача управления будет заключаться в вы-

боре допустимого вектора управлений, максимизирующего критерий эффективности:

$$\Phi(T(b + u), u) \to \max_{u \in U}. \qquad (3)$$

В соответствии с утверждением 3 воздействовать на мнения спутников не имеет смысла, поэтому можно априори (имея только матрицу доверия) сказать, на каких агентов должно быть нацелено информационное воздействие.

В целевой функции центра можно, следуя традиции теории управления организационными системами [15], выделить две аддитивные компоненты: $\Phi(B_u, u) = H(B_u) - c(u)$, где $H(\cdot)$ — «доход» центра, зависящий от итоговых мнений агентов[1], $c(\cdot)$ — затраты на осуществление управляющих воздействий (может быть, целесообразно в некоторых моделях считать, что $c = c(b, u)$).

Пример 9. Если условно считать, что мнения агентов отражают степень их «убежденности» в том, в чем их хотел бы убедить центр (поддержать того или иного кандидата на выборах, приобрести определенный товар, принять определенное решение и т. д.), то примерами функции дохода центра $H(\cdot)$ могут служить:

$\frac{1}{n}\sum_{i \in N} B_{ui}$ — «среднее мнение» коллектива агентов;

$\sum_{i \in N} \lambda_i B_{ui}$ — «взвешенное» ($\lambda_i \geqslant 0$, $\sum_{i \in N} \lambda_i = 1$) мнение коллектива агентов;

$n_\alpha = |\{i \in N\colon B_{ui} \geqslant \alpha\}|$ — число агентов (в случае пороговых голосований может использоваться их доля), мнение которых превышает пороговое значение $\alpha \in [0; 1]$;

$\min_{i \in N} B_{ui}$ — «наихудшее» из мнений агентов и т. д. — в зависимости от содержательной постановки задачи. ♦

Пример 10. Пусть $H(B_u) = \frac{1}{n}\sum_{i \in N} B_{ui}$, а затраты центра однородны и линейны по управляющим воздействиям: $c(u) = \beta \sum_{i \in N} u_i$ (содержательно, β — стоимость единичного изменения мнения любого агента), причем ресурсы центра ограничены величиной $R \geqslant 0$:

$$\beta \sum_{i \in N} u_i \leqslant R. \qquad (4)$$

Задача управления (3) примет вид следующей задачи линейного программирования:

$$\frac{1}{n}\left(\left(\sum_{i \in N}\sum_{j \in N} T_{ij} b_j + \sum_{i \in N}\sum_{j \in N} T_{ij} u_j\right) - \beta \sum_{i \in N} u_i \to \right.$$
$$\to \max_{\{u_i \geq 0\}, (4)}. \qquad (5)$$

Обозначая $F_j = \frac{1}{n}\sum_{i \in N} T_{ij}$, $j \in N$, запишем выражение (5) в виде:

$$\sum_{j \in N} (F_j - \beta) u_j \to \max_{\{u_i \geq 0\}, (4)}. \qquad (6)$$

Решение задачи (6) очевидно — следует весь ресурс вкладывать в изменение мнения агента, для которого величина F_j максимальна. Содержательно это решение интерпретируется следующим образом. Величина F_j отражает среднюю степень доверия всех агентов j-му агенту. Назовем эту характеристику *влиятельностью агента*. Весь ресурс следует расходовать на воздействие на того агента, которому больше всего доверяют другие агенты.

Полученное свойство решения задачи (5) обусловлено тем, что в ней, как в задаче линейного программирования, всего одно ограничение (4). Можно усложнить ситуацию, предположив, что $U_i = [0; R_i]$. При достаточно малых величинах $\{R_i\}$ (например, не превышающих пороги обнаружения внешних воздействий агентами или некоторой системой защиты) данную модель можно интерпретировать как отражающую так называемое скрытое управление (см. его содержательные примеры в работах [17, 18]). Тогда решение соответствующего аналога задачи (6) будет следующим — выделять агентам, упорядоченным по убыванию величин F_i, «ресурс» в максимальном количестве R_i до тех пор, пока не станет существенным ограничение (4). При этом последний из агентов, среди получивших ресурс, может получить его в объеме, меньшем максимально для него возможного. ♦

В заключение настоящего параграфа перечислим ряд перспективных направлений дальнейших исследований задачи управления мнениями агентов, входящих в социальную сеть.

- Задачу, рассмотренную в примере 11, можно обобщать в различных направлениях, содержательно соответствующих тем или иным постановкам задач медиапланирования (в том числе — выбора оптимального набора информационных мероприятий) и распределения информационных ресурсов в рекламе, маркетинге, информационных войнах, обеспечении информационной безопасности и т. д. [16, 19, 20].
- Целесообразно рассмотрение более сложных, нежели (1) и (2), в том числе — нелинейных, зависимостей, отражающих изменение мнений агентов под влиянием других агентов и центра (см. классификацию «сетей» в статье [21]).
- Для агентов по матрице T можно вычислять их «индексы влияния» и другими способами, отличными от определенной выше «влиятельности» [22—24], и по этим индексам в рамках тех или иных эвристик или точных решений судить, на кого из агентов надо, в первую очередь, воздействовать.
- Представляет интерес решение задачи управляемости — определения множества состояний

[1] В рамках теории рефлексивных игр [16] считается, что действия субъектов определяются их информированностью. Поэтому, считая эту зависимость известной, можно от предпочтений центра, зависящих от действий агентов (что представляется естественным), перейти к его предпочтениям, зависящим от информированности (т. е. мнений) агентов.

$\bigcup_{u \in U} B_u$, в которое может быть переведена система при заданных ограничениях на управление.

• В силу «аддитивности» (2) по управлению, можно ставить и решать динамические задачи выработки оптимальной последовательности информационных воздействий.

• Прозрачные содержательные интерпретации имеет обратная задача — определения множества управляющих воздействий (или «минимальных» ограничений на них), обеспечивающих достижение системой заданного состояния (или их множества), т. е. формирование требуемых мнений агентов. Если цель состоит в формировании вектора B^* результирующих мнений, то из уравнения (2) следует, что соответствующее управление должно удовлетворять соотношению

$$u(B^*) = T^{-1}B_{u^*} - b. \qquad (7)$$

При решении задачи (7) могут возникнуть трудности, вызванные вырожденностью матрицы T [11], для преодоления которых возможно применять методы регуляризации [25].

И, наконец, в рамках предложенной модели можно ставить и решать задачи определения оптимальных вариантов защиты от информационных воздействий на агентов, образующих социальную сеть.

7. ТЕОРЕТИКО-ИГРОВАЯ МОДЕЛЬ ИНФОРМАЦИОННОГО ПРОТИВОБОРСТВА

Пусть существует множество игроков, имеющих возможность влиять на начальные мнения агентов и заинтересованных в формировании определенных их итоговых мнений. Опишем возникающую между ними игру.

Обозначим: $M = \{1, 2, ..., m\}$ — множество игроков, $u_{ij} \in U_{ij} = [-r_{ij}; R_{ij}]$ — действие j-го игрока по изменению мнения i-го агента, r_{ij}, $R_{ij} \geqslant 0$, $\boldsymbol{u} = \|u_{ij}\|$, $\boldsymbol{u}_j = (u_{1j}, u_{2j}, ..., u_{nj}) \in U_j = \prod_{i \in N} U_{ij}$, $u_i = \sum_{j \in M} u_{ij}$, $u = (u_1, u_2, ..., u_n)$ — вектор «воздействий», $g_j(B)$: $\Re^n \to \Re^1$ — целевая функция j-го игрока, $i \in N, j \in M$.

Будем считать, что воздействия игроков на мнение каждого из агентов аддитивны. Тогда из уравнения (2) следует, что итоговое мнение

$$B_i(\boldsymbol{u}) = \sum_{j \in N} T_{ij}\Big[b_j + \sum_{k \in M} u_{jk}\Big] = \sum_{j \in N} T_{ij}b_j + \sum_{j \in N} T_{ij} \sum_{k \in M} u_{jk}, \quad i \in N.$$

Отметим, что каждый из игроков в общем случае имеет возможность влиять на начальные мнения всех агентов (в случае отсутствия такой возможности следует положить нижнюю и верхнюю границы соответствующего множества U_{ij} допустимых действий равными нулю).

Обозначая $G_j(\boldsymbol{u}) = g_j(B_1(\boldsymbol{u}), B_2(\boldsymbol{u}), ..., B_n(\boldsymbol{u}))$, $j \in M$, и считая, что игроки выбирают свои действия однократно, одновременно и независимо, получим игру $\Gamma = (M, \{U_j\}_{j \in M}, \{G_j(\cdot)\}_{j \in M})$ в нормальной форме, определяемую заданием соответственно множества игроков, их множеств допустимых действий и целевых функций [13]. Имея игру в нормальной форме, можно исследовать ее равновесия, определять «на ней» кооперативные, повторяющиеся и другие виды игр [13] (см. классификацию в статье [21]).

Пример 11. Пусть целевые функции игроков линейны: $g_j(B) = \sum_{i \in N} \alpha_{ji}b_i$, $j \in M$. Подставляя в целевые функции выражение (2), получим:

$$G_l(\boldsymbol{u}) = \sum_{i \in N} \alpha_{li} \sum_{j \in M} T_{ij}b_j + \sum_{i \in N} \alpha_{li} \sum_{j \in N} T_{ij} \sum_{k \in M} u_{jk}, \quad l \in M.$$

От выбранных игроками действий зависит только второе слагаемое. Обозначим $\gamma_{lj} = \sum_{i \in N} \alpha_{li}T_{ij}$, $l \in M$. В силу линейности целевых функций игроков по их действиям, в рассматриваемой игре существует равновесие в доминантных стратегиях $\boldsymbol{u}^d$ [13], когда l-й игрок будет выбирать независимо от других игроков действие, максимизирующее величину $\sum_{j \in M} \gamma_{lj}u_{jl}$, т. е.:

$$u_{jl}^d = \begin{cases} -r_{jl}, \text{ если } \gamma_{lj} < 0 \\ R_{jl}, \text{ если } \gamma_{lj} \geq 0 \end{cases}, \quad j \in N, \quad l \in M. \qquad (8)$$

Содержательно выражение (8) означает, что каждый игрок осуществляет на каждого агента максимально возможное воздействие, знак которого зависит от того, к каким итоговым изменениям мнения этого агента приведет данное воздействие («ценности» этих изменений для игроков определяются величинами $\{\gamma_{lj}\}$). ♦

Пример 12. Пусть имеются два игрока, преследующих несовпадающие цели. Перенумеруем агентов таким образом, что первый игрок имеет возможность влиять на начальное мнение первого агента, а второй игрок — второго агента. Обозначим эти аддитивные воздействия $u_1 \in U_1$ и $u_2 \in U_2$ соответственно.

Тогда, в соответствии с уравнением (2), результирующие мнения агентов имеют следующий вид:

$$B_i(u_1, u_2) = \sum_{j \in N} T_{ij}b_j + T_{i1}u_1 + T_{i2}u_2, \quad i \in N. \qquad (9)$$

Обозначим $\boldsymbol{B}(u_1, u_2)$ — вектор мнений агентов с компонентами (9). Равновесие Нэша (u_1^*, u_2^*) имеет вид:

$$\forall u_1 \in U_1 g_1(\boldsymbol{B}(u_1^*, u_2^*)) \geqslant g_1(\boldsymbol{B}(u_1, u_2^*)),$$

$$\forall u_2 \in U_2 g_2(\boldsymbol{B}(u_1^*, u_2^*)) \geqslant g_2(\boldsymbol{B}(u_1^*, u_2)).$$

В силу достаточно простой аддитивной зависимости (9) результирующих мнений агентов от управлений

(действий игроков), можно рассматривать на базе данной модели игры с фиксированной последовательностью ходов (иерархические игры) [13], содержательно интерпретируемые как игры «нападение-защита».

Рассмотренная в настоящем примере модель легко обобщается на случай, когда каждый из игроков может воздействовать на начальные мнения любого множества агентов. ♦

Пример 13. Пусть имеются два игрока, каждый из которых имеет возможность влиять на начальное мнение одного из агентов из множеств $N_1 \subseteq N$ и $N_2 \subseteq N$ соответственно, причем $N_1 \cap N_2 = \varnothing$. Тогда действия игроков будут заключаться в выборе, на кого из «управляемых» ими агентов воздействовать. Так как множества возможных действий в этом случае конечны, то, рассчитав соответствующие выигрыши, получим стандартную биматричную игру [13], в которой можно аналитически искать равновесие в чистых и (или) смешанных стратегиях. ♦

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе, носящей во многом постановочный характер, рассмотрено информационное влияние агентов на формирование мнений друг друга в социальных сетях. Введены понятия сообществ, групп и спутников. С помощью результирующей структуры влияний (в которой спутники испытывают влияние только со стороны групп и в любой группе которой агенты сходятся в оценке степени авторитетности любого из агентов группы) доказано, что мнения спутников определяются мнением групп, а в группах мнения стабилизируются и равны. Приведены постановки задач информационного управления в социальных сетях и задач теоретико-игрового описания информационного противоборства.

Перспективным представляется исследование вопроса, как распространение информации сказывается на структуре влияний и мнений, а также дальнейшее развитие моделей информационного управления и противоборства.

ЛИТЕРАТУРА

1. *O'Reilly, T.* What Is Web 2.0. — URL: http://www.oreillynet.com/pub/a/oreilly/ tim/news/2005/09/30/what-is-web-20.html (дата обращения 30. 09. 2005).
2. *The* Internet and the 2008 Election. — URL: http://pewinternet.org/pdfs/ PIP_2008_election.pdf (дата обращения декабрь 2008).
3. *Кричевский Р., Дубовская Е.* Психология малой группы: теоретический и прикладной аспекты. — М.: Изд-во МГУ, 1991.
4. *Майерс Д.* Социальная психология. — СПб.: Питер, 2002.
5. *Watts D., Dodds P.* Influentials, Networks, and Public Opinion Formation // Journal of Consumer Research. — December, 2007. — P. 123—134.
6. *Granovetter M.* Threshold Models of Collective Behavior // The American Journal of Sociology. — 1978. — Vol. 83, N 6. — P. 1420—1443.
7. *Kempe D., Kleinberg J., Tardos E.* Maximizing the Spread of Influence through a Social Network / Proc. of the 9-th ACM SIGKDD Intern. Conf. on Knowledge Discovery and Data Mining, Washington, DC, 2003. — P. 137—146.
8. *Morris S.* Contagion // The Review of Economic Studies. — 2000. — Vol. 67, N 1. — P. 57—78.
9. *Goldenberg J., Libai B., Muller E.* Talk of the network: A complex systems look at the underlying process of word-of-mouth // Marketing Letters. — 2001. — N 2. — P. 11—34.
10. *Rolfe M.* Social networks and threshold models of collective behavior / Preprint. — Chicago: University of Chicago, 2004.
11. *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц. — М.: Наука, 1966.
12. *Кемени Дж., Снелл Дж.* Конечные цепи Маркова. — М.: Наука, 1970.
13. *Губко М.В., Новиков Д.А.* Теория игр в управлении организационными системами. — М.: СИНТЕГ, 2003.
14. *Ширяев А.Н.* Вероятность / В 2-х кн. — М.: МЦНМО, 2004.
15. *Новиков Д.А.* Теория управления организационными системами. — М.: Физматлит, 2007.
16. *Новиков Д.А., Чхартишвили А.Г.* Прикладные модели информационного управления. — М.: ИПУ РАН, 2004.
17. *Доценко Е.Л.* Психология манипуляции: феномены, механизмы и защита. — М.: ЧеРо, 2000.
18. *Почепцов Г.Г.* Информационно-психологическая война. — М.: СИНТЕГ, 2000.
19. *Информационная* безопасность систем организационного управления / Н.А. Кузнецов, В.В. Кульба, Е.А. Микрин и др. — М.: Наука, 2006.
20. *Новиков Д.А., Чхартишвили А.Г.* Рефлексивные игры. — М.: СИНТЕГ, 2003.
21. *Новиков Д.А.* «Когнитивные игры»: линейная импульсная модель // Проблемы управления. — 2008. — № 3. — С. 14—22.
22. *Влияние* и структурная устойчивость в Российском парламенте (1905 — 1917 и 1993 — 2005 гг.) / Ф.Т. Алескеров, Н.Ю. Благовещенский, Г.А. Сатаров и др. — М.: Физматлит, 2007.
23. *Felsenthal D., Machover M.* The measurement of voting power: Theory and practice, problems and paradoxes. — London: Edward Elgar, 1998.
24. *Shapley L.S., Shubik M.* A method for Evaluating the Distribution of Power in a Committee System // American Political Science Review. — 1954. — Vol. 48(3). — P. 787—792.
25. *Тихонов А.Н., Арсенин В.Я.* Методы решения некорректных задач. — М.: Наука, 1986.

Статья представлена к публикации членом редколлегии В.В. Кульбой.

Губанов Дмитрий Алексеевич — аспирант, ☎(495) 334-90-51, ✉ DimaGubanov@mail.ru,

Новиков Дмитрий Александрович — чл.-корр. РАН, д-р техн. наук, зам. директора, ☎(495) 334-75-69, ✉ novikov@ipu.ru,

Чхартишвили Александр Гедеванович — д-р физ.-мат. наук, вед. науч. сотрудник ☎(495) 334-90-51, ✉ sandro_ch@mail.ru,

Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, г. Москва.

УДК 519.711.3:371.214.27

УПРАВЛЕНИЕ ПРОИЗВОДСТВОМ НА ТАКТИЧЕСКОМ УРОВНЕ ПЛАНИРОВАНИЯ В УСЛОВИЯХ НЕЧЕТКОЙ ИСХОДНОЙ ИНФОРМАЦИИ

С.А. Федосеев, А.В. Вожаков, М.Б. Гитман

Рассмотрена модель календарного планирования производства с нечеткими критериями и ограничениями. Модель базируется на применении теории нечетких множеств. В качестве тестового примера рассмотрен реальный календарный план производства продукции на предприятии «ООО «Завод СДМ», г. Пермь.

Ключевые слова: управление производством, программное обеспечение, календарное планирование, нечеткая информация.

ВВЕДЕНИЕ

В условиях рыночных отношений наблюдается тенденция к ужесточению внутриотраслевой конкуренции, когда каждый участник рынка стремится привлечь клиента наиболее выгодным предложением. Таким предложением может быть минимальная цена и (или) минимальные сроки поставки продукции. Для сокращения сроков поставки продукции планирование производства должно быть направлено на обеспечение основных принципов рациональной организации рабочих процессов [1], таких как параллельность, пропорциональность, непрерывность и прямоточность.

1. ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Вся система производственного планирования может быть разделена на три структурных уровня [2].

- Уровень стратегического планирования. На данном уровне осуществляются прогнозирование спроса, фильтрация и отбор поступивших от клиентов заказов, анализируются существующие мощности и бизнес-цели производства. Результат заключается в построении главного календарного плана производства (ГКПП), регламентирующего «что», «к какому сроку» и «в каких количествах» будет выпускаться в плановом периоде [3].
- Уровень тактического планирования. На данном уровне на основе составленного ГКПП с учетом более детальной информации о производственных мощностях строится план-график производства, устанавливающий перечень, очередность и длительность операций на рабочих центрах в течение планового периода.
- Поскольку многие детали реального производственного процесса не рассматриваются или рассматриваются укрупненно на тактическом уровне планирования, необходимо его корректировать и уточнять с учетом постоянно изменяющихся условий. Результат планирования на данном уровне заключается в формировании сменно-суточных заданий.

Особенно остро проблема планирования стоит на тактическом уровне. С момента получения ГКПП до формирования сменно-суточных заданий требуется решить задачу оптимального распределения нагрузки на рабочие центры таким образом, чтобы выполнялось условие реализуемости ГКПП при соблюдении принципов параллельности, пропорциональности, непрерывности и прямоточности производства.

В общемировой практике для решения задач производственного планирования активно используется подход «Планирование ресурсов предприятия» (Enterprise Resource Planning — ERP). Термин ERP означает «финансово ориентированную информационную систему для определения и планирования ресурсов предприятия, необходимых для получения, изготовления, отгрузки и учета заказов потребителей» [4]. Основные недостатки существующих ERP-систем состоят в их повышенных требованиях к точности входных данных и упрощенные линейные представления в используемых математических моделях. Таким образом, существующие ERP-системы пока не обеспечивают решение задач производственного планирования

с учетом различных объективно существующих видов неопределенности (стохастичность, нечеткость).

В данной работе предложена модель планирования производства на тактическом уровне, учитывающая нечеткость критериев оптимизации и ограничений.

Пусть процесс производства осуществляется в нескольких цехах, каждый из которых содержит в себе определенное множество рабочих центров. Все рабочие центры разделены на типы. Типы рабочих центров пронумеруем индексом $k \in \overline{1, E}$, где E — общее число типов рабочих центров. Введем вектор $\bar{q} = (q_1, q_2, ..., q_E)$, где q_k — число рабочих центров k-го типа, имеющихся на производстве. Будем считать, что все q_k рабочих центров k-го типа находятся в одном цехе.

Максимальная загрузка каждого рабочего центра ограничена некоторым числом часов в календарный день, обычно это одна или две смены по 8 ч. Будем измерять время загрузки рабочих центров в сменах и положим, что максимальная загрузка всех рабочих центров k-го типа одинакова и равна t_k^* смен. Если $t_k^* > 1$, то возможны сверхурочные работы. Если учесть, что на практике максимальная загрузка рабочих центров может варьироваться, т. е. является нечеткой, то ее можно определить с помощью нечетких чисел вида

$$Z_k = \{\mu(z_{k1})/z_{k1}; \mu(z_{k2})/z_{k2}; ...; \mu(z_{kv})/z_{kv}\},$$

где z_{kh}, $h = \overline{1, v}$ — число рабочих смен, ограничивающих максимальную загрузку рабочих центров k-го типа, $\mu(z_{kh})$, $h = \overline{1, v}$ — функция принадлежности, которую содержательно можно интерпретировать как степень убежденности экспертов в допустимости такого ограничения.

Спецификации для всех видов готовой продукции заданы, поэтому может быть составлен единый перечень всех номенклатурных единиц от материалов до готовых изделий, включая полуфабрикаты. В этом перечне каждой номенклатурной единице присваивается уникальный номер $i \in \overline{1, C}$, где C — суммарное число уникальных номенклатурных единиц во всех спецификациях. Номенклатурный перечень может быть отсортирован таким образом, чтобы вначале располагались изготавливаемые полуфабрикаты и готовые изделия с номерами $1 \leqslant i \leqslant N$, $N < C$, а затем закупаемые материалы с номерами $N < i \leqslant C$.

Для описания состава изготавливаемых номенклатурных единиц введем матрицу применяемости A. Ее элементы a_{ij} определяют число номенклатурных единиц (компонентов) с номерами $i \in \overline{1, C}$, необходимых для производства номенклатурных единиц с номерами $j \in \overline{1, N}$.

Считается, что задан ГКПП, описывающий план, исходя из номенклатурных позиций независимого спроса (что производить, когда производить, сколько производить). Для описания ГКПП введем матрицу g. Ее элементы g_{id} определяют количество номенклатурных единиц (компонентов) с номерами $i \in \overline{1, C}$, которые необходимо произвести в день с номером $d \in \overline{1, T}$, где T — число дней в плановом периоде.

Технологические маршруты, описывающие способ производства каждой изготавливаемой номенклатурной единицы, считаются заданными. Технологический маршрут содержит информацию об операциях и их последовательности. В данной работе на технологический маршрут накладывается дополнительное ограничение: все операции технологического маршрута должны выполняться на рабочих центрах одного цеха. При этом модель применима и для предприятий, использующих в работе многоцеховые технологические маршруты. Необходимо только разбить такие маршруты на несколько одноцеховых этапов. Для удобства далее будем называть технологические маршруты, выполняемые в рамках одного цеха, *технологическими этапами*.

Для каждой изготавливаемой номенклатурной единицы должен быть определен технологический этап ее изготовления. Чтобы произвести i-ю номенклатурную единицу в количестве n_i, необходимо n_i раз выполнить технологический этап i-го вида. Введем вектор $\bar{n} = (n_1, n_2, ..., n_N)$, где n_i — число запланированных технологических этапов вида $i \in \overline{1, N}$. Фактически данный вектор является разузлованным аналогом ГКПП.

Для каждого технологического этапа определен набор технологических операций (далее *операции*), которые должны быть выполнены, чтобы технологический этап считался завершенным. Таким образом, определен вектор $\bar{w} = (w_1, w_2, ..., w_N)$, где w_i — число операций в технологическом этапе вида $i \in \overline{1, N}$.

Вид операции идентифицируется следующим набором данных: номер операции, номер номенклатурной единицы, тип рабочего центра, трудоемкость. Поэтому общее число видов операций можно определить по формуле $W = \sum_{i=1}^{N} w_i$.

Виды операций пронумеруем индексом $l \in \overline{1, W}$. Все операции можно отсортировать по номеру тех-

нологического этапа, а затем по номеру операции внутри технологического этапа. Введем вектор $\bar{o} = (o_1, ..., o_{w_1}, o_{w_1+1}, ..., o_{w_1+w_2}, ..., o_W)$, где o_l — число операций, которые необходимо выполнить в плановом периоде, $l \in \overline{1, W}$. Также введем последовательность чисел $s_1, ..., s_N$, где s_i определяет значение индекса l для первой операции i-го технологического этапа. Тогда числа s_i могут быть определены по формуле

$$s_i = \begin{cases} 1, i = 1, \\ s_{i-1} + w_{i-1}, i \in \overline{2, N}. \end{cases}$$

Отметим, что значение индекса l для последней операции i-го технологического этапа можно определить следующим образом: $s_i + w_i - 1$.

Примем, что для каждой операции, входящей в состав технологического этапа i-го вида, $o_l = n_i$, где $l \in \overline{s_i, s_i + w_i - 1}$.

Введем вектор трудоемкостей операций $\bar{t} = (t_1, t_2, ..., t_W)$, где t_l — трудоемкость операции l-го вида, выраженная в рабочих сменах, $t_l \in [0; 1]$, $l \in \overline{1, W}$.

Введем вектор $\bar{e} = (e_1, e_2, ..., e_W)$, где $e_l \in \overline{1, E}$, $l \in \overline{1, W}$, который определяет на рабочих центрах тип выполняемой операции l-го вида.

Считается заданным вектор $\bar{r} = (r_1, r_2, ..., r_C)$, где r_i — остаток i-й номенклатурной единицы на цеховых складах на начало планового периода, $i \in \overline{1, C}$.

Известен общий объем операций, которые необходимо оптимальным образом распределить по рабочим сменам и рабочим центрам при соблюдении ограничений. В этом и заключается задача планирования производства на тактическом уровне.

Для описания плана производства введем матрицу P. Ее элементы p_{ld} определяют число операций l-го вида, запланированных на день с номером d, $l \in \overline{1, W}$, $d \in \overline{1, T}$, где T — число дней в плановом периоде, т. е. без нарушения общности предполагается, что предприятие работает в одну смену. Если предприятие работает в две или три смены, то T означает число смен в плановом периоде. Фактически матрица P является планом-графиком производства, поэтому определение ее элементов p_{ld} и будет решением задачи.

Введем также матрицу баланса номенклатурных единиц B. Ее элементы b_{id} определяют число номенклатурных единиц с номерами $i \in \overline{1, C}$, находящихся на цеховых складах на конец дня с номером $d \in \overline{1, T}$. Значение индекса $d = 0$ используется в матрице баланса для определения остатков номенклатурных единиц на начало планируемого периода. Матрица зависит и от ГКПП: в дни, когда запланирован выпуск продукции, происходит автоматическая отгрузка готовой продукции со склада. Элементы матрицы B можно определить следующим образом:

$$b_{id} = \begin{cases} r_i, i \in \overline{1, C}, d = 0, \\ b_{id-1} + p_{s_i+w_i-1, d} - g_{id} - \sum_{j=1}^{N} p_{s_j, d} a_{ij}, \\ \qquad i = \overline{1, N}, d \in \overline{1, T}, \\ b_{id-1} - \sum_{j=1}^{N} p_{s_j, d} a_{ij}, N < i \le C, d \in \overline{1, T}. \end{cases} \quad (1)$$

Здесь учтено предположение о том, что произведенное количество i-й номенклатурной единицы совпадает с числом выполнений последней операции i-го технологического этапа.

Очевидно, что при составлении плана-графика производства должны учитываться следующие ограничения.

- Суммарное число операций одного вида в плане-графике должно быть равно общему числу операций данного вида, которые необходимо выполнить в плановом периоде согласно ГКПП:

$$\sum_{d=1}^{T} p_{ld} = o_l \text{ для всех } l \in \overline{1, W}. \quad (2)$$

- В каждый из планируемых дней максимальная загрузка рабочих центров не должна превышать максимально возможную загрузку:

$$\sum_{l=1}^{W} p_{ld} t_l \beta_{lk} \leqslant t_k^* q_k \text{ для всех } d \in \overline{1, T}, \quad (3)$$

где $\beta_{lk} = \begin{cases} 1, e_l = k, \\ 0, e_l \neq k, \end{cases} \quad l \in \overline{1, W}, k \in \overline{1, E}.$

Максимально возможная загрузка может быть определена нечетко.

В любой момент времени остаток номенклатурных единиц не может быть отрицательным:

$$b_{id} \geqslant 0, \text{ для всех } i \in \overline{1, C}, d \in \overline{0, T}. \quad (4)$$

Введем три основных критерия оптимальности плана-графика производства.

- Критерий комфортности производства, т. е. план-график производства должен быть скомпонован таким образом, чтобы операции одного вида запускались в производство как можно большими

партиями. В этом случае не потребуется переналадка оборудования при переходе от выполнения одной операции к другой. Данный критерий можно представить в виде

$$J_1 = \sum_{l=1}^{W} \sum_{d=1}^{T} \beta_{ld} \to \min, \qquad (5)$$

где $\beta_{ld} = \begin{cases} 1, p_{ld} \neq 0, \\ 0, p_{ld} = 0. \end{cases}$

Здесь учтено вполне очевидное утверждение, что чем большими партиями операции одного вида будут запускаться в производство, тем меньше будет ненулевых элементов p_{ld} матрицы P. Образно говоря, план-график будет нарезан меньшими кусочками, и тем меньше, следовательно, будет сумма булевых переменных β_{ld}.

- Производство должно быть непрерывным, т. е. нагрузка на рабочие центры должна быть как можно ближе к максимальной:

$$J_2 = \sum_{l=1}^{W} \sum_{d=1}^{T} \sum_{k=1}^{E} |p_{ld} t_l \beta_{lk} - t_k^* q_k| \to \min, \qquad (6)$$

где $\beta_{lk} = \begin{cases} 1, e_l = k, \\ 0, e_l \neq k. \end{cases}$

Введение данного критерия обусловлено экономическими соображениями, так как за вынужденные простои рабочие также получают заработную плату

- Срок выполнения ГКПП должен быть минимальным:

$$J_3 = \max_{d \in \overline{1, T}} \tau(d) \to \min, \qquad (7)$$

где $\tau(d) = \begin{cases} d, \sum\limits_{l=1}^{W} \sum\limits_{u=d}^{T} p_{lu} = 0, \\ 0, \sum\limits_{l=1}^{W} \sum\limits_{u=d}^{T} p_{lu} \neq 0. \end{cases}$

При этом ГКПП считается выполненным только в том случае, если все операции завершены, т.е. дата совершения последней операции и будет являться сроком исполнения всего ГКПП.

На основе предложенных частных критериев может быть введен обобщенный критерий оптимальности с использованием расширенного нечеткого множества над частными критериями оптимальности $J^r = \{\mu_1/f_1 J_1;\ \mu_2/f_2 J_2;\ \mu_3/f_3 J_3\}$, где $\mu_i \in [0; 1]$, $i \in \overline{1, 3}$, — экспертная оценка значимости i-го критерия, $f_i \in [0; 1]$, $i \in \overline{1, 3}$, — нормирующие множители. Тогда, используя четкую функцию от нечеткого аргумента $H_+(\cdot)$, предложенную в работе [5], обобщенный критерий оптимальности можно записать в следующем виде

$$J = H_+(J^r) \to \min, \qquad (8)$$

где $H_+(A) = \int_0^1 M(A_\alpha) d\alpha$, A_α — α-уровневое подмножество нечеткого множества A, т. е.

$$A_\alpha = \{a: \mu_A(a) \geqslant \alpha\}; \quad M(A_\alpha) = (a^- + a^+)/2;$$

$$a^- = \inf_{a \in A_\alpha} a; \quad a^+ = \sup_{a \in A_\alpha} a.$$

Таким образом, математическая постановка задачи составления оптимального плана-графика производства может быть сформулирована в следующем виде: найти элементы p_{ld}, $l \in \overline{1, W}$, $d \in \overline{1, T}$, матрицы P, доставляющие минимум одному из частных критериев J_1, J_2 и J_3, определенных выражениями (5)—(7), или обобщенному критерию (8), с учетом ограничений (1)—(4).

