



**CONTROL SCIENCES**

**Научно-технический  
журнал**

6 номеров в год

ISSN 1819-3161

**УЧРЕДИТЕЛЬ**

Институт проблем управления  
им. В.А. Трапезникова РАН

Главный редактор

**Д.А. Новиков**

Заместители главного  
редактора

**Л.П. Боровских, Ф.Ф. Пащенко**

Редактор

**Т.А. Гладкова**

Выпускающий редактор

**Л.В. Петракова**

Издатель

**ООО «СенСиДат-Контрол»**

Адрес редакции  
117997, ГСП-7, Москва,  
ул. Профсоюзная, д. 65, к. 272.  
Тел./факс (495) 334-92-00

E-mail: pu@ipu.ru  
www.ipu.ru/period/pu

Оригинал-макет  
и электронная версия  
подготовлены  
ООО «Адвансед Солюшнз»

Отпечатано с готовых диапозитивов  
в типографии ГКС

Подписано в печать  
21.07.2008 г.

Заказ № PB508

Журнал зарегистрирован  
в Министерстве  
Российской Федерации  
по делам печати,  
телерадиовещания  
и средств массовых  
коммуникаций

Свидетельство о регистрации  
ПИ №77-11963  
от 06 марта 2002 г.

Журнал входит в Перечень ведущих  
рецензируемых журналов и изданий,  
в которых должны быть опубликованы  
основные научные результаты  
диссертаций на соискание ученой  
степени доктора и кандидата наук

Подписные индексы:  
**80508** и **81708** в каталоге Роспечати  
**38006** в объединенном каталоге  
«Пресса России»

# ПРОБЛЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ

## 5.2008

### СОДЕРЖАНИЕ

#### Анализ и синтез систем управления

- Фургат И.Б., Цыкунов А.М.** Робастное управление нестационарными нелинейными структурно неопределенными объектами. . . . . 2
- Жуков В.П.** О грубости нелинейных динамических систем . . . . . 8
- Сараев П.В.** Многошаговое оптимальное нейросетевое управление . . . . . 14
- Митришкин Ю.В., Коростелёв А.Я.** Система с прогнозирующей моделью для управления формой и током плазмы в токамаке . . . . . 19

#### Математические проблемы управления

- Клещев А.С.** Концепция банка математических знаний для научных исследований. Ч. 2. Интерактивное формирование интуитивных доказательств . . . . . 26

#### Управление в социально-экономических системах

- Леонов Г.А.** Динамические принципы прогнозирования и управления. . . . . 31
- Бахтизин А.Р.** Применение CGE-моделей для оценки эффективности управленческих решений . . . . . 36
- Чхартишвили А.Г.** Рефлексивные игры: трансформация структур информированности . . . . . 43
- Панкова Л.А., Пронина В.А.** Информационно-аналитическая поддержка управления жилищно-коммунальным хозяйством (на примере планирования капитального ремонта) . . . . . 49

#### Информационные технологии в управлении

- Асратян Р.Э.** Межсерверная маршрутизация HTTP/SOAP-взаимодействий в распределенных системах . . . . . 57
- Аксёнова Г.П.** О функциональном диагностировании дискретных устройств в условиях работы с неточными данными. . . . . 62
- Павельев В.В., Павельев С.В.** Выбор варианта системы защиты центров обработки данных . . . . . 67

#### Управление в медико-биологических системах

- Инжеваткин Е.В., Неговорова В.А., Савченко А.А.** и др. Пороговые эффекты в управлении популяционной динамикой раковых клеток в организме . . . . . 73

#### Хроника

- III Всероссийская** молодежная конференция по проблемам управления (ВМКПУ'2008). . . . . 81

\* \* \*

- Contents and abstracts . . . . . 87

# РОБАСТНОЕ УПРАВЛЕНИЕ НЕСТАЦИОНАРНЫМИ НЕЛИНЕЙНЫМИ СТРУКТУРНО НЕОПРЕДЕЛЕННЫМИ ОБЪЕКТАМИ

И.Б. Фуртат, А.М. Цыкунов

Решена задача робастного управления нестационарными нелинейными объектами по выходу в условиях априорной, функциональной и структурной неопределенности. В процессе функционирования системы порядок математической модели объекта может изменяться неизвестным образом. Решение основано на применении робастного алгоритма, позволяющего компенсировать неопределенности данного класса. Доказана работоспособность системы управления. Приведены результаты численного моделирования.

**Ключевые слова:** робастное управление, нестационарный, нелинейный объект управления, априорная, функциональная, структурная неопределенность, наблюдатель, функция Ляпунова.

## ВВЕДЕНИЕ

В классе задач адаптивного и робастного управления существует большое число методов и подходов к их решению. В основном они базируются на предположении о точном знании структуры объекта управления, т. е. когда известен порядок исследуемой системы дифференциальных уравнений [1–6]. Неизвестными считаются только параметрические и внешние воздействия. Работ, посвященных проблеме управления объектами с неизвестным порядком, довольно мало [7, 8]. Причем, в последних работах рассматриваются задачи управления линейными стационарными объектами с неизвестными, но постоянными порядками числителя и знаменателя передаточной функции. Однако, как отмечалось в работах [1, 2], существуют возмущения, способные влиять не только на изменение параметров объекта, но и на его порядок.

В статье рассматриваются нелинейные нестационарные объекты с неизвестными параметрами, подверженные воздействию внешних и параметрических неконтролируемых возмущений. Причем данные возмущения влияют на порядок объекта неизвестным образом. Решение задачи основано на применении робастного алгоритма, позволяющего компенсировать данный класс неопределенностей с заданной точностью за конечное время.

## 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим нестационарный нелинейный объект управления, динамические процессы в котором описываются дифференциальным уравнением

$$Q(p, t)y(t) = R(p, t)\sigma(y, t)u(t) + K(p, t)\Psi(y, t)\zeta(t) + F(p, t)f(t), \quad p^i y(0) = y_i, \quad i = \overline{1, n}, \quad (1)$$

где  $y(t)$  — регулируемый параметр,  $u(t)$  — управляющее воздействие,  $f(t)$  — неконтролируемое возмущение. Например, в системе управления котлом:  $y(t)$  может быть температура или давление, или расход пара на выходе котла;  $u(t)$  — расход газа, обеспечивающий изменение температуры в котле;  $f(t)$  — колебания газа, подаваемого на подогрев котла; в системе регулирования адсорбером:  $y(t)$  — концентрация влаги в газе на выходе адсорбера,  $u(t)$  — расход влажного газа на входе в адсорбер;  $f(t)$  — колебания концентрации влаги, расхода, давления в газе на входе в адсорбер; в системе управления движением корабля:  $y(t)$  — угол рыскания корабля,  $u(t)$  — угол поворота рулевого пера,  $f(t)$  — момент ветрового воздействия, волновые возмущения, действующее на корабль течение и т. п. Далее  $Q(p, t) = q_n(t)p^n + q_{n-1}(t)p^{n-1} + \dots + q_0(t)$ ,  $R(p, t) = r_m(t)p^m + r_{m-1}(t)p^{m-1} + r_0(t)$ ,  $K(p, t) = k_n(t)p^n + k_{n-1}(t)p^{n-1} + \dots + k_0(t)$ ,  $F(p, t) = f_n(t)p^n +$



$+ f_{n-1}(t)p^{n-1} + \dots + f_0(t)$  — линейные нестационарные дифференциальные операторы с неизвестными параметрами,  $\sigma(y, t)$  — скалярная функция,  $\zeta(t) \in R^n$  и  $\Psi(y, t) \in R^{1 \times n}$  — вектор-функция и матричная функция соответственно. Например,  $\Psi(y, t)$  и  $\sigma(y, t)$  в математической модели движения корабля определяют нелинейность, зависящую от угла рыскания  $y(t)$ , а  $\zeta(t)$  — неизвестные нестационарные параметры нелинейности  $\Psi(y, t)$ . Наконец,  $y_i \in R$  — неизвестные начальные условия.

Очевидно, такое уравнение может быть получено для широкого класса механических, электромеханических и других технических систем с помощью специальных методов параметризации и преобразования координат, или линеаризации [3].

Качество переходных процессов по выходу определим эталонной моделью

$$Q_m(p)y_m(t) = k_m r(t). \quad (2)$$

Здесь  $y_m(t)$  — выход эталонной модели,  $r(t)$  — задающее воздействие,  $Q_m(p)$  — известный линейный нормированный дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами,  $k_m$  — известный высокочастотный коэффициент усиления.

**Предположения.** 1. Полиномы  $Q(p, t)$ ,  $R(p, t)$ ,  $K(p, t)$ ,  $F(p, t)$ , их порядки  $\deg Q(p, t) \leq n$ ,  $\deg R(p, t) \leq m$ ,  $\deg K(p, t) \leq n$ ,  $\deg F(p, t) \leq n$  и относительная степень  $\gamma = n - m \geq 1$  — неизвестны. Коэффициенты операторов  $Q(p, t)$ ,  $R(p, t)$ ,  $K(p, t)$  и  $F(p, t)$  — ограниченные функции, причем ненулевые коэффициенты при старших степенях операторов  $Q(p, t)$  и  $R(p, t)$  — положительные функции. 2. Коэффициенты операторов  $Q(p, t)$ ,  $R(p, t)$ ,  $K(p, t)$ ,  $F(p, t)$  и вектор функции  $\zeta(t)$  зависят от вектора неизвестных параметров  $\vartheta \in \Xi$ , где  $\Xi$  — известное ограниченное множество. 3. Известна  $\gamma_u \geq \gamma$  — верхняя граница относительной степени  $\gamma$ . Порядок оператора  $Q_m(p) - \gamma_u$ ,  $k_m > 0$ . 4. Оператор  $R(p, t)$  — устойчив и для любого фиксированного момента времени  $t$  полином  $R(\lambda, t)$  — гурвицев, где  $\lambda$  — комплексная переменная в преобразовании Лапласа. Полином  $Q_m(\lambda)$  — гурвицев. 5. Элементы  $\Psi_i(y, t)$ ,  $i = \overline{1, n}$  матричной функции  $\Psi(y, t)$  неизвестны и удовлетворяют глобальному условию Липшица по  $y(t)$ , ограниченными по  $t$  и являются гладкими функциями;  $\zeta(t)$  — неизвестный вектор, компонентами которого являются гладкие ограниченные функции. Нелинейность  $\sigma(y, t)$  известна, и  $\sigma(y, t) > 0$  для любых  $y(t) \in R$  и  $t$ . 6. Задающее  $r(t)$  и возмущающее  $f(t)$  воздействия — ограниченные функции. 7. В системе управления не доступны измерению производные сигналов  $y(t)$ ,  $u(t)$  и  $r(t)$ .

Из предположения 1 следует, что динамический порядок объекта (1) неизвестен и подвержен изменению в результате действия на него параметрических возмущений. Например, если  $q_n(t) = 0$  и  $q_{n-1} \neq 0$ , то  $\deg Q(p, t) = n - 1$ , если  $q_n(t) = q_{n-1}(t) = 0$  и  $q_{n-2}(t) \neq 0$ , то  $\deg Q(p, t) = n - 2$  и т. д. Аналогично и для оператора  $R(p, t)$ : если  $r_m(t) = 0$  и  $r_{m-1}(t) \neq 0$ , то  $\deg R(p, t) = m - 1$ , если  $r_m(t) = r_{m-1}(t) = 0$  и  $r_{m-2}(t) \neq 0$ , то  $\deg R(p, t) = m - 2$  и т. д. Требование к знанию знаков ненулевых коэффициентов при старших степенях операторов  $Q(p, t)$ ,  $R(p, t)$  (предположение 1) и функции  $\sigma(y, t)$  (предположение 5) связано со знанием знака высокочастотного коэффициента усиления объекта (1). Это позволяет обеспечить отрицательную обратную связь в системе управления.

Цель управления — найти непрерывный закон регулирования, обеспечивающий ограниченность всех сигналов в замкнутой системе и выполнение целевого условия

$$|e(t)| = |y(t) - y_m(t)| < \delta \quad (3)$$

за конечное время  $T$  для всех  $\vartheta \in \Xi$ , где  $\delta > 0$  — достаточно малое число.

## 2. МЕТОД РЕШЕНИЯ

Разложим операторы  $R(p, t)$  и  $Q(p, t)$  на составляющие:

$$\begin{aligned} R(p, t) &= R_0(p) + \Delta R(p, t), \\ Q(p, t) &= Q_0(p) + \Delta Q(p, t). \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь  $\Delta R(p, t) = c_{01}^T(t)[1, p, \dots, p^{\bar{n}-2}]^T$ ,  $c_{01}(t)$  — вектор, составленный из коэффициентов оператора  $R(p, t) - R_0(p)$  и такой, что всегда выполнено первое из разложений (4),  $R_0(p)$  — произвольный стационарный линейный дифференциальный оператор степени  $\bar{n} - \gamma_u$ , и полином  $R_0(\lambda)$  — гурвицев;  $\bar{n}$  — верхняя граница порядка оператора  $Q(p, t)$ . Значение  $\bar{n}$  понадобится только для вывода и обоснования структуры замкнутой системы управления, а не для ее реализации. Относительно структуры  $\Delta R(p, t)$  можно сказать, что если  $m < \bar{n} - \gamma_u$ , то  $\deg \Delta R(p, t) = \bar{n} - \gamma_u$ ; если  $m = \bar{n} - \gamma_u$ , то  $\deg \Delta R(p, t) \leq \bar{n} - \gamma_u$ ; если  $m > \bar{n} - \gamma_u$ , то  $\deg \Delta R(p, t) = m$ ; т. е. всегда существует вектор  $c_{01}$ , обеспечивающий справедливость разложения оператора  $R(p, t)$ . В одном случае он имеет все ненулевые компоненты, в другом соответствующее

число составляющих нулевые. Далее,  $Q_0(p)$  — произвольный линейный стационарный дифференциальный оператор такой, что полином  $Q_0(\lambda)$  — гурвицев и  $\deg Q_0(p) = \bar{n}$ . Тогда оператор  $\Delta Q(p, t)$  представляет собой разность  $Q(p, t) - Q_0(p)$ , и  $\deg \Delta Q(p, t) \leq \bar{n}$ ; т. е. если  $\deg Q(p, t) < \deg Q_0(p)$ , то  $\deg \Delta Q(p, t) = \deg Q_0(p)$ , если  $\deg Q(p, t) = \deg Q_0(p)$ , то  $\deg \Delta Q(p, t) \leq \bar{n} - 1$ . Именно это разложение, позволяющее решить сформулированную задачу, отличается от известных способов параметризации уравнений объекта управления [1—4, 6]. Поскольку операторы  $R_0(p)$  и  $Q_0(p)$  — произвольные, то выберем их так, чтобы  $Q_0(p)R_0^{-1}(p) = Q_m(p)$ . Тогда, с учетом выражений (1), (2) и (4), сформируем ошибку слежения  $e(t) = y(t) - y_m(t)$

$$Q_m(p)e(t) = \sigma(y, t)u(t) + \varphi(t), \quad (5)$$

где  $\varphi(t) = RR_0^{-1}(p)[\Delta R(p, t)\sigma(y, t)u(t) - \Delta Q(p, t)y(t) + K(p, t)\Psi(y, t)\zeta(t) + F(p, t)f(t) - k_m r(t)]$ . Для регулирования объектом (1) зададим закон управления

$$u(t) = \sigma^{-1}(y, t)h(t), \quad h(t) = \alpha T(p)\bar{v}(t). \quad (6)$$

Преобразуем уравнение ошибки (5):

$$\begin{aligned} Q_m(p)e(t) &= T(p)(\alpha v(t) + j_1(t) + \alpha \bar{\Delta}(t)), \\ \varphi_1(t) &= T^{-1}(p)\varphi(t). \end{aligned} \quad (7)$$

Здесь  $\alpha > 0$ ,  $T(p)$  — линейный дифференциальный оператор степени  $\gamma_u$ , такой, что полином  $T(\lambda)$  — гурвицев, причем корни полинома  $T(\lambda)$  являются нулями передаточной функции замкнутой системы;  $\bar{v}(t)$  — оценка сигнала  $v(t)$ ,  $v(t)$  — вспомогательное управляющее воздействие (формирование функций  $v(t)$  и  $\bar{v}(t)$  будет описано далее);  $\bar{\Delta}(t) = \bar{v}(t) - v(t)$  — ошибка оценки сигнала  $v(t)$ .