2. МЕТОДИКА РЕШЕНИЯ

Ввиду сложности поставленной задачи, ее точное решение для реальных производственных данных не может быть найдено. Поэтому была предложена методика, позволяющая находить календарные планы производства, удовлетворяющие ограничениям задачи и близкие к оптимальным. Методика представляет собой набор алгоритмов, последовательное выполнение которых позволяет отыскать близкий к оптимальному календарный план. Кроме основных входных данных задачи, методика позволяет учитывать приоритетность выполнения конкретных изделий и заказов, позволяя экспертам вносить корректировки в процессе расчета. Данная методика учитывает также все три критерия оптимальности календарного плана, более того, учитывается нечеткое соотношение между критериями, что позволяет учитывать тот или иной критерий с определенным приоритетом.

Нахождение оптимального плана производства состоит из:

— вычисления технологических весов изделий;

— сортировки списка изделий;

— алгоритма «движение к началу периода»;

— алгоритма повышения «комфортности производства».

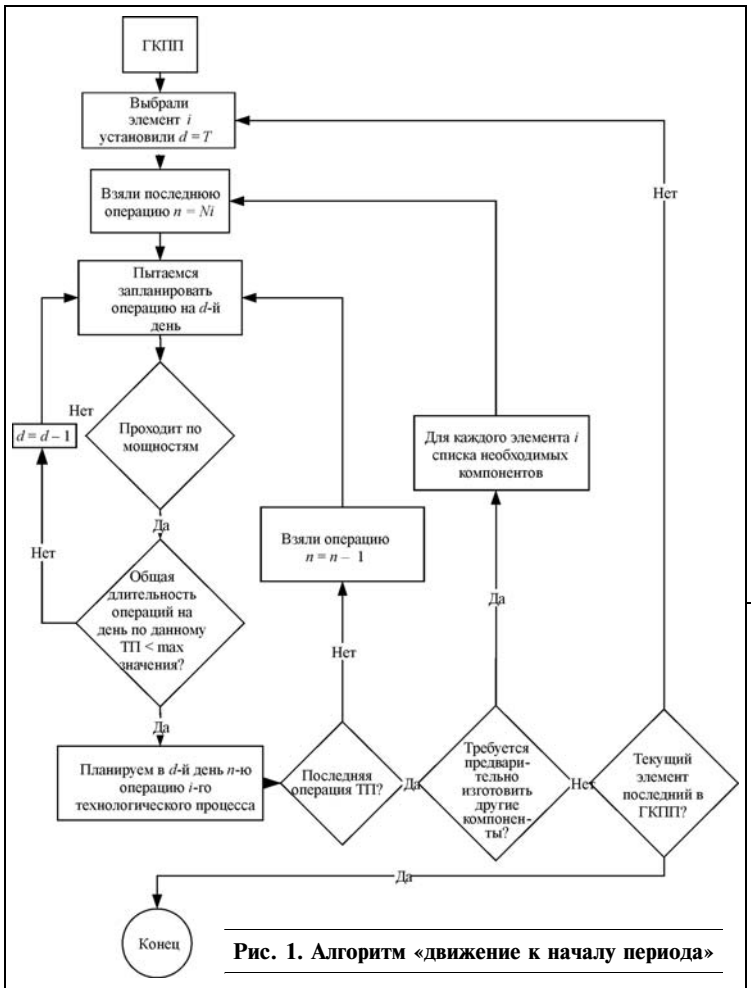


Рис. 1. Алгоритм «движение к началу периода»

Технологическим весом изделия назовем суммарную трудоемкость, требуемую для изготовления изделия. После вычисления технологических весов можно составить таблицу значений элементов, входящих в ГКПП. Для каждого элемента строки данной таблицы известна следующая информация: номенклатурный номер изделия, технологический вес, плановая дата выпуска.

В дальнейшем технологический вес используется исключительно для ранжирования приоритетов изделий, поэтому при необходимости можно менять значения технологических весов изделий в таблице.

С технологическим весом изделия связаны следующие гипотезы:

- если два изделия должны быть выпущены в один день, то первым претендовать на свободные мощности должно изделие с большим технологическим весом;
- если в существующем плане два изделия должны быть по каким-либо причинам быть сдвинутыми относительно друг друга (оптимизация загрузки оборудования и т. п.), то сдвинуто будет изделие с меньшим технологическим весом.

После того, как получена таблица технологических весов изделий, ее необходимо отсортировать по дате выпуска и по убыванию технологического веса.

Для работы данного алгоритма требуется таблица выпуска изделий и входная информация о задаче. В качестве основы работы программного алгоритма был взят эмпирический алгоритм планирования производства «с конца», т. е. строится план из логики «для того, чтобы... нужно...». Последовательно выбираются строки из таблицы выпуска изделий. Затем планируется дата выпуска изделия. После этого планируются все операции, которые необходимо выполнить для выпуска данного изделия. Если изделие состоит из изготавливаемых ком-

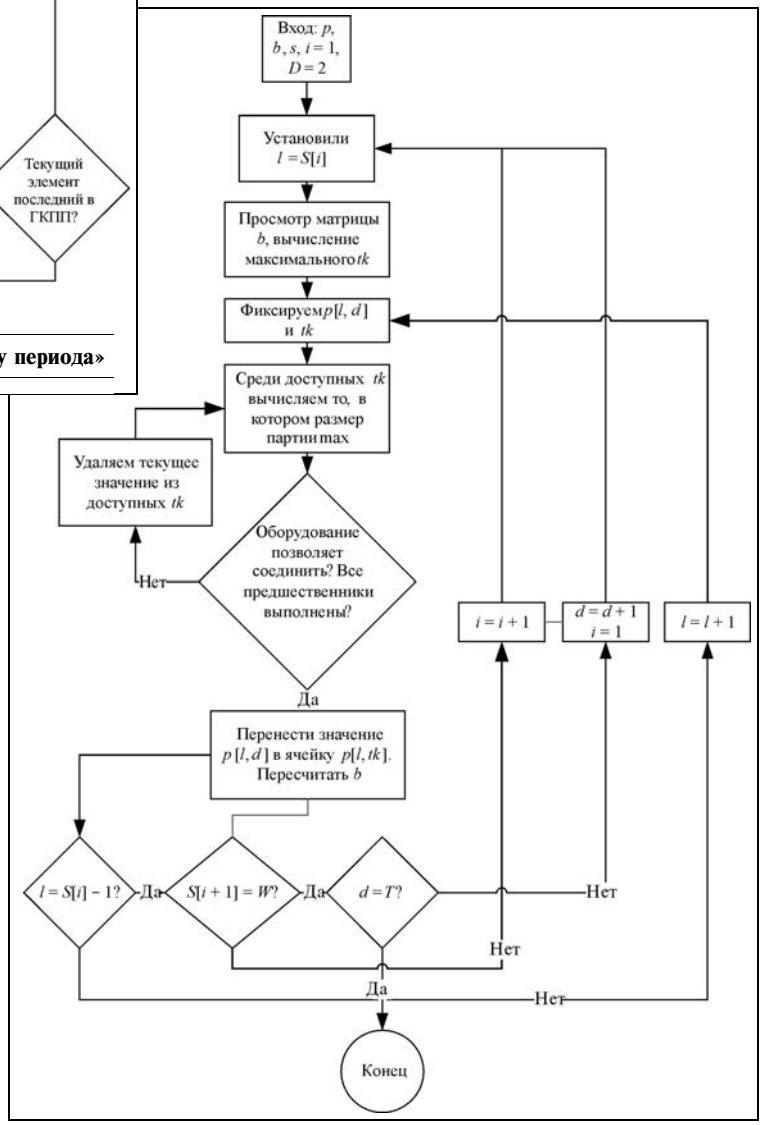


Рис. 2. Алгоритм повышения «комфортности производства»

Таблица 1

Главный календарный план производства

Номер дня	Кол-во
5	10
7	То же
9	—"—
11	—"—
12	20

понентов, то далее необходимо запланировать выпуск этих компонентов. При этом крайним сроком изготовления будет дата выполнения первой операции предыдущего изделия. И так далее. На рис. 1 представлен алгоритм работы модуля планирования. В качестве основного критерия оптимизации в данном алгоритме используется критерий — «максимальная скорость выполнения плана». Таким образом, в результате работы данного алгоритма получаем допустимый план, оптимизированный по данному критерию.

Разработанный алгоритм повышения «комфортности производства» (рис. 2), позволяет не только повысить комфортность производства, но и снизить риски производства. Рассмотрим его подробнее.

Снижение рисков невыполнения плана в установленные сроки достигается путем переноса операций на более ранний период. При этом максимальный запас по времени для операций T_k устанавливается экспертами. Данный параметр определяет максимальное число дней, за которое можно создавать запас.

Комфортность повышается благодаря группировке одинаковых операций по дням, чтобы максимально увеличить партионность и уменьшить число переналадок оборудования. Необходимо сгруппировать одинаковые операции таким образом, чтобы они выполнялись как можно большей партией. В результате получаем план, более устойчивый к рискам, и с улучшенными показателями комфортности производства. Заметим, что эффективность метода сильно зависит от максимального времени запаса, которое устанавливают эксперты и служит параметром данного алгоритма.

3. РЕЗУЛЬТАТЫ

Была разработана автоматизированная система тактического планирования производства (АСТПП), включающая в себя программные модули: импорта данных о структуре продукта и технологии его производства; расчета потребности и составления начальных данных; поиска оптимального календарного плана производства; формирования отчетов.

В качестве тестового примера был взят ГКПП одной номенклатурной единицы — трубы бурильной утяжеленной — с достаточно простой технологией производства (табл. 1).

С помощью АСТПП был найден план-график производства, позволяющий произвести необходимое количество продукции без нарушения сроков выполнения заказов. Так как отгрузка продукции была запланирована с перерывами в день, первоначально было найдено решение, которое позволяет произвести всю необходимую продукцию, не создавая при этом даже промежуточных складских остатков. Для многих предприятий такой план производства будет предпочтительным, особенно для предприятий, стремящихся работать по методике just in time [3]. Однако данный план имеет свои недостатки: неэффективное использо-

Таблица 2

План выполнения технологических этапов по рабочим дням планового периода

Дни	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
До оптимизации													
Цех 1, пункт 4	0	0	0	0	10	0	10	0	10	0	10	20	0
Цех 26, пункт 3	0	0	0	10	0	10	0	10	4	17	20	0	0
Цех 2, пункт 2	0	0	10	0	10	0	10	10	16	13	0	0	0
Цех 1, пункт 1	0	10	0	10	0	10	10	10	10	0	0	0	0
После оптимизации													
Цех 1, пункт 4	0	0	0	10	10	10	10	10	10	0	0	0	0
Цех 26, пункт 3	0	0	10	10	10	10	10	10	0	0	0	0	0
Цех 2, пункт 2	0	15	20	25	30	20	10	0	0	0	0	0	0
Цех 1, пункт 1	50	45	30	15	0	0	0	0	0	0	0	0	0

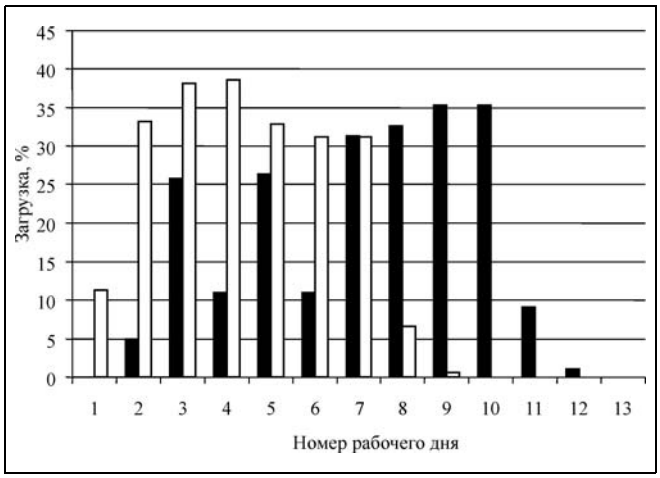


Рис. 3. Диаграмма выполнения технологических этапов по рабочим дням планового периода:
до (■) и после (□) оптимизации

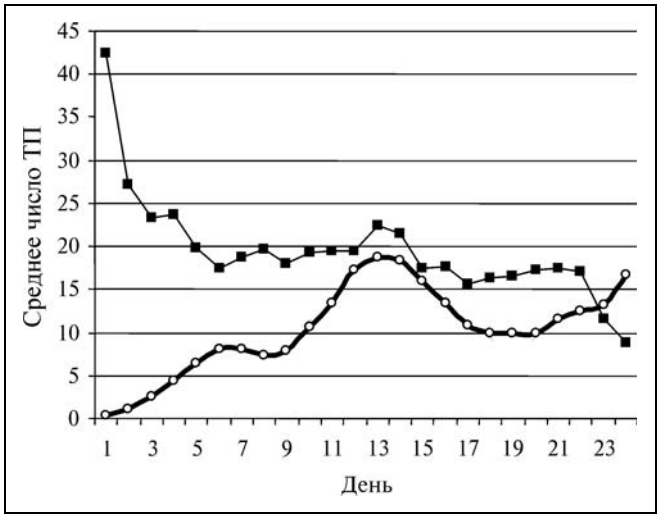


Рис. 4. Распределение технологических процессов по дням:
до (—○—) и после (—■—) оптимизации

вание рабочих мощностей, простои в производстве, низкая скорость выполнения плана, недостаточная комфортность производства.

Поэтому далее найденный допустимый план был оптимизирован с помощью алгоритма повышения комфортности производства. Напомним, что данный алгоритм последовательно переносит операции справа налево, что автоматически ведет к уплотнению производственного графика и к возможному увеличению скорости выполнения плана. В табл. 2 представлены графики выполнения технологических процессов (ТП) по дням. Цифры в ячейках указывают число ТП данного вида, запланированных на данный день. Если ТП выполняется больше одного дня, то он будет учтен несколько раз. Видно, что после оптимизации значительно повысилась степень комфортности производства и скорость выполнения плана.

На рис. 3 изображена диаграмма, отображающая процент загрузки оборудования на каждый рабочий день планового периода. На диаграмме представлены данные плана производства до и после оптимизации. Очевидно, что найденный план производства обеспечивает более качественную загрузку оборудования по сравнению с первоначальным планом, оставляя резерв мощностей в конце периода и перенося основную нагрузку на начало периода.

В качестве примера, демонстрирующего возможности промышленного применения системы, был взят близкий к реальному производственный план предприятия ООО «Завод СДМ», г. Пермь (было взято базовое изделие СМ 15-01 без модификаций, но при этом сильно увеличен объем производства, чтобы убедиться в эффективности работы АСТПП). Расчет проводился на три месяца. Как правило, план производства не бывает выполнен полностью в плановом периоде. К началу периода обычно существует определенный задел деталей и агрегатов, а по завершению месяца также остается незавершенное производство. Поэтому показателен второй месяц.

Приведенный пример показывает, как работает АСТПП в условиях реального производства. Приоритетным был выбран критерий комфортности производства. Добавлено ограничение на досрочный выпуск деталей, агрегатов и изделий в размере десяти рабочих дней, предотвращающее замораживание оборотных средств предприятия. Заданный ГКПП приведен в табл. 3.

С помощью АСТПП был найден допустимый план производства, позволяющий произвести необходимое количество продукции без нарушения сроков выполнения. Найденный допустимый план был оптимизирован с помощью алгоритма повышения комфортности производства. На рис. 4 представлен график выполнения технологических процессов по дням второго месяца производства. На рис. 5 представлена диаграмма, отображающая процент загрузки оборудования в рабочие дни до

Таблица 3

Главный календарный план производства изделия СМ 15-01

Дата выпуска (день от начала планового периода)	Число изделий
22 44 66	50

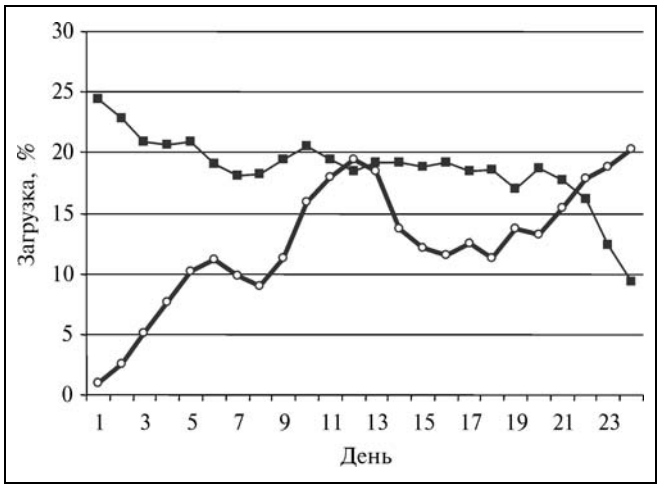


Рис. 5. Средняя загрузка оборудования:
до (—○—) и после (—■—) оптимизации

и после оптимизации допустимого плана производства.

Из приведенных графиков видно, что после оптимизации допустимого плана производства произошли следующие характерные изменения:

— основная нагрузка переместилась к началу периода, что позволяет снизить риски невыполнения плана производства;

— благодаря учету дополнительного ограничения на досрочный выпуск деталей производственный график стал более равномерным;

— в последние дни планового периода нагрузка снижается, что дает возможность оперативно решать возможные производственные проблемы.

Значение критерия комфортности увеличено более чем на 20 % по сравнению с допустимым планом производства.

Для испытания АСТПП была сформирована экспертная группа, состоящая из специалистов в различных областях знаний (информационные технологии, производство, логистика, экономика). Цель работы группы заключалась в оценке уровня адекватности полученных результатов. В процессе ее работы были проанализированы все суточные задания и каждому заданию был присвоен определенный балл (от 1 до 10) в зависимости от качества его составления. По результатам был вычислен средний балл, оценивающий качество разработанного с помощью АСТПП плана производства.

Экспертами установлено, что:

- разработанная АСТПП способна находить планы-графики производства, удовлетворяющие всем производственным ограничениям;
- встроенные средства оптимизации позволяют оптимизировать допустимые планы-графики производства с учетом всех заданных критериев оптимальности;
- дополнительные функции АСТПП позволяют изменять важность критериев оптимальности, реализуя обобщенный критерий в нечеткой постановке;
- наличие в АСТПП возможности снижения рисков невыполнения плана позволяет использовать найденные системой производственные планы без корректировок и поправок на неточность данных;
- качество составления плана производства на данный момент может быть оценено на девять баллов из десяти, что подтверждает эффективность работы АСТПП;
- разработанная АСТПП удовлетворяет всем требованиям заказчика и может быть введена в промышленную эксплуатацию.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Разработанная автоматизированная система позволяет составлять производственные планы-графики, удовлетворяющие всем жестким и нечетким ограничениям задачи тактического планирования производства. Встроенные в данную систему средства оптимизации позволяют оптимизировать допустимые планы производства с учетом всех предложенных критериев оптимизации. Приведенные в статье демонстрационные примеры показывают эффективность применения разработанной методики.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Производственный* менеджмент / Под ред. В.А. Козловского. — М.: Инфра-М, 2003. — 574 с.
2. *Столбов В.Ю., Федосеев С.А.* Модель интеллектуальной системы управления предприятием // Проблемы управления. — 2006. — № 5. — С. 36—39.
3. *Гаврилов Д.А.* Управление производством на базе стандарта MRP II. — СПб.: Питер, 2002.
4. *APICS* Dictionary, 6th ed. — American Production and Inventory Control Society, 1987.
5. *Обработка* нечеткой информации в системах принятия решений. / А.Н. Борисов, А.В. Алексеев, Г.В. Меркурьева и др. — М.: Радио и связь, 1989. — 304 с.

Статья представлена к публикации членом редколлегии А.А. Амбарцумяном.

Федосеев Сергей Анатольевич — канд. физ.-мат. наук, доцент,
✉ fsa@gelicon.biz,

Вожаков Артем Викторович — аспирант,
✉ vozhakov@mz.perm.ru,

Гитман Михаил Борисович — д-р физ.-мат. наук, профессор,
✉ mgitman@netzero.net,

Пермский государственный технический университет,
☎(3422) 239-12-97.

УДК 001.891.57:612.017.1

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ИММУНОЛОГИЧЕСКИМИ РЕАКЦИЯМИ ОРГАНИЗМА ЧЕЛОВЕКА

И.П. Болодурина, Ю.П. Луговскова

Предложена управляемая модель, позволяющая исследовать защитные механизмы организма человека. Поставлена оптимизационная задача, описанная системой нелинейных дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом и разрывной правой частью, и предложен алгоритм её решения. Показано, что предложенная модель и решение оптимизационной задачи позволяют выявить закономерности течения и исход различных форм заболеваний, лучше понять факторы, определяющие характер реагирования иммунной системы на различные антигены, найти оптимальные программы лечения.

Ключевые слова: иммунитет, иммунная система, математическая модель.

ВВЕДЕНИЕ

Математические модели иммунных защитных механизмов организма человека при инфекционных заболеваниях представляют собой системы нелинейных дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом [1—6], позволяющие выявлять характеристики, определяющие течение и исход различных форм заболеваний. Знание закономерностей процессов, происходящих в иммунной системе человека, позволяет управлять улучшением ее работы. Критериями эффективности защиты организма могут быть: уровень смертности, вызванный инфекционными микроорганизмами, тяжесть заболевания или его длительность. К наиболее общим критериям иммунной защиты, рассматриваемым в работе, относятся скорость повреждения организма и энергетическая цена заболевания, для минимизации которых вводится управление иммунной системой путем биостимуляции (введением антигенов, способствующих повышению их концентрации в организме) и иммунотерапии (введением готовых иммуноглобулинов или донорских антител). Для поиска оптимального управления и формирования оптимальной программы лечения инфекционного заболевания предложен вариационный вычислительный метод, позволяющий оперативно дать предварительное заключение об эффективности выбранной стратегии лечения и описать ее воздействие на организм.

1. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ПРОТИВОИНФЕКЦИОННОЙ ЗАЩИТЫ

Исходные принципы математического моделирования иммунного ответа были сформулированы академиком Г.И. Марчуком при построении базовой модели инфекционного заболевания в 1975 г. [1, 3]. Данная модель описывает фундаментальные механизмы иммунной защиты (рис. 1), сформулированные в клонально-селекционной теории Ф. Бернета.

При формировании базовой модели иммунной защиты примем во внимание следующие положения иммунологии:

— в организме предсуществует ненулевой уровень иммунокомпетентных клеток со своими рецепторами — антителами, специфичными ко все-

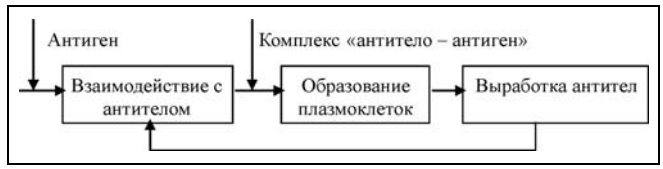


Рис. 1. Простейший механизм иммунной реакции

возможным антигенам, свободно циркулирующим как внутри клеток, так и вне клеток — в лимфе и плазме крови;

— малая доза антигенов, попадая в организм, начинает размножаться в клетках органа-мишени, поражая его;

— часть антигенов сбрасывается в кровь, где сталкивается с рецепторами иммунокомпетентных клеток — с антителами, образуя комплексы «антитело — антиген», поглощающиеся антителообразующими клетками и стимулирующие иммунную систему;

— спустя время τ после стимуляции пропорционально числу комплексов «антитело — антиген» в организме формируются плазматические клетки, вырабатывающие антитела, специфичные к соответствующим антигенам;

— число плазматических клеток и антител уменьшается, помимо описанных причин, из-за их старения;

— число плазматических клеток, образовавшихся в ответ на антигенную стимуляцию, зависит от жизнеспособности поражённого органа: чем больше поражение этого органа, тем меньше выход плазматических клеток из-за возникающей недостаточности, влияющей на активность иммунной защиты;

— процесс регенерации тканей органа-мишени запускается в ответ на повреждение.

В соответствии с этими положениями и представлениями о динамике иммунного ответа введем следующие переменные модели, являющиеся непрерывными функциями: $V = V(t)$ — концентрация размножающихся антигенов (патогенов) в пораженной части органа-мишени, [част./мл]; $C = C(t)$ — концентрация антиген-специфических лимфоцитов (носителей и продуцентов антител) в лимфоидной ткани, [клет./мл]; $F = F(t)$ — концентрация антител (молекул иммунной природы — иммуноглобулинов, рецепторов иммунокомпетентных клеток и др. — нейтрализующих антигены) в крови, [част./мл]; $m = m(t)$ — доля разрушенных антигеном клеток в пораженной части органа-мишени, влияющая на ослабление жизнедеятельности организма в ходе заболевания, связанного с уменьшением активности органов, обеспечивающих поставку иммунологического материала: лейкоцитов, лимфоцитов, антител и др., необходимых для борьбы с размножающимися антигенами.

Математическая модель инфекционного заболевания строится на основе соотношений баланса для каждой из зависимых переменных, в предположении, что «организм» описывается однородным замкнутым объемом, в котором все компоненты процесса равномерно перемешаны. Описывая изменение численности клеточных популяций, участвующих в процессе иммунного ответа на отрезке времени $[t^0, T]$, где $t^0 = 0$ — момент инфицирования, с учетом повреждения и регенерации органов, перейдем к системе нелинейных дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом и разрывной правой частью, записанных в нормальной форме Коши

$$\frac{dV}{dt} = \beta V - \gamma FV,$$

$$\frac{dF}{dt} = \rho C - \eta\gamma FV - \mu_f F,$$

$$\frac{dC}{dt} = \xi(m)\alpha F(t-\tau)V(t-\tau) - \mu_c(C - C^*),$$

$$\frac{dm}{dt} = \sigma V - \mu_m m \qquad (1)$$

с начальными условиями

$$V(0) = V^0, \quad F(0) = F^0, \quad C(0) = C^0, \quad m(0) = m^0 \qquad (2)$$

и фазовыми ограничениями

$$V(t) \geqslant 0, \quad F(t) \geqslant 0, \quad C(t) \geqslant 0, \quad m(t) \geqslant 0, \qquad (3)$$

где $\beta > 0$ — скорость (темп) размножения антигенов; $\gamma > 0$ — коэффициент, учитывающий вероятность встречи вирусов с антителами и силу их взаимодействия; $\alpha > 0$ — коэффициент стимуляции иммунной системы; $\rho > 0$ — скорость производства антител одной плазмоклеткой; μ_c, $\mu_f > 0$ — величины, обратные продолжительности жизни плазмоклеток и антител соответственно; $\eta > 0$ — число антител, необходимое для нейтрализации одного вируса; $\sigma > 0$ — скорость (темп) поражения органа; $\mu_m > 0$ — скорость восстановления массы пораженного органа; $C^* > 0$ — предсуществующий уровень иммунокомпетентных клеток (плазмоклеток); $\tau > 0$ — время, необходимое для формирования каскада плазмоклеток; $\xi(m)$ — невозрастающая неотрицательная функция, учитывающая нарушение нормальной работы иммунной системы вследствие значительного поражения органа

$$\xi(m) = \begin{cases} 1, & 0 \leq m < 0{,}1, \\ (1-m)\dfrac{10}{9}, & 0{,}1 \leq m \leq 1. \end{cases}$$

Модель (1)—(3) описывает общие закономерности, присущие всем инфекционным заболеваниям. Фактически эта модель определяет вид зависимости тяжести и исхода инфекции от характеристик иммунитета и свойств антигена.

Значения параметров модели (1)—(3) (табл. 1) определены согласно соотношениям, полученным в работе [3], на основе качественного исследования базовой модели иммунного ответа и уточнены

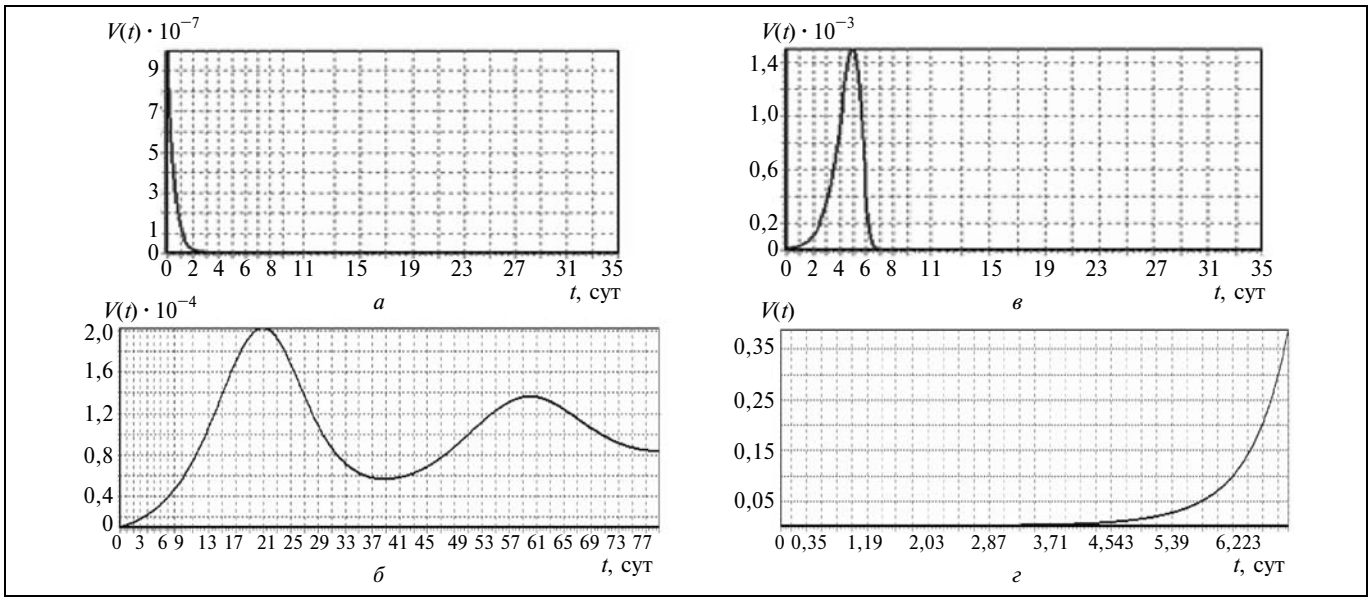


Рис. 2. Динамика изменения концентрации антигенов $V(t)$ при различных формах заболевания:
а — субклиническая; *б* — хроническая; *в* — острая; *г* — с возможным летальным исходом

в ходе вычислительных экспериментов по настройке модели на данные обобщенной картины заболевания. Часть параметров модели (μ_f, μ_c, ρ) определяются из известных медицинских данных,

Таблица 1

Значения параметров модели противоинфекционной защиты при различных формах заболевания

Параметр	Значения при различных формах заболевания				Размерность
	Субклиническая	Острая	Хроническая	Летальный исход	
β	8	2	1	2	сут^{-1}
γ	10	0,8			$\frac{\text{мл}}{\text{част.} \cdot \text{сут}}$
α	10 000		1000	10 000	$\frac{\text{клет.} \cdot \text{мл}}{\text{част.} \cdot \text{молек.} \cdot \text{сут}}$
μ_c ρ η	0,5 0,17 10				сут^{-1} $\frac{\text{молек.}}{\text{клет.} \cdot \text{сут}}$ молек./част.
μ_f σ	0,17 10			0,5 700	сут^{-1} $\frac{\text{мл}}{\text{част.} \cdot \text{сут}}$
μ_m C^* τ	0,12 1 0,5				сут^{-1} клет./мл сут

часть остаются «свободными», что дает возможность добиться достаточно хорошего совпадения теоретических кривых с соответствующими экспериментальными зависимостями, определяющими вид заболевания и иммунный статус больного.

Модель (1)—(3) допускает два устойчивых типа стационарных решений. Первое решение $V(t) = 0$, $F(t) = F^*$, $C(t) = C^*$, $m(t) = 0$ интерпретируется как состояние здорового организма, где F^*, C^* соответствуют иммунологическому статусу здорового человека. Второе решение, которое характеризуется достаточно малым ненулевым числом антигенов в условиях достаточно сильной иммунной системы, интерпретируется как вялая хроническая форма заболевания.

Исследование характера изменения концентрации антигенов, полученного при интегрировании уравнений модели иммунного ответа (1) с учетом начальных данных (2), уровень концентрации которых служит основным показателем динамики болезни и работоспособности иммунной системы, позволило выделить четыре качественно различных типа нестационарных решений, интерпретируемых как четыре основные формы протекания инфекционного заболевания: субклиническая форма, острая форма с выздоровлением, острая форма с летальным исходом, хроническая форма. При этом достижение множества состояний, при которых $V(t) \leqslant \delta$, где $\delta > 0$ — достаточно малое число, интерпретируется в рамках модели как выздоровление.

На рис. 2 представлена динамика изменения концентрации антигенов, отражающая естествен-

ное течение различных форм заболеваний. Результаты получены в ходе качественного и численного анализа протекания первичного инфекционного заболевания на интервале $T = 100$ сут при начальных условиях $V(0) = 10^{-6}$, $C(0) = 1$, $F(0) = 1$, $m(0) = 0$ в зависимости от значений параметров (см. табл. 1).

2. ФОРМИРОВАНИЕ УПРАВЛЯЕМОЙ МОДЕЛИ

Знание закономерностей иммунного ответа на возникновение заболевания позволяет управлять иммунной системой в целях улучшения ее работы. В качестве управления, регулирующего интенсивность процессов иммунного ответа и способствующего ускоренному восстановлению пораженных органов и тканей, выступают используемые при лечении средства — внешнее управление, а также вырабатываемые самим организмом различные гормоны и медиаторы — внутреннее управление.

На основе базовой модели инфекционного заболевания (1) построим управляемую модель, исходя из следующих предположений:

— управлением в модели является применение при лечении медицинских препаратов, т. е. осуществляется внешнее управление путем введения дополнительных членов в правые части уравнений модели (1).

— определенный вид управления характерен для конкретной формы заболевания.

Остановимся на поиске выбора корректного управления для определенной формы заболевания.

Для управления функционированием иммунной системы при хронических формах заболеваний применяется биостимуляция, основанная на введении непатогенных, неразмножающихся антигенов. В результате введения управляющей функции $u_1(t)$ модель, определяющая поведение иммунной системы, состоит из уравнений, полученных в результате модификации системы (1) путем добавления трех дифференциальных уравнений, отражающих характер процесса лечения:

$$\frac{dV_1}{dt} = -\gamma_1 F_1 V_1 + u_1,$$

$$\frac{dF_1}{dt} = \rho_1 C_1 - \eta_1\gamma_1 F_1 V_1 - \mu_{f1} F_1,$$

$$\frac{dC_1}{dt} = \frac{F_1 V_1}{FV + F_1 V_1}\alpha_1 F_1(t-\tau)V_1(t-\tau) - \mu_{c1}(C_1 - C_1^*),$$

где управление $u_1 = u_1(t)$ характеризует интенсивность введения биостимуляторов $V_1 = V_1(t)$; переменные $F_1 = F_1(t)$, $C_1 = C_1(t)$ описывают иммунную реакцию организма на биостимулятор.

Эффективность лечения острых форм заболеваний и заболеваний с возможным летальным исходом достигается с помощью иммунотерапии $u_2(t)$, основанной на введении готовых иммуноглобулинов или донорских антител, которые позволяют изменить динамику болезни в пользу выздоровления. В результате введения управляющей функции $u_2(t)$ модель, определяющая поведение иммунной системы, состоит из уравнений (1) с учетом модификации динамики функции $F(t)$, которая, отражая характер процесса лечения, может быть описана уравнением

$$\frac{dF}{dt} = \rho C - \eta\gamma FV - \mu_f F + u_2.$$

Таким образом, управляемая модель динамики иммунной защиты организма описывается системой дифференциальных уравнений

$$\frac{dV}{dt} = (\beta - \gamma F)V,$$

$$\frac{dF}{dt} = \rho C - \eta\gamma FV - \mu_f F + u_2,$$

$$\frac{dC}{dt} = \xi(m)\alpha F(t-\tau) - \mu_c(C - C^*),$$

$$\frac{dV_1}{dt} = -\gamma_1 F_1 V_1 + u_1, \qquad (4)$$

$$\frac{dF_1}{dt} = \rho_1 C_1 - \eta_1\gamma_1 F_1 V_1 - \mu_{f1} F_1,$$

$$\frac{dC_1}{dt} = \alpha_1 \frac{F_1 V_1}{FV + F_1 V_1} F_1(t-\tau)V_1(t-\tau) - \mu_{c1}(C_1 - C_1^*),$$

$$\frac{dm}{dt} = \sigma V - \mu_m m,$$

с начальными условиями

$$V(0) = V^0, \quad F(0) = F^0, \quad C(0) = C^0, \quad V_1(0) = V_1^0,$$
$$F_1(0) = F_1^0, \quad C_1(0) = C_1^0, \quad m(0) = m^0 \qquad (5)$$

и фазовыми ограничениями

$$V(t) \geqslant 0, \quad F(t) \geqslant 0, \quad C(t) \geqslant 0, \quad V_1(t) \geqslant 0,$$
$$F_1(t) \geqslant 0, \quad C_1(t) \geqslant 0, \quad m(t) \geqslant 0, \qquad (6)$$

где функции управления $u_1(t)$ и $u_2(t)$ характеризуют скорость введения биостимуляции и реализации иммунотерапии в единицу времени соответственно и удовлетворяют ограничениям

$$0 \leqslant u_i(t) \leqslant b_i, \quad i = 1, 2, \quad t \in [0, T], \qquad (7)$$

Таблица 2

Компоненты функционала расхода энергии в организме на взаимодействие с антигенами

Компоненты	Описание
$E_1 = LN_S T(\omega_1 + e_2\mu_c)C^*$	Энергетическая цена образования и поддержания лимфоцитов
$E_2 = L_2 e_2 \alpha \int_0^T F(t-\tau)V(t-\tau)dt$	Энергетическая цена иммунного ответа
$E_3 = L_1 e_3 \mu_m m_1 \int_0^T m dt$	Энергетическая цена регенерации клеток органа-мишени
$E_4 = \omega_2 \int_0^T m dt$	Потери энергии вследствие нарушения гомеостаза
$E_5 = L_1 e_1 \beta \int_0^T V(t)dt$	Энергетическая цена образования патогенных частиц в организме
$E_6 = L_2 \omega_1 \int_0^T (C - C^*)dt$	Энергетическая цена функционирования клеток, образовавшихся в результате иммунного ответа

где $b_i > 0$, $i = 1, 2$ — максимальное число людей, подверженных биостимуляции, иммунотерапии в единицу времени, зависящее от ограниченных технических и финансовых средств.

3. ВЫБОР КРИТЕРИЯ КАЧЕСТВА МОДЕЛИ

Для исследования закономерностей противоинфекционной защиты воспользуемся вариационным принципом и предположим, что среди допустимых вариантов иммунной защиты организма реализуются те, которые минимизируют среднюю скорость его повреждения и суммарные расходы энергии на взаимодействие с инфекционными антигенами за фиксированное время T:

$$I = \frac{1}{T}\int_0^T \sigma V(t)dt + \sum_i E_i \to \min, \qquad (8)$$

где $\sigma > 0$ — скорость (темп) поражения организма; E_i, $i = \overline{1, 6}$ — компоненты расхода энергии организмом на взаимодействие с патогенными микроорганизмами, выражения которых приведены в табл. 2.

Для вывода этих выражений применен подход, изложенный в работах [5, 6]. Суммарный расход энергии организмом на взаимодействие с инфекцией состоит из затрат энергии на образование новых клеток в процессе иммунной защиты, на регенерацию органа-мишени, а также на поддержание уже существующих клеток иммунной системы.

Оценки значений параметров расхода энергии (табл. 3) получены для процессов противоинфекционной защиты легких [5, 6]. Значения параметров могут содержать погрешности, связанные с ошибками определения объема клеток, расхода АТФ на высвобождение энергии, потребления клетками энергии в норме, а также возможным изменением этих значений в динамике инфекционного процесса. Считается, что каждый из упомянутых факторов вносит неопределенность относительно базовых значений параметров.

4. НЕОБХОДИМОЕ УСЛОВИЕ ОПТИМАЛЬНОСТИ И ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ИММУННЫМ ОТВЕТОМ

В оптимизационной задаче (4)—(8) система дифференциальных уравнений (4) представляет собой

Таблица 3

Величины параметров оценки расхода энергии и мощности процессов противоинфекционной защиты легких и некоторые характеристики организма

Параметр	Значение	Физический смысл параметра
e_1	$4 \cdot 10^{-10}$ Дж	Энергетическая цена образования одного антигена
e_2	$2{,}6 \cdot 10^{-9}$ Дж	Энергетическая цена образования одного лимфоцита
e_3	$2{,}7 \cdot 10^{-8}$ Дж	Энергетическая цена образования одной клетки органа-мишени
ω_1	$3 \cdot 10^{-13}$ Вт	Мощность, затрачиваемая на поддержание одного лимфоцита
ω_2	100 Вт	Потери энергии в результате нарушения гомеостаза
L	1000 мл	Объем лимфоидной ткани организма
L_1	300 мл	Объем части органа–мишени, в которой развивается заболевание
L_2	15 мл	Объем лимфоидной ткани, дренирующей орган-мишень (легкие)
N_S	10^6	Число различных специфичностей лимфоцитов в организме
m_1	$1{,}3 \cdot 10^8$ клет./мл	Нормальная концентрация клеток органа-мишени

систему с разрывной правой частью и с запаздывающим аргументом, общий вид которой

$$\dot{x}(t) = \begin{cases} f_1(t, x(t), x(t-\tau), u(t)), S(t, x) < 0, \\ f_2(t, x(t), x(t-\tau), u(t)), S(t, x) \geq 0, \end{cases}$$

где $x = (V, F, C, m, V_1, F_1, C_1)$ — абсолютно-непрерывная на отрезке $[0, T]$ вектор-функция состояния, $u = (u_1, u_2)$ — кусочно-непрерывная на отрезке $[0, T]$ вектор-функция управления. Поверхность переключения $S(t, x)$ — непрерывно дифференцируемая по совокупности аргументов скалярная функция, имеющая вид $S(t, x) = S(x) = m - m^*$, где $m^* = 0{,}1$ — предельный уровень поражения, при котором еще возможна нормальная работа иммунной системы. Рассмотрим случай однократного «протыкания» траекторией поверхности переключения в точке τ_α, где τ_α — момент переключения, т. е. точка, в которой $S(x(\tau_\alpha)) = 0$.

Для построения оптимального управления применен принцип максимума Понтрягина. Так как в задаче имеются фазовые ограничения (6), то обеспечим их выполнение путем введения штрафного слагаемого в функционал (8) и перейдем к последовательности задач, в которой отсутствуют фазовые ограничения, а функционал имеет вид

$$I = \frac{1}{T}\int_0^T \sigma V(t)dt + \sum_i E_i + A, \qquad (9)$$

где $A = A_k \int_0^T [(\max\{-V, 0\})^2 + (\max\{-C, 0\})^2 + (\max\{-F, 0\})^2 + (\max\{-m, 0\})^2 + (\max\{-V_1, 0\})^2 + (\max\{-C_1, 0\})^2 + (\max\{-F_1, 0\})^2]dt$, $k = 1, 2, \ldots$, $A_k > 0$, $\lim\limits_{k\to\infty} A_k = \infty$, A_k — параметры штрафа.

Функция Понтрягина для задачи (4), (5), (7) и (9) имеет вид

$$H(t, x(t), x(t-\tau), u(t), \psi(t), \lambda_0) = \begin{cases} H_1(t, x(t), x(t-\tau), u(t), \psi_1(t), \lambda_0), S(x) < 0, \\ H_2(t, x(t), x(t-\tau), u(t), \psi_2(t), \lambda_0), S(x) \geq 0, \end{cases}$$

где $H_i(t, x(t), x(t-\tau), u(t), \psi_i(t), \lambda_0) = -\lambda_0\Big[\Big(\frac{1}{T}\sigma V(t) + L_2 e_2 \alpha F(t-\tau)V(t-\tau) + L_1 e_3 \mu_m m_1 m + \omega_2 m + L_1 e_1 \beta V(t) + L_2\omega_1(C - C^*) + A_k((\max(-V(t), 0))^2 + (\max(-F(t), 0))^2 + (\max(-C(t), 0))^2 + (\max(-m(t), 0))^2 + (\max(-V_1(t), 0))^2 + (\max(-F_1(t), 0))^2 + (\max(-C_1(t), 0))^2\Big)\Big] + (\psi_i(t), f_i(t, x(t), x(t-\tau), u(t)))$, $i = 1, 2$, $k = 1, 2, \ldots$, $A_k > 0$, $\lim\limits_{k\to\infty} A_k = \infty$.

Функция $\psi(t) = (\psi_1(t), \psi_2(t))$ — сопряженная вектор-функция, определенная на промежутке $[0, \tau_\alpha] = T_1$ или $[\tau_\alpha, T] = T_2$ соответственно, непрерывная и почти всюду непрерывно дифференцируемая на этих отрезках.

Воспользовавшись принципом максимума Понтрягина, сформулируем теорему о необходимых условиях оптимальности для задачи оптимального управления (4)—(8) с разрывной правой частью и запаздывающим аргументом.

Теорема. *Пусть процесс* $\bar{\omega} = (\bar{x}(t), \bar{x}(t-\tau), \bar{u}(t), \tau_\alpha)$, *где* τ_α *— точка переключения, является оптимальным в задаче* (4), (5), (7) *и* (9). *Тогда с необходимостью существует множитель* $\lambda_0 \geqslant 0$ *и неравные одновременно нулю функции* $\psi_1(t)$ *и* $\psi_2(t)$ *такие, что выполняются следующие условия:*

1) *оптимальное управление* $\bar{u}(t) = (\bar{u}_1(t), \bar{u}_2(t))$, $t \in [0, T]$, *во всех точках непрерывности доставляет максимум функции Понтрягина* $H_i(t, \bar{x}(t), \bar{x}(t-\tau), u(t), \psi_i(t), \lambda_0)$ *по всем* $0 \leqslant u(t) \leqslant b$, *где* $b = (b_1, b_2)$, *т. е.*

$$H_i(t, \bar{x}(t), \bar{x}(t-\tau), \bar{u}(t), \psi_i(t), \lambda_0) = \max_{0 \leq u(t) \leq b} H_i(t, \bar{x}(t), \bar{x}(t-\tau), u(t), \psi_i(t), \lambda_0), \quad i = 1, 2;$$

2) *сопряженные вектор-функции* $\psi_i(t)$, $i = 1, 2$, *удовлетворяют системе дифференциальных уравнений*

$$\dot{\psi}_i(t) = -\frac{\partial H_i(t, \bar{x}(t), \bar{x}(t-\tau), \bar{u}(t), \psi_i(t), \lambda_0)}{\partial x} - \frac{\partial H_i(t+\tau, \bar{x}(t+\tau), \bar{x}(t), \bar{u}(t+\tau), \psi_i(t+\tau), \lambda_0)}{\partial x},$$

$$i = 1, 2, \quad t \in [0, T],$$

$$\psi_i(t) \equiv 0, \; i = 1, 2, \; t > T;$$

3) *условие трансверсальности*

$$\psi_2(T) = 0;$$

4) *условия допустимости* (4) *и* (7);

5) *в точке* τ_α *пересечения траекторией поверхности переключения выполняется условие скачка сопряженной вектор-функции*

$$\psi_1(\tau_\alpha - 0) = \psi_2(\tau_\alpha + 0) + \lambda\frac{\partial S(\bar{x}(\tau_\alpha))}{\partial x}; \; S(\bar{x}(\tau_\alpha)) = 0,$$

$$H_1(\tau_\alpha - 0) = H_2(\tau_\alpha + 0),$$

$$\lambda = [(f_2(\tau_\alpha, \bar{x}(\tau_\alpha), \bar{x}(\tau_\alpha - \tau), \bar{u}(\tau_\alpha + 0)) - f_1(\tau_\alpha, \bar{x}(\tau_\alpha), \bar{x}(\tau_\alpha - \tau), \bar{u}(\tau_\alpha - 0)), \psi_2(\tau_\alpha))]/$$

$$\left[\left(\frac{\partial S(\tau_\alpha, \bar{x}(\tau_\alpha))}{\partial x}, f_1(\tau_\alpha, \bar{x}(\tau_\alpha), \bar{x}(\tau_\alpha - \tau), \bar{u}(\tau_\alpha - 0)\right)\right],$$

где λ *— размер скачка в точке* τ_α. ♦

Так как функция Понтрягина линейна по управлению, то введем функции переключения: $\varphi_i^1 = \psi_i^4$, $\varphi_i^2 = \psi_i^2$, $i = 1, 2$.

Из условия максимума функции Понтрягина находим оптимальное управление

$$\bar{u}_k = \begin{cases} 0, \varphi_i^k < 0, \\ b_k, \varphi_i^k > 0, \\ \in [0, b_k], \varphi_i^k = 0. \end{cases} \qquad k = 1, 2, \quad i = 1, 2,$$

Таким образом, имеем краевую задачу принципа максимума Понтрягина, замкнутую управлением $\bar{u}_k$, $k = 1, 2$.

Для решения краевой задачи принципа максимума Понтрягина применен метод множителей Лагранжа, основанный на сведении исходной непрерывной задачи оптимального управления (4)—(8) к дискретной задаче. Для реализации численного алгоритма получены условия стационарности функции Лагранжа и условия дополняющей нежесткости, которым с необходимостью удовлетворяет оптимальный процесс. Для поиска оптимальных динамических траекторий и оптимального управления программно реализован алгоритм, основанный на методе проекции градиента, позволяющий получить численные результаты решения поставленной задачи.

5. ОПТИМАЛЬНЫЕ ПРОГРАММЫ ЛЕЧЕНИЯ

Суммарный энергетический минимум и скорость повреждения организма зависят от характеристик иммунной системы, определяющих различные формы заболевания. Наиболее серьезную медицинскую проблему представляют острые и хронические формы заболевания, так как в отличие от субклинической формы, они наносят больший вред организму и ведут к большим затратам энергетического резерва. Так, при острой форме заболевания средняя скорость повреждения организма при параметрах модели (1)—(3), представленных в табл. 1, равна $3{,}3 \cdot 10^{-4}$ сут$^{-1}$, а расход энергии составляет 16 535 Дж; при хронической форме средняя скорость повреждения организма — 0,001 сут$^{-1}$, а расход энергии — 22 666 Дж.

На рис. 3 представлены результаты реализации алгоритма, состоящего в построении оптимальных управлений $u_1(t)$ при хронической форме заболевания и $u_2(t)$ при острой форме заболевания, $t \in [0, T]$, минимизирующих функционал (8) при ограничениях (4)—(7). Интегрирование проводилось на отрезке времени, равном 100 сут, при параметрах, представленных в табл. 1, с начальными условиями: $V(0) = 10^{-6}$; $C(0) = 1$; $F(0) = 1$; $m(0) = 0$; $V_1(0) = 0$; $C_1(0) = 1$; $F_1(0) = 1$ ($\gamma_1 = 0{,}5$; $\alpha_1 = 80$; $\mu_{f1} = 0{,}17$; $\rho_1 = 0{,}17$; $\mu_{c1} = 0{,}5$; $\eta_1 = 20$); $b_1 = 10^{-2}$ при хронической форме заболевания и $V(0) = 10^{-6}$; $C(0) = 1$; $F(0) = 1$; $m(0) = 0$; $b_2 = 5$ при острой форме заболевания.

Результаты расчетов показали, что при иммунотерапии максимум концентрации антигенов почти в 1000 раз меньше, чем без неё, и находится почти на уровне начальной концентрации антигенов, что облегчает ход острой формы заболевания (см. рис. 2), сводя его практически к субклинической форме (см. рис. 3). Продолжительность заболевания снизилась с 8 до 3 сут. При этом значение функционала (8) 13 015, полученное в результате лечения острой формы заболевания с помощью иммунотерапии (см. рис. 3), меньше, чем при естественном течении данной формы заболевания (см. рис. 2). Это подтверждает положительный результат влияния лекарственного препарата, применять который необходимо с самого начала заболевания.

Выздоровление при хронической форме (см. рис. 2) наступает в результате обострения заболевания (см. рис. 3), что приводит за указанный временной промежуток к увеличению значения функционала (8). Результаты расчетов показали, что значение средней скорости повреждения организма при хронической форме заболевания уменьшается за более продолжительный период исследования. Увеличение энергетического критерия оптимальности с увеличением периода исследования при хронической форме заболевания показывает, что при определенных условиях с энергетической точки зрения организму «выгоднее» болеть, чем избавляться от инфекции.

Уменьшение параметра γ_1 ($\gamma_1 = 0{,}01$), который отражает вероятность нейтрализации биостимулятора антителами, моделирует случай летального исхода болезни. Таким образом, для биостимуляции должен применяться обладающий необходимым качеством препарат, что требует особого внимания к данной программе лечения.

Использование биостимуляции помогает перевести хроническую форму заболевания в острую, течение которого облегчается с помощью иммунотерапии. Одновременная реализация биостимуля-

ции и иммунотерапии при хронической форме заболевания не только способствует выздоровлению, но и позволяет значительно облегчить ход заболевания, сводя его к субклинической форме.

Численное решение поставленной задачи оптимального управления иммунным ответом позволяет не только находить управления, удовлетворяющие необходимым условиям оптимальности, но и исследовать чувствительность оптимального решения к малым изменениям параметров управления. Так, уменьшение параметра управления b_2, отражающего скорость реализации иммунотерапии при острых формах заболеваний, приводит к увеличению продолжительности заболеваний и курса лечения, что нежелательно. Малые значения параметра управления b_1, отражающего скорость введения биостимулятора при хронических формах заболеваний, по отношению к концентрации

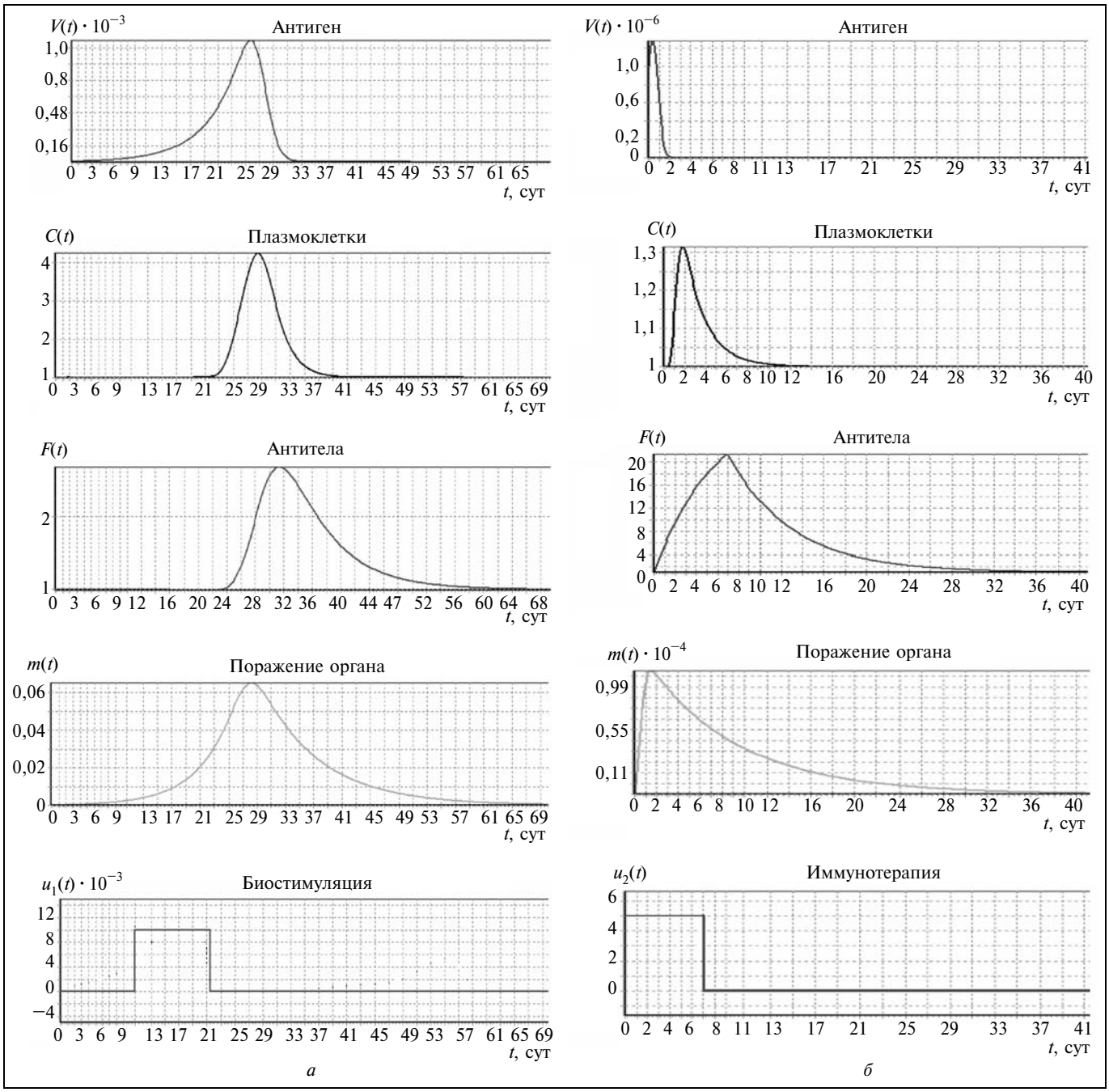


Рис. 3. Результаты оптимизации лечения хронических форм заболевания с помощью биостимуляции (*а*) и острых форм заболевания с помощью иммунотерапии (*б*)

Таблица 4

Сравнительные данные программ лечения

Форма заболевания, ее графики	Объем введения биостимулятора, част./мл	Объем введения антител для иммунотерапии, част./мл	Средняя скорость повреждения организма, сут$^{-1}$	Энергетическая цена противоинфекционной защиты, Дж	Время полного выздоровления, сут
Субклиническая, рис. 2	0	0	$5{,}5 \cdot 10^{7}$	13 007	5
Острая, рис. 2			$3{,}3 \cdot 10^{-4}$	16 535	8
Хроническая, рис. 2			000,1	22 666	Выздоровление не наступает
Острая, рис. 3		5	$1{,}3 \cdot 10^{-6}$	13 015	3
Хроническая, рис. 3	10^{-2}	0	0,0014	27 072	49

возбудителей хронической инфекции, способствует тому, что выздоровление не наступает, и программа лечения теряет смысл.

Количественные оценки обсуждаемых программ лечения приведены в табл. 4. Численные данные, полученные математическими методами, переведены на язык медицинских критериев эффективности лечения, главные из которых средняя скорость повреждения организма, энергетическая цена противоинфекционной защиты и время полного выздоровления.

Рассмотренные программы лечения, полученные путем численной реализации алгоритмов оптимизации, приводят к результатам, которые допускают содержательную интерпретацию и не противоречат имеющимся фактическим данным. Анализ табл. 4 показывает, что время болезни при рациональном лечении снижается, при этом за более продолжительный период исследования наблюдается уменьшение и средней скорости повреждения организма. Увеличение энергетического критерия оптимальности при хронической форме заболевания показывает, что при определенных условиях с энергетической точки зрения организму «выгоднее» болеть, чем избавляться от инфекции, что подтверждает догадку российских ученых, что иммунная защита энергетически выгодна организму лишь в определенных пределах.

Результаты расчетов значений суммарных затрат энергии на отрезке времени [0, 100 сут] показали, что основная часть энергетической цены (примерно 90 %) приходится на потери энергии вследствие создания новых иммунных клеток и поддержания в активном состоянии уже существующих.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Полученные результаты свидетельствуют о том, что построенная управляемая математическая модель может быть с успехом использована для количественной оценки тяжести процесса заболевания, суммарных расходов энергии на инфекционное заболевание, прогноза его течения и обоснования наиболее эффективных программ лечения. Анализ данной модели позволил систематизировать и объяснить различные накопленные иммунологами и клиницистами факты, касающиеся механизмов протекания инфекционных заболеваний. Построение моделей конкретного заболевания потребует, с одной стороны, большей детализации процесса, а с другой — широкого привлечения клинико-лабораторных данных для идентификации параметров модели. Но при этом закономерности, полученные в рамках исследованной управляемой модели, сохранятся.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Белых Л.Н.* Анализ математических моделей в иммунологии. — М.: Наука, 1988. — 190 с.
2. *Дасгупт Д.* Искусственные иммунные системы и их применение. — М.: Физматлит, 2006. — 343 с.
3. *Марчук Г.И.* Математические модели в иммунологии. — М.: Наука, 1991. — 300 с.
4. *Погожев И.Б.* Применение математических моделей заболеваний в клинической практике. — М.: Наука, 1988. — 190 с.
5. *Романюха А.А., Каркач А.С.* Индивидуально-ориентированная модель динамики инфекционного процесса в неоднородной популяции // Математическое моделирование. — 2003. — Т. 15, № 5. — С. 95—105.
6. *Романюха А.А., Руднев С.Г.* Вариационный принцип в исследовании противоинфекционного иммунитета на примере пневмонии // Там же. — 2001. — Т. 13, № 8. — С. 65—84.

Статья представлена к публикации членом редколлегии В.Н. Новосельцевым.

Болодурина Ирина Павловна — д-р техн. наук, профессор, ☎(3532) 34-05-36, ✉ prmat@mail.osu.ru,

Луговскова Юлия Петровна — аспирант, ✉ ulia_lugovskova@inbox.ru,

Оренбургский государственный университет.

УДК 621.9;621.789

ОПТИМИЗАЦИЯ ТЕМПЕРАТУРНЫХ РЕЖИМОВ ЭЛЕКТРОДОВ ПЛАЗМОТРОНОВ МЕТОДАМИ ПОДВИЖНОГО УПРАВЛЕНИЯ

В.А. Кубышкин, В.И. Финягина

В классе задач управления системами с распределенными параметрами с подвижным управляющим воздействием решена практическая задача определения оптимального закона движения пятна нагрева (зоны привязки электрической дуги к электроду). Найденный закон движения обеспечивает наименьшее значение максимальной усредненной температуры электрода, что ведет к уменьшению эрозии электрода в электродуговом плазмотроне. Рассмотрен ряд математических моделей температурного поля электрода плазмотрона.

Ключевые слова: подвижное управление, электродуговые плазмотроны, эрозия электродов, математические модели температурных полей, оптимальный закон сканирования пятна нагрева.

ВВЕДЕНИЕ

Подвижные источники энергии — электронные, ионные, лазерные лучи, электрическая дуга и др. — широко используются в агрегатах и устройствах, например, для термообработки, плавки, зонной очистки, отжига, нанесения покрытий и т. д. Большой интерес к такого рода подвижным источникам энергии определяется их уникальной возможностью в широких пределах перераспределять в пространстве и времени вещества и энергию, вводимые в объект управления.

Возможность перемещения подвижного источника, в частности источника нагрева, по произвольному закону позволяет поставить задачу оптимального управления его движением. Она относится к классу задач управления системами с распределенными параметрами с подвижными источниками воздействий. В работах [1—6] опубликованы методы, названные «методами подстановки и реализации», и описаны модели для расчета параметров движения подвижных источников воздействия, предполагающие декомпозицию сложной исходной задачи на более простые. Исследование возможностей декомпозиции исходной задачи является частью разрабатываемой в настоящее время Единой геометрической теории управления [7].

Данная работа посвящена адаптации и применению этих методов к решению технологической задачи повышения ресурса работы электродугового плазмотрона.