Следуя работе [6], введем вспомогательный контур

$$Q_m(p)\bar{e}(t) = \beta T(p)v(t), \quad \beta > 0. \quad (8)$$

Учитывая уравнения (7) и (8), составим уравнение рассогласования  $\zeta(t) = e(t) - \bar{e}(t)$

$$Q_m(p)\zeta(t) = T(p)(\alpha \bar{\Delta}(t) + \varphi_1(t)), \quad (9)$$

где  $\varphi_1(t) = (\alpha - \beta)v(t) + T^{-1}(p)\varphi(t)$  — новая функция возмущения, включающая в себя априорную, функциональную и параметрическую неопределенность,  $\bar{\Delta}(t) = \bar{v}(t) - v(t)$  — ошибка оценки сигнала

$v(t)$ . Зададим закон вспомогательного управляющего воздействия  $v(t)$  в виде

$$v(t) = -\beta^{-1}Q_m(p)T^{-1}(p)\zeta(t) = -\beta^{-1}\varphi_1(t). \quad (10)$$

Разрешив уравнение  $v(t) = -\beta^{-1}\varphi_1(t)$  относительно переменной  $v(t)$ , получим  $v(t) = -\alpha^{-1}T^{-1}(p)\varphi(t)$ . Подставим последний результат в выражение (7). Тогда уравнение замкнутой системы относительно ошибки слежения можно записать в виде

$$Q_m(p)e(t) = \alpha T(p)\bar{\Delta}(t). \quad (11)$$

Для оценки  $\gamma_u$  производных сигнала  $v(t)$  воспользуемся схемой, предложенной в работе [4]:

$$\begin{aligned} \dot{\xi}(t) &= G_0\xi(t) + D_0(\bar{v}(t) - v(t)), \\ \bar{v}(t) &= L\xi(t). \end{aligned} \quad (12)$$

В уравнениях (12):  $\xi(t) \in R^{\gamma_u}$ ,  $G_0 = \begin{bmatrix} 0 & I_{\gamma_u-1} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ,  $I_{\gamma_u-1}$  — единичная матрица порядка  $\gamma_u - 1$ ,  $D_0 = -[d_1\mu^{-1}, d_2\mu^{-2}, \dots, d_{\gamma_u}\mu^{-\gamma_u}]$ , причем  $d_1, d_2, \dots, d_{\gamma_u}$  выбираются из условия гурвицевости матрицы  $G = G_0 - DL$ ,  $D = [d_1, d_2, \dots, d_{\gamma_u}]^T$ ,  $\mu$  — достаточно малая величина,  $L = [1, 0, \dots, 0]$ . Использование фильтра (12) позволяет оценить  $\gamma_u$  производных сигнала  $v(t)$  и тем самым реализовать управление (6).

Для оценки точности наблюдения введем в рассмотрение вектор отклонений  $\bar{\eta}(t) = \Gamma^{-1}(\xi(t) - \theta(t))$ , где  $\Gamma = \text{diag}\{\mu^{\gamma_u-1}, \mu^{\gamma_u-2}, \dots, \mu, 1\}$ ,  $\theta(t) = [v(t), \dot{v}(t), \dots, v^{(\gamma_u)}(t)]^T$ . Продифференцировав  $\bar{\eta}(t)$  по времени с учетом уравнения (12), получим:  $\dot{\bar{\eta}}(t) = \mu^{-1}G\bar{\eta}(t) + \bar{b}v^{(\gamma_u+1)}(t)$ ,  $\bar{\Delta}(t) = \mu^{\gamma_u-1}L\bar{\eta}(t)$ ,  $\bar{b} = [0, \dots, 0, 1]^T$ . Преобразуем предпоследние уравнения в эквивалентные относительно выхода  $\bar{\Delta}(t)$ :

$$\dot{\eta}(t) = \mu^{-1}G\eta(t) + b\dot{v}(t), \quad \bar{\Delta}(t) = \mu^{\gamma_u-1}L\eta(t). \quad (13)$$

Здесь  $\eta_i(t) = \bar{\eta}_i(t) - \mu^{1+i-\gamma_u}v^{(i-1)}(t)$ ,  $i = \overline{2, \gamma_u}$ ,  $\eta_1(t) = \bar{\eta}_1(t)$ ,  $b = [\mu^{2-\gamma_u}, 0, \dots, 0]^T$ . Последние два уравнения эквивалентны относительно переменных  $\eta_1(t) = \bar{\eta}_1(t)$  в виду того, что являются различными векторно-матричными формами записи одного уравнения  $(p^{\gamma_u} + d_1\mu^{-1}p^{\gamma_u-1} + \dots + d_{\gamma_u}\mu^{-\gamma_u})\bar{\eta}_1(t) =$



$= p^{\gamma_u} v(t)$ . Принимая во внимание уравнения (12) и (13), уравнение ошибки слежения (11) преобразуем к виду

$$\dot{e}(t) = A_m e(t) + \alpha \mu^{\gamma_u - 1} \bar{b} g \Delta(t), \quad e(t) = L e(t), \quad (14)$$

где  $e(t) \in R^{\gamma_u}$ ,  $A_m \in R^{\gamma_u \times \gamma_u}$  — матрица в форме Фробениуса с характеристическим многочленом  $Q_m(\lambda)$ ,  $\Delta(t) = [\eta_1(t), \dot{\eta}_1(t), \dots, \eta_1^{(\gamma_u)}(t)]^T$ ,  $g$  — вектор, составленный из коэффициентов полинома  $T(\lambda)$ .

**Утверждение.** Пусть выполнены предположения 1–7. Тогда существуют числа  $T > 0$  и  $\mu_0 > 0$  такие, что при  $\mu \leq \mu_0$  система (6), (8), (10), (12)–(14) диссипативна, и выполнено целевое условие (3) при  $t \geq T$ . ♦

Доказательство утверждения приведено в Приложении.

### 3. ПРИМЕРЫ

Рассмотрим нелинейный нестационарный объект управления вида (1):

$$\begin{aligned} & [q_4(t)p^4 + q_3(t)p^3 + q_2(t)p^2 + q_1(t)p + q_0(t)]y(t) = \\ & = [r_1(t)p + r_0(t)]\sigma(y, t)u(t) + [\bar{k}_4(t)p^4 + \bar{k}_3(t)p^3 + \\ & + \bar{k}_2(t)p^2 + \bar{k}_1(t)p + \bar{k}_0(t)]\Psi(y, t)\zeta(t) + \\ & + [f_4(t)p^4 + f_3(t)p^3 + f_2(t)p^2 + f_1(t)p + f_0(t)]f(t). \quad (15) \end{aligned}$$

Класс неопределенности  $\Xi$  задан неравенствами:  $0 \leq q_4(t) \leq 5$ ,  $0 \leq q_3(t) \leq 15$ ,  $0,5 \leq q_2(t) \leq 20$ ,  $-10 \leq q_1(t) \leq 10$ ,  $-10 \leq q_0(t) \leq 10$ ,  $0 \leq r_1(t) \leq 3$ ,  $0,5 \leq r_0(t) \leq 3$ ,  $-4 \leq \bar{k}_i(t) \leq 4$ ,  $-5 \leq f_i(t) \leq 5$ ,  $-2 \leq \zeta_i(t) \leq 2$ ,  $i = \overline{1, n}$ ,  $|f(t)| \leq 10$ . Предполагается, что полином  $r_1(t) + r_0(t)$  — устойчив и полином  $L\{r_1(t)p + r_0(t)\}$  — гурвицев для любого фиксированного момента времени  $t$ ,  $L\{\cdot\}$  — оператор преобразования Лапласа;  $\sigma(y, t) = 1 + |y(t)| + |y(t)|^2 \sin^2 2t$ ; верхняя оценка относительной степени  $\gamma$  объекта (15)  $\bar{\gamma}_u = 4$ . Остальные параметры в уравнении (15) неизвестны. Анализируя класс неопределенности  $\Xi$ , можно сказать, что в процессе функционирования (15) порядок характеристического многочлена  $Q(p, t)$  может принимать значения, равные 2, 3 и 4, а многочлена  $R(p, t) — 0$  и 1.

Так как  $\bar{\gamma}_u = 4$ , то  $\deg Q_m(p) = 4$ . Уравнение эталонной модели зададим в виде  $(p + 1)^4 y_m(t) = r(t)$ ,  $k_m = 1$ ,  $r(t) = 2 + \sin 0,5t + 2 \sin t + P_1$ ,  $P_1$  — прямо-

угольные импульсы, с амплитудой 2, периодом 4 с и длительностью 2 с.

Выберем  $\beta = 50$ . Распределение нулей передаточной функции замкнутой системы (11) определим оператором  $T(p) = 0,01p^4 + 2p^3 + 200p^2 + 200p + 100$ . Тогда, в соответствии с выражениями (8) и (10), уравнения вспомогательного управляющего воздействия и вспомогательного контура запишутся в виде

$$\begin{aligned} v(t) &= - \frac{(p + 1)^4}{0,01p^4 + 2p^3 + 200p^2 + 200p + 100} \zeta(t), \\ \bar{e}(t) &= \frac{0,01p^4 + 2p^3 + 200p^2 + 200p + 100}{(p + 1)^4} v(t). \end{aligned}$$

Здесь  $\zeta(t) = e(t) - \bar{e}(t)$ ,  $e(t) = y(t) - y_m(t)$  — ошибки рассогласования и слежения соответственно.

Для оценки  $v^{(i)}(t)$ ,  $i = \overline{0, 4}$  воспользуемся уравнением наблюдателя (12):  $\dot{\xi}_1(t) = -\xi_2(t) - d_1 \mu^{-1} \times (\xi_1(t) - v(t))$ ,  $\dot{\xi}_2(t) = -\xi_3(t) - d_2 \mu^{-1} (\xi_2(t) - v(t))$ ,  $\dot{\xi}_3(t) = -\xi_4(t) - d_3 \mu^{-1} (\xi_3(t) - v(t))$ ,  $\dot{\xi}_4(t) = -d_4 \mu^{-2} \times (\xi_4(t) - v(t))$ , где  $D = [d_1, d_2, d_3, d_4]^T = [20, 150, 500, 625]^T$ ,  $\mu = 10^{-2}$ . Задав  $\alpha = 50$ , уравнение (6) сформируем в виде  $u(t) = (1 + |y(t)| + |y(t)|^2 \sin^2 2t)^{-1} h(t)$ ,  $h(t) = 50[0,01 \dot{\xi}_4(t) + 2 \xi_4(t) + 200 \xi_3(t) + 200 \xi_2(t) + 100 \xi_1(t)]$ .

Пусть начальные условия в системе управления нулевые. Причем в уравнении (15) нелинейности  $\Psi(y, t) = [\ln^4(1 + |y|), \ln^4(1 + |y|), \cos 3y + 2 \sin y, \ln^2(1 + |y|) + y^2]$ ,  $\zeta(t) = [0,5 \sin t, \cos 2t, 1 + \sin t, 2]^T$  и внешнее возмущение  $f(t) = 1,5 + 1,5 \sin 1,5t + \cos(0,8t + \pi/3) + P_1(t - 0,5)$ .

На рис. 1 приведен график изменения ошибки слежения  $e(t)$  при следующих параметрах в уравнении (15):  $q_4(t) = \bar{P}_1(t)(1,5 + \cos t)$ ,  $q_3(t) = 4 \bar{P}_2(t) \times (1,5 + \cos t/3)$ ,  $q_2(t) = 4(3 + \sin 2t)$ ,  $q_1(t) = -3 \sin 2t + 4 \text{sign}(\sin 2t)$ ,  $q_0(t) = -5 \sin 2t + 4 \text{sign}(\sin 0,5t)$ ,  $r_1(t) = \bar{P}_3(t)(1,5 + \cos t/6)$ ,  $r_0(t) = 2 + \sin 3t$ ,  $\bar{k}_4(t) = 0,5 \bar{P}_1(t)(1 + \sin t)$ ,  $\bar{k}_3(t) = 0,2 \bar{P}_2(t)(1 + \cos t)$ ,  $\bar{k}_2(t) = 0,5(2 + 0,5 \sin t)$ ,  $\bar{k}_1(t) = 0,5 \sin 2t$ ,  $\bar{k}_0(t) = -\sin 2t$ ,  $f_4(t) = \bar{P}_1(t)$ ,  $f_3(t) = \bar{P}_2(t) \cos t$ ,  $f_2(t) = \sin t$ ,  $f_1(t) = 0,5 \sin 2t$ ,  $f_0(t) = \sin 1,2t$ , где  $\bar{P}_1(t)$ ,  $\bar{P}_2(t)$  и  $\bar{P}_3(t)$  — прямоугольные импульсы с амплитудой 1, периодом 15 с, длительностью 5, 8 и 12 с соответственно.

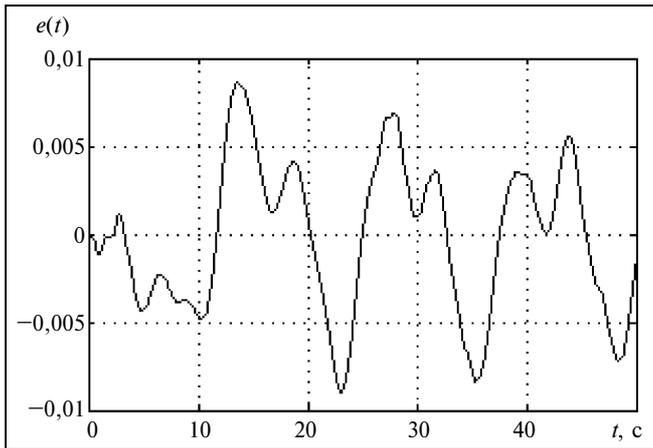


Рис. 1. График изменения ошибки слежения

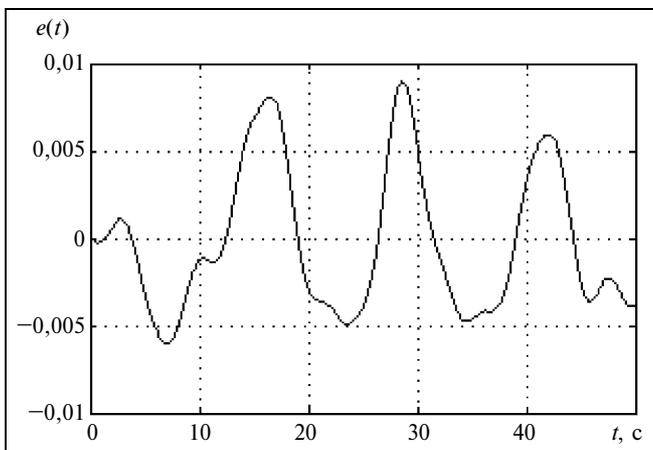


Рис. 2. Переходный процесс по ошибке слежения

На рис. 2 приведен результат моделирования, иллюстрирующий работоспособность системы при следующих данных в уравнении (15):  $q_4(t) = 2\bar{P}_1(t)$ ,  $q_3(t) = 2,5\bar{P}_2(t - 0,5)$ ,  $q_2(t) = 3 + \bar{P}_2(t - 1)$ ,  $q_1(t) = 1,5 + 2\bar{P}_1(t - 1,2)$ ,  $q_0(t) = 2\bar{P}_4(t - 1,5)$ ,  $r_1(t) = \bar{P}_3(t)[2 + \bar{P}_4(t - 0,1)]$ ,  $r_0(t) = 2 + \bar{P}_2(t - 0,6)$ . Остальные параметры объекта те же, что и в случае, приведенном на рис. 1.

Для объекта (15) на полуинтервалах времени:  $t \in [0, 5) \cup [15, 20) \cup [30, 35) \cup [45, 50)$  с  $q_4(t) > 0$  и  $r_1(t) > 0$ , т. е.  $\deg Q(p, t) = 4$ ,  $\deg R(p, t) = 1$ , относительная степень  $\gamma = 3$ ;  $t \in [5, 8) \cup [20, 23) \cup [35, 38)$  с  $q_4(t) = 0$ ,  $q_3(t) > 0$  и  $r_1(t) > 0$ , т. е.  $\deg Q(p, t) = 3$ ,  $\deg R(p, t) = 1$ , относительная степень  $\gamma = 2$ ;  $t \in [8, 12) \cup [23, 27) \cup [38, 42)$  с  $q_4(t) = q_3(t) = 0$ ,  $q_2(t) > 0$  и  $r_1(t) > 0$ , т. е.  $\deg Q(p, t) = 2$ ,  $\deg R(p, t) = 1$ ,

относительная степень  $\gamma = 1$ ;  $t \in [12, 15) \cup [27, 30) \cup [42, 45)$  с  $q_4(t) = q_3(t) = r_1(t) = 0$ ,  $q_2(t) > 0$ ,  $r_0(t) > 0$ ,  $\deg Q(p, t) = 2$ ,  $\deg R(p, t) = 0$ , относительная степень  $\gamma = 2$ .

Из рис. 1 и 2 видно, что возмущения, влияющие на структуру объекта (15), существенно не сказываются на результатах переходных процессов. Результаты, прежде всего, зависят от начальных условий самого объекта, чисел  $\mu$  в выражении (12),  $\alpha$  и  $\beta$  в формулах (6), (8) и (10) и матрицы  $D$  в выражении (12).

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассмотрен способ построения робастной системы управления, позволяющей скомпенсировать неконтролируемые внешние воздействия и параметрическую неопределенность, при условии, что порядки операторов  $Q(p, t)$  и  $R(p, t)$  в уравнении (1) неизвестны и могут изменяться в процессе функционирования произвольным образом. При решении задачи необходимо знание только оценки верхней границы разности порядков операторов  $Q(p, t)$  и  $R(p, t)$ .

Предложенная робастная система управления позволяет скомпенсировать неизвестные возмущения с точностью  $\delta$  за время  $T$ . При этом величины  $\delta$  и  $T$  можно сделать достаточно малыми путем соответствующего выбора параметров замкнутой системы.

Численные моделирования на ЭВМ показали, что качество переходных процессов не зависит от возмущений, влияющих как на характер поведения решения дифференциального уравнения объекта, так и на его структуру. Переходные процессы, прежде всего, зависят от начальных условий объекта и параметров системы управления.

## ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство утверждения. Перепишем уравнения (13) и (14) в виде

$$\mu_1 \dot{\eta}(t) = G\eta(t) + \mu_2 b \dot{v}(t), \quad \dot{\varepsilon}(t) = A_m \varepsilon(t) + \alpha \mu_2^{\gamma_u - 1} \bar{b} g \Delta(t), \quad (16)$$

где  $\mu_1 = \mu_2 = \mu$ . Воспользуемся второй леммой в работе [5]. Для этого выберем функцию Ляпунова для уравнений (16) в виде

$$V(t) = \varepsilon^T(t) P \varepsilon(t) + \eta^T(t) H \eta(t), \quad (17)$$

где матрицы  $P = P^T > 0$ ,  $H = H^T > 0$  определяются из решений уравнений  $A_m^T P + P A_m = -Q_1$ ,  $G^T H + H G = -Q_2$ ,  $Q_1 = Q_1^T > 0$ ,  $Q_2 = Q_2^T > 0$ . Согласно второй лемме [5], рассмотрим вначале случай при  $\mu_2 = 0$ . Это равносильно тому, что закон управления (10) обеспечивает точную компенсацию  $\varphi_1(t)$ , т. е.  $\bar{v}(t) = v(t)$ .



Возьмем от функции  $V(t)$  производную по времени вдоль траекторий (16) при  $\mu_2 = 0$ :

$$\dot{V}(t) = -\varepsilon^T(t)Q_1\varepsilon(t) - \mu_1^{-1}\eta^T(t)Q_2\eta(t). \quad (18)$$

Следовательно,  $\lim_{t \rightarrow \infty} |\varepsilon(t)| = 0$  и  $\lim_{t \rightarrow \infty} |\eta(t)| = 0$ . Тогда из уравнений (16) и условий второй леммы [5]  $\Delta t$  и  $\dot{v}(t)$  — ограниченные функции, т. е.  $\sup_t |\Delta t| < k_1$ ,  $\sup_t |\dot{v}(t)| < k_2$ , где  $k_1$  и  $k_2$  — некоторые положительные числа. Ограниченность сигналов  $p^{n-i}y(t)$ ,  $i = \overline{1, n}$  и  $\xi(t)$  следует из вышесказанного, уравнений (2), (12) и предположения 4.

Рассмотрим уравнение  $\varphi_1(t) = (\alpha - \beta)v(t) + T^{-1}(p)\varphi(t)$ . С учетом закона (10) и структуры функции  $\varphi(t)$ , разрешим его относительно переменной  $v(t)$ :

$$-\alpha v(t) = \frac{1}{T(p)} \frac{1}{R(p, t)} [\Delta Q(p, t)y(t) + K(p, t)\Psi(y, t)\zeta(t) + F(p, t)f(t)]. \quad (19)$$

Так как функции  $p^{n-i}y(t)$ ,  $i = \overline{1, n}$ , и  $r(t)$  — ограниченные, то из предположений 4, 6 и гурвицевости полинома  $T(\lambda)$  все слагаемые в выражении (19) ограничены, за исключением, пока что, функций  $\Psi(y, t)$  и  $v(t)$ . Рассмотрим слагаемое  $\frac{1}{T(p)} \frac{K(p, t)}{R(p, t)} \Psi(y, t)\zeta(t)$ . В силу ограниченности  $y(t)$ , липшицевости  $\Psi_i(y, t)$ ,  $i = \overline{1, n}$  по  $y(t)$  и ограниченности по  $t$  (предположение 5) следует ограниченность  $\Psi_i(y, t)$ . С учетом того, что  $\deg[T(p)R(p, t)] - \deg K(p, t) = \gamma_u - \gamma \geq 0$  и вектор  $\zeta(t)$  ограниченный (предположение 5), функция  $\frac{1}{T(p)} \frac{K(p, t)}{R(p, t)} \Psi(y, t)\zeta(t)$  также ограниченная. А значит, сигнал  $v(t)$  ограничен, так как правая часть в выражении (19) ограничена; т. е. в системе управления все сигналы ограничены. Однако сохранение области диссипативности не гарантирует асимптотическую устойчивость сингулярно возмущенной системе (16). Пусть в этой системе  $\mu_1 = \mu_2 = \mu_0$ . Возьмем снова функцию Ляпунова (17). С учетом результата (18) вычислим производную от функции Ляпунова (17) вдоль траекторий (16):

$$\dot{V}(t) = -\varepsilon^T(t)Q_1\varepsilon(t) + 2\alpha\mu_0^{\gamma_u-1}\varepsilon^T(t)P\bar{b}g\Delta(t) - \mu_0^{-1}\eta^T(t)Q_2\eta(t) + 2\mu_0\eta(t)^T Hb\dot{v}(t). \quad (20)$$

Воспользуемся оценками:

$$2\alpha\mu_0^{\gamma_u-1}\varepsilon^T P\bar{b}g\Delta \leq \mu_0^{\gamma_u-1}\alpha\varepsilon^T P\bar{b}gg^T\bar{b}^T P\varepsilon + \alpha\mu_0^{\gamma_u-1}|\Delta|^2 \leq \mu_0^{\gamma_u-1}\alpha\varepsilon^T P\bar{b}gg^T\bar{b}^T P\varepsilon + \alpha\mu_0^{\gamma_u-1}k_1^2,$$

$$2\mu_0\eta^T Hb\dot{v} \leq \mu_0\eta^T Hbb^T H\eta + \mu_0\dot{v}^2 \leq \mu_0\eta^T Hbb^T H\eta + \mu_0k_2^2.$$

Принимая во внимание данные неравенства, правую часть в выражении (20) можно оценить:  $\dot{V} \leq -\varepsilon^T Q_3\varepsilon - \eta^T Q_4\eta + \bar{\varphi}$ , где  $Q_3 = Q_1 - \mu_0^{\gamma_u-1}\alpha P\bar{b}gg^T\bar{b}^T P$ ,  $Q_4 = Q_2 - \mu_0^2 Hbb^T H$ ,  $\bar{\varphi} = \alpha\mu_0^{\gamma_u-1}k_1^2 + \mu_0k_2^2$ . Легко видеть, что всегда существует число  $\mu_0 > 0$ , обеспечивающее выполнение матричных нера-

венств:  $Q_1 - \alpha\mu_0^{\gamma_u-1}P\bar{b}gg^T\bar{b}^T P > 0$  и  $Q_2 - \mu_0^2 Hbb^T H > 0$ . В этом случае оценка производной функции Ляпунова может быть записана как  $\dot{V} \leq -\chi V + \bar{\varphi}$ , где  $\chi = \min\left\{\frac{\lambda_{\min}(Q_3)}{\lambda_{\max}(P)}, \frac{\lambda_{\min}(Q_4)}{\lambda_{\max}(H)}\right\}$ .

Решив последнее неравенство, получим

$$V(t) \leq e^{-\chi t}V(0) + \chi^{-1}(1 - e^{-\chi t})\bar{\varphi}. \quad (21)$$

Отсюда следует, что  $\lim_{t \rightarrow \infty} V(t) \leq \chi^{-1}\bar{\varphi}$ . Очевидно, что всегда существует число  $\mu_0 > 0$ , обеспечивающее требуемую величину  $\delta$  в целевом условии (3). Приравняем правую часть неравенства (21) к  $\delta$ , тогда  $\delta \leq e^{-\chi t}V(0) + (1 - e^{-\chi t})\chi^{-1}\bar{\varphi}$ . Рассмотрим верхнюю границу последнего неравенства, заменив его равенством в момент времени  $t = T$ . Тогда  $T = \chi^{-1} \ln \frac{\chi V(0) - \bar{\varphi}}{\chi\delta - \bar{\varphi}}$ ; т. е. по истечении времени  $t = T$  будет выполнено целевое условие (3), и все функции в замкнутой системе управления ограничены.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Поляк Б.Т., Щербаков П.С. Робастная устойчивость и управление. — М.: Наука, 2002. — 303 с.
2. Буков В.Н. Вложение систем. Аналитический подход к анализу и синтезу матричных систем. — Калуга: Изд-во науч. лит-ры Н.Ф. Бочкаревой, 2006. — 720 с.
3. Мирошник И.В., Никифоров В.О., Фрадков А.Л. Нелинейное и адаптивное управление сложными динамическими системами. — СПб.: Наука, 2000. — 549 с.
4. Atassi A.N., Khalil H.K. A separation principle for the stabilization of class of nonlinear systems // IEEE Trans. Automat. Control. — 1999. — Vol. 44, N 9. — P. 1672–1687.
5. Брусин В.А. Об одном классе сингулярно возмущенных адаптивных систем. 1 // Автоматика и телемеханика. — 1995. — № 4. — С. 119–127.
6. Цыкунов А.М. Алгоритмы робастного управления с компенсацией ограниченных возмущений // Автоматика и телемеханика. — 2007. — № 7. — С. 103–115.
7. Tao G., Ioannou P.A. Model reference adaptive control for plants with unknown relative degree // IEEE Trans. Automat. Control. — 1993. — Vol. 38. — N 6. — P. 976–982.
8. Hoagg J.B., Demstein D.S. Direct adaptive command following and disturbance rejection for minimum phase systems with unknown relative degree // Int. J. of Adaptive Control and Signal Processing. — 2007. — Vol. 21 (1). — P. 49–75.

Статья представлена к публикации членом редколлегии С.Д. Земляковым.

**Фуртат Игорь Борисович** — канд. техн. наук, ст. преподаватель, Астраханский государственный технический университет, ☎ (512) 33-38-42, e-mail: cainenash@mail.ru, furtat\_i@mail.ru,

**Цыкунов Александр Михайлович** — д-р техн. наук, зав. кафедрой, Астраханский государственный технический университет, ☎ (512) 61-42-48, e-mail: tsygunov\_al@mail.ru

# О ГРУБОСТИ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

В.П. Жуков

Исследованы условия, при которых характер устойчивости состояния равновесия нелинейной динамической системы произвольного порядка ляпуновского типа не изменяется при любых достаточно малых линейных и нелинейных возмущениях ее правой части (грубость в смысле сохранения характера устойчивости). Нелинейные составляющие правых частей уравнений исходной (невозмущенной) системы и нелинейные возмущения этих правых частей считаются принадлежащими весьма широкому классу нелинейных функций, включающему в себя как класс аналитических, так и различного типа классы неаналитических функций. Получены достаточные и необходимые условия указанной грубости.

**Ключевые слова:** нелинейная динамическая система, грубость в смысле сохранения характера устойчивости.

## ВВЕДЕНИЕ

Понятие и строгое определение грубости (в смысле структурной устойчивости) динамических систем

$$\dot{x} = f(x), \quad x \in \mathbf{R}^n, \quad (1)$$

впервые было дано в статье А.А. Андропова и Л.С. Понтрягина [1]. Необходимые и достаточные условия такой грубости для систем (1) второго порядка при аналитичности компонент векторной функции  $f(x)$  и аналитичности возмущающих функций приведены в работах [1–3]. Вопросы структурной устойчивости подробно рассматриваются в работе В.И. Арнольда [4]. Иной смысл, отличный от понятия структурной устойчивости, заключается в определении грубости свойств систем (1), данное Н.Н. Красовским [5].

Для определений структурной устойчивости [1, 4, 6, 7] характерно требование существования гомеоморфизма (взаимно непрерывного и взаимно однозначного преобразования), обеспечивающего топологическую эквивалентность [8] фазовых портретов невозмущенной и возмущенной систем. Такое требование значительно осложняет нахождение и применение условий структурной устойчивости непосредственно для систем вида (1). Так, условия, полученные в работе [1] для систем (1) лишь второго порядка, являются трудно проверяемыми.

Если точка равновесия  $x = 0$  невозмущенной нелинейной системы (1) произвольного порядка имеет один из возможных характеров устойчивос-

ти (асимптотическая устойчивость, неасимптотическая устойчивость, неустойчивость) и нас интересуют лишь условия, при которых точка равновесия  $x = 0$  возмущенной системы будет иметь такой же характер устойчивости при достаточно малых (в  $C$ -метрике) в некоторой окрестности этой точки возмущениях определенного класса, то для нелинейных систем (1) возникает понятие грубости в смысле сохранения характера устойчивости. Нахождение условий такой грубости непосредственно для систем вида (1), в правой части которых не выделены линейная и нелинейная составляющие, связано с большими трудностями. Если известны условия структурной устойчивости невозмущенной системы (1), то они вследствие обеспечения ими топологической эквивалентности фазовых портретов возмущенной и невозмущенной систем являются также условиями грубости в смысле сохранения характера устойчивости. Но, к сожалению, на этом пути имеются трудности: сложность условий структурной устойчивости резко возрастает для систем (1) выше второго порядка [4, 7]; выполнение известных условий структурной устойчивости для систем (1) второго порядка [1–3] трудно проверить для конкретных систем; грубой в смысле сохранения характера устойчивости системе (1) не всегда соответствует ее структурная устойчивость, вследствие чего не все грубые в смысле сохранения характера устойчивости системы могут быть выявлены с помощью условий структурной устойчивости.

Вопрос об определении и условиях грубости характера устойчивости рассматривается в данной



статье (§ 1) применительно к большому и важному классу нелинейных систем (1) ляпуновского типа (системы (2) в § 1), в правой части которых выделены линейная и нелинейная составляющие. При данном определении грубости характера устойчивости систем (2) для доказательства и формулировки приведенной в § 1 теоремы, дающей необходимые и достаточные условия грубости, не возникает необходимости в гомеоморфизме фазовых портретов возмущенной и невозмущенной систем.

Заметим, что условия структурной устойчивости систем ляпуновского типа (2) проще таких же условий для систем (1): необходимым и достаточным условием структурной устойчивости линеаризуемых систем (2) является расположение собственных значений матрицы линеаризованной системы вне мнимой оси [6]. Отсюда следует, что если собственные значения этой матрицы находятся на мнимой оси, то система (2) структурно неустойчива. Например, неустойчивая система (2), которой соответствуют собственные значения, расположенные частично на мнимой оси и частично правее этой оси, не является структурно устойчивой, что следует из приведенной далее теоремы. Следовательно, условия структурной устойчивости систем (2) не могут выявить все случаи грубости этих систем в смысле сохранения характера устойчивости. В то же время условия теоремы, сформулированной в данной статье, охватывают все случаи такой грубости систем (2), и не требуется выполнение условий структурной устойчивости.

Цель данной работы состоит в получении для класса нелинейных систем ляпуновского типа необходимых и достаточных условий грубости (в смысле сохранения характера устойчивости) по отношению к широкому классу возмущений.

**1. УСЛОВИЯ ГРУБОСТИ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ В СМЫСЛЕ СОХРАНЕНИЯ ХАРАКТЕРА УСТОЙЧИВОСТИ**

Условия грубости будем исследовать для большого класса нелинейных систем ляпуновского типа, т. е. для нелинейных систем (1) вида

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \varphi(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathbf{R}^n, \quad (2)$$

или

$$\dot{x}_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j + \varphi_i(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Здесь  $a_{ij}$ ,  $i, j = 1, 2, \dots, n$  — постоянные коэффициенты квадратной матрицы  $\mathbf{A}$ ;  $\varphi_i(\mathbf{x})$ ,  $\varphi_i(0) = 0$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  — нелинейные скалярные функции, являющиеся компонентами векторной функции  $\varphi(\mathbf{x})$  и обеспечивающие единственность решения

системы (2) в некоторой окрестности точки равновесия  $\mathbf{x} = 0$  этой системы.

Пусть функции  $\varphi_i(\mathbf{x})$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  удовлетворяют условиям

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow 0} \frac{\varphi_i(\mathbf{x})}{\|\mathbf{x}\|} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (3)$$

Так как  $\|\varphi(\mathbf{x})\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n \varphi_i^2(\mathbf{x})}$ , то, очевидно, из этих условий следует

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow 0} \frac{\|\varphi(\mathbf{x})\|}{\|\mathbf{x}\|} = 0. \quad (4)$$

И, наоборот, из условия (4) следуют условия (3). Соотношения (3) и (4) означают, что каждая функция  $\varphi_i(\mathbf{x})$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , нелинейна, а ее линейная часть равна нулю, ибо в случае, когда функция  $\varphi_i(\mathbf{x})$  содержит какую-либо линейную составляющую, правая часть соответствующего соотношения (3) будет отлична от нуля.

Каждому соотношению (3) удовлетворяет широкий класс нелинейных функций  $\varphi_i(\mathbf{x})$ , включающий в себя как аналитические, так и различного типа неаналитические функции: непрерывно дифференцируемые конечное число раз, непрерывные, разрывные. Очевидно, что аналитическая функция  $\varphi_i(\mathbf{x})$ , удовлетворяющая соотношению (3), может содержать в своих разложениях в степенные ряды лишь члены не ниже второй степени. Примером непрерывных и разрывных функций, удовлетворяющих этому соотношению, служат непрерывные и разрывные функции, модуль которых в некоторой окрестности точки  $\mathbf{x} = 0$  ограничен сверху положительно определенной квадратичной формой  $w(\mathbf{x})$ ,  $w(0) = 0$ ,  $w(\mathbf{x}) > 0$  при  $\mathbf{x} \neq 0$ .

Возмущение правой части исходной системы (2) будем рассматривать при исследовании грубости в виде суммы линейного  $\mathbf{A}'\mathbf{x}$  и нелинейного  $\varphi_1(\mathbf{x})$  возмущений. Соответственно возмущенная система имеет следующий вид:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \varphi(\mathbf{x}) + \mathbf{A}'\mathbf{x} + \varphi_1(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathbf{R}^n. \quad (5)$$

Здесь в квадратной матрице  $\mathbf{A}'$  постоянные элементы  $a'_{ij}$ ,  $i, j = 1, 2, \dots, n$ , которые считаются достаточно малыми при рассмотрении условий грубости. Компоненты  $\varphi_{1i}(\mathbf{x})$ ,  $\varphi_{1i}(0) = 0$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  векторной функции  $\varphi_1(\mathbf{x})$  пусть являются функциями, которые удовлетворяют условиям, аналогичным условиям (3):

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow 0} \frac{\varphi_{1i}(\mathbf{x})}{\|\mathbf{x}\|} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (6)$$

Поэтому рассматривается широкий класс нелинейных возмущений  $\varphi_{1i}(\mathbf{x})$ , линейная часть кото-

рых равна нулю. Всякое понятие грубости исходной системы по отношению к рассматриваемому классу возмущений ее правой части предполагает достаточную малость этих возмущений в заданной метрике; в настоящей статье малость возмущений рассматривается в  $C$ -метрике (этого достаточно для доказательства приведенной далее теоремы).