Для решения этой задачи (как, собственно, и любой другой задачи, связанной с реальным технологическим процессом) прежде всего необходимо дать физическую и математическую постановку задачи, предварительно обосновав и приняв некоторые допущения. Далее необходимо разработать метод решения задачи оптимального управления и соответствующее алгоритмическое и программное обеспечение и выполнить ее численное решение. В целях идентификации расчетных и реальных параметров необходимо разработать программное обеспечение для моделирования температурных полей электродов плазмотронов, т. е. создать модель объекта и выполнить на ней численные расчеты температурных полей.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ УПРАВЛЕНИЯ. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ЭЛЕКТРОДОВ ПЛАЗМОТРОНОВ

Физическая задача управления движением электродного пятна состоит в следующем. По внутренней поверхности цилиндрического электрода плазмотрона *1* (рис. 1) перемещается создаваемая элек-

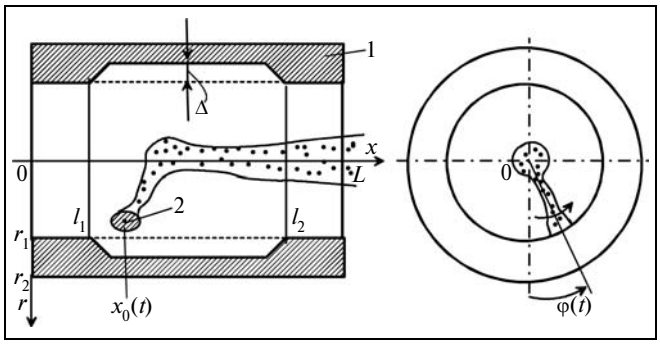


Рис. 1. Схема плазмотрона

трической дугой «зона привязки электрической дуги» *2*, далее, коротко, пятно нагрева.

Ресурс работы плазмотрона во многом определяется эрозией электродов, возникающей в пятне нагрева [8, 9]. В настоящее время появились устройства газодинамического и магнитного сканирования, которые осуществляют сканирование пятна нагрева по заданному закону. Сканирование пятна нагрева приводит к уменьшению эрозии электрода по сравнению с эрозией при неподвижном пятне. В соответствии с теорией образования эрозии [9] ее размер зависит от температуры. При решении задачи воспользуемся этим положением.

В каждый момент времени t положение центра пятна нагрева *2* (см. рис. 1) зададим координатами $x_0(t)$ и $\varphi(x)$. Центр пятна нагрева движется по окружности с постоянной скоростью $V_\varphi = 2\pi/T_\varphi$ с периодом T_φ и вдоль оси x цилиндра от точки l_1 до точки l_2 с периодом T_x, $l_1 < x_0(t) < l_2$, где l_1 и l_2 — заданы, причем $T_\varphi \ll T_x$; Δ — максимальный размер эрозии по прошествии некоторого времени T.

Задачу управления можно поставить следующим образом. Требуется найти периодический закон движения источника $x_0(t)$ и соотношение периодов движения T_x и T_φ, при которых за фиксированный промежуток времени T максимальный размер эрозии Δ минимален.

В зависимости от степени детализации можно рассматривать следующие модели электродов плазмотронов.

Одномерная по пространственной координате *x* модель с подвижным воздействием. Уравнение теплопроводности с начальными и граничными условиями для этой модели записываются следующим образом:

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = a\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} - b_1\alpha_1(Q - Q_1) + b_2F(x, t) + b_2q_\phi(x), \quad 0 < x < L, \quad t > 0, \tag{1.1}$$

$$Q(x, 0) = Q_0(x), \quad 0 < x < L,$$

$$\left[\alpha_2 Q - \lambda\frac{\partial Q}{\partial x}\right]_{x=0} = \alpha_2 Q_{02},$$

$$\left[\alpha_3 Q + \lambda\frac{\partial Q}{\partial x}\right]_{x=L} = \alpha_3 Q_{03}. \tag{1.2}$$

Здесь $Q(x, t)$ — состояние объекта (распределение температуры), x — пространственная координата, t — время, a — коэффициент температуропроводности, λ — коэффициент теплопроводности, $b_1 = \dfrac{G}{c\rho S}$, $b_2 = \dfrac{1}{c\rho S}$ — постоянные коэффициенты, c — теплоемкость, ρ — плотность материала электрода, S — площадь поперечного сечения электрода, G — периметр внутреннего цилиндра, α_1, α_2 и α_3 — коэффициенты теплоотвода от боковой поверхности объекта и от его границ $x = 0$ и $x = L$ соответственно, L — длина электрода, $Q_0(x)$ — функция, описывающая начальное распределение температуры, Q_1, Q_{02} и Q_{03} — среднее значение температуры окружающей среды, омывающей внутреннюю и внешнюю поверхности электрода и его границы $x = 0$ и $x = L$ соответственно, $q_\phi(x)$ — фоновый поток тепла, создаваемый излучением электрической дуги.

Распределение энергии подвижного источника тепла $F(x, t)$ имеет вид

$$F(x, t) = P(t)\Psi[x - x_0(t)], \tag{1.3}$$

где $P(t)$ — мощность подвижного источника тепла, $\Psi(x)$ — функция формы подвижного источника тепла, $x_0(t)$ — функция, определяющая положение центра источника тепла в каждый момент времени, назовем ее законом движения источника. Центр пятна нагрева $x_0(t)$ перемещается вдоль оси внутреннего цилиндра плазмотрона с периодом T_x, $[l_1, l_2] \subset [0, L]$. Функция формы источника задается обычно в виде функции Гаусса: $\Psi(x, \sigma) = (1/\sigma\sqrt{2\pi})\exp[(-1/2\sigma^2)x^2]$, где σ — постоянное число.

Хотя одномерная модель не может претендовать на точное количественное описание температурного поля электрода плазмотрона, однако ее изучение полезно как для разработки и апробации постановки задачи и метода ее решения, так и для получения качественной картины оптимального управления.

Пространственно-двумерная модель в координатах (*x*, *r*). Модель строится в предположении, что $T_\varphi \ll T_x$ (рис. 2). В этом случае приближенно можно считать, что источник тепла равномерно рас-

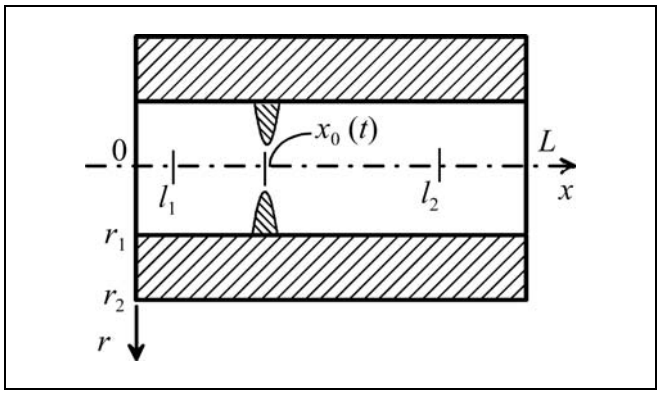


Рис. 2. Схема пространственно-двумерной модели электрода в координатах (*x*, *r*)

пределен по кольцу радиуса r_1 и этот кольцевой источник перемещается вдоль оси x по периодическому закону $x_0(t)$. Температурное поле при таких предположениях не будет зависеть от координаты φ, а будет зависеть лишь от координат x и r.

Уравнение теплопроводности (1.4), начальные (1.5) и граничные (1.6) условия для этой модели запишутся в следующем виде [10]

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = a\left\{\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial}{\partial r}\left[r\frac{\partial Q}{\partial r}\right]+\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2}\right\},\quad r_1 < r < r_2,\quad 0 < x < L, \tag{1.4}$$

$$Q(x, r, 0) = Q_0(x, r),$$

$$\left[\alpha_0 Q - \lambda\frac{\partial Q}{\partial r}\right]_{r=r_1} = F(x, t) + q_\Phi(x) + \alpha_0 Q_{00}, \tag{1.5}$$

$$\left[\alpha_1 Q - \lambda\frac{\partial Q}{\partial r}\right]_{r=r_2} = \alpha_1 Q_{01},$$

$$\left[\alpha_2 Q - \lambda\frac{\partial Q}{\partial x}\right]_{x=0} = \alpha_2 Q_{02},$$

$$\left[\alpha_3 Q - \lambda\frac{\partial Q}{\partial x}\right]_{x=L} = \alpha_3 Q_{03}. \tag{1.6}$$

В приведенных уравнениях $Q(x, r, t)$ — состояние объекта, α_0, α_1, α_2 и α_3 — коэффициенты теплоотвода от внутренней и наружной поверхностей электрода и от левого и правого его торцов соответственно, Q_{00}, Q_{01}, Q_{02} и Q_{03} — значения температуры окружающей среды вблизи внутренней и наружной цилиндрических поверхностей электрода, левого и правого его торцов соответственно. Остальные обозначения совпадают с обозначениями для одномерной модели.

Пространственно-двумерная модель в координатах (*x*, φ). В этой модели температурное поле усредняется по толщине стенки цилиндра (температурное поле не зависит от координаты r).

Обозначим $y = r_1\varphi_1$ (рис. 3), тогда уравнение теплопроводности (1.7) записывается аналогично уравнению теплопроводности для прямоугольной пластины с тем лишь отличием, что граничные условия на границе $y = 0$ и $y = 2\pi r_1$ заменяются условиями периодичности (1.8):

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = a\left[\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 Q}{\partial y^2}\right] + b_2 F(x, y, t) + b_2 q_\Phi - b_1\alpha_1(Q - Q_1),\quad 0< x < L,\quad -\infty < y < \infty. \tag{1.7}$$

$$Q(x, y \pm 2\pi r_1) = Q(x, y). \tag{1.8}$$

Начальные (1.9) и граничные (1.10) условия имеют вид

$$Q(x, y, 0) = Q_0(x, y), \tag{1.9}$$

$$\left[\alpha_2 Q - \lambda\frac{\partial}{\partial x}\right]_{x=0} = \alpha_2 Q_{02},$$

$$\left[\alpha_3 Q - \lambda\frac{\partial}{\partial x}\right]_{x=L} = \alpha_3 Q_{03}. \tag{1.10}$$

В приведенных уравнениях подвижное управление имеет следующий вид

$$F(x, y, t) = P(t)\Psi[x - x_0(t), y - y_0(t)].$$

Здесь $[x_0(t), y_0(t)]$ — координаты центра пятна нагрева в каждый момент времени t. Коэффициент α_1 учитывает теплоотвод, как от внутренней, так и от наружной поверхности электрода, Q_1 — среднее значение температуры среды, омывающей внутреннюю и внешнюю поверхности электрода. Остальные обозначения совпадают с ранее введенными.

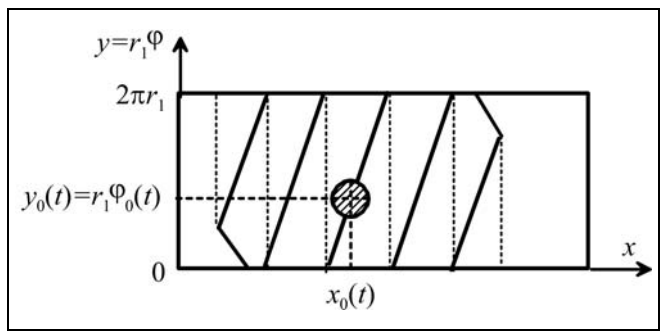


Рис. 3. Расчетная схема пространственно-двумерной модели электрода в координатах (*x*, φ)

2. ВЫБОР МЕТОДА РЕШЕНИЯ И УТОЧНЕНИЕ ПОСТАНОВКИ ЗАДАЧИ

Для решения задачи поиска оптимального закона движения подвижного источника предлагается применять метод декомпозиции [2—5, 6], в соответствии с которым задача управления для нестационарной модели с подвижным источником тепла разбивается на две, более простые.

Первая задача состоит в том, что: нестационарное уравнение объекта с подвижным управлением вида (1.1), (1.2), (1.4) или (1.7) заменяется стационарным уравнением объекта с распределенным управлением $\bar{F}(x)$ и усредненным температурным полем $\overline{Q}(x)$, затем ставится и решается задача поиска оптимального распределенного управления $\bar{F}(x)$.

После нахождения управления $\bar{F}(x)$ решается вторая задача: рассчитывается закон периодического движения источника тепла $x_0(t)$, который обеспечивает усредненное воздействие за период его движения, близкое к найденному оптимальному распределенному управлению.

Обоснование такого подхода состоит в следующем. Если источник тепла периодически перемещается с периодом T_x, то функция, описывающая состояние объекта (1.4)—(1.6) в установившемся режиме ($t \to \infty$), становится периодической функцией времени с тем же периодом T_x, т. е. выполняется условие

$$Q(x, r, t + T_x) = Q(x, r, t). \qquad (2.1)$$

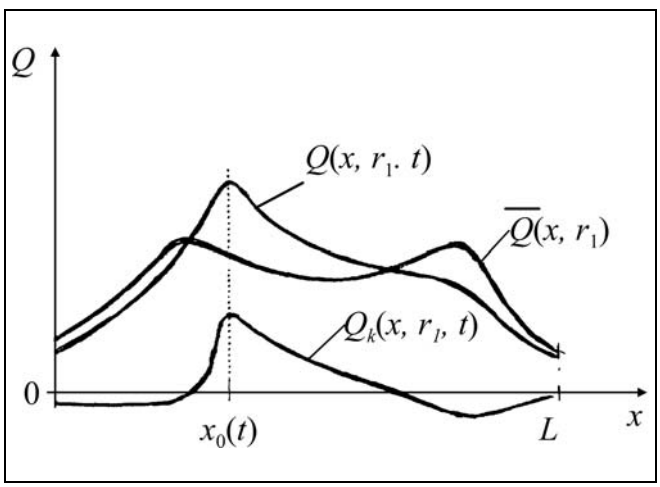


Рис. 4. Представление температурного поля в виде суммы двух составляющих

Представим функцию (2.1) в виде суммы двух составляющих (рис. 4): усредненной $\overline{Q}(x, r)$ и колебательной $Q_k(x, r, t)$:

$$Q(x, r, t) = \overline{Q}(x, r) + Q_k(x, r, t). \qquad (2.2)$$

Усредненная составляющая состояния определяется по формуле

$$\overline{Q}(x, r) = \int_t^{t+T_x} Q(x, r, \tau)d\tau \qquad (2.3)$$

и в силу периодичности функции $Q(x, r, t)$ в установившемся режиме не зависит от времени.

Усредненная составляющая $\overline{Q}(x, r)$ (далее усредненное температурное поле) определяется как решение стационарного уравнения, соответствующего уравнению (1.4)

$$\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial \overline{Q}}{\partial r}\right) + \frac{\partial^2 \overline{Q}}{\partial x^2} = 0,$$
$$r_1 < r < r_2, \quad 0 < x < L, \qquad (2.4)$$

с граничными условиями

$$\left[\alpha_0 \overline{Q} - \lambda\frac{\partial \overline{Q}}{\partial r}\right]_{r=r_1} = \bar{F}(x, t) + q_\Phi(x) + \alpha_0 Q_{00},$$
$$0 < x < L, \quad -\lambda\frac{\partial \overline{Q}}{\partial r}\bigg|_{r=r_2} = \alpha_1(Q_{01} - \overline{Q}),$$
$$-\lambda\frac{\partial \overline{Q}}{\partial x}\bigg|_{x=0} = \alpha_1(Q_{00} - \overline{Q}),$$
$$-\lambda\frac{\partial \overline{Q}}{\partial x}\bigg|_{x=L} = \alpha_3(Q_{03} - \overline{Q}). \qquad (2.5)$$

Здесь $\bar{F}(x)$ — усредненное управление, которое определяется по формуле

$$\bar{F}(x) = \int_t^{t+T_x} P\Psi[x - x_0(\tau)]d\tau. \qquad (2.6)$$

Уравнения (2.4), (2.5) можно получить, если проинтегрировать уравнения (1.4)—(1.6) в промежутке от t до $t + T$ и учесть формулы (2.3) и (2.6).

Предположим, что максимальное значение колебательной составляющей $Q_k(x, r_1, t)$ — см. формулу (2.2) — на границе $r = r_1$ не изменяется во времени. Тогда становится оправданной следующая постановка задачи для стационарного уравнения.

Найти распределенное управление $\bar{F}(x)$, которое обеспечивает минимум максимального значе-

ния усредненного температурного поля на поверхности $r = r_1$:

$$\Im = \max_{0 < x < L} \overline{Q}(x, r_1) \to \min. \qquad (2.7)$$

При этом на управление $\bar{F}(x)$ налагаются ограничения

$$\bar{F}(x) \geqslant 0, \quad x \in [l_1, l_2]; \quad \bar{F}(x) = 0, \quad x \notin [l_1, l_2];$$
$$\int_{l_1}^{l_2} \bar{F}(x)dx = P^*,$$

где P^* — суммарная мощность, поступающая в электрод плазмотрона от подвижного источника тепла.

Если максимальное значение для усредненного температурного поля будет минимальным, то в силу сделанного предположения будет минимальным максимальное значение температуры под источником тепла. Следовательно, в силу принятой нами гипотезы, максимальный размер эрозии будет минимальным.

Замечание. Скорость движения источника различна в различных точках отрезка $[l_1, l_2]$. Там, где скорость меньше, там больше перегрев под источником. Поэтому решение поставленной стационарной задачи оптимизации является лишь первым приближением решения общей задачи оптимизации теплового режима плазмотрона. Дальнейшее исследование необходимо провести на модели с движущимся источником тепла.

3. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ОПТИМИЗАЦИИ С ПОМОЩЬЮ ПРОСТРАНСТВЕННО-ОДНОМЕРНОЙ МОДЕЛИ

Усредненное температурное поле для одномерной модели электрода плазмотрона в установившемся режиме описывается следующим уравнением теплопроводности

$$a\frac{\partial^2 \overline{Q}}{\partial x^2} - b_1\alpha_1(\overline{Q} - Q_1) + b_2\bar{F}(x) + b_2 q_\phi(x) = 0,$$
$$0 < x < L, \qquad (3.1)$$

с граничными условиями

$$\left[\alpha_2 Q - \lambda\frac{\partial \overline{Q}}{\partial x}\right]_{x=0} = \alpha_2 Q_{02},$$
$$\left[\alpha_3 \overline{Q} - \lambda\frac{\partial \overline{Q}}{\partial x}\right]_{x=L} = \alpha_3 Q_{03}. \qquad (3.2)$$

Задача состоит в том, чтобы найти распределенное управление $\bar{F}(x)$, которое удовлетворяет ограничениям

$$\bar{F}(x) \geqslant 0, \quad x \in [l_1, l_2], \quad \bar{F}(x) = 0, \quad x \notin [l_1, l_2],$$
$$\int_{l_1}^{l_2} \bar{F}(x)dx = P^* = \text{const} \qquad (3.3)$$

и обеспечивает минимальное значение функционала

$$\Im = \max_{x \in [0, L]} \overline{Q}(x). \qquad (3.4)$$

Решение задачи (3.1)—(3.4) обеспечивает минимальный нагрев электрода плазмотрона в каждой точке и, как следствие, минимальную эрозию электрода.

Для пространственно-одномерного объекта справедливо следующее утверждение: минимальное значение функционала $\Im$ достигается при таком воздействии $\bar{F}(x)$, которое обеспечивает равномерное усредненное температурное поле на отрезке $[l_1, l_2]$. Доказательство этого утверждения приведено в работе [6]. На его основании можно рассчитать оптимальное распределенное управление $\bar{F}(x)$.

Решение можно получить методом подстановки [3, 6], который состоит в том, что в уравнение (3.1) вместо усредненной функции, описывающей состояние объекта $\overline{Q}(x)$, подставляется аппроксимирующая функция $Q_A(x, C)$, которая удовлетворяет граничным условиям (3.2), имеет постоянное значение C на отрезке $[l_1, l_2]$ и удовлетворяет стационарному уравнению (3.1) объекта при $x \notin [l_1, l_2]$. Тогда управление $\bar{F}(x)$ определится из формулы

$$b_2\bar{F}(x) = a\frac{\partial^2 Q_A}{\partial x^2} + b_1\alpha_1(Q_A - Q_1) - b_2 q_\phi(x).$$

Значение постоянной C подбирается таким образом, чтобы выполнялось условие

$$\int_{l_1}^{l_2} \bar{F}(x)dx = P^*.$$

Если известно распределенное управление $\bar{F}(x)$, то для расчета закона движения источника тепла $x_0(t)$ необходимо решить интегральное уравнение

$$\bar{F}(x) = P\int_0^T \Psi[x - x_0(t), \sigma]dt. \qquad (3.5)$$

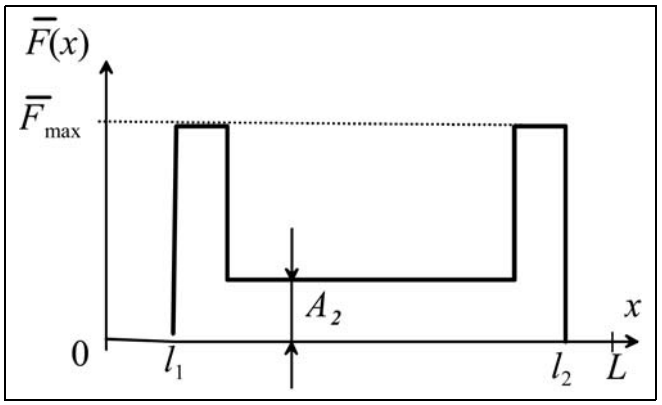


Рис. 5. Распределенное оптимальное управление

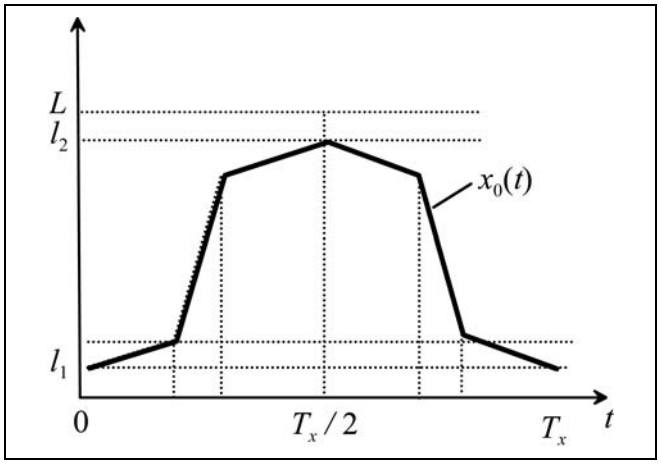


Рис. 6. Закон движения точечного источника

Путем замены переменных $t = x_0^{-1}(x)$, где $x_0^{-1}(x)$ — функция, обратная функции $x_0(t)$, уравнение (3.5) можно привести к виду

$$\bar{F}(x) = P\int_{l_1}^{l_2}\Psi(x-\xi,\sigma)\omega(\xi)d\xi, \qquad (3.6)$$

где

$$\omega(x) \geqslant 0,\ \omega(x) = [x_0^{-1}(x)]',\quad t'(x) = \omega(x). \quad (3.7)$$

Стандартных методов решения интегрального уравнения (3.6) при ограничении (3.7) не существует. Поэтому для вычисления решения интегрального уравнения (3.6) предложен специальный метод [4], на основе которого разработана программа поиска решения. Если считать, что $\psi(x, \sigma) \approx \delta(x)$, $\delta(x)$ — функция Дирака, приближенное решение можно получить в аналитической форме.

На рис. 5 показан вид распределенного оптимального управления, полученного для пространственно-одномерного уравнения объекта (рис. 5) и соответствующий этому управлению закон движения точечного источника (рис. 6).

4. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ОПТИМИЗАЦИИ С ПОМОЩЬЮ ПРОСТРАНСТВЕННО-ДВУМЕРНОЙ МОДЕЛИ

Предположим, что для стационарной двумерной модели электрода, описываемой уравнениями (2.4)—(2.6), выполняется утверждение, доказанное для одномерной модели. Это означает, что минимальное значение функционала (2.7) достигается при таком управлении $\bar{F}(x)$, которое обеспечивает равномерное распределение температуры на отрезке $[l_1, l_2]$ на поверхности $r = r_1$.

Для определения управления $\bar{F}(x)$, обеспечивающего равномерное распределение температуры на отрезке $[l_1, l_2]$, воспользуемся методом подстановки, особенности применения которого для пространственно-двумерных объектов подробно изложены в работе [6].

Для численного расчета оптимального закона движения электродного пятна в рамках модели (1.4)—(1.6) были разработаны следующие программы:

- программа расчета оптимального управления $\bar{F}(x)$, обеспечивающего равномерное распределение температуры на отрезке $[l_1, l_2]$ при выполнении условий $\bar{F}(x) \geqslant 0$, $\int_{l_1}^{l_2}\bar{F}(x)dx = P^*$; она реализует описанную в работе [6] методику;
- программа реализации распределенного управления подвижным управлением, т. е. программа для определения закона движения $x_0(t)$, $0 < t < T$, по известному распределенному управлению $\bar{F}(x)$.

Расчеты проводились при следующих исходных данных. Материал электрода — медь со следующими теплотехническими характеристиками: $a = 0{,}1 \cdot 10^{-3}$ м^2/с, $\lambda = 365$ Вт/(м · °С), $\rho = 9000$ кг/м^3, $c = 0{,}406$ кДж/(кг · °С). Геометрические размеры электрода плазмотрона $L = 100$ мм, $l_1 = 32{,}5$ мм, $l_2 = 67{,}5$ мм, $r_1 = 17{,}5$ мм, $r_2 = 27{,}5$ мм. Параметры взаимодействия электрода с окружающей средой: коэффициенты теплоотдачи $\alpha_0 = 0$, $\alpha_2 = 0$, $\alpha_3 = 0$, $B_{i1} = 0{,}85$. Здесь B_{i1} — безразмерный критерий, который определяется по формуле $B_{i1} = \alpha_1(r_2 - r_1)/\lambda$, α_1 — коэффициент теплоотдачи благодаря охлаждению стенок электрода водой. Суммарная мощ-

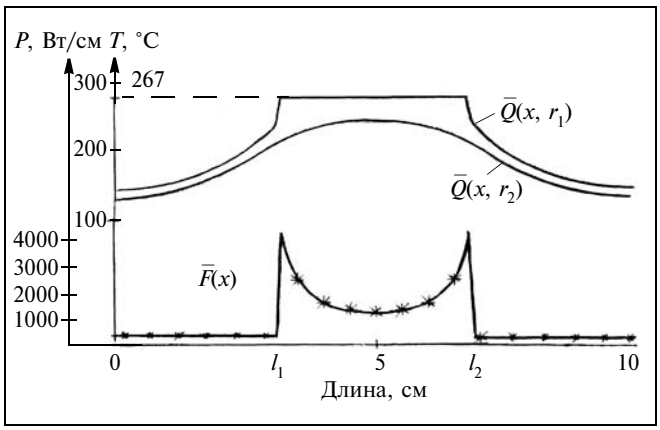


Рис. 7. Оптимальное распределенное управление и соответствующее усредненное температурное поле

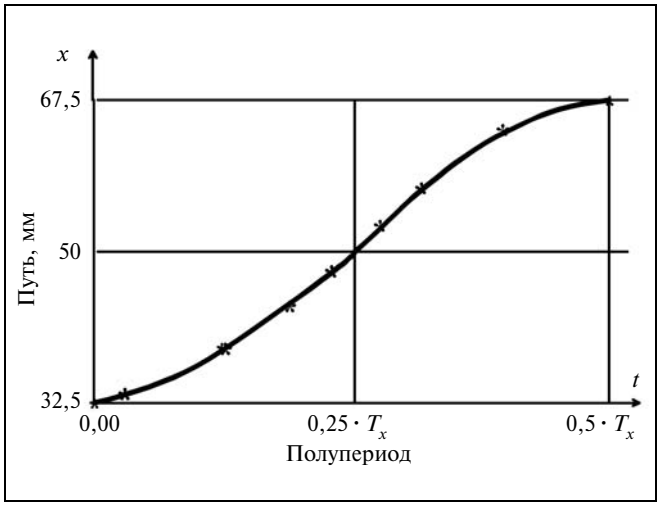


Рис. 8. Расчетный закон движения источника вдоль оси 0*x*

ность P^* источника тепла принималась равной 7500 Вт; мощность фонового потока принималась постоянной по всей длине: $q_ф$ = const = 2000 Вт.

На рис. 7 изображено рассчитанное оптимальное распределенное управление $\bar{F}(x)$. На этом же рисунке показано распределение температуры на границах электрода $r = r_1$ и $r = r_2$.

Как видно из рисунка, для получения равномерного распределения температурына отрезке $[l_1, l_2]$ граничной поверхности $r = r_1$ необходимо существенно неравномерное распределение управления $\bar{F}_{opt}(x)$. Качественная картина, полученная для одномерной модели электрода сохранилась. На рис. 8 показан закон движения источника $x_0(t)$, рассчитанный на основе решения интегрального уравнения (3.5).

Для сравнения на рис. 9 показано распределение температуры на поверхностях $r = r_1$ и $r = r_2$ при заданном постоянном распределенном управлении $\bar{F}(x)$ = const при суммарной мощности P, равной заданному значению P^*. Такое распределенное управление соответствует движению источника с постоянной скоростью на отрезке $[l_1, l_2]$. Из рисунка видно, что максимальное значение усредненной температуры на поверхности $r = r_1$ равно 292 °С и находится в центре отрезка $[l_1, l_2]$.

Для численного моделирования нестационарных температурных полей электродов плазмотронов с подвижным источником тепла были разработаны программы для моделирования пространственно-двумерных нестационарных температурных полей электрода плазмотрона в координатах (x, r) и в координатах (x, φ) с подвижным источником тепла. Для решения уравнений теплопроводности (1.4)—(1.6) и (1.7)—(1.10) применялся метод сеток. В частности, использовалась сетка с постоянным шагом по пространственной координате и переменным шагом по времени, связанным с законом движения источника тепла $x_0(t)$. Шаг по времени выбирался таким образом, чтобы на каждом временном слое центр источника тепла совпадал с узлом сетки по пространственной координате [2, 5, 6]. Такой выбор шагов по времени позволяет улучшить аппроксимацию функции формы источника $\Psi[x - x_0(t), \sigma]$ сеточной функцией, уменьшить число шагов по пространственной координате.