Заметим, что условия  $\varphi_i(0) = 0$ ,  $\varphi_{1i}(0) = 0$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , обеспечивающие наличие у систем (2) и (5) точки равновесия  $\mathbf{x} = 0$ , следуют соответственно из условий (3) и (6).

При исследовании условий грубости систем (2) в смысле сохранения характера устойчивости будем исходить из следующего определения.

**Определение.** Нелинейная динамическая система (2) является грубой (в смысле сохранения характера устойчивости ее точки равновесия  $\mathbf{x} = 0$ ) по отношению к классу возмущений  $\mathbf{A}'\mathbf{x} + \varphi_1(\mathbf{x})$ , характеризующихся тем, что нелинейное возмущение  $\varphi_1(\mathbf{x})$  удовлетворяет условию (6), а линейное возмущение  $\mathbf{A}'\mathbf{x}$  имеет достаточно малые коэффициенты матрицы  $\mathbf{A}'$ , если при любых указанных возмущениях характер устойчивости точки равновесия  $\mathbf{x} = 0$  возмущенной системы (5) остается таким же, как у точки равновесия  $\mathbf{x} = 0$  невозмущенной системы (2). ♦

Очевидно, возможны следующие три варианта сочетания возмущений  $\mathbf{A}'\mathbf{x}$  и  $\varphi_1(\mathbf{x})$  при рассмотрении условий определенной выше грубости:  $\mathbf{A}'\mathbf{x} \neq 0$ ,  $\varphi_1(\mathbf{x}) \neq 0$ ;  $\mathbf{A}'\mathbf{x} \neq 0$ ,  $\varphi_1(\mathbf{x}) = 0$ ;  $\mathbf{A}'\mathbf{x} = 0$ ,  $\varphi_1(\mathbf{x}) \neq 0$ . Вариант  $\mathbf{A}'\mathbf{x} = 0$ ,  $\varphi_1(\mathbf{x}) = 0$  соответствует отсутствию возмущений и поэтому не представляет интереса. Для всех трех вариантов приведенная далее теорема дает достаточные и необходимые условия грубости.

В определении имеется в виду лишь факт сохранения характера устойчивости (например, если точка равновесия  $\mathbf{x} = 0$  невозмущенной системы (2) асимптотически устойчива или неустойчива, то и точка равновесия  $\mathbf{x} = 0$  возмущенной системы (5) соответственно асимптотически устойчива или неустойчива); при этом в некоторых случаях фазовые портреты систем (2) и (5) могут быть топологически неэквивалентными в любой окрестности точки  $\mathbf{x} = 0$ .

Имеют место следующие достаточные и необходимые условия грубости систем (2) в смысле данного выше определения.

**Теорема.** *Нелинейная система (2) является по отношению к рассматриваемому классу возмущений  $\mathbf{A}'\mathbf{x} + \varphi_1(\mathbf{x})$  грубой в смысле сохранения характера устойчивости ее точки равновесия  $\mathbf{x} = 0$  тогда и только тогда, если корни, соответствующие матрице  $\mathbf{A}$ , либо все расположены левее мнимой оси комплексной плоскости, либо если хотя бы один корень расположен правее этой оси при любом расположе-*

*нии остальных корней. В первом случае грубой является асимптотически устойчивая нелинейная система (2), во втором случае груба неустойчивая нелинейная система (2).*

Доказательство теоремы дано в Приложении.

Из теоремы следует, что асимптотически устойчивая нелинейная система (2) груба тогда и только тогда, если ее линеаризованная система

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}, \quad \mathbf{x} \in \mathbf{R}^n, \quad (7)$$

асимптотически устойчива, а неустойчивая система (2) груба тогда и только тогда, если ее линеаризованная система (7) неустойчива вследствие наличия у нее корней справа от мнимой оси. Из теоремы также следует, что нелинейная система (2) является по отношению к рассматриваемому классу возмущений негрубой тогда и только тогда, если среди соответствующих матрице  $\mathbf{A}$  корней есть корни на мнимой оси, но при этом нет корней правее этой оси (корни левее оси могут быть). Расположение корней, соответствующих матрице  $\mathbf{A}$ , вне мнимой оси является, очевидно, достаточным условием грубости нелинейной системы (2).

Теоремы первого метода Ляпунова, как известно, позволяют судить о характере устойчивости точки равновесия  $\mathbf{x} = 0$  нелинейной системы

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \psi(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathbf{R}^n \quad (8)$$

по корням, соответствующим матрице  $\mathbf{A}$  (соответственно, по характеру устойчивости точки равновесия  $\mathbf{x} = 0$  линеаризованной системы (7)); при этом компоненты  $\psi_i(\mathbf{x})$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  функции  $\psi(\mathbf{x})$  считаются принадлежащими классу аналитических функций, удовлетворяющих условию

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow 0} \frac{\psi_i(\mathbf{x})}{\|\mathbf{x}\|} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (9)$$

ибо по условию этих теорем являются аналитическими функциями, разложение которых в степенные ряды содержит члены не ниже второй степени. Заметим, что условия указанных теорем можно рассматривать не только как редуцирующие условия, сводящие исследование нелинейных систем (8) на устойчивость к исследованию линейных систем (7), но и как условия грубости (в смысле сохранения характера устойчивости) линейных систем (7) по отношению к классу нелинейных аналитических возмущений  $\psi_i(\mathbf{x})$ , удовлетворяющих условию (9). При доказательстве приведенной выше теоремы используется следующая лемма, обобщающая теоремы первого метода Ляпунова на случай, когда рассматривается класс всех функций  $\psi_i(\mathbf{x})$ , удовлетворяющих условию (9), который значительно шире класса аналитических функций  $\psi_i(\mathbf{x})$ , рассматриваемых в первом методе.



**Лемма.** Пусть скалярные нелинейные функции  $\psi_i(\mathbf{x})$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , являющиеся компонентами векторной функции  $\psi(\mathbf{x})$ , входящей в правую часть нелинейной системы (8), удовлетворяют соотношению (9). Тогда достаточным и необходимым условием асимптотической устойчивости точки равновесия  $\mathbf{x} = 0$  нелинейной системы (8) при любых функциях  $\psi_i(\mathbf{x})$  рассматриваемого класса является отрицательность вещественных частей всех корней, соответствующих матрице  $\mathbf{A}$ , а достаточным и необходимым условием неустойчивости точки равновесия  $\mathbf{x} = 0$  при любых функциях  $\psi_i(\mathbf{x})$  того же класса является положительность вещественной части хотя бы одного корня, соответствующего матрице  $\mathbf{A}$ .

Доказательство леммы дано в Приложении.

Условия леммы можно рассматривать как достаточные и необходимые условия грубости (в смысле сохранения характера устойчивости точки равновесия  $\mathbf{x} = 0$ ) линейной системы (7) по отношению к широкому классу нелинейных возмущений  $\psi(\mathbf{x})$ , компоненты которых удовлетворяют условию (9), ибо, как следует из леммы, при любых возмущениях  $\psi(\mathbf{x})$  из этого класса характеры устойчивости систем (7) и (8) являются одинаковыми. Очевидно, что достаточным и необходимым условием негрубости линейной системы (7) по отношению к нелинейным возмущениям указанного класса является расположение некоторых корней, соответствующих матрице  $\mathbf{A}$ , на мнимой оси при отсутствии корней правее этой оси.

Приведем примеры на применение теоремы. Сначала рассмотрим семейство нелинейных систем

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 + \varphi_1(x_1, x_2, x_3), & \dot{x}_2 &= -x_1 + \varphi_2(x_1, x_2, x_3), \\ \dot{x}_3 &= x_3 + \varphi_3(x_1, x_2, x_3), \dots, \end{aligned} \quad (10)$$

где  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$  и  $\varphi_3$  — любые скалярные нелинейные функции, удовлетворяющие условиям (3). Точкой равновесия любой системы семейства является точка  $\mathbf{x} = 0$ . Так как линеаризованной системе  $\dot{x}_1 = x_2$ ,  $\dot{x}_2 = -x_1$ ,  $\dot{x}_3 = x_3$  соответствует корень справа от мнимой оси (при двух других сопряженных корнях на этой оси), то согласно теореме любая система семейства (10) будет грубой в смысле сохранения характера устойчивости ее точки равновесия  $\mathbf{x} = 0$  по отношению к рассматриваемым возмущениям.

Исследуем теперь нелинейную систему

$$\dot{x}_1 = -x_2 + x_3^2, \quad \dot{x}_2 = x_1 + x_3^3, \quad \dot{x}_3 = -x_3 + x_1x_2.$$

Точка  $\mathbf{x} = 0$  является точкой равновесия этой системы. Нелинейные функции  $x_3^2$ ,  $x_3^3$  и  $x_1x_2$  аналитические, и степень каждой из них не ниже второй. Поэтому эти функции удовлетворяют условию (3). Линеаризованной системе  $\dot{x}_1 = -x_2$ ,  $\dot{x}_2 = -x_1$ ,  $\dot{x}_3 = -x_3$  соответствуют два сопряжен-

ных корни на мнимой оси и один корень слева от нее. При таком расположении корней согласно теореме рассматриваемая нелинейная система является негрубой.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Введено понятие грубости в смысле сохранения характера устойчивости для нелинейных динамических систем произвольного порядка ляпуновского типа. Для автономных систем такого типа получены достаточные и необходимые условия грубости при весьма широком классе возмущений правой части системы.

Актуальная задача дальнейших исследований состоит в получении аналогичных условий грубости для неавтономных нелинейных динамических систем произвольного порядка.

## ПРИЛОЖЕНИЕ

**Доказательство леммы. Достаточность.** Сначала покажем, что отрицательность вещественных частей всех корней, соответствующих матрице  $\mathbf{A}$ , является достаточным условием асимптотической устойчивости точки равновесия  $\mathbf{x} = 0$  нелинейной системы (8) при любых функциях  $\psi_i(\mathbf{x})$ , удовлетворяющих условию (9). Как известно [9], если все корни, соответствующие матрице  $\mathbf{A}$ , имеют отрицательные вещественные части, то решением уравнения в частных производных

$$\sum_{i=1}^n (a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n) \frac{\partial V}{\partial x_i} = \|\mathbf{x}\|^2, \quad \|\mathbf{x}\|^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2, \quad (11)$$

является отрицательно определенная квадратичная форма  $V$  переменных  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . Левая часть уравнения (11) является производной от неизвестной функции  $V(\mathbf{x})$  в силу линейной системы (7). Очевидно, что производная в силу нелинейной системы (8) от отрицательно определенной формы  $V$  имеет вид

$$\frac{\partial V}{\partial t} = \|\mathbf{x}\|^2 + \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_i} \psi_i(\mathbf{x}).$$

Преобразуем это соотношение, чтобы доказательство достаточности оказалось возможным при любых функциях  $\psi_i(\mathbf{x})$ , удовлетворяющих условиям (9):

$$\frac{\partial V}{\partial t} = \|\mathbf{x}\|^2 \left[ 1 + \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_i} \frac{1}{\|\mathbf{x}\|} \frac{\psi_i(\mathbf{x})}{\|\mathbf{x}\|} \right]. \quad (12)$$

Покажем, что в каждой точке некоторой достаточно малой окрестности точки  $\mathbf{x} = 0$  значение модуля второго члена в квадратной скобке меньше единицы (это означает определенную положительность производной  $dV/dt$ ). Действительно, так как  $V$  — квадратичная форма, то каждая из производных  $\partial V/\partial x_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , представляет собой 1-форму (однородный многочлен первой степени), и поэтому модуль значения каждого из выражений  $(\partial V/\partial x_i)(1/\|\mathbf{x}\|)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , ограничен в любой окрестности точки  $\mathbf{x} = 0$ . Но в силу условия (9) окрестность точки  $\mathbf{x} = 0$  можно выбрать так, чтобы значения функций  $\psi_i(\mathbf{x})/\|\mathbf{x}\|$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , были в этой окрестности столь малы, что при этом значение модуля второго члена в квадратной скобке соотношения (12) меньше единицы. Тогда при любом значении этого второго члена выражение в квадратной скобке будет в указанной окрестности положительной функцией, а производная  $dV/dt$  будет, очевидно, определенно положительной функцией. Но так как при этом функция  $V$  определенно отрицательна, то согласно второму методу Ляпу-

нова точка равновесия  $\mathbf{x} = 0$  нелинейной системы (8) будет асимптотически устойчива (при любой функции  $\psi(\mathbf{x})$ , удовлетворяющей условию (9)).

Покажем теперь, что положительность вещественных частей некоторых корней, соответствующих матрице  $\mathbf{A}$ , является достаточным условием неустойчивости точки равновесия  $\mathbf{x} = 0$  нелинейной системы (8). Как известно [9, 10], в случае наличия таких корней для уравнения в частных производных

$$\sum_{i=1}^n (a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n) \frac{\partial V}{\partial x_i} = \|\mathbf{x}\|^2 + \lambda V$$

обязательно найдутся квадратичная форма  $V(\mathbf{x})$  и положительное число  $\lambda$ , которые удовлетворяют этому уравнению, и при этом форма  $V(\mathbf{x})$  в сколь угодно малой окрестности точки  $\mathbf{x} = 0$  принимает положительные значения. Беря производную от этой формы по времени в силу нелинейной системы (8), получаем

$$\frac{dV}{dt} = \lambda V + W(\mathbf{x}), \quad (13)$$

где

$$W(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x}\|^2 + \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_i} \psi_i(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x}\|^2 \left[ 1 + \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_i} \frac{1}{\|\mathbf{x}\|} \frac{\psi_i(\mathbf{x})}{\|\mathbf{x}\|} \right].$$

Ранее, при рассмотрении случая, когда вещественные части всех корней, соответствующих матрице  $\mathbf{A}$ , отрицательны, было показано, что функция  $W(\mathbf{x})$  определена положительна при любых функциях  $\psi_i(\mathbf{x})$ , удовлетворяющих условию (9). Но тогда форма  $V(\mathbf{x})$ , производная которой в силу системы (8) приводится к виду (13), будет удовлетворять условиям второй теоремы о неустойчивости прямого метода Ляпунова [9]. Следовательно, точка равновесия  $\mathbf{x} = 0$  нелинейной системы (8) будет неустойчивой при любых функциях  $\psi_i(\mathbf{x})$ , удовлетворяющих условию (9).

**Необходимость.** Итак, достаточное условие того, что при любых функциях  $\psi_i(\mathbf{x})$ , удовлетворяющих условию (9), о характере устойчивости точки равновесия  $\mathbf{x} = 0$  нелинейной системы (8) можно судить по характеру устойчивости точки равновесия  $\mathbf{x} = 0$  линейной системы (7), заключается в том, что корни, соответствующие матрице  $\mathbf{A}$ , либо все расположены левее мнимой оси, либо некоторые из них расположены правее этой оси. Для доказательства, что это условие является и необходимым, надо показать, что при ином расположении корней (нет корней справа от мнимой оси и имеются корни на мнимой оси) судить о характере устойчивости нелинейной системы (8) по характеру устойчивости линейной системы (7) при любой функции  $\psi_i(\mathbf{x})$ , удовлетворяющей условию (9), нельзя, ибо при таком ином расположении корней функции  $\psi_i(\mathbf{x})$  всегда можно подобрать так, чтобы точка равновесия  $\mathbf{x} = 0$  нелинейной системы (8) была устойчивой или неустойчивой по желанию. Такое доказательство дано в работе [9, с. 344] (см. также работы [10, 11]); при этом доказательства нужные функции подбираются из таких аналитических функций, которые входят в класс всех функций  $\psi_i(\mathbf{x})$ , удовлетворяющих условию (9), так как разложение этих аналитических функций в степенные ряды содержит члены не ниже второй степени. Лемма доказана.

**Доказательство теоремы. Достаточность.** Покажем, что при условии теоремы на расположение корней, соответствующих матрице  $\mathbf{A}$ , характер устойчивости точки равновесия  $\mathbf{x} = 0$  систем (2) и (5) одинаков при любых рассматриваемых (см. определение) возмущениях  $\mathbf{A}'\mathbf{x}$ ,  $\varphi_1(\mathbf{x})$  в любых их сочетаниях:  $\mathbf{A}'\mathbf{x} \neq 0$ ,  $\varphi_1(\mathbf{x}) \neq 0$ ;  $\mathbf{A}'\mathbf{x} \neq 0$ ,  $\varphi_1(\mathbf{x}) = 0$ ;  $\mathbf{A}'\mathbf{x} = 0$ ,  $\varphi_1(\mathbf{x}) \neq 0$ .