На рис. 10 показан пример распределения температуры, рассчитанного на модели температурно-

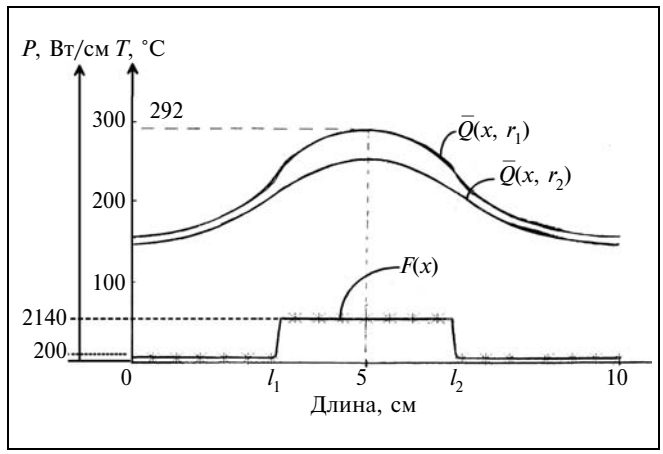


Рис. 9. Постоянное на отрезке $[l_1, l_2]$ распределенное управление и соответствующее усредненное температурное поле

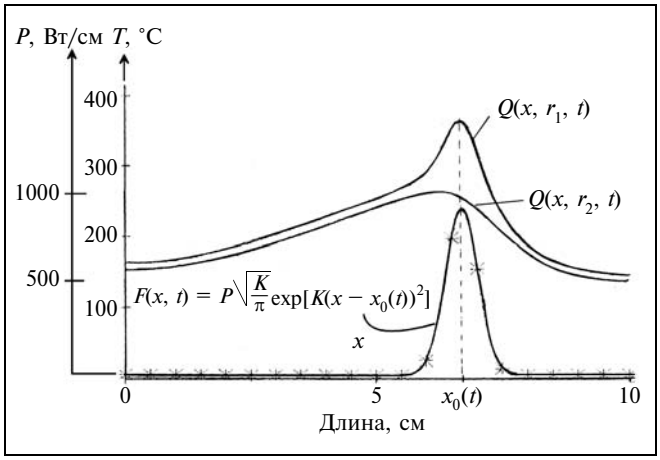


Рис. 10. Распределение энергии источника и температурное поле электрода от него

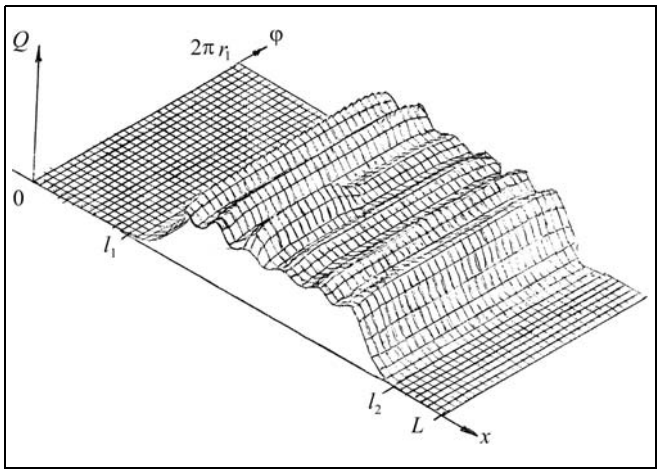


Рис. 11. Температурное поле на модели в координатах (*x*, φ)

го поля электрода плазмотрона в координатах (x, r) для случая, когда источник тепла движется с постоянной скоростью в каждом цикле; $K = 1/(2\sigma^2)$. На рис. 11 показано температурное поле, рассчитанное на модели в координатах (x, φ).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассмотрена задача уменьшения размера эрозии электрода плазмотрона, возникающей в зоне привязки электрической дуги к электроду. В настоящее время существует подтвержденная экспериментально гипотеза, в соответствии с которой размер эрозии определяется температурой под пятном нагрева. Поэтому поставленная задача сводится к задаче оптимизации температурного поля электрода. Она состоит в том, чтобы найти закон движения пятна нагрева, который обеспечивает минимальное значение максимальной температуры под ним. В настоящей работе эта задача решена для усредненного температурного поля электрода с помощью методов подвижного управления (метода подстановки и метода реализации). Для уточнения найденного закона движения следует использовать модели электрода с подвижным управлением. В работе рассмотрены двумерные модели электрода в координатах (x, r) и (x, φ) с подвижным управлением. Уточнение закона движения пятна нагрева с помощью этих, а также с помощью более точной трехмерной модели электрода плазмотрона является предметом отдельных исследований.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бутковский А.Г., Пустыльников Л.М.* Теория подвижного управления системами с распределенными параметрами. — М.: Наука, 1980.
2. *Кубышкин В.А.* Математическое моделирование в системах управления с подвижным многоцикловым воздействием / В кн.: Проблемы управления системами с распределенными параметрами с подвижным воздействием. — М.: Наука, 1979.
3. *Метод* подстановки для расчета распределенных управлений / А.Г. Бутковский, В.А. Кубышкин, А.Г. Смирнов и др. // Автоматика и телемеханика. — 1980. — № 9.
4. *Реализация* распределенных управлений с помощью подвижных источников воздействия / А.Г. Бутковский, В.А. Кубышкин, Е.С. Твердохлебов, Е.П. Чубаров // Автоматика и телемеханика. — 1983. — № 4.
5. *Финягина В.И.* Моделирование подвижного управления в двумерных системах с распределенными параметрами // Техническая кибернетика. — 1989. — № 6.
6. *Кубышкин В.А., Финягина В.И.* Подвижное управление в системах с распределенными параметрами. — М.: СИНТЕГ, 2005. — 240 с.
7. *Бабичев А.В., Бутковский А.Г., Похйолаинен С.* К единой геометрической теории управления. М.: Наука, 2001.
8. *Жуков М.Ф., Засыпкин И.М., Тимошевский А.Н.* и др. Электродуговые генераторы термической плазмы // Новосибирск: Наука, 1999. — 712 с.
9. *Михайлов В.И., Тимошевский А.Н., Урбах Э.К.* Влияние температуры цилиндрических электродов на их эрозию // Изв. СО АН СССР. Сер. «Техн. науки». — № 10. — Вып. 2. — 1985.
10. *Тихонов А.Н., Самарский А.А.* Уравнения математической физики. — М.: Наука, 1972.

Статья представлена к публикации членом редколлегии А.Г. Бутковским.

Кубышкин Виктор Алексеевич — д-р техн. наук, вед. науч. сотрудник, ✉ vicalkub@ipu.ru,

Финягина Валерия Ивановна — канд. техн. наук, ст. науч. сотрудник, ✉ fler@ipu.ru,

Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, г. Москва, ☎(495) 334-76-90.

УДК 517.977

ПОИСК ПОДВИЖНОГО ОБЪЕКТА ПО ИНФОРМАЦИОННОМУ ПРИЗНАКУ «СЛЕД»[1]. Ч. 1. Общая структура оптимальной поисковой траектории

Т.Г. Абрамянц, Ю.А. Беланов, Е.П. Маслов, В.П. Яхно

Приведено решение плоскостной задачи об оптимизации траектории поисковой системы, осуществляющей обнаружение подвижного объекта и сближение с ним по информационному признаку «след». Траектория состоит из участка поиска следа подвижного объекта (цели) и участка движения вдоль обнаруженного следа до момента встречи с целью. Задача решена в минимаксной постановке для случая, когда цель выбирает направление движения в пределах некоторого диапазона углов и на постоянной скорости движется по прямолинейной траектории

Ключевые слова: «след» объекта, оптимизация траектории поиска, минимаксное решение.

ВВЕДЕНИЕ

Актуальной задачей теории поиска является разработка методов поиска подвижного объекта по информационному признаку «след». Поиск подвижного объекта по следу обладает следующими особенностями:

— автономная поисковая система, снабженная средствами обнаружения следа, вначале находит след, а затем, перемещаясь вдоль него, находит объект поиска (цель);

— время существования следа ограничено.

Задача поиска по следу возникает в ряде практически важных случаев: при поиске групп людей в неблагоприятную погоду, кораблей по кильватерному следу, летательных аппаратов по косвенным признакам и др.

Существует обширная литература, посвященная поиску подвижных объектов (см., например, обзор [1] и библиографию к нему). Однако по вопросам построения траекторий поиска следа подвижного объекта авторам известны лишь две работы [2, 3]. Далее приводятся постановка и решение кинематической задачи об оптимизации поиска подвижного объекта по информационному признаку «след» на плоскости.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Два объекта, автономная поисковая система (преследователь) P и объект поиска (цель) E, обладая ограниченными скоростями, перемещаются по плоскости; преследователь может в каждый момент произвольно изменять направление своего движения («простые движения» по терминологии работы [4]). За целью тянется след постоянной длины R.

На плоскости вводится неподвижная прямоугольная система координат XOY, начало которой совмещено с начальным положением преследователя P^0, а ось OY проходит через начальное положение цели E^0 (рис. 1). Здесь и далее верхний индекс обозначает момент времени. Вводится двумерный вектор $z(t) \stackrel{\Delta}{=} z = (x, y)$, направленный от преследователя P к цели E в момент времени t, $z(0) = z^0 = (0, D_0)$, D_0 — начальное расстояние между ними.

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке Программы № 29 Президиума РАН «Математическая теория управления».

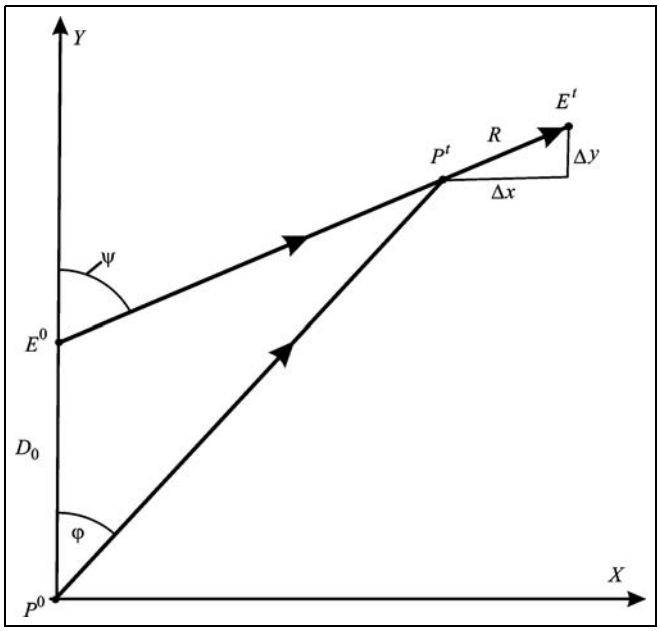


Рис. 1. Фрагмент прямолинейной поисковой траектории

В момент $t = 0$ цель выбирает направление движения ψ (угол между траекторией и осью $0Y$) из диапазона углов $\Delta\Psi = [\psi_н, \psi_к]$, где $\psi_н$ и $\psi_к$ — начальная и конечная границы диапазона, соответственно, и движется по выбранному направлению с постоянной скоростью v_E. Углы отсчитываются от оси $0Y$; положительным считается отсчет по часовой стрелке. Далее символом (ψ) обозначается луч, исходящий из точки E^0 под углом ψ к оси $0Y$; символом $E(\psi)$ — цель, движущаяся вдоль луча (ψ); символом $E^t(\psi)$ — положение цели, движущейся вдоль луча (ψ), в момент t; символом $P^t = E^t(\psi)$ — событие, состоящее в совпадении позиций (точечной встрече) преследователя в произвольный момент t с целью, движущейся вдоль луча (ψ).

Уравнение относительного движения объектов

$$\dot{z} = v_E(\sin\psi, \cos\psi) - u; \quad z(0) = z^0, \qquad (1)$$

где u — двумерный вектор управления (скорости) преследователя, стесненный ограничением

$$\|u\| \leqslant v_P, \quad v_E < v_P. \qquad (2)$$

Критерий оптимальности

$$T = \max_{\psi \in \Delta\Psi} (t_П + t_Д) \to \min_u, \qquad (3)$$

где $t_п$ — момент обнаружения следа, совпадающий с моментом пересечения следа траекторией преследователя; $t_д$ — время движения преследователя вдоль следа до момента встречи с целью. Критерий имеет смысл максимальной, по диапазону углов $\Delta\Psi$, длительности интервала времени до встречи с целью. Длительность этого интервала минимизируется выбором программного управления преследователя, что отражается записью (3).

При любом $\psi \in \Delta\Psi$ в момент $t_п$ пересечения луча (ψ) траекторией преследователя должно выполняться условие

$$<e_z, e_v>_{t_п} = 1, \qquad (4)$$

где e_z — единичный вектор, коллинеарный вектору $z(t_п)$, соединяющему позиции преследователя и цели в этот момент; e_v — единичный вектор, коллинеарный вектору скорости цели в неподвижной системе координат $X0Y$ в этот момент; символом $<\cdot,\cdot>$ здесь и далее обозначается скалярное произведение векторов. Условие (4) имеет следующий физический смысл: пересечение траектории преследователя и произвольного луча (ψ), вдоль которого движется цель, должно происходить в области возможного существования следа, т. е. точка пересечения должна располагаться между текущим положением цели на луче и начальной позицией E^0. Принимается, что при точечной встрече преследователя и цели условие (4) выполняется.

Наряду с равенством (4), при каждом $\psi \in \Delta\Psi$ в момент $t_п$ пересечения луча должно выполняться неравенство

$$\|z(t_п)\| \leqslant R. \qquad (5)$$

Соотношения (4) и (5) определяют необходимые условия, которые должны выполняться при движении преследователя по поисковой траектории. В наличии двух фазовых ограничений — равенства (4) и неравенства (5) — состоит особенность решаемой задачи поиска. Эти ограничения определяют границы допустимой области положений цели в подвижной системе координат, связанной с преследователем.

Выбор функционала (3) в качестве критерия приводит к необходимости оптимизации поисковой траектории при наихудшем возможном, в смысле времени до встречи преследователя с целью, расположении следа. Поэтому задача (1)—(5) является задачей об оптимизации гарантированного результата. В статье [3] было показано, что эта задача сводится к задаче быстродействия с критерием

$$T \to \min_u, \qquad (6)$$

фазовыми ограничениями (4), (5) и терминальным условием

$$z^T(\psi_н) = 0. \qquad (7)$$

В том частном случае, когда фазовое ограничение (5) реализуется в единственной точке поисковой траектории, оптимальной траекторией преследователя служит прямая, по которой он движется с максимальной скоростью v_P [3]. Решением задачи в этом случае является управление преследователя, гарантирующее точечную встречу с $E(\psi_н)$ — т. е. точечную встречу с целью в случае ее движения вдоль луча ($\psi_н$).

В настоящей статье приводится решение об оптимизации поисковой траектории в задаче быстродействия (1), (2), (4)—(7) для общего случая.

Параметры задачи: начальное расстояние D_0, длина следа R, скорости объектов v_E и v_P, расположение начальной $\psi_н$ и конечной $\psi_к$ границ диапазона лучей — возможных направлений движения цели. Решение задачи находится для случая, когда цель движется в полуплоскости $x \geqslant 0$, $0 \leqslant \psi \leqslant \pi$.

Статья состоит из двух частей. В первой части устанавливается общая структура оптимальной поисковой траектории. Во второй части приводится решение задачи об оптимизации поисковой траектории для различных сочетаний параметров задачи.

2. ОБЩАЯ СТРУКТУРА ПОИСКОВОЙ ТРАЕКТОРИИ

До момента обнаружения цели траектория движения преследователя является программной — поиск осуществляется без поступления текущей информации о позиции цели. Так как задача (1), (2), (4)—(7) является задачей о быстродействии, а преследователь обладает простыми движениями, то по поисковой траектории преследователь движется с максимальной скоростью v_P.

Из общих результатов теории оптимального управления [5, 6] известно, что, при наличии ограничений в виде неравенств на функции фазовых координат, оптимальная программная траектория в фазовом пространстве состоит из участков, часть из которых лежит на границе допустимой области, а остальные — внутри допустимой области. В статье [3] было показано, что в том случае, когда на траектории поиска равенство (4) выполняется, а равенство в соотношении (5) реализуется не более чем в единственной точке, оптимальной по быстродействию программной траекторией поиска в неподвижной системе координат является прямая. В подвижной системе координат, связанной с преследователем, ей также соответствует прямая — траектория относительного движения цели.

В том случае, когда множество точек, в которых $\|z(t_п)\| - R = 0$, содержит не только изолированные точки, движению относительного положения цели по окружности (границе допустимой области в подвижной системе координат, связанной с преследователем) соответствует в неподвижной системе координат единственная поисковая траектория преследователя — логарифмическая спираль с полюсом в точке E_0 [7, 8], по которой преследователь движется таким образом, что радиальная составляющая его скорости совпадает со скоростью цели. Поэтому, в общем случае, оптимальная поисковая траектория преследователя состоит из прямолинейных отрезков и участков спирали, причем спиральные участки могут отсутствовать — см., например, статью [3]. Задача об оптимизации программного управления сводится к установлению характера движения преследователя на отдельных участках траектории и условий перехода от одного участка к другому.

Полное время движения по программной траектории складывается из времени собственно поиска следа в пределах сектора $\Delta\Psi = [\psi_н, \psi_к]$ и времени сближения поисковой системы с границей сектора — лучом ($\psi_к$).

Задача поиска имеет смысл при $D_0 > R$. Поэтому существует интервал времени $[0; t]$, в течение которого программная траектория прямолинейна. Назовем указанный участок программной траектории первым прямолинейным участком; этот участок включает в себя, в частности, траекторию сближения поисковой системы с лучом ($\psi_к$). Двигаясь по прямой, соответствующей произвольному фиксированному углу φ, преследователь пересекает множество лучей (ψ), $\psi \in \Delta\Psi = [\psi_н, \psi_к]$; возможно, что это множество состоит из единственного луча ($\psi_к$).

На прямолинейной поисковой траектории ограничению (4) соответствует в терминах направлений движений объектов равенство (см. рис. 1):

$$\operatorname{tg}\psi = \left(\frac{\Delta x}{\Delta y}\right)_{t_п} = \frac{v_E t_п \sin\psi - v_P t_п \sin\varphi}{D_0 + v_E t_п \cos\psi - v_P t_п \cos\varphi}.$$

Отсюда находится момент пересечения траектории преследователя и произвольного луча (ψ):

$$t_п = \frac{D_0 \sin\psi}{v_P \sin(\psi - \varphi)}.$$

Расстояние, разделяющее позицию P и точку $E^{t_п}(\psi)$ в этот момент, вычисляется по формуле

$$D(t_п, \varphi, \psi) = D_0 \frac{|\beta \sin\psi - \sin\varphi|}{\sin(\psi - \varphi)}, \ \beta = v_E/v_P.$$

Точечной встрече объектов, $D(t_п, \varphi, \psi) = 0$ соответствует равенство $\sin\varphi = \beta\sin\psi$.

Исследуем поведение функции $D(t_п, \varphi, \psi)$. Значения $\psi_н$ и $\psi_к$ являются координатами концов отрезка $\psi \in \Delta\Psi = [\psi_п, \psi_к]$ — множества направлений движения цели. Управление φ характеризует вид кривой $D(t_п, \varphi, \psi)$на множестве $\Delta\Psi$. При фиксированном управлении φ

$$\max_{0 \le \psi \le \pi} D(t_п, \varphi, \psi) = D_0|\cos\psi^*(\varphi)| \qquad (8)$$

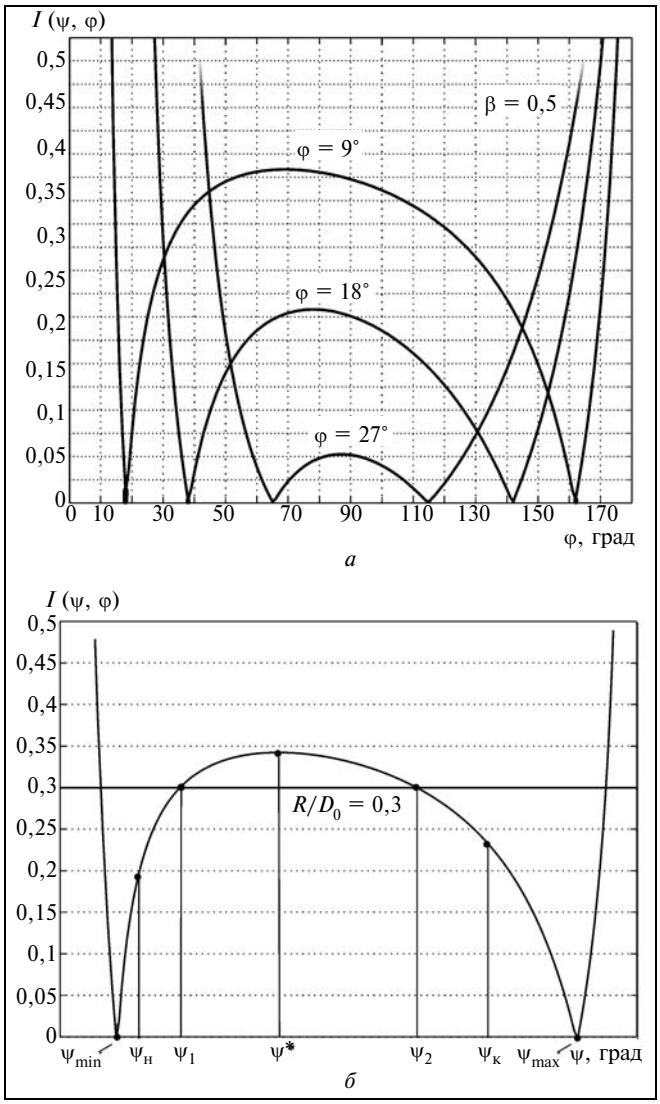


Рис. 2. Графики зависимости расстояния между объектами в момент пересечения следа

и достигается в единственной точке $\psi^* = \psi^*(\varphi)$:

$$\cos(\psi^* - \varphi) = \beta. \qquad (9)$$

Возможны два случая, когда точка $\psi^*(\varphi)$ лежит:

— внутри отрезка $[\psi_н, \psi_к]$;

— вне этого отрезка; в этом случае максимум по ψ функции $D(t_п, \varphi, \psi)$ на множестве $\Delta\Psi = [\psi_н, \psi_к]$ достигается в точке $\psi_к$.

На рис. 2, *а* изображено однопараметрическое семейство кривых

$$D(t_п, \varphi, \psi)/D_0 \stackrel{\Delta}{=} I(\psi, \varphi) = \frac{|\beta \sin\psi - \sin\varphi|}{\sin(\psi - \varphi)},$$

построенных как функции ψ при фиксированных значениях параметра φ, указанных на рисунке; графики рассчитаны для значения $\beta = 0{,}5$.

На рис. 2, *б* изображена отдельно кривая, соответствующая $\varphi = 9°$. Выделены горизонтальная прямая, соответствующая некоторому значению $D(t_п, \varphi, \psi) = R$, и ряд характерных точек, расположение которых зависит от управления φ:

$\psi_{min}(\varphi)$, $\psi_{max}(\varphi)$ — направления движения, на которых возможны точечные встречи цели и преследователя, траектория которого составляет угол φ с осью $0Y$;

$\psi_1(\varphi)$, $\psi_2(\varphi)$ — направления, на которых возможны R-встречи с целью;

$\psi^*(\varphi)$ — направление движения цели, соответствующее максимуму функции $D(t_п, \varphi, \psi)$ — см. формулу (9).

Точки, лежащие вне диапазона $[\psi_{min}(\varphi), \psi_{max}(\varphi)]$, соответствуют таким пересечениям траектории преследователя с лучами (ψ), при которых преследователь оказывается на луче впереди цели. При этом нарушается условие (4); при таких пересечениях $\langle e_z, e_v \rangle_{t_п} = -1$.

Рабочим является диапазон $[\psi_н, \psi_к]$ возможных направлений движений цели. Положение точек $\psi_н$ и $\psi_к$ фиксировано. Положения остальных точек зависят от выбора управления φ. Кривые на рис. 2, *а* иллюстрируют характер этих зависимостей. А именно, с ростом φ:

— диапазон углов $[\psi_{min}(\varphi), \psi_{max}(\varphi)]$ сужается; его левая и правая границы смещаются, соответственно, вправо и влево;

— то же происходит с диапазоном $[\psi_1(\varphi), \psi_2(\varphi)]$;

— значение максимума кривой $\psi^*(\varphi)$ уменьшается; точка максимума смещается вправо; положение этой точки предельное для концов обоих указанных диапазонов;

— диапазон $[\psi_2(\varphi), \psi_к]$ расширяется.

В силу ограничений (4) и (5) первый прямолинейный участок поисковой траектории может закончиться одним из следующих событий:

— выполнением терминального условия — точечной встречей $P^T = E^T(\psi_н)$;

— точечной встречей $P^t = E^t(\psi_к)$ в некоторый момент $0 < t < T$;

— R-встречей преследователя с точкой $E^t(\psi)$ в некоторый момент $0 < t < T$. Далее особо выделяются события, связанные с R-встречей преследователя с точкой $E^t(\psi_к)$ и с R-встречей преследователя с точкой $E^t(\psi^*)$, где $\psi^* \stackrel{\Delta}{=} \psi^*(\varphi)$ — координата точки максимума функции $D(t_п, \varphi, \psi)$. Управление φ, реализующее R-встречу с точкой $E^t(\psi^*)$, находится из условия

$$\max_{0 \le \psi \le \pi} D(t_п, \varphi, \psi) = D_0|\cos\psi^*(\varphi)| = R$$

и, в силу формул (8) и (9), имеет вид

$$\varphi^R = \arccos(R/D_0) - \arccos(v_E/v_P).$$

Перечисленным событиям соответствуют следующие направления движения преследователя на первом прямолинейном участке: $\varphi_н = \arcsin(\beta\sin\psi_н)$; $\varphi_к = \arcsin(\beta\sin\psi_к)$ и $\varphi^R = \arccos(R/D_0) - \arccos(v_E/v_P)$.

Обозначим символом $\psi^*(\varphi_н) = \varphi_н + \gamma$, где $\cos\gamma = \beta = v_E/v_P$, то направление движения цели, которое соответствует максимальному расстоянию между объектами при управлении преследователя $\varphi_н = \arcsin(\beta\sin\psi_н)$.

Структура поисковых траекторий зависит от взаимного расположения точек $\psi_н$, $\psi^*(\varphi)$ и $\psi_к$.

Возможны два варианта расположения точек $\psi^*(\varphi)$ и $\psi_к$:

$$\psi^*(\varphi_н) \leqslant \psi_к \text{ и } \psi_к < \psi^*(\varphi_н).$$

Кроме того, так как $\sin\varphi_н = \beta\sin\psi_н = \beta\sin(\pi - \psi_н)$, то возможны два варианта расположения граничных точек:

$$\psi_к \leqslant \pi - \psi_н; \quad \psi_к > \pi - \psi_н.$$

При $\psi_к > \pi - \psi_н$ прямолинейная поисковая траектория, соответствующая управлению $\varphi_н = \arcsin(\beta\sin\psi_н)$, пересекает луч $(\varphi_н)$ в области, где нарушается условие (4).

В статье [3] показано, что, при определенных соотношениях между параметрами (D^0; R; v_E, v_P; $\psi_н$, $\psi_к$), решением задачи является оптимальная прямолинейная поисковая траектория. Она обеспечивает минимально возможное время движения преследователя до момента реализации терминального условия — точечной встречи $P^T = E^T(\psi_н)$; соответствующее управление преследователя $\varphi_н = \arcsin(\beta\sin\psi_н)$.

Достаточным условием существования оптимальной прямолинейной траектории является выполнение системы неравенств:

$$\psi_к \leqslant \pi - \psi_н, \tag{10}$$

$$\max_{\psi_н \le \psi \le \psi_к} D(t_п, \varphi_н, \psi) = D_0\cos\psi^*(\varphi_н) \leqslant R, \tag{11}$$

имеющей следующий физический смысл:

— оптимальная прямолинейная траектория пересекает граничный луч $(\psi_к)$ в той области, где существование следа возможно (неравенство (10));

— точка пересечения оптимальной прямолинейной траектории и произвольного луча (ψ), $\psi \in \Delta\Psi = [\psi_н, \psi_к]$, находится в пределах следа, расположенного на луче (неравенства (10), (11)).

Если хотя бы одно из неравенств (10), (11) нарушается, то оптимальной прямолинейной поисковой траектории не существует. В фазовом пространстве первый прямолинейный участок поисковой траектории заканчивается выходом текущего положения цели на одно из ограничений (4), (5).

Пусть нарушается неравенство (10), а именно: $\psi_к > \pi - \psi_н$.

В этом случае направление движения преследователя на первом прямолинейном участке выбирается из условия пересечения луча $(\psi_к)$ в точке, удовлетворяющей равенству (4). Таким направлением является, например, $\varphi_к = \arcsin(\beta\sin\psi_к)$. Так как $\varphi_н \ne \varphi_к$, то в точке пересечения происходит излом поисковой траектории. Обозначим символом $P(\psi_к)$ положение преследователя в момент пересечения траекторией луча $(\psi_к)$. В общем случае возможны следующие варианты:

— существует прямолинейная поисковая траектория, проходящая через точку $P(\psi_к)$ и терминальную точку $P^T = E^T(\psi_н)$;

— существует прямолинейная поисковая траектория, начинающаяся из точки $P(\psi_к)$ и заканчивающаяся реализацией второго ограничения — выходом текущего положения цели в фазовом пространстве в точку окружности

$$\|z(t_п)\| - R = 0. \tag{12}$$

Пусть теперь справедливо неравенство (10), но нарушается неравенство (11). Это означает, что

первый прямолинейный участок поисковой траектории, соответствующий направлению движения преследователя $\varphi = \varphi_н$, пересекает луч $(\psi_к)$ в области, где существование следа возможно, но найдется луч (ψ), $\psi \in \Delta\Psi = [\psi_н, \psi_к]$, для которого

$$\max_{\psi} D(t_п, \varphi_н, \psi) = D_0 \cos\psi^*(\varphi_н) > R.$$

В этом случае первый прямолинейный участок поисковой траектории заканчивается выходом текущего положения цели на окружность (12).

Таким образом, в обоих случаях возможно существование участка поисковой траектории, которому в фазовом пространстве отвечает движение текущего положения цели по окружности (12). Соответствующей поисковой траекторией преследователя в неподвижной системе координат является логарифмическая спираль с полюсом в точке E^0 [7, 8], по которой преследователь движется таким образом, что радиальная составляющая его скорости совпадает со скоростью цели.

Далее излагается анализ фрагмента поисковой траектории, содержащей спиральный участок. При принятой в настоящей статье системе отсчета углов уравнение спирали имеет вид:

$$\rho_t = \rho_\sigma \exp[(\psi_\sigma - \psi_t)\mathrm{ctg}\gamma]; \quad \cos\gamma = \beta = v_E/v_P, \quad (13)$$

где t — произвольный момент времени; символом ρ_t обозначена длина радиус-вектора в момент t; $\sigma < t$ — момент выхода позиции преследователя на спиральный участок; ψ_t и ψ_σ — полярные углы; $\rho_\sigma = v_E\sigma - R$.

В каждой точке спирали (13) имеет место равенство $\psi = \varphi + \gamma$, где ψ — направление пересекаемого луча, φ — направление движения преследователя в точке пересечения.

Спираль (13) проходит через концы следов. Однако терминальным условием является точечная встреча $P^T = E^T(\psi_н)$. Следовательно, если оптимальная поисковая траектория содержит спиральный участок, то существует момент s схода текущей позиции преследователя со спирали на траекторию, проходящую через терминальную точку $P^T = E^T(\psi_н)$. Так как по поисковой траектории преследователь движется с постоянной скоростью, то время движения пропорционально длине траектории. Поэтому решаемая в настоящей статье задача сводится к задаче геодезического преследования на плоскости с выпуклым подвижным препятствием, где в качестве препятствия выступает огибающая семейства расширяющихся окружностей — геометрических мест концов следов, а терминальная точка принадлежит огибающей геометрических мест позиций цели [9—13]. Таковыми огибающими являются логарифмические спирали. Из результатов работ [9, 13] следует, что в рассматриваемой задаче экстремаль состоит из части кривой — границы подвижного препятствия — и отрезков прямых, касательных к границе препятствия.

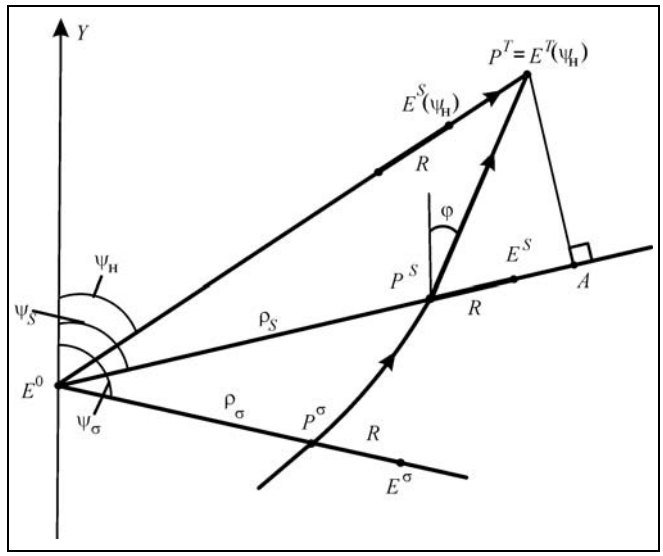


Рис. 3. Фрагмент многозвенной поисковой траектории

Назовем участок траектории после схода позиции преследователя со спирали заключительным прямолинейным участком поисковой траектории. На рис. 3 изображен фрагмент поисковой траектории, содержащий спиральный участок $P^\sigma P^S$ и заключительный прямолинейный участок $P^S P^T$; $t > s$. Здесь φ — направление движения преследователя на заключительном прямолинейном участке; ψ_σ и ψ_S — направления лучей, пересекаемых траекторией преследователя в моменты σ и s входа позиции преследователя на спираль и схода со спирали соответственно; E^σ и E^S — позиции цели на соответствующих лучах в указанные моменты времени; $E^S(\psi_н)$ и $E^T(\psi_н)$ — позиции цели на луче $(\psi_н)$ в момент s схода преследователя со спирали и в момент T реализации точечной встречи $P^T = E^T(\psi_н)$ соответственно; P^σ, P^S и P^T — положения преследователя в моменты σ, s и T;

$$\rho_s = v_E s - R. \quad (14)$$

Остальные обозначения совпадают с приведенными в тексте.