По условиям теоремы корни, соответствующие матрице  $\mathbf{A}$ , либо все лежат левее мнимой оси (тогда линейная система (7) асимптотически устойчива), либо среди этих корней имеются корни, расположенные правее этой оси (тогда система (7) неустойчива). При изменении коэффициентов матрицы  $\mathbf{A}$  соответствующие ей корни изменяются непрерывно [12]. Поэтому если корни, соответствующие матрице  $\mathbf{A}$ , все лежат левее мнимой оси, то при любых достаточно малых элементах матри-

цы  $\mathbf{A}'$  корни, соответствующие матрице  $\mathbf{A} + \mathbf{A}'$ , также все будут расположены левее мнимой оси. Следовательно, точки равновесия  $\mathbf{x} = 0$  линейных систем (7) и

$$\dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{A} + \mathbf{A}')\mathbf{x}, \quad \mathbf{x} \in \mathbf{R}^n \quad (14)$$

будут асимптотически устойчивыми. Но тогда согласно лемме асимптотически устойчивыми будут точки равновесия нелинейных систем (2) и (5), ибо соответствующие этим системам нелинейные функции  $\varphi(\mathbf{x})$  и  $\varphi(\mathbf{x}) + \varphi_1(\mathbf{x})$  не меняют согласно лемме характер устойчивости точки равновесия  $\mathbf{x} = 0$ . Заметим, что компоненты  $\psi_i = \varphi_i + \varphi_{1i}$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , функции  $\psi = \varphi + \varphi_1$  удовлетворяют условию (9), ибо

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \infty} \frac{\psi_i(\mathbf{x})}{\|\mathbf{x}\|} = \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \infty} \frac{\varphi_i(\mathbf{x})}{\|\mathbf{x}\|} + \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \infty} \frac{\varphi_{1i}(\mathbf{x})}{\|\mathbf{x}\|} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

если учитывать условия (3) и (6).

Если же среди корней, соответствующих матрице  $\mathbf{A}$ , имеются корни, лежащие правее мнимой оси, то при любых достаточно малых коэффициентах матрицы  $\mathbf{A}'$  число правых корней, соответствующих матрице  $\mathbf{A} + \mathbf{A}'$ , останется прежним в силу непрерывной зависимости корней от элементов матрицы. Поэтому точки равновесия  $\mathbf{x} = 0$  линейных систем (7) и (14) будут неустойчивыми. Следовательно, на основании леммы неустойчивыми будут точки равновесия  $\mathbf{x} = 0$  нелинейных систем (2) и (5), ибо согласно лемме нелинейные функции  $\varphi(\mathbf{x})$  и  $\varphi(\mathbf{x}) + \varphi_1(\mathbf{x})$  не могут изменить характера устойчивости точки равновесия  $\mathbf{x} = 0$ .

Таким образом, при условиях теоремы характер устойчивости нелинейных систем (2) и (5) при любых рассматриваемых возмущениях остается одинаковым. Достаточность доказана.

**Необходимость.** Надо доказать, что если характер устойчивости точки равновесия  $\mathbf{x} = 0$  систем (2) и (5) одинаков при любых возмущениях  $\mathbf{A}'\mathbf{x}$ ,  $\varphi_1(\mathbf{x})$  в любом их сочетании ( $\mathbf{A}'\mathbf{x} \neq 0$ ,  $\varphi_1(\mathbf{x}) \neq 0$ ;  $\mathbf{A}'\mathbf{x} \neq 0$ ,  $\varphi_1(\mathbf{x}) = 0$ ;  $\mathbf{A}'\mathbf{x} = 0$ ,  $\varphi_1(\mathbf{x}) \neq 0$ ), то расположение корней, соответствующих матрице  $\mathbf{A}$  линеаризованной системы (7), может быть только таким, которое соответствует условиям теоремы (либо все корни расположены слева от мнимой оси, либо хотя бы один корень расположен справа от нее).

Для этого следует доказать, что при ином расположении корней (нет корней справа, обязательно есть корни на мнимой оси и при этом могут быть корни слева от нее), соответствующих матрице  $\mathbf{A}$ , при возмущениях  $\mathbf{A}'\mathbf{x} \neq 0$  существует достаточно малое возмущение  $\mathbf{A}'$  матрицы  $\mathbf{A}$ , а при возмущении  $\mathbf{A}'\mathbf{x} = 0$  найдется нелинейное возмущение  $\varphi_1(\mathbf{x})$ , при которых характер устойчивости точки равновесия  $\mathbf{x} = 0$  систем (2) и (5) будет различным. Доказательство приведем отдельно для случая, когда  $\mathbf{A}'\mathbf{x} \neq 0$  ( $\mathbf{A}'\mathbf{x} \neq 0$ ,  $\varphi_1(\mathbf{x}) \neq 0$ ;  $\mathbf{A}'\mathbf{x} \neq 0$ ,  $\varphi_1(\mathbf{x}) = 0$ ), и для случая, когда  $\mathbf{A}'\mathbf{x} = 0$ ,  $\varphi_1(\mathbf{x}) \neq 0$ . В обоих случаях исходим из того, что среди корней, соответствующих матрице  $\mathbf{A}$ , нет корней справа от мнимой оси, но есть корни на мнимой оси.

Начнем с доказательства для первого случая, т. е. докажем, что при указанном ином расположении корней, соответствующих матрице  $\mathbf{A}$ , найдется достаточно малое возмущение  $\mathbf{A}'$  этой матрицы, при котором характер устойчивости систем (2) и (5) будет различаться. Преобразуем такую матрицу  $\mathbf{A}$  в жорданову матрицу  $\mathbf{J}$ . Матрицы  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{J}$  подобны, т. е. существует неособая матрица  $\mathbf{P}$  такая, что  $\mathbf{A} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{J}\mathbf{P}$  [13]; поэтому корни, соответствующие матрицам  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{J}$  одинаковы [13].

Так как характер устойчивости линейной системы (7)  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$  определяется не только характеристическими корнями матрицы  $\mathbf{A}$ , но и видом ее матрицы Жордана  $\mathbf{J}$ , то характеры устойчивости системы (7) и нормальной системы уравнений  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{J}\mathbf{x}$ , соответствующей матрице  $\mathbf{J}$ , одинаковы.

Матрица  $\mathbf{J}$ , как и любая жорданова матрица, имеет блочно-диагональный вид, а элементы блоков записываются через параметры корней, соответствующих матрице  $\mathbf{J}$  (а, следовательно, и матрице  $\mathbf{A}$ ). Если в блоках матрицы  $\mathbf{J}$  сколь угодно мало изменить параметры этих корней, то, очевидно, новым корням будет соответствовать другая жорданова матрица  $\mathbf{J}_1$ ,



элементы которой сколь угодно близки к соответствующим элементам матрицы  $\mathbf{J}$ .

Существует семейство  $\{\mathbf{A}_1\}$  матриц  $\mathbf{A}_1$  подобных матрице  $\mathbf{J}_1$ , ибо каждой неособой матрице  $\mathbf{T}$  из семейства  $\{\mathbf{T}\}$  всех неособых матриц соответствует матрица  $\mathbf{A}_1 = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{J}_1\mathbf{T}$ , по определению подобная матрице  $\mathbf{J}_1$ . Вследствие такого подобия матрице  $\mathbf{J}_1$  и всем матрицам  $\mathbf{A}_1$  семейства  $\{\mathbf{A}_1\}$  соответствуют одинаковые корни (они по условию выбора матрицы  $\mathbf{J}_1$  сколь угодно мало отличаются от корней, соответствующих матрицам  $\mathbf{J}$  и  $\mathbf{A}$ ); очевидно, что характер устойчивости линейной системы  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{J}_1\mathbf{x}$  и всех систем  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}_1\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{A}_1 \in \{\mathbf{A}_1\}$  одинаков. Покажем, что среди матриц семейства  $\{\mathbf{A}_1\}$  найдется такая матрица  $\mathbf{A}_1$ , что ее коэффициенты сколь угодно мало отличаются от коэффициентов матрицы  $\mathbf{A}$ , т. е. матрицу  $\mathbf{A}_1$  можно представить как  $\mathbf{A}_1 = \mathbf{A} + \mathbf{A}'$ , где элементы матрицы  $\mathbf{A}'$  сколь угодно малы. Для этого воспользуемся неособой матрицей  $\mathbf{T} = \mathbf{P}$  из семейства  $\{\mathbf{T}\}$ , где  $\mathbf{P}$  — неособая матрица, которая обеспечивала подобие матриц  $\mathbf{J}$  и  $\mathbf{A} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{J}\mathbf{P}$ . С помощью этой матрицы  $\mathbf{P}$  получим матрицу  $\mathbf{A}_1 = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{J}_1\mathbf{P}$ , подобную матрице  $\mathbf{J}_1$ ; корни матриц  $\mathbf{A}_1$  и  $\mathbf{J}_1$ , очевидно, одинаковы. Так как при получении матриц  $\mathbf{A} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{J}\mathbf{P}$  и  $\mathbf{A}_1 = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{J}_1\mathbf{P}$  используется одна и та же неособая матрица  $\mathbf{P}$ , а корни, соответствующие жордановым матрицам  $\mathbf{J}$  и  $\mathbf{J}_1$ , отличаются сколь угодно мало, то элементы матрицы  $\mathbf{A}_1$  будут сколь угодно мало отличаться от элементов матрицы  $\mathbf{A}$  и, следовательно, существует такая матрица  $\mathbf{A}'$  со сколь угодно малыми элементами, что  $\mathbf{A}_1 = \mathbf{A} + \mathbf{A}'$ .

Покажем теперь, что при любом характере устойчивости точки равновесия  $\mathbf{x} = 0$  нелинейной системы (2) среди всех матриц  $\mathbf{A}'$  со сколь угодно малыми элементами найдется такая матрица  $\mathbf{A}'$ , что характер устойчивости точки равновесия  $\mathbf{x} = 0$  возмущенной системы (5) будет отличаться от характера устойчивости точки равновесия  $\mathbf{x} = 0$  невозмущенной системы (2). Для этого покажем, что рассматриваемое при доказательстве необходимости расположение корней (нет корней справа от мнимой оси, обязательно есть корни на мнимой оси), соответствующих матрице  $\mathbf{A}$ , таково, что при любом характере устойчивости точки равновесия  $\mathbf{x} = 0$  системы (2) можно указать такое сколь угодно малое изменение этих корней (с целью получения матриц  $\mathbf{J}_1$  и  $\mathbf{A}_1$ ) и, следовательно, согласно доказанному выше, указать такое сколь угодно малое возмущение  $\mathbf{A}'$  матрицы  $\mathbf{A}$ , чтобы характер устойчивости точки равновесия  $\mathbf{x} = 0$  линейной системы  $\dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{A} + \mathbf{A}')\mathbf{x}$  обеспечивал различие характеров устойчивости точек равновесия систем (2) и (5).

Действительно, рассматриваемые нами корни, соответствующие матрице  $\mathbf{A}$  линейной системы (7), таковы, что эта система либо неасимптотически устойчива (всем корням на мнимой оси соответствуют простые элементарные делители и могут быть или не быть корни слева от мнимой оси), либо неустойчива (есть кратные нулевые или мнимые корни, которым соответствуют непростые элементарные делители и могут быть или не быть корни слева от мнимой оси). Если в любом из этих двух случаев нелинейная система (2) неасимптотически устойчива, то достаточно сколь угодно мало сдвинуть вправо все или часть находящихся на мнимой оси корней, соответствующих матрицам  $\mathbf{J}$  и  $\mathbf{A}$ , чтобы по доказанному выше нашлось такое сколь угодно малое возмущение  $\mathbf{A}'$  матрицы  $\mathbf{A}$ , что система (14)  $\dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{A} + \mathbf{A}')\mathbf{x}$  будет неустойчивой. Но тогда согласно лемме при учете нелинейных членов  $\varphi(\mathbf{x})$ ,  $\varphi_1(\mathbf{x})$  в правой части системы (5) будет неустойчивой и эта система. Другими словами при неасимптотической устойчивости системы (2) существует сколь угодно малое возмущение  $\mathbf{A}'\mathbf{x}$  в правой части системы (5), которое приводит к различию характеров устойчивости систем (2) и (5). Если же в любом из двух рассматриваемых случаев нелинейная система (2) неустойчива, то достаточно все находящиеся на мнимой оси кор-

ни, соответствующие матрице  $\mathbf{A}$ , сколь угодно мало сдвинуть влево, чтобы нашлось сколь угодно малое возмущение  $\mathbf{A}'$  матрицы  $\mathbf{A}$ , при котором система (14) и, следовательно, согласно лемме система (5) будут асимптотически устойчивыми, т. е. при неустойчивости системы (2) также существует сколь угодно малое возмущение  $\mathbf{A}'\mathbf{x}$  в правой части системы (5), при котором различны характеры устойчивости систем (2) и (5). Наконец, если при любом из двух рассматриваемых случаев система (2) асимптотически устойчива, то достаточно сколь угодно мало сдвинуть вправо все или часть находящихся на мнимой оси корней, соответствующих матрице  $\mathbf{A}$ , чтобы нашлось сколь угодно малое возмущение  $\mathbf{A}'$  матрицы  $\mathbf{A}$ , при котором системы (14) и (5) будут неустойчивыми. Следовательно, и при асимптотической устойчивости системы (2) существует сколь угодно малое возмущение  $\mathbf{A}'\mathbf{x}$ , при котором характеры устойчивости систем (2) и (5) различны.

Сталось доказать, что во втором случае, когда  $\mathbf{A}'\mathbf{x} = 0$ ,  $\varphi_1(\mathbf{x}) \neq 0$ , при расположении корней, соответствующих матрице  $\mathbf{A}$ , отличном от их расположения, требуемого условиями теоремы, существует нелинейное возмущение  $\varphi_1(\mathbf{x})$ , при котором характер устойчивости систем (2)  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \varphi(\mathbf{x})$  и (5)  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \varphi(\mathbf{x}) + \varphi_1(\mathbf{x})$  будет различным.

Для доказательства применим теорему Ляпунова [9, с. 344], которая использовалась при доказательстве необходимости условий леммы. Согласно этой теореме функцию  $\psi(\mathbf{x}) = \varphi(\mathbf{x}) + \varphi_1(\mathbf{x})$ , а, следовательно, и функцию  $\varphi_1(\mathbf{x}) = \psi(\mathbf{x}) - \varphi(\mathbf{x})$  в правой части системы (5) всегда можно выбрать так, чтобы точка равновесия  $\mathbf{x} = 0$  этой системы была устойчивой или неустойчивой по желанию. Поэтому всегда существует функция  $\varphi_1(\mathbf{x})$ , которая обеспечивает отличие характеров устойчивости точек равновесия  $\mathbf{x} = 0$  систем (2) и (5), учитывая, что характер устойчивости точки равновесия  $\mathbf{x} = 0$  системы (2) не зависит от выбора возмущающей функции  $\varphi_1(\mathbf{x})$ . Необходимость доказана.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Андронов А.А., Понтрягин Л.С. Грубые системы // Доклады АН СССР. — 1937. — Т. 14, № 5. — С. 247.
2. Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э. Теория колебаний. — М.: Физматгиз, 1959. — С. 427.
3. Андронов А.А. Собрание трудов. — М.: Изд-во АН СССР. — 1956. — С. 183.
4. Арнольд И.В. Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1978. — С. 84.
5. Красовский Н.Н. Некоторые задачи теории устойчивости движения. — М.: Физматгиз, 1959. — С. 98.
6. Математическая энциклопедия. — М.: Сов. энциклопедия, 1984. — Т. 3. — С. 422.
7. Там же. — 1977. — Т. 1. — С. 1134.
8. Арнольд И.В. Обыкновенные дифференциальные уравнения. — М.: Наука, 1971. — С. 129.
9. Ляпунов А.М. Общая задача об устойчивости движения. — М.-Л.: ОНТИ, 1935.
10. Малкин И.Г. Теория устойчивости движения. — М.: Наука, 1966. — С. 73.
11. Дубошин Г.Н. Основы теории устойчивости движения. — М.: Изд-во МГУ, 1952. — С. 166.
12. Ланкастер П. Теория матриц. — М.: Наука, 1978. — С. 208.
13. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. — М.: Наука, 1967.

Статья представлена к публикации членом редколлегии В.Ю. Рутковским.

Жуков Виктор Павлович — д-р техн. наук, зав. лабораторией, Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, г. Москва, ☎ (495) 334-89-61, e-mail: vpzhukov@ipu.ru

# МНОГОШАГОВОЕ ОПТИМАЛЬНОЕ НЕЙРОСЕТЕВОЕ УПРАВЛЕНИЕ

П.В. Сараев

Рассмотрено оптимальное управление динамическими системами, основанное на моделировании систем с помощью нейронных сетей прямого распространения. Разработан алгоритм многошагового оптимального управления, использующий суперпозиционную структуру нейронной сети и учитывающий долгосрочный характер влияния управляющих сигналов на объект управления. Предложено применение разработанного алгоритма к управлению деятельностью коммерческих организаций и предприятий.

**Ключевые слова:** нейронные сети, нейросетевое управление, динамические системы.

## ВВЕДЕНИЕ

Традиционные алгоритмы синтеза оптимального управления (основанные, например, на применении принципа максимума Л.С. Понтрягина) опираются на знание структуры объекта управления, т. е. модели его функционирования. Поведение многих систем, в особенности социальных и экономических, невозможно или очень сложно представить в виде системы дифференциальных или разностных уравнений, основываясь только на знании целей объекта и его внутренних свойств. Единственная возможность построения моделей сложных состоит в использовании входной и выходной информации, описывающей поведение объекта. Наиболее эффективный инструмент исследования поведения таких систем — нейросетевое моделирование. Нейросетевые модели позволяют выявить сложную нелинейную зависимость между входными и выходными сигналами системы на основании вход-выходной таблицы данных — обучающего множества.

## 1. НЕЙРОСЕТЕВЫЕ МОДЕЛИ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Нейронная сеть (НС) прямого распространения (рис. 1) реализует нелинейную зависимость

$$y = f(w; x), \quad (1)$$

где  $w$  — вектор весов (параметров) сети,  $x$  — вектор входов,  $y$  — вектор выходов модели объекта управления (ОУ). Преобразование (1) производится путем послойного вычисления сигналов внутри НС, которые осуществляют простейшие элементы — нейроны.