Запишем условие пересечения произвольного луча (ψ) и прямолинейной траектории преследователя после его схода со спирального участка. Так

как луч (ψ_S) и произвольный луч (ψ), $\psi_S > \psi$, исходят из одной точки E^0 и в момент s происходит R-встреча преследователя и точки $E^S(\psi_S)$, то удовлетворяющее ограничению (4) условие пересечения луча (ψ) в некоторый момент $t_п > s$ имеет вид:

$$\operatorname{tg}\psi = \left(\frac{\Delta x}{\Delta y}\right)_{t_п} = \frac{v_E t_п \sin\psi - (v_E s - R)\sin\psi_S - v_P \tau \sin\varphi}{v_E t_п \cos\psi - (v_E s - R)\cos\psi_S - v_P \tau \cos\varphi}, \quad (15)$$

где τ — длительность заключительного прямолинейного участка; φ — направление движения преследователя на этом участке. Из условия (15) находим:

$$\tau = \frac{(v_E s - R)\sin(\psi_S - \psi)}{v_P \sin(\psi - \varphi)}.$$

В случае движения цели вдоль луча (ψ), в момент $t_п = s + \tau$ пересечения луча (ψ) траекторией преследователя объекты разделяет расстояние

$$D(t_п, \varphi, \psi) = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = \left[v_E s + (v_E s - R)\frac{\beta \sin(\psi_S - \psi) - \sin(\psi_S - \varphi)}{\sin(\psi - \varphi)}\right].$$

Направление прямолинейного движения преследователя φ, реализующее точечную встречу $P^T = E^T(\psi_н)$, находится как корень уравнения $D(T, \varphi, \psi_н) = 0$.

Перейдем к анализу заключительного прямолинейного участка поисковой траектории, $t > s$.

По теореме синусов для $\Delta E^0 P^S P^T$ (см. рис. 3):

$$\frac{\rho_S + R + v_E \tau}{\sin\gamma} = \frac{\rho_S}{\sin(\psi_н - \varphi)} = \frac{v_P \tau}{\sin(\psi_S - \psi_н)}.$$

Из этой системы равенств находим величины:

$$\tau = \frac{R\sin(\psi_S - \psi_н)}{v_P \sin\gamma[1 - \cos(\psi_S - \psi_н)]}, \quad (16)$$

$$\rho_s = \frac{R\sin(\psi_н - \psi_S + \gamma)}{\sin\gamma[(1 - \cos(\psi_S - \psi_н))]}, \quad (17)$$

где ρ_s определяется формулой (14).

Равенство (16) допускает следующую геометрическую интерпретацию. Опустим из точки $P^T = E^T(\psi_н)$ перпендикуляр на луч (ψ_S), основание перпендикуляра — точка A. Образуются два прямоугольных треугольника: $\Delta E^0 P^T A$ и $\Delta P^S P^T A$ с общим катетом $P^T A$. Так как $\angle P^T P^S A = \psi_s - \varphi = \gamma$, то величина $v_P \tau \sin\gamma$ есть длина катета $P^T A$, а величина

$$\frac{v_P \tau \sin\gamma}{\sin(\psi_S - \psi_н)}$$

есть длина гипотенузы $\Delta E^0 P^T A$. Следовательно, величина

$$\frac{v_P \tau \sin\gamma[1 - \cos(\psi_S - \psi_н)]}{\sin(\psi_S - \psi_н)} = R$$

равна разнице длин гипотенузы $\Delta E^0 P^T A$ и катета $E^0 A$ этого же треугольника. С другой стороны,

$$E^0 P^T - E^0 A = (\rho_S + R + v_E \tau) - (\rho_S + v_P \tau \cos\gamma) = R + (v_E - v_P \cos\gamma)\tau = R$$

при любых значениях τ.

Длительность интервала времени движения на спиральном участке поисковой траектории определяется соотношением [7]:

$$\tau_c = \frac{\sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2\gamma}}{v_P \operatorname{ctg}\gamma}(\rho_S - \rho_\sigma), \quad (18)$$

где σ и s — моменты, соответствующие началу и концу спирального участка.

Формула (16), определяющая длительность времени движения на прямолинейном участке, может быть переписана в более простом виде:

$$\tau = \frac{R}{v_P \sin\gamma} \operatorname{ctg}\frac{\psi_S - \psi_н}{2}.$$

Выразим длительность τ через полярный радиус $\rho_S = v_E s - R$. Для этого перепишем соотношение (18) следующим образом:

$$\frac{\rho_S \sin\gamma}{R} = \frac{\sin(\psi_н - \psi_S + \gamma)}{1 - \cos(\psi_S - \psi_н)} = \frac{1}{2}(x^2 - 1) - x\cos\gamma, \quad (19)$$

где $x = \operatorname{ctg}\frac{\psi_S - \psi_н}{2}$, $\cos\gamma = \beta$.

Решение квадратного уравнения (19) имеет вид

$$x = \operatorname{ctg}\gamma + \sqrt{\sin^{-2}\gamma + 2\rho_S R^{-1}}. \quad (20)$$

Из выражений (19) и (20) окончательно находим

$$\tau = \frac{R}{v_P \sin\gamma}(\operatorname{ctg}\gamma + \sqrt{\sin^{-2}\gamma + 2\rho_S R^{-1}}).$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Приведена постановка задачи об оптимизации траектории преследователя, осуществляющего обнаружение подвижного объекта и сближение с ним по информационному признаку «след». Установлена общая структура программной поисковой траектории. Показано, что оптимальная программная поисковая траектория состоит из одного или нескольких прямолинейных участков и не более чем одного спирального участка. При этом спиральный участок может отсутствовать, а в том случае, когда спиральный участок имеется, он находится между прямолинейными участками траектории. Во второй части статьи будет приведено решение задачи об оптимизации поисковой траектории для произвольных начальных условий.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Benkoski S., Monticino M., Weisinger J.* A Survey of the Search Literature // Naval Research Logistics. — 1991. — Vol. 38, — N 3. — P. 469—494.
2. *Беланов Ю.А.* Аналитическая оценка производительности поиска кильватерного следа // Вопросы оборонной техники. — 1997. — Сер. 9. — Вып. 2 — 3. — С. 51—54.
3. *Кинематическая* задача поиска подвижного объекта по информационному признаку «след» / Т.Г. Абрамянц, Ю.А. Беланов, Е.П. Маслов, В.П. Яхно // Подводное морское оружие. — 2008. — Вып. 12. — С. 95—102.
4. *Айзекс Р.* Дифференциальные игры. — М.: Мир, 1967.
5. *Брайсон, Хо Ю-Ши.* Прикладная теория оптимального управления. — М.: Мир, 1972.
6. *Летов А.М.* Динамика полета и управление. — М.: Наука, 1969.
7. *Савелов А.А.* Плоские кривые. — М.: Физматгиз, 1960.
8. *Петросян Л.А., Гарнаев А.Ю.* Игры поиска. — СПб.: Изд-во СПбГУ, 1992.
9. *Вишневецкий Л.С., Меликян А.А.* Оптимальное преследование на плоскости при наличии препятствия // Прикладная математика и механика. — 1982. — Т. 46, вып. 4. — С. 613—620.
10. *Шевченко И.И.* Простейшая игра преследования на плоскости в позициях, разделенных препятствием // Автоматика и телемеханика. — 1989. — № 12. — С. 39—48.
11. *Collision* Avoidance by a Ship with a Moving Obstacle: Computation of feasible Command Strategies / Y. Yavin, C. Frangos, T. Miloh, G. Zilman // Journal of Optimization Theory and Applicftions. — 1997. — Vol. 93, N 1. — P. 53—66.
12. *Glizer Y.Y.* Optimal Planar Interception with Fixed End Conditions: Closed-Form Solution/ // Journal of Optimization Theory and Applications. — 1996. — Vol. 88, N 3. — P. 503—539.
13. *Hybrid* Geodesics as Opimal Solutions to the Collision-Free Motion Planning Problem / J. Hu, M. Prandini, R. Johansson, S. Sastry // Lecture Notes in Computer Science. — Berlin, Springer: 2001. — Vol. 2034. — P. 305—318.

Статья представлена к публикации членом редколлегии Б.В. Павловым.

Абрамянц Тамара Гургеновна — канд. техн. наук, ст. науч. сотрудник, ☎(495) 334-91-81, ✉ abramnc@ipu.ru,

Беланов Юрий Арсеньевич — д-р техн. наук, пенсионер, работал в ЦНИИ автоматики и гидравлики, г. Москва,

Маслов Евгений Петрович — д-р техн. наук, зав. лабораторией, ☎(495) 334-91-81, ✉ maslovep@ipu.ru,

Яхно Виктор Павлович — канд. техн. наук, ст. науч. сотрудник, ☎(495) 334-88-91,

Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, г. Москва.

Содержание сборника "Управление большими системами", вып. 25, http://ubs.mtas.ru/

✓ ***Семьдесят*** лет становления и развития отечественной науки управления: Институту проблем управления — 70 лет

✓ ***Надеждин О.В., Заминова А.Р.*** Анализ связности динамики нагнетательных и добывающих скважин

✓ ***Андриевский Б.Р., Фрадков А.Л.*** Адаптивная синхронизация нелинейных систем одного класса при ограниченной пропускной способности канала связи

✓ ***Бурков В.Н., Цветков А.В., Сычев А.П.*** Механизмы стимулирования сокращения сроков реализации проектов при линейных функциях затрат

✓ ***Иващук О.А., Константинов И.С.*** Обеспечение адаптивного управления экологической безопасностью промышленно-транспортного комплекса

✓ ***Ильин В.Д.*** Модель нормализованной экономики (НЭк-модель): основы концепции

✓ ***Турганбаев Е.М., Козлова М.В.*** Идентификация региональных индустриальных кластеров и оценка их структурного воздействия на экономику региона (на примере ВКО)

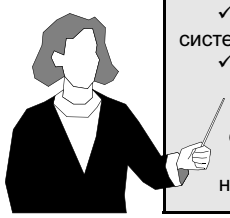
✓ ***Курдюков А.П., Тимин В.Н.*** Синтез робастного *H_inf*-регулятора для управления энергетической котельной установкой

✓ ***Шнайдер Д.А.*** Упреждающее управление по критерию энергетической эффективности в теплоэнергетических системах металлургического производства

✓ ***Андриенко А.Я., Тропова Е.И., Чадаев А.И.*** Проблемы управления при выведении на орбиту крупногабаритных грузов

✓ ***Андреев А.К., Камаев Д.А., Трахтенгерц Э.А.*** Экспертное прогнозирование последствий повреждения систем жизнеобеспечения

✓ ***Шаповалов А.А.*** Использование беспроводных сетей стандарта IEEE 802.16 (WiMAX) для построения канала передачи информации в системах управления безопасностью мореплавания



УДК 681.518.54; 004.3.001.4

ОЦЕНКА СЛОЖНОСТИ УПРАВЛЕНИЯ ДВИЖЕНИЕМ ПО ИЗВЕСТНОМУ МАРШРУТУ

В.А. Твердохлебов

Предложен метод оценки сложности управления движением по заданному маршруту, учитывающей числовые показатели сложности правил управления на отдельных участках маршрута, число смен правил управления и длины участков маршрута, на которых отдельные правила действуют без изменений. Разработана математическая структура в форме спектра числовых показателей, характеризующего варианты определения кода маршрута рекуррентными формами различных порядков. На основе числовых показателей спектра строится оценка сложности управления движением по известному маршруту.

Ключевые слова: сложность управления движением, маршрут, объект движения, орган управления, код участка, код маршрута, геометрические свойства маршрута, рекуррентная форма, правило управления.

ВВЕДЕНИЕ

Оценку сложности управления движением при известных (заданных) свойствах маршрута, объекта движения и органа управления предлагается определять на основе построения и анализа кода, содержащего информацию о геометрических и физических свойствах маршрута, информацию о свойствах объекта движения и органа управления. Для построения оценки разработан спектр числовых показателей, характеризующих рекуррентные формы, в различных вариантах определяющие код маршрута [1—4]. Рекуррентная форма рассматривается как формальная модель такого правила управления движением, в котором при движении по конкретному участку маршрута учитывается движение по некоторым предшествующим участкам, включая возможную подготовку объекта движения к движению на этом конкретном участке.

Таким образом, предполагается, что в коде маршрута представлены все выбранные для рассмотрения свойства маршрута (геометрические и физические), свойства объекта движения и свойства органа управления. Сложность управления движением по маршруту, представленному таким кодом, предполагается соответствующей сложности взаиморасположения элементарных кодов в коде маршрута. Точность оценки сложности управления движением ограничена этим предположением.

1. СПЕКТР ЧИСЛОВЫХ ПОКАЗАТЕЛЕЙ ОПИСАНИЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ РЕКУРРЕНТНЫМИ ФОРМАМИ

Спектр используется для оценки сложности управления движением при различных по разнообразию и сложности учитываемых факторах. Кроме этого, предполагается, что спектр применим к сети маршрутов с выбором на основе анализа показателей спектра оптимального маршрута. Возможны вычисления как в режиме реального времени движения, так и на основе предварительных вычислений. Спектр построен иерархически от показателей для приближенной оценки сложности (уровень $\Omega_0(\xi)$) до достаточно полной оценки на основе показателей уровня $\Omega_4(\xi)$. Промежуточные уровни спектра $\Omega(\xi) = <\Omega_0(\xi), \Omega_1(\xi), \Omega_2(\xi), \Omega_3(\xi), \Omega_4(\xi)>$ последовательно увеличивают множество числовых показателей, влияющих на оценку сложности правил управления движением. Числовые показатели спектра, с учетом уровней их расположения, определяются следующими формулами:

$\Omega_0(\xi) = <m_0(\xi)>$, где $m_0(\xi)$ — наименьший порядок рекуррентной формы, определяющей всю последовательность ξ;

$\Omega_1(\xi) = <d^1(\xi), d^2(\xi),..., d^{m_0}(\xi)>$ — набор наименьших длин префиксов последовательности ξ, задаваемых рекуррентными формами соответственно порядков 1, 2,..., m_0;

$\Omega_2(\xi) = <r^1(\xi), r^2(\xi),..., r^{m_0}(\xi)>$ — набор чисел смен рекуррентных форм порядков 1, 2,..., m_0, задающих всю последовательность ξ;

$\Omega_3(\xi) = <<d_1^1(\xi), d_2^1(\xi), ..., d^1_{r^1(\xi)+1}>, <d_1^2(\xi), d_2^2(\xi), ..., d^2_{r^2(\xi)+1}(\xi)>,..., <d_1^{m_0}(\xi) = |\xi|>>$ — набор наборов длин отрезков последовательности ξ, где $d_j^m(\xi)$— длина j-го отрезка в определении рекуррентной формой порядка m последовательности ξ;

Таблица 1

Спектр показателей сложности маршрута α

Уровни спектра	Числовые значения динамических параметров спектра Ω(α)
Ω_0	$m_0(\alpha) = 3$
Ω_1	$<d^1(\alpha) = 4,\ d^2(\alpha) = 23,\ d^3(\alpha) = 50>$
Ω_2	$<r^1(\alpha) = 14,\ r^2(\alpha) = 3,\ r^3(\alpha) = 1>$
Ω_3	$<\Omega_3^1(\alpha), \Omega_3^2(\alpha), \Omega_3^3(\alpha)>\ \Omega_3^1(\alpha) = <d_1^1(\alpha) = 3,\ d_2^1(\alpha) = 5,\ d_3^1(\alpha) = 2,\ d_4^1(\alpha) = 4,\ d_5^1(\alpha) = 3,\ d_6^1(\alpha) = 5,\ d_7^1(\alpha) = 3,\ d_8^1(\alpha) = 2,\ d_9^1(\alpha) = 6,\ d_{10}^1(\alpha) = 2,\ d_{11}^1(\alpha) = 5,\ d_{12}^1(\alpha) = 4,\ d_{13}^1(\alpha) = 1,\ d_{14}^1(\alpha) = 4>,\ \Omega_3^2(\alpha) = <d_1^2(\alpha) = 21,\ d_2^2(\alpha) = 24,\ d_3^2(\alpha) = 3>,\ \Omega_3^3(\alpha) = <d_1^3(\alpha) = 47>$

$\Omega_4(\xi)$ — набор числовых показателей, представляющих введенные веса как рекуррентных форм, так и наборов значений их аргументов.

Предположим, что для кодирования маршрутов α и β с учетом свойств маршрутов, объекта движения и органа управления достаточно множества элементарных кодов $C = \{c_0, c_1, c_2, ..., c_9\}$ участков маршрута и эти коды имеют вид:

$$\alpha = <c_3, c_1, c_4, c_1, c_5, c_9, c_2, c_6, c_5, c_3, c_5, c_8, c_9, c_7, c_9, c_3, c_2, c_3, c_8, c_4, c_6, c_2, c_6, c_4, c_3, c_3, c_8, c_3, c_2, c_7, c_9, c_5, c_0, c_2, c_8, c_8, c_4, c_1, c_9, c_7, c_1, c_6, c_9, c_3, c_9, c_9, c_3, c_7, c_5, c_1>$$

$$\text{и } \beta = <c_2, c_7, c_1, c_8, c_2, c_8, c_1, c_8, c_2, c_8, c_4, c_5, c_9, c_4, c_5, c_2, c_3, c_5, c_3, c_6, c_2, c_8, c_7, c_4, c_7, c_1, c_3, c_5, c_2, c_6, c_6, c_2, c_4, c_9, c_7, c_7, c_5, c_7, c_2, c_4, c_7, c_0, c_9, c_3, c_6, c_9, c_9, c_9, c_5, c_9>.$$

В явном виде вычисленный спектр Ω(α) показан в табл. 1. Для сравнения по сложности управления движением по маршрутам α и β при грубой оценке достаточно нулевого уровня спектра: $\Omega_0(\alpha) = 3$, $\Omega_0(\beta) = 5$ и $m_0(\alpha) < m_0(\beta)$. Полученное отношение $m_0(\alpha) < m_0(\beta)$ имеет следующую интерпретацию: управление движением по маршруту β (представленному кодом β) сложнее, чем управление движением по маршруту α (представленному кодом α). Более точные оценки могут быть получены на основе сравнения других уровней спектра.

2. МЕТОД ПОСТРОЕНИЯ ОЦЕНКИ СЛОЖНОСТИ УПРАВЛЕНИЯ

В работе [5] рассмотрен код маршрута планетохода, в котором свойства отдельных участков маршрута представлены геометрическими характеристиками — см. табл. 2 (автором данной статьи в табл. 1 геометрическая форма кодов участков маршрута расширена и дополнена буквенными обозначениями). Отмечается, что «одним из основных факторов, определяющих условия эксплуатации планетоходов, является рельеф поверхности планет, характеристики которого существенно влияют на конструкцию планетохода и методы его расчета. Для решения задач динамики движения целесообразно рельеф рассматривать в виде моделей различных по геометрии неоднородностей поверхности, являющихся причиной тех или иных, динамических процессов в системе «планетоход — поверхность» [1, *с. 14*]. Далее «...рельеф следует классифицировать как описательно ... так и качественно по геометрическим размерам преодолеваемых планетоходом неоднородностей» [1, *с. 15*].

Естественно предполагать, что управление преодолением препятствий различных форм и размеров требует соблюдения при управлении движением различных правил, учитывающих описание подготовки движущегося аппарата, подготовки оператора, формирования и распределения энергозатрат и др.

Метод построения оценки сложности управления движением состоит в следующем.

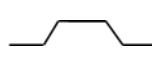
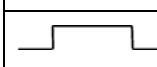
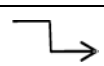
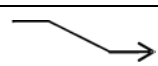
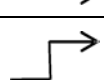
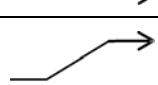
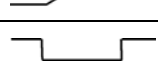
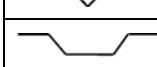
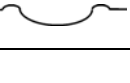
I этап. Построение кода маршрута:

— выбор элементарных кодов для определения геометрических свойств участков маршрута, его физических свойств и учитываемых свойств объекта движения и органа управления;

— построение геометрического кода маршрута;

Таблица 2

Условные обозначения и коды участков маршрута планетохода

Вид поверхности	Форма и вводимый код			
	Форма	Коды	Форма	Коды
Камень, валик		b_1, z_1		b_2, z_2
		b_3, z_3		b_4, z_4
Ступенчатое препятствие		c_5, z_5		c_6, z_6
		c_7, z_7		c_8, z_8
Ров		v_9, z_9		v_{10}, z_{10}
		v_{11}, z_{11}		v_{12}, z_{12}
Холм		g_{13}, z_{13}		g_{14}, z_{14}
Кратер без валиков		k_{15}, z_{15}		k_{16}, z_{16}
Кратер с валиками		k_{17}, z_{17}		k_{18}, z_{18}
Участок без препятствий		e_{19}, z_{19}		e_{20}, z_{20}

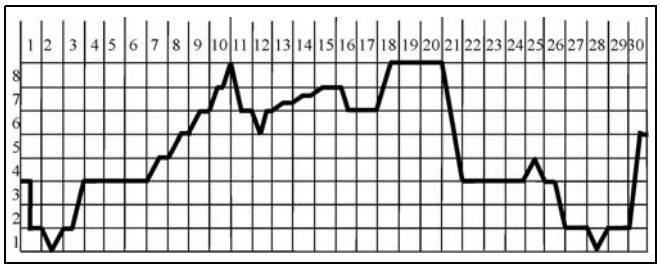


Рис. 1. График продольно-вертикального разреза рельефа в районе эксплуатации «Лунохода-1»

— преобразование геометрического кода маршрута для учета физических свойств участков маршрута;

— преобразование кода для учета свойств объекта движения;

— преобразование кода для учета свойств органа управления.

II этап. Построение функций φ_0, φ_1, φ_2 и φ_3, отображающих числовые показатели уровней Ω_0, Ω_1, Ω_2, Ω_3 и Ω_4 спектра в пространство R^+.

III этап. Построение системы весов для каждых из рассматриваемых рекуррентных форм F и наборов значений аргументов рекуррентной формы.

IV этап. Выбор критерия для построения общего показателя сложности, определяемого по показателям спектра (построение правил общей оценки сложности для управления движением на всем маршруте ξ на базе использования числовых показателей спектра).

Используя представленный на рис. 1 продольно-вертикальный разрез рельефа района эксплуатации «Лунохода-1» [5, *с. 29*] и грубое кодирование графика разреза, получаем код разреза рельефа. $\xi = c_5k_{15}c_7e_{19}e_{19}e_{19}c_7c_8c_8c_8c_6v_9c_8c_8c_8c_5e_{19}c_7e_{19}e_{19}c_5e_{19}e_{19}$ $e_{19}b_1c_5e_{19}v_9c_{19}c_7$.

В этом коде представлены только типы препятствий. Высота H холма, ступенчатого препятствия или камня, а также ширина L рва или кратера и расстояние между граничными точками в основании холма должны учитываться при оценке препятствия. Эти показатели можно выразить значениями переменных. Например, в коде ξ первый знак c_5 и двадцать первый знак c_5 сопоставлены различным по сложности ступенчатым препятствиям. Более точное описание рельефа требует учета конкретных значений показателей H и L в последовательности ξ для каждого отрезка маршрута, представленного кодовым знаком.

Основу данного метода составляют содержательные процедуры выбора элементарных кодов различных типов и формальные процедуры — кодирование маршрута и вычисление показателей спектра.

3. ОЦЕНКА СЛОЖНОСТИ УПРАВЛЕНИЯ ДВИЖЕНИЕМ НА АВТОДРОМАХ

Для сравнения по сложности управления движением болидов двух трасс — автодрома «Interlagoc» (Бразилии) и автодрома «Catalunya Montmello» (Испания) — в качестве геометрических характеристик трасс выбирем элементарные коды, изображенные на рис. 2. В кодах ξ_1 и ξ_2, представляющих эти трассы, однобуквенные коды вида a_i обозначают участки, которым сопоставлены геометрические кривые, изображенные на рис. 2. После кодирования трасса автодрома «Interlagoc» получает код

$$\xi_1 = (a_5)^8a_4(a_5)^4a_2(a_5)^2a_2a_5a_2(a_5)^3a_2(a_5)^2a_1a_4(a_5)^2a_1a_1$$
$$(a_5)^2a_2a_1(a_5)^6a_3a_5a_3(a_5)^{11}a_2a_5a_2a_2.$$

Кодирование трассы автодрома «Catalunya Montmello» дает код

$$\xi_2 = (a_5)^{13}a_2a_4(a_5)^2a_4a_4a_4a_4(a_5)^3a_2a_5a_4(a_5)^2a_2(a_5)^2a_4a_5$$
$$a_1a_4(a_5)^3a_2(a_5)^7a_1a_5a_3a_3a_5a_3(a_5)^2a_4a_4(a_5)^3a_4a_4.$$

Физические свойства трасс определяются как свойства поверхности трасс, температурные показатели на участках трассы, влажность и др. Эти свойства наносятся на код трассы, в рассматриваемом случае добавлением знака «′»:

$$\xi_1' = (a_5')^8a_4'(a_5')^4a_2'(a_5')^2a_2'a_5'a_2'(a_5')^3a_2'(a_5')^2a_1'a_4'$$
$$(a_5')^2a_1'a_1'(a_5')^2a_2'a_1'(a_5')^6a_3'a_5'a_3'(a_5')^{11}a_2'a_5'a_2'a_2',$$
$$\xi_2' = (a_5')^{13}a_2'a_4'(a_5')^2a_4'a_4'a_4'a_4'(a_5')^3a_2'a_5'a_4'(a_5')^2a_2'$$
$$(a_5')^2a_4'a_5'a_1'a_4'(a_5')^3a_2'(a_5')^7a_1'a_5'a_3'a_3'a_5'a_3'(a_5')^2a_4'a_4'$$
$$(a_5')^3a_4'a_4'.$$

Каждый код a_i' интерпретируется как набор значений показателей геометрических и физических свойств участка a_i.

Простейший вариант определения свойств болида представляется скоростями входа болида на участок и выхода с участка, что определено практикой эксплуатации автодромов. Эти данные можно учесть изменением некоторых однобуквенных кодов участков и интерпретации этих кодов. Кроме этого, в учитываемые свойства объекта движения включаются время набора скорости и торможения, устойчивость и др., что может быть представлено изменением уже имеющихся однобуквенных ко-

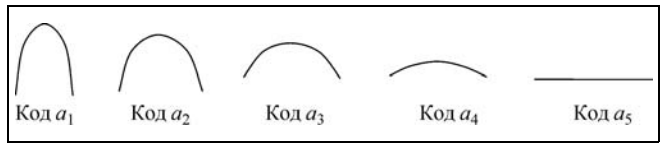


Рис. 2. Геометрическая интерпретация участков трасс автодромов в кодах ξ_1 и ξ_2

дов и соответствующим изменениям интерпретации кодов ξ_1'' и ξ_2'':

$$\xi_1'' = (a_5'')^8 a_4''(a_5'')^4 a_2''(a_5'')^2 a_2'' a_5'' a_2''(a_5'')^3 a_2''(a_5'')^2 a_1'' a_4''(a_5'')^2 a_1'' a_1''(a_5'')^2 a_2'' a_1''(a_5'')^6 a_3'' a_5'' a_3''(a_5'')^{11} a_2'' a_5'' a_2'' a_2'',$$

$$\xi_2'' = (a_5'')^{13} a_2'' a_4''(a_5'')^2 a_4'' a_4'' a_4'' a_4''(a_5'')^3 a_2'' a_5'' a_4''(a_5'')^2 a_2''(a_5'')^2 a_4'' a_5'' a_1'' a_4''(a_5'')^3 a_2''(a_5'')^7 a_1'' a_5'' a_3'' a_3'' a_5'' a_3'' (a_5'')^2 a_4'' a_4''(a_5'')^3 a_4'' a_4''.$$

Оценка *сложности* управления движением *сложного* объекта по *сложному* участку трассы требует предварительной подготовки объекта на предшествующих участках трасс. В связи с этим для осуществления движения объекта на сложном конкретном участке трассы должны быть заранее (во время движения на предшествующих участках) сформированы соответствующие свойства объекта.

Например, управление движением подводной лодки на конкретном участке с использованием описания функционирования подлодки, приведенного популярно и упрощенно в работе [6], подготавливается на предшествующих участках. Управление движением и функционированием подлодки в целом осуществляется через выполнение стандартных операций членами экипажа и автоматическими устройствами. Выполнение сложных стандартных операций подготавливается и обеспечивается в интервалы времени, предшествующие операциям. Это подтверждает правомерность применения математического аппарата рекуррентных форм для представления и анализа кодов маршрутов, т. е. сложность управления движением на участке связана с действиями на предыдущих участках. Перед отплытием подлодки должны быть осуществлены мероприятия, подготавливающие возможность отплытия, которые обеспечивают, например, следующие свойства подлодки: «...электроустановка работает в нормальном режиме, охлаждающие насосы работают на малой скорости, ..., вал вращается, ..., все проверки перед отплытием выполнены, ..., все подразделения готовы к погружению, кроме палубы и мостика ... ([6, *с. 21*])». В код маршрута следует включать действия, обеспечивающие функционирование подлодки, например, «запуск реактора, запуск машинного отделения, подготовку комнаты сонарного оборудования и т. д. ([6, *с. 7*])».

Подготовка объекта движения к преодолению конкретного участка маршрута распределяется по отдельным процедурам и отдельным участкам маршрута. В общем виде такие процедуры систематизированы в табл. 3, в которой в каждой клетке на пересечении v-й строки и t-го столбца размещены свойства $\beta_{v,t}$ объекта движения, которые должны быть сформированы на участке b_t для движения объекта по участку b_v.

Таким образом, для движения на участке b_v в табл. 3 для каждого из участков b_1, b_2,..., b_c указаны свойства объекта движения $\beta_{1,v}$, $\beta_{2,v}$, ..., $\beta_{c,v}$, которые должны быть сформированы соответственно на участках с номерами 1, 2, ..., c рассматриваемого маршрута. Включение этой информации в код маршрута приводит к форме кодов маршрута ξ_1''' и ξ_2'''. Для упрощения вычислений спектра рассмотрим сравнение по сложности маршрутов трасс автодромов «Формулы-1» «Interlagoc» и «Catalunya Montmello» только по кодам ξ_1 и ξ_2. Получаем табл. 4 числовых показателей спектра.

Анализ показателей спектров $\Omega(\xi_1)$ и $\Omega(\xi_2)$ по уровням Ω_0—Ω_2 показывает, что управление движением с использованием единого и общего правила на трассе автодрома «Interlagoc» требует использования информации о меньшем числе предшествующих участков, так как $\Omega(\xi_1) < \Omega(\xi_2)$. Выполнение правил, в которых учтены особенности движения по предшествующим восьми участкам в случае автодрома «Interlagoc», позволяет организовать управление движением на 52-х участках, а в случае движения по автодрому «Catalunya Montmello» наименьшее число предшествующих участков, которые учитываются в правилах управлением движением на 52-х (и остальных участках), равно 13. Наибольшее число смен правил управления дви-

Таблица 3

Таблица распределения процедур подготовки объекта к движению на конкретном участке

	b_1	...	b_{v-1}	b_v	b_{v+1}	...	b_c
b_1	$\beta_{1,1}$	...	$\beta_{1,v-1}$	$\beta_{1,v}$	$\beta_{1,v+1}$	...	$\beta_{1,c}$
...	...	...	...	...	...	...	...
b_{v-1}	$\beta_{v-1,1}$	...	$\beta_{v-1,v-1}$	$\beta_{v-1,v}$	$\beta_{v-1,v+1}$	...	$\beta_{v-1,c}$
b_v	$\beta_{v,1}$	...	$\beta_{v,v-1}$	$\beta_{v,v}$	$\beta_{v,v+1}$	...	$\beta_{v,c}$
b_{v+1}	$\beta_{v+1,1}$	...	$\beta_{v+1,v-1}$	$\beta_{v+1,v}$	$\beta_{v+1,v+1}$	...	$\beta_{v+1,c}$
...	...	...	...	...	...	...	...
b_c	$\beta_{c,1}$	...	$\beta_{c,v-1}$	$\beta_{c,v}$	$\beta_{c,v+1}$	...	$\beta_{c,c}$

жением, т. е. рекуррентных форм в определении кода маршрута, требуется для управления движением по трассе автодрома «Catalunya Montmello». Сравнение показателей спектров позволяет сделать вывод, что управление движением по трассе автодрома «Interlagoc» проще, чем управление движением по трассе автодрома «Catalunya Montmello».