Пусть  $N$  и  $R$  — число входов и выходов НС соответственно,  $M$  — число слоев НС,  $N_m$  — число нейронов в  $m$ -м слое,  $y^{(m, q)}$  — выход  $q$ -го нейрона  $m$ -го слоя,  $m = 1, \dots, M$ ,  $q = 1, \dots, N_m$ . Нейрон преобразует входной сигнал с нейронов предыдущего слоя в скалярный выход по правилу

$$y^{(m, q)} = \sigma(\text{net}^{(m, q)}) = \sigma\left(\sum_{i=0}^n w_i^{(m, q)} y^{(m-1, i)}\right), \quad (2)$$

где  $\text{net}^{(m, q)}$  — уровень активности нейрона,  $w_i^{(m, q)}$  — вес  $q$ -го нейрона  $m$ -го слоя, соответствующий  $i$ -му входу нейрона — выходу нейрона  $y^{(m-1, i)}$ ,  $y^{(m-1, 0)} = 1$  — фиктивный единичный входной сигнал нейрона,  $\sigma$  — нелинейная функция актива-

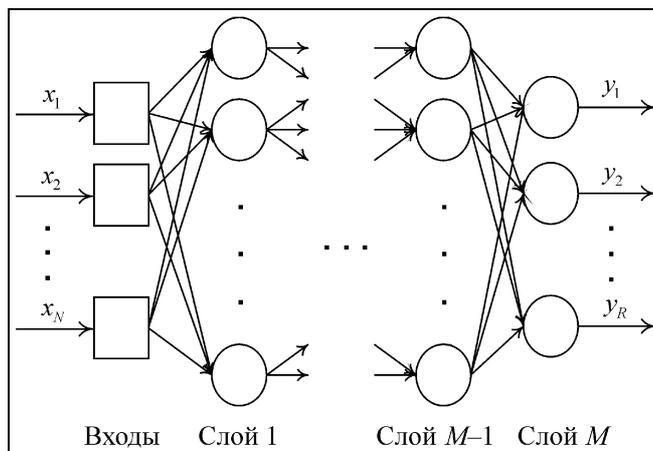


Рис. 1. Нейронная сеть прямого распространения



ции, в качестве которой обычно используется сигмоидная логистическая функция

$$\sigma(net) = \frac{1}{1 + e^{-net}}. \quad (3)$$

В формуле (2) для нейронов 1-го слоя ( $m = 1$ ) следует взять  $y^{(m-1, i)} = x_i$  —  $i$ -й вход НС. Если для слоя  $m$  выходы нейронов обозначить через вектор  $y^{(m-1)}$ , матрицу весов нейронов — через  $W^{(m)}$ , а через  $\Phi$  — функции активации нейронов слоя, то отображение (1) с учетом отсутствия функций активации в нейронах выходного слоя конкретизируется:

$$y = y^{(M)} = W^{(M)}\Phi(W^{(M-1)}\Phi(\dots\Phi(W^{(1)}x)\dots)). \quad (4)$$

Выражение (4) определяет суперпозиционную структуру НС.

Центральным этапом построения нейросетевой модели является ее идентификация, включающая в себя структурную и параметрическую идентификацию. Задача структурной идентификации нейросетевой модели является частично решенной — функционирование нейронов, алгоритм связи нейронов в слоях, способ передачи сигналов фиксированные. Параметрическая идентификация, называемая обучением НС, производится на основе обучающего множества — таблицы входных-выходных значений  $\{\tilde{x}^{(k)}, \tilde{y}^{(k)}\}$ ,  $k = 1, \dots, K$ , где  $\tilde{x}^{(k)}$  — вектор входов сети,  $\tilde{y}^{(k)}$  — вектор соответствующих выходов (указаний учителя),  $K$  — число примеров обучающего множества. Цель обучения — определение весов НС заданной структуры, приводящих к минимизации квадратичного функционала, характеризующего ошибку работы сети на обучающем множестве:

$$Q(w) = \sum_{k=1}^K \sum_{r=1}^R (y_r(w, \tilde{x}^{(k)}) - \tilde{y}_r^{(k)})^2, \quad (5)$$

где  $y_r(w, \tilde{x}^{(k)})$  —  $r$ -й выход НС при подаче на вход вектора  $\tilde{x}^{(k)}$  из обучающего множества,  $\tilde{y}_r^{(k)}$  —  $r$ -й элемент вектора указаний учителя для  $k$ -го примера. Фактически, обучение НС — нелинейная задача о наименьших квадратах, носящая многоэкстремальный характер.

Суперпозиционный характер НС лежит в основе многих алгоритмов обучения и является основой эффективного метода вычисления градиента функционала (5) по вектору весов — процедуре обратного распространения ошибки [1, 2]. Для обучения НС могут быть использованы алгоритмы, основанные на линейно-нелинейном соотношении и матричном псевдообращении, приводящие к снижению размерности пространства оптимизи-

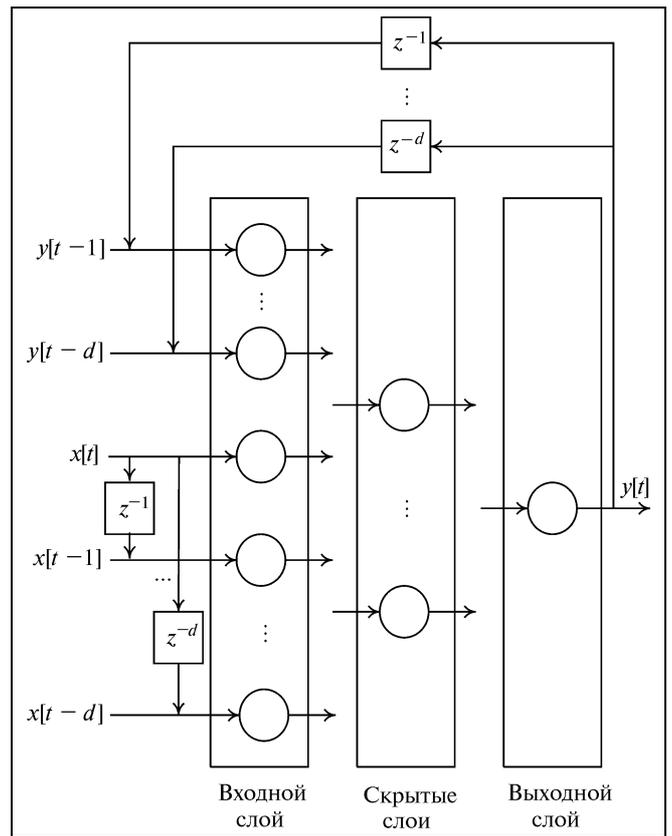


Рис. 2. Нейросетевая модель динамической системы

руемых весов [3–5]. Для гарантированного глобального обучения НС рекомендуется применение интервальных методов, рассмотренных в работах [6, 7]. Хотя отображения (1) и (4) являются статическими, НС можно применять и для моделирования динамических систем. В таких системах выход зависит от дискретного времени  $t$  ( $y = y[t]$ ), при этом вместо отображения (1) рассматривается зависимость вида

$$y[t] = f(w; x[t], x[t-1], \dots, x[t-d]; y[t-1], y[t-2], \dots, y[t-d]), \quad (6)$$

где  $d$  — порядок задержки сигналов. На рис. 2 схематично приведена структура динамической модели (6). Кружки на рис. 2 означают не отдельные нейроны, а их ансамбли, соответствующие группам нейронов. Для идентификации модели (6) используются те же подходы, что и при идентификации НС статических систем, основанные на минимизации функционала (5). Дополнительная сложность состоит в определении порядка задержки  $d$ .

В задачах управления часть вектора входных сигналов составляют управляющие сигналы. Будем обозначать через  $u[t]$  вектор управляющих воздействий — подвектор  $x[t]$ . Если через  $v[t]$  обозна-

чить оставшиеся сигналы вектора  $x[t]$  (возмущения), то зависимость (6) примет вид

$$y[t] = f(w; u[t], u[t-1], \dots, u[t-d]; v[t], v[t-1], \dots, v[t-d]; y[t-1], y[t-2], \dots, y[t-d]). \quad (7)$$

В отличие от управляющих воздействий  $u[t]$  сигналы  $v[t]$  недоступны изменению, они могут отражать, например, воздействия на объект управления со стороны внешней среды. Зависимость (7) отражает зависимость выхода объекта в момент времени  $t$  от входных сигналов не только в текущий, но и в предыдущие моменты времени.

## 2. АЛГОРИТМ МНОГОШАГОВОГО ОПТИМАЛЬНОГО НЕЙРОСЕТЕВОГО УПРАВЛЕНИЯ ДИНАМИЧЕСКИМИ СИСТЕМАМИ

Большой класс задач управления относится к задачам синтеза оптимального управления. Управление объектами на основе НС является перспективным направлением [8–10]. В работе [3] рассмотрено нейросетевое управление, в котором критерием качества управления принят функционал

$$J = \sum_t (r[t] - y[t])^2 + \rho u^2[t-1], \quad (8)$$

где  $r[t]$  — уставка ОУ в момент времени  $t$ ,  $\rho \geq 0$  — коэффициент пропорциональности. Критерий (8) подлежит минимизации.

Вместо функционала (8) рассмотрим функционал более общего вида

$$J(u[T+1], \dots, u[T+S]) = \sum_{t=T+1}^{T+S} g(u[t], y[t]), \quad (9)$$

где  $T$  — последний момент времени, на который известно значение выхода,  $S$  — интервал (число шагов) управления,  $g$  — некоторая функция, которую будем считать дифференцируемой по компонентам векторов  $y[t]$  и  $u[t]$ ,  $t = T+1, \dots, T+S$ . Рассмотрим задачу максимизации функционала (9) по величинам  $u[T+1], \dots, u[T+S]$ . При  $S = 1$  получается задача одношагового, при  $S > 1$  — многошагового управления. Многошаговое управление учитывает длительный характер влияния управляющих воздействий  $u[t]$  на последующее поведение системы вследствие динамического вида зависимости (7). Функция  $g$  выбирается, исходя из целей управления, и обычно имеет несложный вид. Аналогично, как и в критерий (8), в функционал (9) можно заложить требование минимизации затрат на управление  $u[t]$ , что не приведет к усложнению предлагаемого алгоритма управления.

Рассмотрим синтез управления на основе прямой модели ОУ. На рис. 3 приведена структура нейросетевого управления. Вместо реальных значений выхода ОУ  $y[t]$  используется модельное зна-

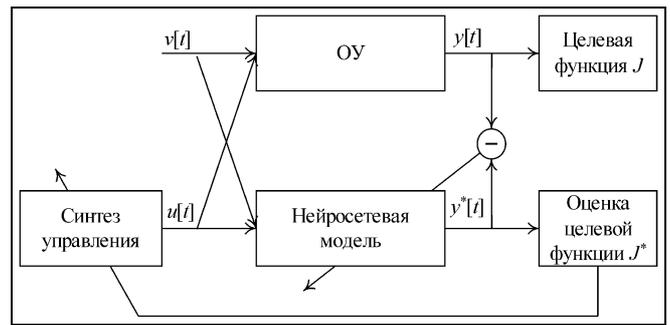


Рис. 3. Схема нейросетевого управления на основе прямой модели ОУ

чение  $y^*[t]$  и, соответственно, вместо реального значения функционала  $J$  его оценка  $J^*$ . В дальнейшем это будет подразумеваться, но для упрощения записи указываться не будет.

Критерий (9) — дифференцируемая нелинейная функция нескольких переменных, оптимизация которой может быть произведена методами локальной оптимизации гладких функций с учетом заложенной в градиенте информации о поведении функции в окрестности текущего решения. Частная производная критерия (9) по компоненте  $u_i[s]$  ( $i$ -му управляющему сигналу в момент времени  $s$ ,  $s = T+1, \dots, T+S$ ), находится по формулам

$$\frac{\partial J(\cdot)}{\partial u_i(s)} = \sum_{t=T+1}^{T+S} \frac{\partial g(u[t], y[t])}{\partial u_i[s]}, \quad (10)$$

$$\frac{\partial g(u[t], y[t])}{\partial u_i[s]} = \sum_{r=1}^R \frac{\partial g(u[t], y[t])}{\partial y_r[t]} \cdot \frac{\partial y_r[t]}{\partial u_i[s]}. \quad (11)$$

Так как при  $t < s$  выход  $y[t]$  не зависит от управляющего сигнала  $u_i[s]$ , получаем для этого случая

$$\frac{\partial g(u[t], y[t])}{\partial u_i[s]} = 0. \quad (12)$$

С учетом выражения (12) формула (10) принимает вид

$$\frac{\partial J(\cdot)}{\partial u_i(s)} = \sum_{t=s}^{T+S} \frac{\partial g(u[t], y[t])}{\partial u_i[s]}. \quad (13)$$

Множитель  $\frac{\partial g(u[t], y[t])}{\partial y_r[t]}$  в формуле (11) определяется, исходя из конкретного вида функции  $g$ ; основная задача состоит в вычислении множителя  $\frac{\partial y_r[t]}{\partial u_i[s]}$ . Рассмотрим отдельно случаи, когда  $t = s$  и когда  $t > s$ .

При  $t = s$  частная производная  $\frac{\partial y_r[t]}{\partial u_i[s]}$  находится с помощью алгоритма, аналогичного процедуре



обратного распространения ошибки. Введем обозначения

$$y^{(0, i)} = u_i[t], \quad y_r = y_r[t]. \quad (14)$$

По правилу дифференцирования сложной функции для произвольного слоя  $m = 0, \dots, M - 1$  получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial y_r}{\partial y^{(m, i)}} &= s_{mi}^r = \sum_{q=1}^{N_{m+1}} \frac{\partial y_r}{\partial y^{(m+1, q)}} \cdot \frac{\partial y^{(m+1, q)}}{\partial y^{(m, i)}} = \\ &= \sum_{q=1}^{N_{m+1}} s_{m+1, q}^r \cdot \frac{\partial y^{(m+1, q)}}{\partial y^{(m, i)}}. \end{aligned} \quad (15)$$

Формула (15) позволяет рекуррентно вычислить величины  $s_{mi}^r$ , начиная с  $m = M - 1$  и далее, уменьшая номер слоя  $m$ . При  $m = 0$  получим искомую производную  $\frac{\partial y_r[t]}{\partial u_i[s]} = \frac{\partial y_r[t]}{\partial y^{(0, i)}} = s_{0i}^r$ . Частная производная  $\frac{\partial y^{(m+1, q)}}{\partial y^{(m, i)}}$  с учетом выражения (2) вычисляется так:

$$\begin{aligned} \frac{\partial y^{(m+1, q)}}{\partial y^{(m, i)}} &= \frac{\partial y^{(m+1, q)}}{\partial net^{(m+1, q)}} \cdot \frac{\partial net^{(m+1, q)}}{\partial y^{(m, i)}} = \\ &= \sigma'_{net} (net^{(m+1, q)}) \cdot w_i^{(m+1, q)}, \end{aligned} \quad (16)$$

где  $\sigma'_{net} (net^{(m+1, q)})$  — производная функции активации по своему аргументу — уровню активности нейрона, которая для функции (3) вычисляется как  $\sigma'_{net} (net) = \sigma (net)(1 - \sigma (net))$ . Начальное условие для рекуррентного пересчета (при  $m = M - 1$ ) также вычисляется по формуле (16).

В случае  $t > s$  необходимо учитывать факт зависимости выхода  $y_r[t]$  от управляющих сигналов  $u_i[s]$  через выходы в предыдущие моменты времени  $y[s]$ ,  $y[s + 1]$ , ...,  $y[t - 1]$ . Для вычислений может быть применена формула

$$\frac{\partial y_r[t]}{\partial u_i[s]} = \left( \frac{\partial y_r[t]}{\partial u_i[s]} \right)_1 + \sum_{p=1}^R \frac{\partial y_r[t]}{\partial y_p[s]} \cdot \frac{\partial y_p[s]}{\partial u_i[s]}, \quad (17)$$

где  $\frac{\partial y_p[s]}{\partial u_i[s]}$  и  $\left( \frac{\partial y_r[t]}{\partial u_i[s]} \right)_1$  — производные функции (7) как явно зависящей от  $u_i[s]$  — определяются по формулам (15) и (16) (если  $t - s > d$ , т. е.  $y_r[t]$  явно не зависит от  $u_i[s]$ , то  $\left( \frac{\partial y_r[t]}{\partial u_i[s]} \right)_1 = 0$ ). В выражениях (14) необходимо соответствующим образом понимать величины  $y^{(0, i)}$ . В формуле (17) для расчета

$\frac{\partial y_r[t]}{\partial y_p[s]}$  совместно с формулами (15) и (16) рекуррентно применяется аналогичная (17) формула

$$\frac{\partial y_r[t]}{\partial y_p[s]} = \left( \frac{\partial y_r[t]}{\partial y_p[s]} \right)_1 + \sum_{l=1}^R \frac{\partial y_r[t]}{\partial y_l[s+1]} \cdot \frac{\partial y_l[s+1]}{\partial y_p[s]},$$

где  $\frac{\partial y_l[s+1]}{\partial y_p[s]}$  и  $\left( \frac{\partial y_r[t]}{\partial y_p[s]} \right)_1$  — производные функции как явно зависящих от переменных, по которым производится дифференцирование.

Таким образом, для реализации многошагового оптимального управления на основе учета суперпозиционного характера структуры НС может быть использован алгоритм, опирающийся на формулы (13), (15)–(17). Чтобы спрогнозировать выходные значения  $y[t]$ , необходимо также знать значения  $v[t]$  при  $t = T + 1, \dots, T + S$ . Наиболее целесообразно предварительное прогнозирование значений  $v[t]$  с помощью методов анализа временных рядов. Для этих целей также могут применяться НС.

### 3. УПРАВЛЕНИЕ ДЕЯТЕЛЬНОСТЬЮ КОММЕРЧЕСКИХ ОРГАНИЗАЦИЙ

Экономические системы представляют собой сложные объекты с большим числом взаимодействующих элементов. К важнейшим звеньям таких систем относятся коммерческие организации и предприятия. Их экономическую деятельность целесообразно рассматривать как функционирование динамических систем. Организация рассматривается в виде «черного ящика», на вход которого поступают входные сигналы (внутренние и внешние факторы, влияющие на деятельность организации), на выходе — результаты ее деятельности (объемы реализованной продукции и рассчитываемые на ее основе доходы и прибыль). Под внешними факторами подразумевается состояние экономической среды, в которой функционирует организация. Входные сигналы «перерабатываются», и на выходе формируются выходные величины — объем реализованной продукции или предоставленных услуг, а также доход и прибыль организаций от осуществляемой ими деятельности. Задача определения оптимальных значений входных внутренних факторов, приводящих к достижению поставленных целей, является главной в управлении деятельностью организаций.

Среди входных величин выделяются управляемые (контролируемые), т. е. те величины, значения которых зависят от управляющего персонала организации, и неуправляемые (неконтролируемые). К управляемым величинам относятся расходы на производство, цены на реализуемую про-

дукцию, расходы на оплату труда сотрудников организации, рекламу, научно-исследовательские разработки. Именно эти факторы служат рычагами воздействия менеджмента организации. К неуправляемым величинам относятся все внешние факторы. Кроме того, в конкретный момент времени к ним может относиться и часть внутренних (к ним может относиться часть управленческих затрат, затраты на аренду помещения и оборудования по заключенным контрактам в рассматриваемом временном периоде). Влияние ряда входных величин долгосрочное. В частности, расходы на научно-исследовательские разработки дают эффект лишь через некоторый срок. Указанные факты служат основанием для эффективного применения разработанного многошагового алгоритма оптимального нейросетевого управления деятельностью коммерческих организаций.

Выходы модели  $y$  обозначают спрос клиентов на реализуемую продукцию (услуги), входящую в ассортимент организации. Для задания функционала качества оптимального управления (9) необходимо задать функцию  $g$ , входящую в функционал. Если цель организации состоит в увеличении спроса на  $i$ -ю продукцию, то

$$g(u, y) = y_i, \quad (18)$$

при стремлении увеличить доход от реализации  $i$ -й продукции рассматривается функция

$$g(u, y) = u_i y_i, \quad (19)$$

где  $u_i$  — цена  $i$ -й продукции. В подавляющем большинстве случаев вместо функций (18) и (19) стоит цель в максимизации прибыли. Для  $i$ -й продукции

$$g(u, y) = h(u_i, y_i), \quad (20)$$

где  $h$  — выбираемая для конкретной организации и зависящая от сферы деятельности и режима налогообложения, которая будет иметь простой вид. Если требуется учитывать весь спектр реализуемой продукции, то функция  $g$  будет представлять собой сумму величин. Вместо функций (18)–(20) следует соответственно принять

$$g(u, y) = \sum_{i=1}^R y_i,$$

$$g(u, y) = \sum_{i=1}^R u_i y_i,$$

$$g(u, y) = h(u_1, u_2, \dots, u_R, y_1, y_2, \dots, y_R).$$

Алгоритм многошагового оптимального управления на основе моделирования динамических систем может быть применен для получения более качественных рекомендаций по управлению ценовой политикой предприятий, которое рассматривалось ранее в работе [11] на основе описания де-

ятельности организации с помощью статической нейросетевой модели.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предложенные расчетные формулы алгоритма оптимального управления на основе нейросетевой модели позволяют эффективно учесть суперпозиционный характер нейросетевой модели объекта управления. Алгоритм учитывает влияние управляющих воздействий на поведение объекта не только в настоящий момент времени, но и в будущем. Универсальный характер формул позволяет реализовывать управление произвольным объектом управления независимо от его природы. В частности, алгоритм может быть эффективно применен для управления деятельностью коммерческих организаций.

## ЛИТЕРАТУРА

1. *Аведьян Э.Д.* Алгоритмы настройки многослойных нейронных сетей // Автоматика и телемеханика. — 1995. — № 4. — С. 106–118.
2. *Осовский С.* Нейронные сети для обработки информации. — М.: Финансы и статистика, 2002. — 344 с.
3. *Сараев П.В.* Использование псевдообращения в задачах обучения искусственных нейронных сетей / Электронный журнал «Исследовано в России». — 2001. — № 29. — С. 308–317. — Режим доступа: <http://zhurnal.ape.relarn.ru/articles/2001/029.pdf>.
4. *Сараев П.В.* Обучение искусственных нейронных сетей: учет линейно-нелинейной структуры // Вестник молодых ученых. — 2003. — № 2. / Сер. «Прикладная математика и механика». — Вып. 1. — С. 92–100.
5. *Blyumin S.L., Saraev P.V.* Reduction of Adjusting Weights Space Dimension in Feedforward Artificial Neural Networks Training // Proc. of IEEE Int. Conf. on Artificial Intelligence Systems / IEEE, 2002. — P. 242–247.
6. *Сараев П.В.* Применение методов интервального анализа в обучении нейронных сетей // Искусственный интеллект. Интеллектуальные и многопроцессорные системы — 2006 // Материалы Седьмой Международной научно-технической конференции. — Таганрог, 2006. — Т. 2. — С. 216–220.
7. *Сараев П.В.* Комбинирование интервальных методов и псевдообращения в глобальном обучении нейронных сетей / X Всерос. науч.-техн. конф. «Нейроинформатика — 2008»: Сб. науч. тр. — М.: МИФИ, 2008. — Ч. 2. — С. 208–215.
8. *Методы робастного, нейро-нечеткого и адаптивного управления* / Под ред. Н.Д. Егупова. — М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2001. — 744 с.
9. *Омату С., Халид М., Юсоф Р.* Нейроуправление и его приложения. — М.: ИПРЖР, 2000. — 272 с.
10. *Терехов В.А., Ефимов Д.В., Тюкин И.Ю.* Нейросетевые системы управления. — М.: ИПРЖР, 2002. — 480 с.
11. *Сараев П.В.* Нейросетевое моделирование и управление ценовой политикой // Системы управления и информационные технологии. — 2004. — № 1 (13). — С. 37–41.

*Статья представлена к публикации членом редколлегии С.Д. Земляковым.*

**Сараев Павел Викторович** — канд. техн. наук, доцент, Липецкий государственный технический университет, ☎ (4742) 32-80-51, e-mail: psaraev@yandex.ru



# СИСТЕМА С ПРОГНОЗИРУЮЩЕЙ МОДЕЛЬЮ ДЛЯ УПРАВЛЕНИЯ ФОРМОЙ И ТОКОМ ПЛАЗМЫ В ТОКАМАКЕ<sup>1</sup>

Ю.В. Митришкин, А.Я. Коростелёв

Представлены результаты синтеза и моделирования системы с прогнозирующей моделью для управления вертикальной скоростью, формой и током плазмы в токамаке-реакторе. Проведено сравнение с системой, содержащей  $H_\infty$ -робастный регулятор в цепи обратной связи. Рассмотрены особенности метода управления с прогнозирующей моделью для решения задачи магнитного управления плазмой.

**Ключевые слова:** управление с прогнозирующей моделью, робастное управление, обратная связь, синтез систем, моделирование, магнитное управление плазмой, токамак.

## ВВЕДЕНИЕ

Управляемый термоядерный синтез — один из перспективных источников энергии будущего. Необходимые условия для его осуществления могут быть достигнуты посредством специальных установок, токамаков, позволяющих удерживать высокотемпературную плазму в магнитном поле. Для удержания плазмы внутри камеры токамака необходима система магнитного управления с обратной связью [1]. В данной статье представлены результаты разработки такой системы, основанной на методе управления с прогнозирующей моделью [2]. В качестве исходных данных были взяты параметры проектируемого международного экспериментального термоядерного реактора ITER (International Thermonuclear Experimental Reactor) — см. [www.iter.org](http://www.iter.org).

Системы с прогнозирующей моделью применялись ранее для скалярного управления вертикальным положением плазменного шнура в токамаке COMPASS-D (Culham Science Centre, Великобритания) [3]. Применение систем данного класса для многомерного управления формой и током плазмы в токамаках авторам не известно.

## 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Плазма в токамаке представляет собой многомерный нелинейный объект управления с распределенными параметрами [1, 4]. Ее динамические

характеристики существенно изменяются на протяжении плазменного разряда, однако на определенном его участке, квазистационарной фазе разряда, когда ток плазмы мало изменяется, остаются практически неизменными с некоторой неопределенностью в виде немоделируемой динамики. Задача, которая ставится в данной работе, состоит в синтезе и моделировании системы с прогнозирующей моделью для магнитного управления плазмой в токамаке на квазистационарной фазе разряда. Структурная схема системы управления показана на рис. 1.

Управляющими воздействиями в системе служат 12 напряжений на катушках полоидального магнитного поля, подаваемые от мощных управляемых многофазных тиристорных преобразователей переменного напряжения в постоянное: одного быстрого преобразователя вертикальной стабилизации (*VSC* — Vertical Stability Converter) и 11-ти главных преобразователей *MC* — (Main Converters) для управления формой и током плазмы. Модели преобразователей имеют насыщение, инерционное и транспортное запаздывание. На объект управления действуют два неконтролируемых возмущения  $\delta\beta_p$  и  $\delta I_i$ , представляющих собой соответственно вариации отношения  $\beta_p$  газокINETического давления плазмы к давлению внешнего магнитного поля и внутренней индуктивности плазмы  $I_i$  [1, 5, 6].

Система диагностики состоит из дифференцирующего фильтра вертикального положения центра плазмы  $F_d$  и многомерного фильтра  $F$  для сигналов зазоров между сепаратрисой плазмы и первой стенкой токамака, тока плазмы и токов во

<sup>1</sup> Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (проект № 06-08-00265).

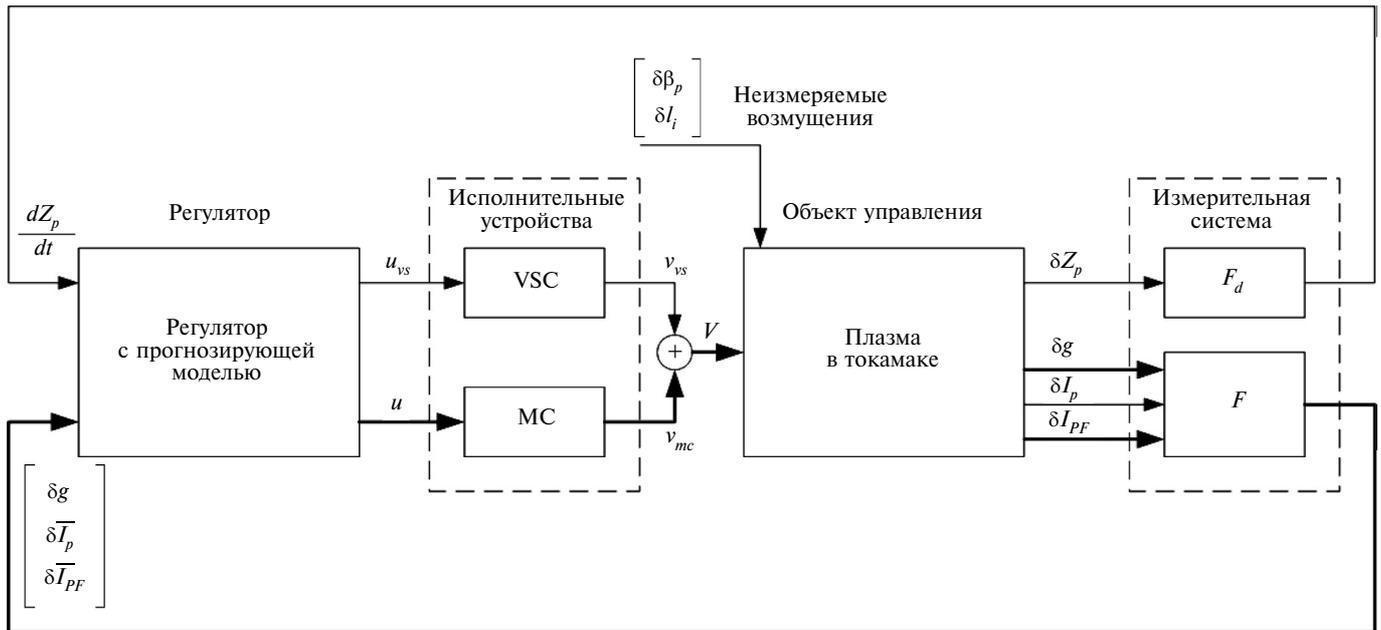


Рис. 1. Структурная схема системы магнитного управления плазмой в токамаке

внешних магнитных обмотках. Выходами объекта управления являются:

- вариации зазоров  $\delta g = [\delta g_1, \dots, \delta g_6]^T$  на квазистационарной стадии разряда, характеризующие форму плазмы;
- вертикальная скорость центра плазменного шнура  $dZ_p/dt$ ;
- вариация тока плазмы  $\delta I_p$ ;
- вариации токов в катушках полоидального магнитного поля  $\delta I_{PF} = [\delta I_{PF1}, \dots, \delta I_{PF11}]^T$ .

Под вариациями здесь понимаются отклонения величин от их значений, заранее рассчитанных для данной точки сценария плазменного разряда.

Плазма в токамаке неустойчива по каналу управления вертикальной скоростью. При этом величина обратна неустойчивому полюсу линеаризованной модели  $\sim 0,1$  с. Система управления с обратной связью должна обеспечивать стабилизацию вертикальной скорости плазмы относительно нулевого значения на всем протяжении плазменного разряда при действии внешних возмущений типа малого срыва, приводящего к быстрым сбросам (спадам) величин  $\beta_p$  и  $I_i$ .

Точность стабилизации формы плазмы на диверторной фазе разряда требуется относительно высокая. Отклонение сепаратрисы (границной поверхности) плазмы при действии возмущений не должно превышать величин порядка 10 см, что составляет примерно 2 % от большого радиуса ITER, равного 6,2 м. Кроме того, при решении задачи управления формой плазмы должны быть учтены ог-

раничения на максимальную мощность управления, которая не должна превышать 100 МВт.

Полное описание технических требований к системе магнитного управления плазмой ITER приведено в работе [5]. В качестве математической модели плазмы в токамаке используется плазмо-физический код ДИНА [7] и линейная стационарная модель, полученная путем его линеаризации в выбранной точке сценария [1, 6].

## 2. УПРАВЛЕНИЕ С ПРОГНОЗИРУЮЩЕЙ МОДЕЛЬЮ

Выбор метода управления с прогнозирующей моделью для решения поставленной задачи обусловлен тем, что он позволяет систематически учитывать ограничения на управляющие сигналы, а также без дополнительных сложностей реализуется для управления многомерными объектами с запаздыванием.

Для объяснения основной идеи управления с прогнозированием по модели рассмотрим простейшую систему управления объектом, имеющим скалярный вход  $u(t)$  и скалярный выход  $y(t)$ . Через  $r(t)$  обозначим желаемую траекторию выходного сигнала. Мы будем рассматривать систему в дискретном времени, т. е. только в моменты времени  $t = k\Delta T$ , где  $\Delta T$  — некоторый период квантования, а  $k$  — целое число. Для простоты будем считать  $\Delta T = 1$ . Объект управления предполагается строго реализуемым, т. е. знаменатель всех компонент его

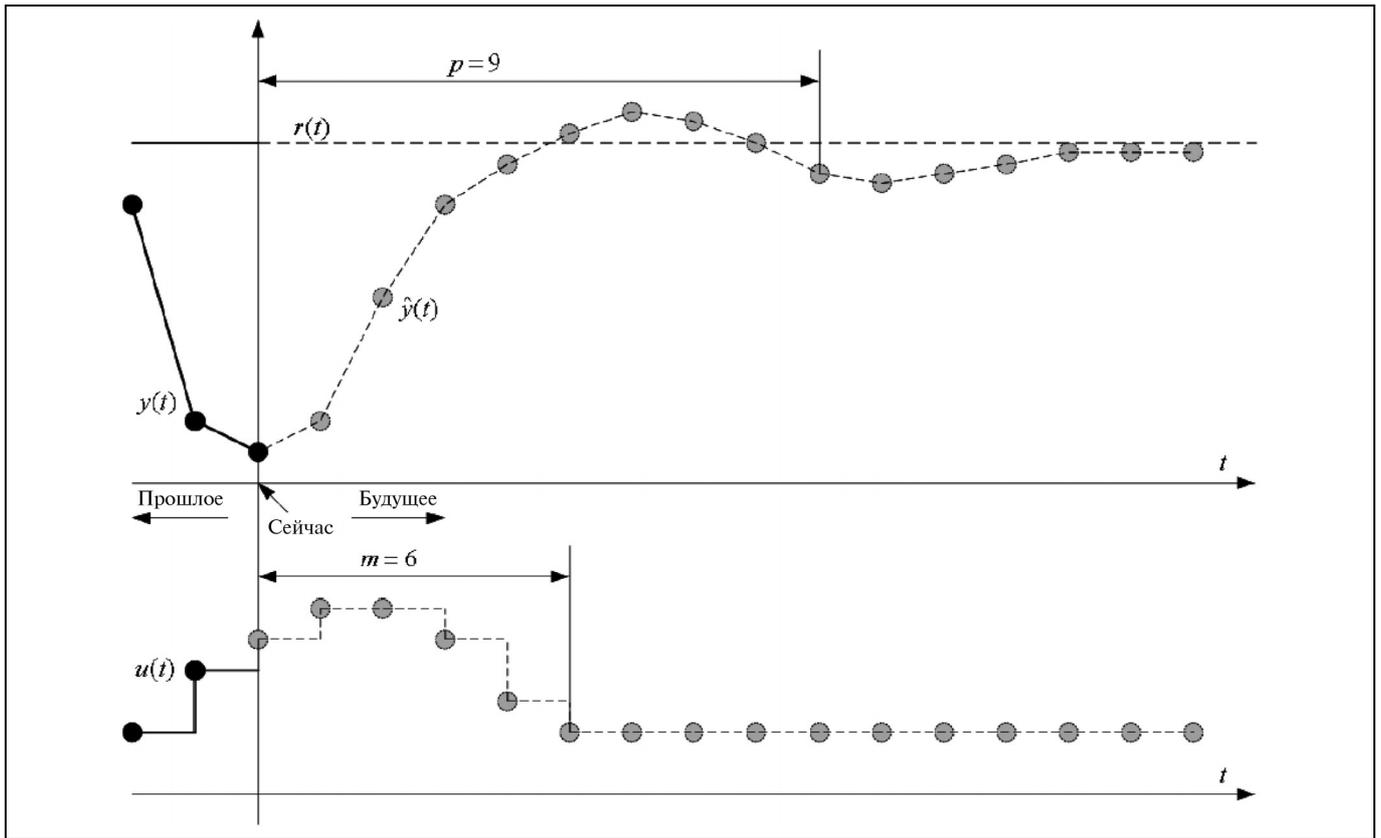


Рис. 2. К пояснению идеи управления с прогнозированием по модели объекта

матричной передаточной функции имеет степень выше, чем степень числителя.