Полное исключение человеческого фактора при управлении движением сложного объекта на достаточно сложных маршрутах невозможно, так как невозможно включить в формальные правила все разнообразие ситуаций, которые возникают в зависимости от свойств трасс, объектов движения и органа управления.

Предлагаемый подход к оценке сложности управления движением ограничен предположением, что маршрут известен и зафиксирован. В методе построения оценки учитываются только некоторые общие свойства органа управления, представленные в разработанном спектре числовых показателей, характеризующих взаиморасположение элементов в последовательности. В зависимости от цели и условий управления движением строятся все или некоторые уровни спектра.

При определении последовательности ξ рекуррентной формой порядка $m < m_0$ для нахождения этой последовательности требуется более одной рекуррентной формы. Это означает, что одного правила управления движением, имеющего «глубину» m, недостаточно, и в общем правиле движения по всему маршруту должны содержаться различные правила «глубины» m. Число смен правил «глубины» m, где $m \in \{1, 2, ..., m_0 - 1\}$, при определении последовательности ξ, дает важную характеристику сложности общего и единого правила. Число отдельных участков маршрута, проходимых объектом движения без изменения правила, соответствует части кода маршрута ξ, определяемой отдельной рекуррентной формой. Имеются и другие связи правил и их предполагаемых математических моделей в виде рекуррентных форм.

Таблица 4

Числовые показатели спектров (для автодромов «Interlagoc» и «Catalunya Montmello»

Уровень спектра	Числовые значения показателей спектра	
	«Interlagoc»	«Catalunya Montmello»
Ω_0	$m_0(\xi_1) = 11$	$m_0(\xi_1) = 13$
Ω_1	$d^1(\xi_1) = 8$, $d^2(\xi_1) = 8$, $d^3(\xi_1) = 8$, $d^4(\xi_1) = 8$, $d^5(\xi_1) = 8$, $d^6(\xi_1) = 8$, $d^7(\xi_1) = 8$, $d^8(\xi_1) = 52$, $d^9(\xi_1) = 55$, $d^{10}(\xi_1) = 55$, $d^{11}(\xi_1) = 59$	$d^1(\xi_1) = 13$, $d^2(\xi_1) = 13$, $d^3(\xi_1) = 13$, $d^4(\xi_1) = 13$, $d^5(\xi_1) = 13$, $d^6(\xi_1) = 13$, $d^7(\xi_1) = 13$, $d^8(\xi_1) = 13$, $d^9(\xi_1) = 13$, $d^{10}(\xi_1) = 13$, $d^{11}(\xi_1) = 13$, $d^{12}(\xi_1) = 13$, $d^{13}(\xi_1) = 62$
Ω_2	$r^1(\xi_1) = 20$, $r^2(\xi_1) = 14$, $r^3(\xi_1) = 12$, $r^4(\xi_1) = 8$, $r^5(\xi_1) = 6$, $r^6(\xi_1) = 5$, $r^7(\xi_1) = 4$, $r^8(\xi_1) = 3$, $r^9(\xi_1) = 2$, $r^{10}(\xi_1) = 2$, $r^{11}(\xi_1) = 1$	$r^1(\xi_1) = 23$, $r^2(\xi_1) = 13$, $r^3(\xi_1) = 8$, $r^4(\xi_1) = 7$, $r^5(\xi_1) = 4$, $r^6(\xi_1) = 4$, $r^7(\xi_1) = 3$, $r^8(\xi_1) = 2$, $r^9(\xi_1) = 2$, $r^{10}(\xi_1) = 2$, $r^{11}(\xi_1) = 2$, $r^{12}(\xi_1) = 2$, $r^{13}(\xi_1) = 1$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ: КРАТКИЕ ВЫВОДЫ

Предложен подход к оценке сложности управления движением по заданному маршруту, при реализации которого определяются характерные стандартные участки маршрута и их коды. Для кода всего маршрута вычисляются числовые показатели, представляющие свойства ломаной линии, соответствующей маршруту. Геометрические и физические свойства маршрута определяются кодами отдельных участков маршрута. Свойства объекта движения наносятся на код маршрута на основе его покрытия подпоследовательностями, каждая из которых состоит из трех частей, имеющих следующую интерпретацию:

— свойства, формируемые на предшествующих участках;

— свойства, требующиеся для движения по рассматриваемому участку;

— восстанавливаемые свойства объекта движения.

Разработан специальный спектр числовых показателей, который числовыми структурами характеризует все рассмотренные варианты кодов управления движением по известному маршруту. Сложность правил управления движением оценивается по числовым показателям рекуррентных форм, определяющих взаиморасположение знаков кода.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Твердохлебов В.А.* Геометрические образы законов функционирования автоматов. — Саратов: Научная книга, 2008. — 183 с.
2. *Твердохлебов В.А.* Геометрические образы конечных детерминированных автоматов // Изв. Саратовского гос. ун-та. — 2005. — Т. 5, вып.1. — С. 141—153.
3. *Твердохлебов В.А.* Спектры числовых характеристик фазовых картин объектов диагностирования // Радіоелектронні і комп'ютерні системи. — 2008. — № 5. — С. 148—155.
4. *Твердохлебов В.А.* Сложность управления движением по заданному маршруту // Там же. — 2009. — № 5. — С. 116—120.
5. *Динамика* планетохода / Е.В. Авотин, И.С. Болховитинов, А.Л. Кемурджиан и др. — М.: Наука, 1978. — 438 с.
6. *Димеркурио М., Бенсон М.* Подводные лодки. — М.: АСТ; Астрель, 2007. — 352 с.

Статья представлена к публикации членом редколлегии В.Ю. Рутковским.

Твердохлебов Владимир Александрович — д-р техн. наук, гл. науч. сотрудник, Институт проблем точной механики и управления РАН, г. Саратов, ☎(8452) 22-10-42, ✉ tverdokhlebovva@list.ru.

УДК 330:001

О МЕТОДОЛОГИЧЕСКОМ ОБОСНОВАНИИ НАУКИ И ПРАКТИКИ ЭКОНОМИЧЕСКОГО АНАЛИЗА ХОЗЯЙСТВЕННОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ

А.И. Алексеева

На основе модели структуры деятельности повышена определенность понятий и категорий экономического анализа хозяйственной деятельности: предметной области; объекта данной науки и практики; субъектов; средств и предметов научной и практической деятельности; целей и результатов деятельности, а также содержания прямых и обратных связей между наукой, практикой и объектом исследования — организацией.

Ключевые слова: методология, анализ хозяйственной деятельности, определение объекта и предмета, классификация структуры научной и практической деятельности.

ВВЕДЕНИЕ

Экономическая наука справедливо претендует на центральное место среди всех общественных наук, и действительно, в современном обществе именно экономика становится фундаментом — структурой общества [1]. Трансформации в реальной экономике, политической сфере и общественном сознании в России разрушили сложившуюся ранее систему отношений между экономической наукой и практикой. Изменился и характер спроса на экономические знания.

Проведенный нами анализ десятков современных учебников по экономическому и комплексному экономическому анализу показал отсутствие единообразия взглядов авторов не только на определение понятий комплексного экономического анализа, но и экономического анализа, объекта и предмета данной науки. Это говорит о том, что не случайно данные категории не сформировались. В настоящее время в недрах экономической науки действуют несколько тенденций, которые отражают, с одной стороны, противоречия в самой науке, а с другой — тот кризис, в котором экономика оказалась уже много лет назад. Одна из этих тенденций такова: нерешенность фундаментальных, базовых проблем на фоне тончайших исследований всяких несущественных мелочей [2]. Выход из кризиса экономической науки видится в углублении ее методологии. Сказанное обусловливает своевременность и необходимость развития методологического обоснования экономического анализа хозяйственной деятельности (АХД) как направления экономической науки, наиболее приближенного к практике.

1. ПРОБЛЕМЫ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ОБЪЕКТА И ПРЕДМЕТА ИССЛЕДОВАНИЯ В НАУКЕ И ПРАКТИКЕ

Первый и наиболее важный этап в определении АХД как науки и практики состоит в определении объекта и предмета исследования. Сопоставим эти определения на основе некоторых наиболее известных учебников (табл. 1).

Неоднозначность формулировок, представленных в таблице, говорит о необходимости повышения обоснованности данных основополагающих понятий.

Объект исследования — это совокупность связей, отношений и свойств, существующая объективно и служащая источником необходимой для исследователя информации [3]. А.С. Мамзин определяет объект исследования как явление или группу явлений, существующих вне и независимо от чьего-либо сознания. Объекты исследования могут быть как материальными, так и нематериальными по своей природе. Их независимость от

сознания заключается не в том, что они являются обязательно вещественными или энергетическими образованиями (они могут быть и явлениями психической жизни, духовной культуры), а в том, что они существуют вне зависимости от того, известно или неизвестно о них что-либо людям [4].

В отличие от объектов, предметом исследования отдельных наук являются не целостные природные и социальные явления, а отдельные их стороны и свойства, отдельные их «проекции» в человеческое сознание. Отдельные научные дисциплины заняты изучением отдельных «срезов» исследуемых объектов. Многообразие возможных «срезов» исследования объектов порождает многопредметность научного знания. Каждый из предметов создает свой понятийный аппарат, свои специфические методы исследования, свой язык.

Из сказанного следует, что объектом, существующим в реальном мире и не зависящим от сознания исследователей, в нашем случае является хозяйствующий субъект (организация, предприятие). Предприятие может быть объектом исследования для многих наук, изучающих различные аспекты его деятельности: управление, экологию, организацию трудовых коллективов, состояние охраны труда и техники безопасности, технологическое, правовое, логистические, энергетическое, информационное и другие виды обеспечения его деятельности. Именно хозяйствующий субъект и служит объектом исследования АХД как науки, наряду с другими науками, изучающими его деятельность.

Хозяйственной назовем деятельность организации, связанную с производством и (или) продажей товаров, выполнением работ или предоставлением услуг. Анализ хозяйственной деятельности исследует не только внутреннюю среду, но и внешнюю среду организации. Хозяйственная среда — это все другие организации, с которыми взаимодействует каждая организация в процессе своей хозяйственной деятельности. Поэтому более точным определением объекта данной науки (и практики) будет: организация, ее внутренняя и внешняя хозяйственная среда [5].

Исследуя предмет познания, А.М. Новиков отмечает: «С точки зрения науки, предмет познания

Таблица 1

Формулировки понятий «объект» и «предмет» в учебниках по экономическому анализу

Источник	Объект	Предмет
Шеремет А.Д. Теория экономического анализа: учебник. — М.: ИНФРА-М, 2005. — С. 17	Хозяйственная деятельность предприятий как совокупность производственных отношений, рассматриваемая во взаимодействии с технической стороной производства, с социальными и природными условиями	Одна из основных функций управления, отражающая технологический этап процесса принятия решений и сводящаяся к аналитическому обеспечению решений
Савицкая Г.В. Экономический анализ: учебник: — М.: Новое знание, 2003. — С. 7	Результаты хозяйственной деятельности	Причинно-следственные связи и зависимости экономических явлений и процессов
Пястолов С.М. Экономический анализ деятельности предприятия: уч. пособие. — М: Академический проект, 2004. — С. 36	Хозяйственные процессы предприятий, объединений, организаций	Предприятие, его организационная структура, активы и обязательства
Экономический анализ: учебник для вузов / Под ред. Л.Т. Гиляровской. — М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2004. — С. 5, 7	Хозяйственная деятельность организаций	Причинно-следственные связи экономических процессов
Герасимов Б.И. Экономический анализ: уч. пособие. — Тамбов: Изд-во ТГТУ, 2006. — Ч. 1. — С. 10	Отсутствует	Деятельность конкретных хозяйствующих субъектов любой формы собственности, направленная на получение прибыли или обеспечение сбалансированности расходов и доходов
Шадрина Г.В. Комплексный экономический анализ хозяйственной деятельности: уч. пособие. — М.: Моск. гос. ун-т экономики, статистики и информатики, 2004. — С. 7	То же	Хозяйственные процессы и конечные результаты

представляет собой совокупность свойств, связей и законов, изучаемых данной наукой и получивших выражение в определенных логических и знаковых формах. Этим предмет познания отличается от объекта познания, который существует независимо от познающего субъекта» [6, 7].

Аналитик, исследуя хозяйственные системы, имеет дело не непосредственно с системами, а лишь с информацией, отражающей функционирование и развитие организаций, их внутренней и внешней среды. По мнению С.М. Пястолова, экономический анализ изучает только те хозяйственные процессы, которые получили соответствующее отражение в системе экономической информации, т. е. данных бухгалтерского, производственного и статистического учета [8]. С нашей точки зрения, в данный перечень следует добавить любые виды информации, представленные на любых носителях, которые могут быть полезны для экономиста-аналитика в процессе АХД. И эта информация имеет определенные характеристики своевременности, полноты и достоверности, что оказывает существенное влияние на выбор методов исследования и его результаты.

Таким образом, предметом (исследования) данной науки и практики является информация о хозяйственной деятельности организации, но содержательная часть предмета анализа для теории и практики существенно отличается.

2. КЛАССИФИКАЦИЯ ЭЛЕМЕНТОВ СТРУКТУРЫ НАУЧНОЙ И ПРАКТИЧЕСКОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ

Для полноты описания структуры научной и практической составляющих может быть полезна схема общей структуры деятельности (рис. 1). Структура деятельности — целостное единство компонентов и их всесторонних связей, реализующих деятельность — включает в себя цель, средства, результат и сам процесс [9]. А.П. Юдин отмечает сложность взаимосвязи элементов структуры деятельности: «Природа деятельности определяется сложным взаимодействием цели, средств и результата деятельности».

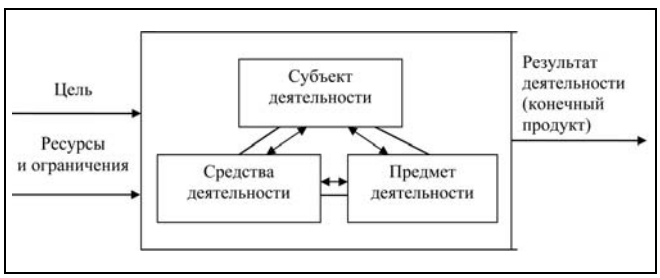


Рис. 1. Схема общей структуры деятельности [10]

Важным элементом приведенной модели является цель. В современной философии цель понимается как образ желаемого будущего [11]. Деятельность носит целенаправленный характер, т. е. пока нет цели — нет и деятельности, появляется цель — может начинаться деятельность. Более того, сознательно формулируемая цель служит основанием деятельности. Вместе с тем отметим, что хотя схема общей структуры деятельности «...включает в себя цель, средство, результат и сам процесс», их основание находится вне деятельности [9].

Цель представляет собой информационный образ конечного продукта (результата) деятельности. Результат деятельности — это то, что получает человек в итоге деятельности. Продукт деятельности может совпадать с целью деятельности, но может и не совпадать. В первом случае мы говорим, что в итоге деятельности субъект достиг цели, во втором — что цель не достигнута, и деятельность может быть продолжена.

«Деятельности» самой по себе не существует, ее кто-то осуществляет, деятельность имеет своего носителя. Носителем деятельности является ее субъект, который ставит цели преобразования объективной деятельности (объекта), проводит это целенаправленное преобразование, т. е. выполняет деятельность» [12].

Предмет деятельности — это любой материальный или идеальный объект, на который деятельность направлена (например, при восприятии) или который осмысленно и активно (т. е. с затратами собственной энергии) преобразуется субъектом (например, в практическом действии) [13].

Средство деятельности — это любой объект, который направляет деятельность субъекта и который активно и осмысленно (в соответствии с целью или мотивом) используется им.

Рассмотренная категория «деятельность» используются А.М. Новиковым и Д.А. Новиковым при определении методологии как самостоятельной практической науки [14]. Авторы определяют методологию как учение об организации деятельности и исследуют ее структуру. Они отмечают, что организация и научной, и практической деятельности представляет собой целостные системы с четко определенными логической структурой, характеристиками и процессом осуществления.

Существенно, с нашей точки зрения, замечание о том, что практическая деятельность является ведущим видом человеческой деятельности, и особенности и принципы практической деятельности распространяются на все другие виды деятельности без исключения. Однако в силу исторических

Таблица 2

Логическая структура научной и практической деятельности

Структурные компоненты	Организация научной деятельности	Организация практической деятельности
Субъект	Исследователь	Специалист-практик
Объект	Объект исследования, вычленяемый самим исследователем	Целостный трудовой (производственный) процесс
Предмет	Предмет исследования как идеализированный аспект объекта, как мысленный конструкт, выстраиваемый самим исследователем	Объект и предмет деятельности не различаются, выступают как синонимы
Результат	Объективно новое научное знание	Достижение новых эффективных результатов трудовой (производственной) деятельности

причин методология научной деятельности разработана гораздо полнее, и многие ее положения могут быть перенесены в методологию практической деятельности. Исследуя логическую структуру научной и практической деятельности любой науки, авторы определяют ее субъект, объект, предмет и результат (табл. 2).

Приложение данной классификации к АХД позволяет разделить данную предметную область на научную и практическую составляющие. Такое разделение необходимо, поскольку научная и практическая деятельности в общем случае представляют собой различные виды деятельности, имеющие разные цели, средства и предметы деятельности, и выполняются различными субъектами деятельности.

Применительно к научной деятельности, формальная модель общей структуры деятельности (см. рис. 1) может быль наполнена конкретным содержанием в соответствии с Федеральным законом Российской Федерации от 23 августа 1996 г. № 127-ФЗ «О науке и государственной научно-технической политике» [15] (табл. 3).

Данная классификация элементов структуры научной деятельности полностью применима для структуризации АХД как науки (табл. 4).

Таблица 3

Классификация элементов структуры научной деятельности

Элементы деятельности	Определения, соответствующие тексту Федерального закона
Определение деятельности	Научная (научно-исследовательская) деятельность — деятельность, направленная на получение и применение новых знаний
Цели деятельности	Фундаментальные научные исследования — экспериментальная или теоретическая деятельность, направленная на получение новых знаний об основных закономерностях строения, функционирования и развития человека, общества, окружающей природной среды; прикладные научные исследования — исследования, направленные преимущественно на применение новых знаний для достижения практических целей и решения конкретных задач
Результаты деятельности	Продукт научной и (или) научно-технической деятельности, содержащий новые знания или решения и зафиксированный на любом информационном носителе. Научный и (или) научно-технический результат, в том числе результат интеллектуальной деятельности, предназначенный для реализации
Субъекты деятельности	Научные работники сферы науки; научные группы, юридические лица, задачей которых является научная деятельность
Средства деятельности	Методы и средства проведения научных исследований и экспериментальных разработок
Ресурсы и ограничения	Правовое обеспечение — законодательство Российской Федерации и законодательства субъектов Российской Федерации. Финансовое обеспечение — финансирование научных исследований за счет средств федерального бюджета, бюджетов субъектов Российской Федерации, внебюджетных источников (собственных или привлеченных средств хозяйствующих субъектов и их объединений, а также средств заказчиков работ), иных источников в соответствии с законодательством Российской Федерации. Материальное обеспечение — имущество, передаваемое учредителями научной организации для осуществления деятельности, определенной учредительными документами. Информационное обеспечение — свобода доступа к научной и научно-технической информации

Таблица 4

Классификация элементов структуры анализа хозяйственной деятельности как науки

Элементы деятельности	Определения
Определение предметной области	Анализ хозяйственной деятельности как прикладная наука представляет собой деятельность по выработке и применению новых знаний об основных закономерностях строения, функционирования и развития организаций, а также о методологии как самой науки, так и практики экономического анализа
Цели деятельности	Выявление законов и закономерностей функционирования и развития организаций. Разработка методологии, а также разработка новых и совершенствование существующих методов и методик анализа хозяйственной деятельности организаций
Субъекты деятельности	Научные работники, научные группы (исследователи)
Предмет деятельности	Информация о состоянии науки и практики экономического анализа, смежных наук, функционировании и развитии организаций и их среды
Средства деятельности	Методы и средства проведения научных исследований и экспериментальных разработок
Результат деятельности	Новые знания о методологии науки и практики анализа, методах и методиках анализа хозяйственной деятельности организаций
Процесс деятельности	Процесс научного познания

Особенность науки как общественного института заключается в том, что она решает всеобщие задачи, а не задачи отдельных субъектов [16]. Практика же экономического анализа решает задачи применительно к конкретным хозяйствующим субъектам, действующим в определенных условиях. В связи с этим содержание элементов ее деятельности существенно отличается от науки (табл. 5).

На основании приведенных определений может быть дано обобщенное определение экономического анализа: АХД как наука и практика — это деятельность по разработке и совершенствованию методов и методик анализа, а также их применению для повышения обоснованности и эффективности управления организацией. Содержание основных категорий АХД представлено в табл. 6.

Рассмотренные понятия и определения позволили сформировать обобщенную схему взаимодействия науки АХД, его практики и хозяйствующего субъекта. Такое взаимодействие имеет информационную природу (рис. 2).

Структура научной деятельности представлена ее элементами:

- субъекты научной деятельности — научные работники, научные группы и коллективы, научные школы (исследователи);
- предмет деятельности — информация о состоянии науки и практики АХД, смежных наук, функционировании и развитии организаций и их среды;
- средства деятельности — средства и методы научного познания, методы и средства проведения научных исследований и экспериментальных разработок.

Элементы структуры научной деятельности взаимосвязаны процессом научного исследования.

Результаты научной деятельности в данном случае представляют собой опубликованные новые знания о законах и закономерностях хозяйственной деятельности организаций и практики

Таблица 5

Классификация элементов структуры анализа хозяйственной деятельности как практики

Элементы деятельности	Определения
Определение предметной области	Анализ хозяйственной деятельности как практика представляет собой деятельность по подготовке информации для повышения обоснованности и эффективности управленческих решений
Цели деятельности	Оценка хозяйственной деятельности организаций
Субъекты деятельности	Аналитики, консультанты
Предмет деятельности	Информация о хозяйственной деятельности организаций
Средства деятельности	Средства, методы и методики анализа хозяйственной деятельности организаций
Результат деятельности	Аналитический отчет и предложения по совершенствованию хозяйственной деятельности
Процесс деятельности	Процесс анализа хозяйственной деятельности организации

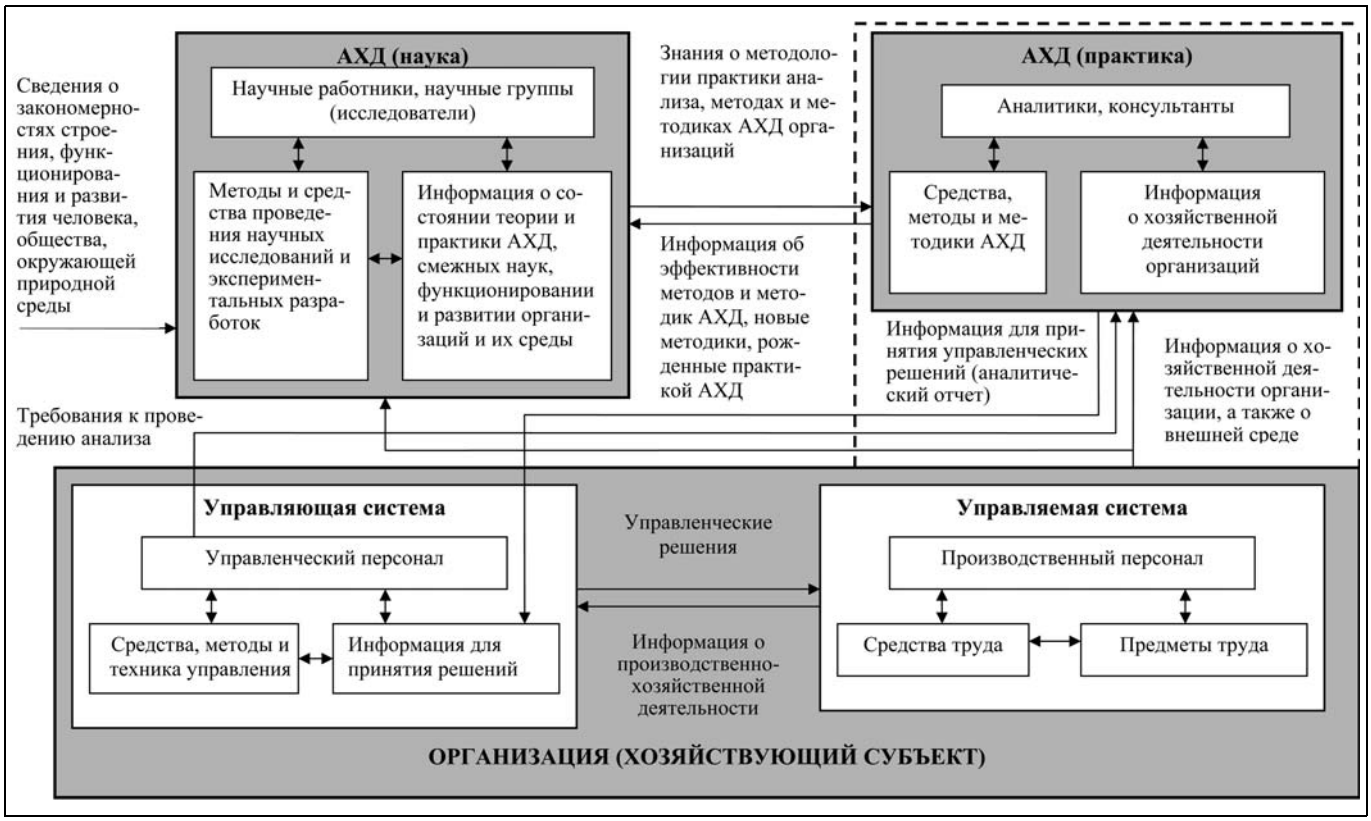


Рис. 2. Схема информационного взаимодействия теории и практики АХД и хозяйствующего субъекта

АХД, методологии науки и практики анализа, методах и методиках науки и практики АХД, а также о совершенствовании и развитии полученных ранее знаний. Новые знания о методологии теории, также являющиеся результатом научной составляющей АХД, предназначаются для самой науки.

Структура практической деятельности включает в себя:

- субъекты деятельности — внутренние и внешние относительно организации аналитики — экономисты предприятия, аудиторы, налоговые инспекторы и др.;
- предмет деятельности — информация о деятельности организаций, необходимая для проведения АХД;
- средства деятельности — средства, методы и методики АХД, разработанные и апробированные наукой. В практической деятельности могут быть разработаны новые, неизвестные науке средства, методы и методики, а также усовершенствованы ранее существующие.

Взаимосвязь элементов практики АХД обеспечивается процессом аналитической работы.

Аналитическая деятельность может осуществляться как в составе организации ее специалистами, так и внешними аналитиками, чья деятельность инициируется администрацией данной организации или другими заинтересованными лицами (конкурентами, контролирующими организациями). Результатом этой деятельности может быть

Таблица 6

Уточненные определения основных категорий анализа хозяйственной деятельности

Категория	Определение
Хозяйственная деятельность	Хозяйственной называется деятельность организации, связанная с производством и (или) продажей товаров, выполнением работ или предоставлением услуг
Экономический анализ хозяйственной деятельности	Научная и практическая деятельность по разработке и совершенствованию методов и методик экономического анализа, а также применению их для повышения обоснованности и эффективности управления организацией
Объект	Организация, ее внутренняя и внешняя среда
Предмет	Информация о хозяйственной деятельности организации

отчет, аналитическая записка или другие материалы, которые будут использованы при принятии управленческих решений теми, кто инициировал анализ.

Организация (хозяйствующий субъект) представлена в схеме управляющей и управляемой системами. Управляемая система является источником информации для науки и практики АХД, а также «потребителем» управленческих решений. Эта информация отражает как текущее состояние системы, так и ее изменения под воздействием управленческих решений.

Наука и практика связаны прямой и обратной связью. Прямой связью будем считать знания о методологии практики анализа, методах и методиках АХД, которые являются результатом (конечным продуктом) деятельности науки. Обратной связью служит информация об эффективности применяемых методов и методик, а также информация о новых методиках, рожденных практикой, которые должны быть осознаны наукой.

Практика АХД и хозяйствующий субъект также имеют прямую и обратную связи. Прямой связью служит информация о хозяйственной деятельности организации, а также о внешней среде ее функционирования и развития. Внешней средой для исследуемой организации являются все другие организации, с которыми она взаимодействует в процессе своей хозяйственной деятельности. Обратная связь — результат деятельности практики АХД — информация для принятия решений теми, кто инициировал анализ и определял его цели.

Наука АХД также связана с организацией прямой и обратной связью. Прямая связь несет ту же информацию, что и для практики АХД. Обратная связь от науки к хозяйствующему субъекту опосредована практикой АХД.

Прямая связь управляющей системы и практики АХД содержит требования к проведению анализа, если анализ выполняется в интересах организации. В этом случае обратная связь будет представлена аналитическим отчетом. Таких связей может не быть, если анализ выполняется для внешних пользователей.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Разработанная схема структуризации информационного взаимодействия науки анализа хозяйственной деятельности, его практики и хозяйствующего субъекта дает полную системную картину, позволяющую повысить целенаправленность и конструктивность всех элементов и связей модели, а также выделять и оценивать каждую из связей с точки зрения эффективности полученного научного и практического результата.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Веселов Ю.В.* Методологические основания экономической науки: почему сейчас нет политической экономии. — URL: http://www.m-economy.ru/artrub.php3?rub=399&artid=18741 (дата обращения: 18.01.2009).
2. *Балацкий Е.* Диалектика познания и новая парадигма экономической науки // Мировая экономика и междунар. отношения. — 2006. — № 7. — С. 73—79.
3. *Исследование* систем управления. — URL: http://www.managment.aaanet.ru/issys/ (дата обращения 13.01.08).
4. *Мамзин А.С.* Объект, предмет исследования и взаимодействие наук // Слово и мысль в междисциплинарном пространстве образования и культуры: Сб. статей памяти проф. В.В. Шаронова (1930 — 2004) / Под ред. М.С. Уварова и В.Я. Фетисова. — СПб.: Изд-во СПбГУ, 2005. — С. 39— 44.
5. *Комплексный* экономический анализ хозяйственной деятельности: уч. пос. / А.И. Алексеева, Ю.В. Васильев, А.В. Малеева, Л.И. Ушвицкий. — М.: КНОРУС, 2009. — 688 с.
6. *Новиков А.М.* Методология образования. — М.: Эгвес, 2006. — 488 с.
7. *Новиков А.М.* О роли науки в современном обществе. — URL: http://www.anovikov.ru/artikle/rol_n.htm (дата обращения 13.01.08).
8. *Пястолов С.М.* Экономический анализ деятельности предприятий: уч. пособие для вузов. — М.: Академический Проект, 2003. — 572 с.
9. *Юдин Э.Г.* Системный подход и принципы деятельности. — М.: Просвещение, 1978. — 369 с.
10. *Перегудов Ф.И.* Основы системного проектирования АСУ организационными комплексами. — Барнаул: ПО «Полиграфист», 1982. — 226 с.
11. *Чунаева А.А.* Категория цели в современной науке и ее методологическое значение: цель и деятельность. — Л.: Изд-во ЛГУ, 1979. — 147 с.
12. *Давыдов В.Н.* Теория деятельности и социальная практика // Вопросы философии. — 1996. — № 5. — С. 52—63.
13. *Беспалов Б.И.* Симметрия понятий «предмет» и «средство» в деятельностной психологии труда // Материалы Межрег. науч.-практ. конф. В сб.: Прикладная психология как ресурс социально-психологического развития современной России. — М., 2005. — С. 52—54.
14. *Новиков А.М., Новиков Д.А.* Методология. — М.: СИНТЕГ. — 2007. — 668 с.
15. *Федеральный* закон Российской Федерации от 23 августа 1996 г. № 127-ФЗ «О науке и государственной научно-технической политике». — URL: http://www.bestpravo.ru/fed1996/data03/tex15255.htm (дата обращения 13.06.08)
16. *Клейнер Г.Б.* Эволюция и модернизация теории предприятия // Вестник ВГУ. Сер.: Экономика и управление фирмой. — 2004. — № 1. — С. 123—133.

Статья представлена к публикации членом редколлегии Р.М. Нижегородцевым.

Алексеева Алла Илларионовна — канд. техн. наук, доцент, Северо-Кавказский государственный технический университет, филиал в г. Пятигорске, ☎(879) 39-61-03, ✉ alal@kmv.ru.

УДК 007(061.3)

ИДЕНТИФИКАЦИЯ СИСТЕМ НА ПУТИ СОЗДАНИЯ МЕТОДОЛОГИЧЕСКИХ И ЛОГИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ ОСНОВ НАУКОЕМКИХ ТЕХНОЛОГИЙ СТРУКТУРНОЙ ИДЕНТИФИКАЦИИ

По материалам VIII международной конференции SICPRO'09

ВВЕДЕНИЕ

В Москве, в Институте проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, 26—30 января 2009 г. состоялась VIII международная конференция «Идентификация систем и задачи управления» SICPRO'09. В ее организации участвовали Институт проблем управления, Российский национальный комитет по автоматическому управлению, Российский фонд фундаментальных исследований (проект РФФИ 09-01-060005), Отделение энергетики, машиностроения, механики и процессов управления Российской академии наук.

Цели конференции:

— подвести итоги достижений в области разработки методологических и математических основ структурной, параметрической и непараметрической идентификаций;

— обсудить результаты и проблемы применения математических методов для решения актуальных практических проблем;

— выделить наиболее перспективные направления исследований и наметить пути их дальнейшего развития;

— скоординировать и объединить усилия специалистов, заинтересованных в обсуждении и исследовании проблем идентификации, и способствовать установлению личных контактов между ними.

Ее основные темы:

— развитие теории и методологии идентификации, моделирования и управления;

— математические задачи теории управления;

— параметрическая идентификация;

— непараметрическая идентификация;

— структурная идентификация и экспертный анализ;

— задачи выбора и анализ данных;

— системы управления с идентификатором;

— задачи идентификации в интеллектуальных системах;

— прикладные задачи идентификации систем;

— имитационное моделирование;

— методическое и программное обеспечение идентификации и моделирования;

— когнитивные аспекты идентификации;

— глобальные сетевые ресурсы поддержки процессов идентификации, управления и моделирования.

В программу конференции были включены три пленарных и 112 секционных докладов. Полные тексты 115 докладов (27 из них представлены исследователями, работающими в 11-ти зарубежных странах) опубликованы на компакт-диске, который официально зарегистрирован (с присвоением индекса ISBN) как сборник трудов конференции объемом 1879 с. и тиражом 500 экз. [1]. Отдельно изданы избранные труды SICPRO'09 [2] объемом 64 с., тиражом 250 экз. и программа конференции.

На конференции работали секции:

- Структурная идентификация;
- Параметрическая идентификация;
- Стохастические системы и непараметрическая идентификация;
- Промышленные приложения;
- Сложные системы;
- Адаптивные и робастные системы;
- Дискретные системы;

- Оптимизация и организационные системы;
- Интеллектуальные системы и информационные технологии;
- Аэрокосмические приложения.

В настоящем сообщении рассмотрены только некоторые научные аспекты SICPRO'09, его содержание практически полностью соответствует тексту определенных разделов обзора трудов и событий SICPRO'09, написанного для РФФИ. Автор выражает искреннюю признательность д-ру физ.-мат. наук А.В. Добровидову за полезные замечания и советы при подготовке указанного обзора.

1. ИДЕНТИФИКАЦИЯ И МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ЗНАНИЕ

Проблемы идентификации являются центральной темой примерно у половины докладов. В остальных работах исследование направлено на другие проблемы управления. Однако, и в этих докладах для полного раскрытия темы, как правило, изучаются отдельные аспекты идентификации. Тем не менее, есть доклады, в которых проблемы идентификации не обсуждаются и которые поэтому кажутся не имеющими к ним никакого отношения. В основном это работы, в которых рассматриваются фундаментальные математические проблемы теории автоматического управления. Представляется, что подобное понимание, правильно фиксируя различие в темах, не учитывает или не рассматривает как значимые некоторые центральные аспекты применения идентификации.

Известно, что основное назначение идентификации состоит в порождении нового эмпирического знания о реальном объекте в форме математической модели. Особенность идентификации как части процесса создания автоматической системы состоит в том, что она в этом процессе, образно говоря, выполняет функции посредника между объективной реальностью и фундаментальным математическим знанием теории автоматического управления. Идентификация как познавательная деятельность создает условия, необходимые исходные данные для практического применения математических методов синтеза систем автоматического управления и получения с помощью этих методов приемлемого математического описания проектируемой системы автоматического управления.

Наличие указанной посреднической функции отмечено еще в 2003 г.: «В чем сложность практического применения математического аппарата теории управления? Общеизвестно — в абстрактности и отсутствии наглядности основных математических понятий теории. Математические понятия настолько сильно отличаются от естественных для человека базисных понятий, что возникает необходимость в особой человеческой деятельности — идентификации, создающей возможность перехода от явлений реального мира в виртуальный мир математической теории, и обратно из виртуального мира в объективную реальность. В процессе идентификации создаются все описания реальности, необходимые для практического применения таких элементов математического аппарата, которые позволяют отыскать решение конкретной практической задачи» [3, *с. 4*].

Фундаментальное математическое знание в виде математических задач управления и методов их решения является главным средством разработки приемлемого математического описания проектируемой системы автоматического управления. Идентификация в процессе этой разработки выполняет, безусловно, очень важные и крайне необходимые функции, которые, по-видимому, следует все же рассматривать как вспомогательные.

2. ИДЕНТИФИКАЦИЯ СИСТЕМ И МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ЗНАНИЕ

Специалисты по проблемам идентификации должны не только владеть фундаментальным математическим знанием, но и быть знакомыми с новыми исследованиями в этой области. Поэтому наличие на конференциях SICPRO докладов по математическим задачам управления представляется не только желательным, но и необходимым. Особенно это важно для специалистов, которые придерживаются точки зрения, что лучшим измерителем качества идентификации служит система управления, спроектированная на основе математической модели, полученной в результате этой идентификации.

По-видимому, первым данную точку зрения высказал П. Эйкхофф: «Если основная цель состоит в проектировании системы управления, то представляется логичным оценивать точность идентификации по результатам функционирования созданной на основе идентификации объекта системы управления» [4, *с. 37*].

Математические исследования, инициированные благодаря такой точке зрения, требуют глубокого теоретического понимания процессов управления и применения математических методов, разработанных специально для решения математических задач управления. Все это знание в доступной для восприятия форме можно получить в процессе изложения и обсуждения докладов на конференциях SICPRO.

Отсутствие в явной форме постановок проблем идентификации не означает, что в неявном виде эти проблемы не присутствуют в содержании доклада и не анализируются в процессе его обсуждения. Вопрос состоит в том, как присутствующие на секции воспринимают содержание доклада? Например, на секциях «Структурная идентификация», «Параметрическая идентификация» постоянно в разных формах задается, по сути дела, один и тот же вопрос. С помощью каких средств и на основе каких данных можно получить значения буквенных констант, которые докладчик считает заданными или известными в формулировке математической задачи? Подобный вопрос в различных формах задается и на других секциях. В этом вопросе, по сути дела, изложена почти вся идея идентификационного подхода к анализу математического знания.

В рамках математики логический анализ предложений математической задачи обычно осуществляется для того, чтобы определить, удовлетворяет или нет формулировка задачи требованиям современного математического уровня строгости. Совершенно иные цели идентификационного анализа текста математической задачи и процесса ее решения. В полном объеме этот анализ содержит *три этапа*.

На первом этапе выделяются выражения метаязыка, с помощью которого постановщик задачи содержательно комментирует выражения объектного (математического) языка задачи, логического вывода и решения.

На втором этапе выделяются все буквенные константы объектного языка задачи, которые (а) в метаязыке характеризуются как заданные или известные или (б) постановщиком задачи подразумеваются заданными или известными, так как он использует эти константы в формальной записи решения на объектном языке. Буквенные константы, выделенные на этом этапе, называются заданными параметрами математической задачи.

Наконец, *на третьем этапе* анализируются традиционные возможности субъекта реальной идентификации самостоятельно отыскать приемлемые значения заданных параметров задачи. В частности, выделяются потенциально возможные реальные ситуации, в которых субъекту необходимо оказать методологическую, алгоритмическую и программную поддержку. На этом этапе также анализируются имеющиеся в науке предпосылки для создания новых математических методов предварительного выбора значений заданных параметров на основе измерений.

Представляется, что большинство исследуемых в настоящее время проблем идентификации были осознаны на теоретическом уровне с помощью интуитивно проведенного идентификационного анализа классических задач управления. В рамках идентификационного подхода каждый доклад по математическим задачам управления интерпретируется как постановка в неявной форме новых идентификационных проблем.

Идентификационный подход в отличие от логического подхода к анализу математического знания нацелен на выяснение и реализацию потенциальных возможностей практического использования фундаментального математического знания. Подобное взаимодействие между идентификацией систем и математикой, несомненно, способствует увеличению приложений математики и ее более активной роли в решении актуальных проблем практики.

3. ПЛЕНАРНЫЕ ДОКЛАДЫ

3.1. Синтез законов управления при ограничениях на управление и фазовые переменные

Одна из актуальных проблем теории управления всегда заключалась в учете возможных ограничений на фазовые переменные объекта и на управление. Для объектов третьего порядка и выше решение подобных задач представляет значительные трудности.

В пленарном докладе *Д.В. Баландина и М.М. Когана* [5] предложен новый подход к синтезу линейных законов управления, обеспечивающих выполнение заданных фазовых ограничений на переменные состояния и управление. В рамках этого подхода также осуществляется синтез законов управления вида линейной обратной связи по состоянию или по измеряемому выходу, обеспечивающих асимптотическую устойчивость системы автоматического управления. При этом модуль управляемого выхода объекта управления не превышает заданного значения и удовлетворяются фазовые ограничения, если таковые имеются.

Стабилизирующие регуляторы синтезируются на основе известной математической модели объекта управления в виде системы линейных стационарных обыкновенных дифференциальных уравнений состояния. Рассматриваются случаи полного и неполного измерения состояния, а также отдельно робастный случай, когда система уравнений состояния содержит неизвестную матричную функцию времени, удовлетворяющую для всех неотрицательных моментов времени заданному матричному неравенству.

Поставленная в докладе задача включает в себя, в частности, задачу стабилизации при фазовых

ограничениях, когда отсутствует управляемый выход; задачу ограничения максимального отклонения управляемого выхода, когда отсутствуют фазовые ограничения; задачу стабилизации и ограничения максимального отклонения управляемого выхода при ограниченном управлении, а также различные комбинации этих задач.

Подход основан на применении аппарата линейных матричных неравенств. Он позволяет при синтезе охватить всевозможные квадратичные функции Ляпунова и указать множество начальных значений траекторий, удовлетворяющих указанным требованиям.

В качестве иллюстративных примеров рассмотрены задачи стабилизации перевернутого маятника и синтеза линейного противоударного изолятора. Показано, что синтез линейного противоударного изолятора с помощью предложенного в докладе метода линейных матричных неравенств дает хорошее приближение к точному решению.

3.2. Анализ решений динамических и непрерывных периодических систем

В пленарном докладе *А.П. Афанасьева и С.М. Дзюбы* [6] исследованы проблемы существования и построения обобщенно-периодических решений динамических и непрерывных периодических систем.

Рассматривается следующая математическая задача. Пусть имеется нормальная система из n обыкновенных дифференциальных уравнений состояния, правой частью которой является векторная функция состояния и действительного переменного, интерпретируемого как время. Известно, что эта векторная функция определена и непрерывна со всеми своими частными производными по переменным состояния на прямом произведении числовой прямой и некоторого открытого подмножества n-мерного евклидова пространства. Кроме того, считается, что векторная функция является периодической функцией времени с периодом, равным единице.

Вопрос о существования у такой системы периодических или близких к ним решений весьма важен как для собственно теории дифференциальных уравнений, так и для ее приложений. Именно этот вопрос, в первую очередь, интересует авторов доклада. Второй вопрос — это проблема разработки метода и алгоритма отыскания этих решений в распределенной вычислительной среде с помощью символьных вычислений.

В исследовании поставленных проблем авторы опираются на три теоремы Х.Л. Массера [7—9]. Утверждение первой из них относится к случаю, когда порядок нормальной системы равен единице: если нормальная система имеет ограниченное решение, то она также имеет и периодическое решение с периодом, равным единице. Вторая теорема Массера не так очевидна. Пусть порядок нормальной системы равен двум и каждое решение этой системы определено для всех моментов времени, не меньших заданного. Тогда, если система имеет некоторое решение, ограниченное при этих моментах времени, то данная система имеет также и периодическое решение с периодом, равным единице. Третья теорема Массера представляет собой обобщение первых двух теорем на случай линейных систем произвольного порядка.

Справедливы ли теоремы Массера в произвольном нелинейном случае и, если нет, какие именно решения будут определять ситуацию типического поведения? Поиск ответа на этот вопрос длился пятнадцать лет. Цель настоящего доклада состояла в кратком изложении полученных за эти годы результатов.

Авторы проанализировали придуманное ими многомерное обобщение второй теоремы Массера и с помощью контрпримеров показали, что оно неверно. Это привело к определению понятия обобщенно-периодического решения, характеризующего ситуацию типического поведения решений нормальной системы. Центральный результат состоит в формулировке теоремы существования этого решения. Доказательство теоремы можно найти в книге [10].

В докладе рассмотрен частный вариант нормальной системы, когда ее правая часть не зависит от переменной времени. Для этого случая конкретизировано определение обобщенно-периодического решения и дана новая формулировка теоремы его существования.

Приведены наиболее важные виды периодических и близких к ним решений нормальной системы и ее изученного частного варианта. В предложенной классификации представлены девять видов решений.

Дан пример построения обобщенно-периодических решений в распределенной компьютерной среде с использованием символьных вычислений.

4. СТРУКТУРНАЯ И ПАРАМЕТРИЧЕСКАЯ ИДЕНТИФИКАЦИИ

4.1. Основные темы научных исследований

Анализ докладов, представленных на основных теоретических секциях, показал, что по ключевым признакам — решаемой задаче, используемым средствам и основному научному результату — доклады можно отнести к трем темам:

— методологические основы идентификации;

— математические основы структурной идентификации;

— математические основы параметрической идентификации.

Авторами докладов в основном являются сотрудники РАН и вузов, причем региональные научные организации представлены в составе секций не меньше, а иногда и значительно больше, чем московские научные центры. Наблюдается тенденция увеличения числа научных исследований, выполняемых совместно сотрудниками РАН и вузов.

4.2. Научные основы структурной идентификации и практика

Содержание докладов секций «Структурная идентификация» и «Параметрическая идентификация» существенно расширяет наше понимание основных причин трудностей теоретических исследований по структурной идентификации. Впервые в докладах и обсуждениях удалось выделить и обосновать как центральные две проблемы методологических основ структурной идентификации:

— разработка статистических задач построения оптимального алгоритма предварительного выбора размерностей векторных параметров математического описания объекта автоматизации;

— разработка методов организации идентификации на уровне оперирования математическими средствами.

Можно высказать следующие прогнозы. Представляется, что разработка наукоемких технологий структурной идентификации для ускорения процессов создания систем автоматического управления, а также распространение философии, методологии и математического аппарата научных основ идентификации на разработку систем другого типа существенно зависят от уровня изученности данных методологических проблем.

Известно, что основная трудность создания наукоемких технологий вызвана наличием значительного творческого компонента в процессах первоначального накопления модельных знаний об объекте автоматизации. Представляется, что «прояснение» указанных методологических проблем значительно облегчит формализацию содержательных представлений о структурной идентификации на основе языка и аппарата математики. Влияние субъекта идентификации на процесс идентификации, по-видимому, не уменьшится после проведенной формализации и частичной автоматизации. Однако это влияние можно будет локализовать с помощью ясно и четко поставленных вопросов, сформулированных на профессиональном языке субъекта. Причем основную часть структурной идентификации можно будет выполнить в рамках специального интерактивного программного комплекса.

В результате существенно расширится состав традиционных САПР благодаря добавлению специального интерактивного программного компонента. Он позволит непосредственно в рамках САПР оперативно реализовать структурную идентификацию объекта автоматизации, т. е. получить практически приемлемое приближение к неизвестному типу адекватной математической модели объекта. Появится также возможность создавать компьютерные тренажеры для обучения умениям и навыкам организации структурной идентификации при создании реальных систем автоматического управления. Здесь термин «тип модели» означает параметрическое семейство содержательно интерпретированных уравнений, которое содержит модель.

И еще один прогноз. Известно, что группа разработчиков новой системы автоматического управления способна преодолеть практически любую начальную модельную неопределенность, если она считает, что это необходимо для реализации поставленного технического задания. Представляется, что и наука способна в научном знании выразить существенные характеристики и механизмы познавательной человеческой деятельности (по преодолению модельных неопределенностей) в объеме, достаточном для эффективного использования фундаментального математического знания теории автоматического управления в процессах решения практических задач управления.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

На основании обсуждения докладов и выступлений участников конференции было принято решение, в котором, в частности, говорится следующее.

Идентификация в настоящее время — обязательный элемент и наиболее трудный этап решения актуальных практических задач. Именно в процессе реальной идентификации создаются все описания реальности, необходимые в качестве исходных данных для эффективного практического применения математических методов и сложных наукоемких технологий. Поэтому разработка математических средств и методов организации идентификации имеет в настоящее время большое прикладное значение.

Развитие математических методов и методологии поиска адекватной математической модели сейчас так же актуально и практически значимо,

как и в 1950-е гг., когда они зарождались под влиянием насущных проблем практики. Постоянная необходимость в оптимизации процесса решения практических задач благодаря рациональной идентификации стимулирует развитие математического аппарата и методологии идентификации систем. Поэтому по-прежнему актуальны для фундаментальной науки такие темы, как математические основы параметрической и непараметрической идентификаций, математическое моделирование, математические проблемы адаптивного управления, методы организации идентификации при известном типе адекватной математической модели объекта автоматизации.

Развитие идентификации систем, основанное на признании решающей роли человеческого фактора в процессе структурной идентификации, имеет исключительно важное значение для решения трудных практических проблем. Поэтому в рамках фундаментальной науки актуальны такие темы, как системы научных знаний об идентификации, концептуальные основы идентификации, математические основы структурной идентификации, методы организации структурной идентификации, методы идентификации организационных и социально-экономических систем.

Идентификация систем как научная дисциплина, в которой порождается и концентрируется рациональное знание о механизмах идентификации, прежде всего, технологических процессов, может в силу своей уникальной проблематики рассматриваться в качестве базисного направления современной науки.

В настоящее время развитие идентификации систем существенно сдерживается наличием ряда трудных проблем. В первую очередь, они обусловлены разрушением ее кадрового обеспечения в связи с недостаточным финансированием фундаментальных исследований, которое не стимулирует приток молодых специалистов в российскую науку. Аналогичные трудности возникли, на наш взгляд, во многих научных направлениях Российской академии наук. Эти проблемы не могут быть разрешены разрозненными усилиями отдельных ученых; необходимы скоординированные коллективные действия всего научного сообщества по оптимизации своей структуры и деятельности. Историческая роль действующего сейчас поколения пятидесяти — шестидесятилетних ученых (элиты научных направлений), по-видимому, состоит в том, чтобы подготовить и осуществить адаптацию Российской академии наук к условиям существующей и будущей рыночной среды и при этом сохранить традиционные российские научные центры фундаментальных исследований.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Труды* VIII международной конференции «Идентификация систем и задачи управления» SICPRO'09. Москва, 26 — 30 января 2009 г. / ИПУ РАН. — М., 2009. — ISBN 978-5-91450-024-2.
2. *Избранные* труды VIII международной конференции «Идентификация систем и задачи управления» SICPRO'09. Москва, 26 — 30 января 2009 г. / ИПУ РАН. — М., 2009. — ISBN 978-5-91450-025-9.
3. *Идентификация* систем и задачи управления: на пути к современным методологиям / И.В. Прангишвили, В.А. Лотоцкий, К.С. Гинсберг, В.В. Смолянинов // Проблемы управления. — 2004. — № 4. — С. 2—15.
4. *Эйкхофф П.* Основы идентификации систем управления. — М.: Мир, 1975.
5. *Баландин Д.В., Коган М.М.* Линейные матричные неравенства в синтезе регуляторов при ограничениях на управление и фазовые переменные // Тр. междунар. конф. «Идентификация систем и задачи управления» SICPRO'09. Москва, 26—30 января 2009 г. / ИПУ РАН. — М., 2009. — С. 31—44.
6. *Афанасьев А.П., Дзюба С.М.* О периодических и близких к ним решениях дифференциальных уравнений // Там же. — С. 45—56.
7. *Красносельский М.А.* Оператор сдвига по траекториям дифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1966.
8. *Massera J.L.* The existence of periodic solutions of systems of differential equations // Duke Math. J. 1950. — Vol. 17. — P. 457—475.
9. *Рейсинг Р., Сансоне Г., Конти Р.* Качественная теория нелинейных дифференциальных уравнений. — М.: Мир, 1974.
10. *Афанасьев А.П., Дзюба С.М.* Устойчивость по Пуассону в динамических и непрерывных периодических системах. — М.: Изд-во ЛКИ, 2007.

К.С. Гинсберг

Гинсберг Константин Симонович — канд. техн. наук, ст. науч. сотрудник, Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, г. Москва, ☎(495) 334-87-59, ✉ ginsberg@ipu.ru.

Новая книга

Микрин Е.А., Шелков А.Б., Павельев В.В. **Методы восстановления данных в распределенных автоматизированных системах.** — М.: ИПУ РАН, 2009. — 68 с.

Предложены основные стратегии и схемы восстановительного резервирования информационного и программного обеспечения территориально-распределенных автоматизированных систем. Разработаны методы и модели расчета вероятностных, временных и стоимостных характеристик для основных схем восстановительного резервирования информационных ресурсов в распределенных системах обработки данных, построенных с использованием инфраструктуры глобальной сети Интернет.

Станислав Данилович ЗЕМЛЯКОВ 1937–2009

3 июля 2009 г. после тяжелой болезни на 72-м году жизни скончался главный научный сотрудник Института проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, доктор технических наук, профессор, лауреат Государственной премии СССР, академик Академии нелинейных наук, член редколлегии журнала "Проблемы управления" Станислав Данилович Земляков.

С.Д. Земляков родился в Москве 23 июля 1937 г. в семье рабочих. Его отец погиб на фронте в первый месяц Великой Отечественной войны. Станислав Данилович рос в стесненных материальных условиях и проводил время в компании дворовых ребят, многие из которых, как он сам рассказывал, позже угодили в тюрьму. Тем не менее, он не попал под влияние криминальной улицы и, будучи от природы незаурядной, творческой личностью, в 1954 г. поступил в Московский авиационный институт, по окончании которого в марте 1960 г. был направлен в Институт автоматики и телемеханики АН СССР (с 1972 г. — Институт проблем управления).

С первых дней работы в Институте С.Д. Земляков проявил себя как очень способный инженер. В процессе работы он активно и с глубоким интересом изучал новые книги и журнальные статьи по теории управления. Легко написал и успешно защитил в 1965 г. кандидатскую, а в 1973 г. — докторскую диссертации. В 1980 г. ему было присвоено звание профессора.

Станислав Данилович — один из создателей теории адаптивных систем с моделью. Им предложен метод синтеза основного контура целого класса систем, введено понятие обобщенного настраиваемого объекта и разработана методика синтеза его структуры на основе теории инвариантности. Впервые в мировой практике им были синтезированы алгоритмы адаптации на основе прямого метода Ляпунова.

Основополагающие результаты С.Д. Земляков получил в теории адаптивного координатно-параметрического управления. Им предложены принцип настраиваемой работоспособности, концепция восстанавливаемой функциональной работоспособности и настраиваемой стратегии управления и развита теория технической управляемости. При его непосредственном участии разработаны и впервые в СССР внедрены адаптивные системы управления ракетами.

В последние годы Станислав Данилович работал над созданием теории управления большими космическими конструкциями и летающими космическими роботами.

С.Д. Земляков — автор двух монографий, справочника по теории автоматического управления. Им опубликовано более 150 статей в ведущих журналах нашей страны. Как учёный он известен не только в России, но и во многих странах. Станислав Данилович многократно выезжал с докладами на международные конгрессы, конференции, симпозиумы в США, Англию, Францию, Германию, Италию и другие страны. Его доклады всегда вызывали большой интерес у слушателей.

В течение 35-ти лет С.Д. Земляков вел педагогическую работу в вузах нашей страны. Последние 22 года читал ведущие курсы на одной из кафедр Московского государственного университета приборостроения и информатики. Искренне и бескорыстно делился своими знаниями с товарищами по работе.

С.Д. Земляков был членом Ученого совета Института, ученым секретарем секции этого совета, членом двух диссертационных советов Института по присуждению ученых степеней. Будучи членом редколлегии журнала «Проблемы управления», неустанно способствовал повышению научного уровня публикуемых материалов, неоднократно публиковал свои научные статьи и отчёты о международных конференциях, в которых он участвовал.

Станислав Данилович был в высшей степени интеллигентным человеком, доброжелательным, необыкновенно по-доброму относился к коллегам по работе и товарищам по жизни.

Светлая и долгая память о Станиславе Даниловиче Землякове — большом ученом и замечательном человеке сохранится в памяти всех, кто имел счастье знать его и общаться с ним.

Сотрудники Института проблем управления, редколлегия и редакция журнала «Проблемы управления»

CONTENTS & ABSTRACTS

SINGULAR ISSUES OF CONTROL SYSTEMS DESIGN FOR LINEAR DISCRETE PLANTS 2

Bunich A.L.

The issue of many-inputs-many-outputs systems design for the linear discrete plants with the stationary singular noise is considered. This issue is shown to be degenerative. The method of controller design is presented.

Keywords: singular control issue, linear discrete plants, zero price of control.

COMPOSITION OF REGULATORS OF GIVEN STRUCTURE SUBJECT TO MEETING THE ENGINEERING TERMS 9

Scherbakov P.S.

This paper analyzes and extends the simple and efficient low-order controller design method proposed by O.N. Kiselev and B.T. Polyak in 1999 as applied to the stabilization of normal operating conditions of electric power systems. Within this approach, the complete set of feasible regulators of given structure is composed (or generated in a random way) and a desired controller is then chosen according to one or another performance index formulated in engineering terms. A robust version of the method is also analyzed and a generalization to higher-order controllers is discussed.

Keywords: fixed-order controllers, *D*-decomposition, robustness, randomization.

ON THE REASONS OF REGIONAL ECOLOGICAL INFOWARS 18

Bukharin S.N.

As a rule at present the problems of ecological safety become the cause for infowars. The purpose of these wars is to capture the power and resources. A vivid example of similar wars is the struggle for control over the financial streams directed to regions for realization of large-scale investment projects. The paper gives a solution of academician N.N. Moiseyev problem (which is connected with the present problem) for modern conditions when except the interests of the federal centre the region interests are also considered.

Keywords: environmental contamination, output volume, penalty, region development, local administration, federal centre, compromise.

THEORY OF MEDIA REACH CALCULATION 22

Popov E.V., Shmatov G.A.

The theory of calculation of a target audience reach depending on the number of appearances in the media has been developed. The theory enables to determine the value of total and effective audience reach and to find out the reach distribution with respect to the contact number. The theory under discussion is the part of an analytical instrument which permits to make decisions concerning the advertising budget management and optimization of the advertising placement in media.

Keywords: advertising media planning, optimization, reach, advertising placement.

INFORMATIONAL INFLUENCE AND INFORMATION CONTROL MODELS IN SOCIAL NETWORKS 28

Gubanov D.A., Novikov D.A., Chkhartishvili A.G.

Formation and dynamics of agents' opinions in the social network are modeled by Markov chain. Problems of agents' opinions control, as well as the game-theoretical models of informational confrontation, are formulated and solved for particular cases.

Keywords: social network, informational influence, information control, informational confrontation.

PRODUCTION MANAGEMENT ON THE TACTICAL LEVEL OF PLANNING UNDER THE FUZZY INITIAL INFORMATION 36

Fedoseev S.A., Vozhakov A.V., Gitman M.B.

The paper considers a production scheduling model with fuzzy measures and constraints. The model is based on the fuzzy sets theory. As an example the actual production schedule of Zavod SDM, Ltd. (Perm city) is considered.

Keywords: production management, software, material requirements planning, fuzzy information.

OPTIMUM CONTROL OF HUMAN IMMUNE REACTIONS . .44

Bolodurina I.P., Lugovskova Ul.P.

The paper presents the controllable model that allows to investigate human immunity mechanisms. The optimization problem described by a system of nonlinear differential equations with a retarded argument and discontinuous right side is set, and its solution algorithm is proposed. The algorithm allows to identify the characteristics of the flow and outcome of various forms of disease, to better understand the factors that determine the nature of the immune system response to various antigens, to find the optimal treatment program.

Keywords: immunity, immune system, mathematical model.

USE OF MOBILE CONTROL METHODS FOR OPTIMIZATION OF TEMPERATURE REGIMES FOR PLAZMOTRON ELECTRODES 53

Kubyshkin V.A., Finyagina V.I.

The practical problem of finding the optimal motion laws for heating spots for the class of systems with distributed parameters with mobile control action is solved. The discovered motion law ensures minimum of maximal average electrode temperature and hence the erosion value of electrode is decreased. Some mathematical models of temperature fields in plazmotrones are considered. For solution of optimization problem the methods of substitution and realization for systems with mobile control are used.

Keywords: mobile control, electro-arch plazmotrones, electrodes erosion, mathematical models of temperature fields, optimal law of heating spot scanning**.**

SEARCH OF MOVING TARGET BY ITS INFORMATIVE CHARACTER «TRACE». PART 1. THE GENERAL STRUCTURE OF OPTIMAL SEARCH TRAJECTORY. 61

Abramyantz T.G., Belanov Yu.A., Maslov E.P., Yahno V.P

Solution of a planar problem of pursuer trajectory optimization is presented. The trajectory contains two parts — one is the search of a moving object (target) by informative character «trace» and the other — overtaking the target after trace detection. Minimax solution is found for the case when the target chooses its motion direction from some angle range and moves along a straight line with a constant speed.

Keywords: «trace» of object, search trajectory optimization, minimax solution.

ESTIMATION OF COMPLEXITY OF MOVEMENT CONTROL ALONG THE KNOWN ROUTE 69

Tverdohlebov V.A.

The paper offers the estimation procedure of complexity of movement control along the given route with consideration of numerical indexes of control rules complexity on separate route sections; amount of control rule changes; and the length of route sections with the unchangeable control rules. Control rules are formalized in the form of recurrent formulas that define a route code. Numerical indexes of properties, performance and parameters of a route are systematized by means of the designed spectrum of parameters.

Keywords: complexity of movement control, route, object of movement, controls, code of route, geometrical properties of a route, recurrent form, control rule.

ON THE METHODOLOGICAL SUBSTANTIATION OF THEORY AND PRACTICE OF BUSINESS ANALYSIS 74

Alekseeva A.I.

On the basis of activity structure model we increase the precision of definitions of concepts and categories of business analysis: object domain; object of the science, both fundamental and applied; subjects; means and objects of fundamental and applied research; objectives and results of economic activity, as well as the maintenance of direct and feedback relations between science, practice and the object of research — organization.

Keywords: methodology, business analysis, definition of object and subject, classification of structure of scientific and practical activity, connections with the organization.

SYSTEM IDENTIFICATION IS ON THE WAY TOWARDS CREATION OF METHODOLOGICAL AND LOGICAL-MATHEMATICAL GROUNDS FOR SCIENCE INTENSIVE TECHNOLOGIES OF STRUCTURE IDENTIFICATION 81

STANISLAV DANILOVACH ZEMLYAKOV 87