Будем считать, что в алгоритме регулятора используется модель объекта управления, достаточно хорошо описывающая его поведение. В наличии такой модели в алгоритме состоит одна из ключевых особенностей управления с прогнозированием по модели. Имея модель объекта управления, можно прогнозировать значения сигнала  $y(t)$  на определенное число шагов вперед (рис. 2).

Будем обозначать данный прогноз как  $\hat{y}(k+1|k)$ ,  $\hat{y}(k+2|k)$ , ...,  $\hat{y}(k+p|k)$ , т. е. значения сигнала  $y(t)$  в моменты времени  $(k+1)$ ,  $(k+2)$ , ...,  $(k+p)$ , предсказанные в момент  $k$ . Число тактов  $p$ , на которых строится прогноз, называется *горизонтом предсказания*. Прогнозируемая траектория будет зависеть от  $u(k|k)$ ,  $u(k+1|k)$ , ...,  $u(k+m|k)$ , т. е. от будущих значений управляющего воздействия  $u(t)$ . Суть метода заключается в том, чтобы найти некоторую последовательность значений  $u(t)$ , которая обеспечивает наилучшую в некотором смысле прогнозируемую траекторию  $y(t)$ . Длина последовательности  $m$  является фиксированной величиной и называется *горизонтом управления*. Все последую-

щие значения управляющего воздействия предполагаются неизменными:  $u(k+i|k) = u(k+m-1|k)$ ,  $\forall i \geq m$ . Искомая последовательность значений входного воздействия определяется в результате решения некоторой задачи оптимизации. Выбор «наилучшей» траектории определяется показателем качества управления. Обычно применяют показатель качества, содержащий квадрат рассогласования между прогнозируемым выходным сигналом объекта  $y(t)$  и желаемой траекторией  $r(t)$ . Кроме того, показатель качества обычно включает в себя слагаемые, учитывающие энергетические затраты на управление. Примером показателя качества может служить функция вида

$$J = Q \sum_{i=1}^p (y(k+i|k) - r(k+i))^2 + R \sum_{i=0}^{m-1} u^2(k+i),$$

где  $Q$  и  $R$  — весовые коэффициенты.

На первый взгляд, в результате описанных действий получается управление без обратной связи, так как рассчитанная оптимальная последовательность  $u(t)$  не будет учитывать возможных будущих возмущений, ошибок моделирования и других факторов. Однако на самом деле это не

так: после того, как на объект подали первый элемент вычисленной оптимальной последовательности  $u(k|k)$ , на следующем такте вся процедура повторяется заново, с учетом вновь поступившей информации. При этом определяется уже другая оптимальная последовательность  $u(k+1|k+1)$ ,  $u(k+2|k+1)$ , ...,  $u(k+m+1|k+1)$ , первый элемент которой поступит на вход объекта управления. Замыкание обратной связи осуществляется именно благодаря повторению процедуры оптимизации на каждом такте с учетом последней поступившей с объекта информации.

Последовательность действий, выполняемых на каждом такте работы алгоритма, можно описать следующим образом.

- Построение прогноза значений выходных сигналов объекта управления на  $p$  шагов вперед. Прогноз строится как функция от будущих значений управляющих воздействий на  $m$  последующих шагах и известного текущего состояния объекта. Текущее состояние объекта может определяться с помощью наблюдателя состояния.
- Подстановка построенного выражения прогноза в заданный показатель качества управления. В результате определяется зависимость показателя качества от будущих значений управляющего воздействия.
- Нахождение будущей траектории управляющего воздействия, оптимизирующей значение показателя качества управления.
- Подача на объект управления *только первого* управляющего воздействия из найденной траектории на горизонте управления.

### 3. ПРОГНОЗИРОВАНИЕ ВЫХОДА ОБЪЕКТА УПРАВЛЕНИЯ

Пусть объект управления, включая исполнительные устройства и систему диагностики, задан линейной системой разностных уравнений

$$\begin{cases} x_{k+1} = Ax_k + B_u u_k, \\ y_k = Cx_k. \end{cases} \quad (1)$$

Для формализации алгоритма управления удобно воспользоваться вектором приращения управляющего воздействия, определяемым как  $\delta u_k = u_k - u_{k-1}$ . С учетом данного обозначения из уравнений (1) получим:

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= Ax_k + B_u u_{k-1} + B_u \delta u_k, \\ y_{k+1} &= Cx_{k+1} = CAx_k + CB_u u_{k-1} + CB_u \delta u_k. \end{aligned} \quad (2)$$

Тогда для момента  $k+2$  после подстановки (1) в (2) и преобразований имеем:

$$\begin{aligned} x_{k+2} &= A^2 x_k + (AB_u + B_u)u_{k-1} + (AB_u + B_u)\delta u_k + \\ &\quad + B_u \delta u_{k+1}, \\ y_{k+2} &= Cx_{k+2} = CA^2 x_k + (CAB_u + CB_u)u_{k-1} + \\ &\quad + (CAB_u + CB_u)\delta u_k + CB_u \delta u_{k+1}. \end{aligned}$$

Данные действия можно продолжить на весь горизонт предсказания (на  $p$  шагов вперед). Затем полученные уравнения можно представить в компактной форме:

$$Y = S_x x_k + S_{u1} u_{k-1} + S_u \delta U, \quad (3)$$

где  $Y = [y_{k+1}, y_{k+2}, y_{k+3}, \dots]^T$ ,  $U = [u_k, u_{k+1}, u_{k+2}, \dots]^T$ ,  $\delta U = [\delta u_k, \delta u_{k+1}, \delta u_{k+2}, \dots]^T$ , а  $S_x$ ,  $S_{u1}$  и  $S_u$  — матрицы постоянных коэффициентов.

В выражении (3) вектор состояния объекта управления  $x_k$  определяется с помощью наблюдателя состояния, а значение управляющего воздействия на предыдущем шаге  $u_{k-1}$  содержится в памяти регулятора. Таким образом, для построения прогноза достаточно задать вектор  $\delta U$ , с помощью которого регулятор может воздействовать на качество управления.

### 4. ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ПРИ ОТСУТСТВИИ ОГРАНИЧЕНИЙ

При решении поставленной задачи используется показатель качества следующего вида:

$$J = (Y - R)^T W_y (Y - R) + \delta U^T W_{\delta u} \delta U + U^T W_u U, \quad (4)$$

где  $R$  — желаемая траектория объекта управления, а  $W_y$ ,  $W_{\delta u}$  и  $W_u$  — положительно определенные весовые матрицы. Первое слагаемое показателя качества отражает рассогласование между желаемой и действительной траекториями объекта управления. Второе слагаемое позволяет заданием матрицы  $W_{\delta u}$  менять плавность регулирования. Третье слагаемое ограничивает абсолютную величину управляющего воздействия. Более выгодными в соответствии с показателем качества будут считаться управляющие воздействия, обладающие меньшей абсолютной величиной.

Подставив выражение прогноза (3) в показатель качества (4) и выразив  $U$  через  $\delta U$  и  $u_{k-1}$ , можно получить зависимость  $J(\delta U)$ . Таким образом, цель алгоритма управления заключается в нахождении такого значения  $\delta U$ , которое доставляет минимум функционалу  $J(\delta U)$ . Для рассматриваемой линей-



ной системы данная зависимость будет квадратичной.

Минимум функционала ищется только по значениям  $\delta u$  на горизонте управления, т. е. для первых  $m$  тактов ( $\delta u_k, \dots, \delta u_{k+m-1}$ ), а остальные компоненты вектора  $\delta U$  считаются равными нулю. Горизонт управления всегда назначается существенно меньше горизонта предсказания, чтобы реакция системы на выбранные управляющие воздействия была полностью включена в вектор  $U$  и имела влияние на показатель качества. При таком выборе процедура оптимизации будет наиболее эффективна. В противном случае алгоритм будет лишен информации о влиянии последних управляющих воздействий на показатель качества, так как часть переходного процесса не войдет в прогноз, что приведет к неверному определению оптимальной траектории.

Если в постановку задачи не входят ограничения на управляющие воздействия, то решение  $J(\delta U) \rightarrow \min$  находится аналитически, что приводит к линейному закону управления:

$$\delta U = K_x x_0 + K_{u1} u_{k-1} + K_r R,$$

где  $K_x$ ,  $K_{u1}$  и  $K_r$  — числовые матрицы, полученные в результате решения системы алгебраических уравнений

$$\frac{dJ(\delta U)}{d(\delta U)} = 0.$$

После нахождения оптимальной траектории изменения управляющего воздействия  $\delta U$  на данном такте на объект управления выдается только воздействие  $u_k = u_{k-1} + \delta u_k$ , а остальные значения отбрасываются, и на следующем такте вся процедура повторяется заново с учетом вновь поступившей информации. Такой подход называется *принципом удаляющегося горизонта*, позволяющим добиться хорошей работоспособности алгоритма при наличии возмущений и несоответствия между реальным объектом управления и его прогнозирующей моделью, встроенной в регулятор.

## 5. УЧЕТ ОГРАНИЧЕНИЙ НА УПРАВЛЯЮЩИЕ ВОЗДЕЙСТВИЯ

В реальной постановке задачи исполнительные устройства обладают насыщением, что приводит к ограничениям на управляющие воздействия. Эти ограничения можно выразить следующим неравенством:

$$\begin{bmatrix} U \\ -U \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} U_{\max} \\ -U_{\min} \end{bmatrix}, \quad (5)$$

где  $U_{\max}$  и  $U_{\min}$  — заданные векторы (в случае решаемой задачи — векторные константы). Поскольку вектор  $U$  может быть выражен через  $\delta U$  и  $u_{k-1}$ , то ограничения можно представить в виде

$$M_u \delta U \leq M_{lim}, \quad (6)$$

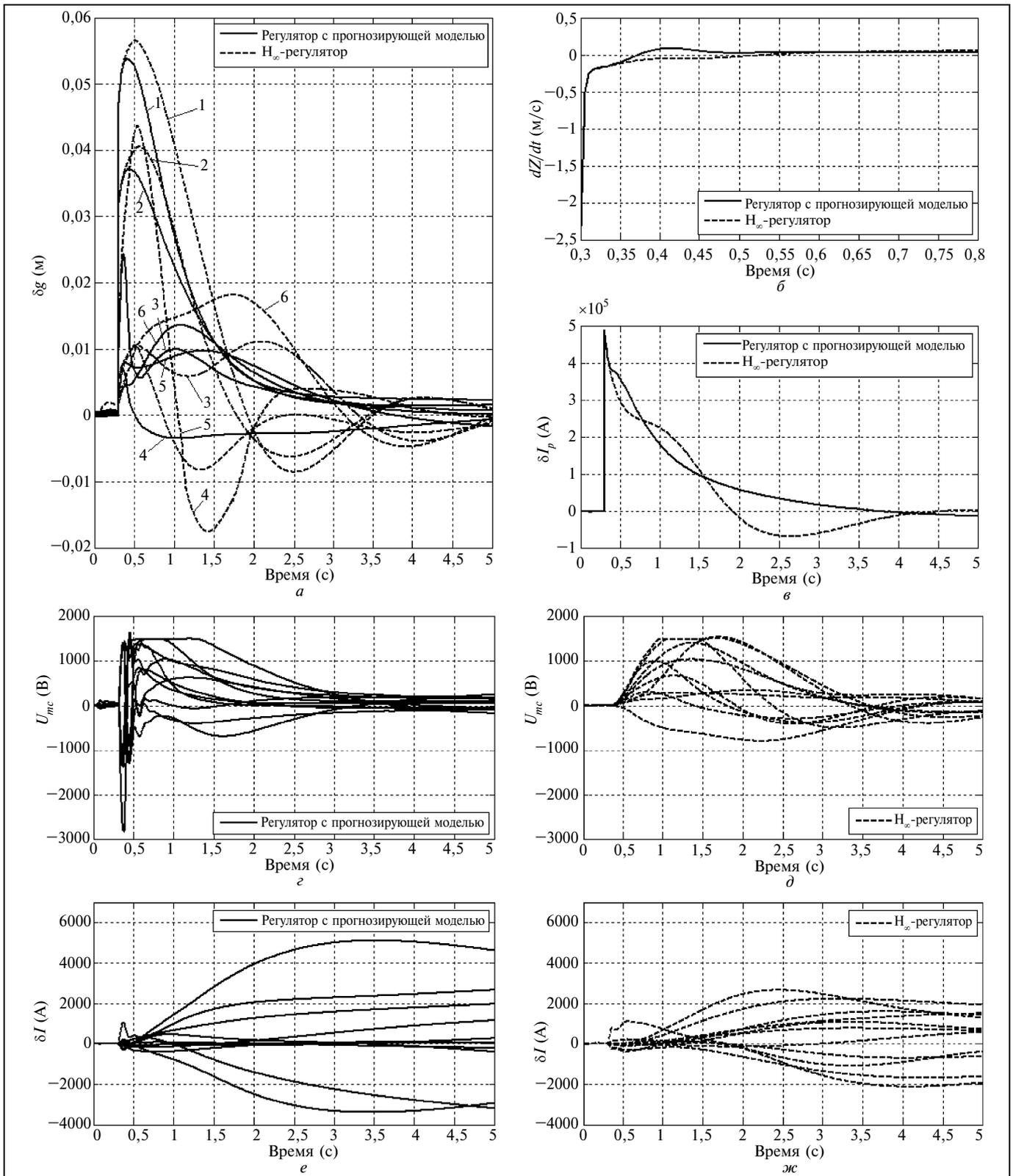
где  $M_u$  и  $M_{lim}$  — некоторые известные матрицы. В результате оптимальный вектор  $\delta U$  может быть найден путем решения задачи  $J(\delta U) \rightarrow \min$  при ограничениях (6).

## 6. РЕЗУЛЬТАТЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ

В данной работе для синтеза регуляторов использовались линеаризованные модели, полученные путем линеаризации кода ДИНА в заданной точке сценария плазменного разряда [1, 6]. Линеаризованная модель имеет достаточно высокий порядок (около 150 состояний), что может привести к повышенным затратам вычислительных ресурсов при управлении. Поэтому порядок данных моделей снижен до 30 путем применения процедуры численной редукции [1].

При моделировании работы синтезированного регулятора в замкнутой системе управления использовалась как линеаризованная модель высокой размерности с сосредоточенными параметрами, так и исходная нелинейная модель плазмы ДИНА с распределенными параметрами. Этим была показана возможность работы регулятора с прогнозирующей моделью при несоответствии «реального» объекта управления (в данном случае — нелинейного кода ДИНА) и линейной модели, использованной для синтеза прогнозирующего регулятора.

Результаты моделирования работы регулятора при действии на плазму возмущения типа «малый срыв» в момент времени 0,3 с приведены на рис. 3. Возмущение проявляется в виде одновременных сбросов величин  $\beta_p$  и  $I_i$ . Для сравнения на этих же рисунках показаны результаты работы системы управления с  $H_\infty$ -регуляторами, предложенными в работе [1]. Видно, что регулятор с прогнозированием по модели приводит вертикальную скорость в окрестность нулевого значения так же быстро, как и  $H_\infty$ -регулятор (рис. 3, б). Аналогичная ситуация имеет место и с ликвидацией вариации тока плазмы (рис. 3, в), когда при быстром падении внутренней индуктивности плазмы  $I_i$  плазменный ток скачком возрастает вследствие закона сохранения энергии. На графике отклонений размеров зазоров между сепаратрисой плазмы и внутренней стенкой токамака можно видеть (рис. 3, а), что регулятор с прогнозированием по модели показывает заметно меньшее время переходного процесса



**Рис. 3. Результаты моделирования замкнутой системы управления плазмой при малых срывах:**

*a* — вариации зазоров между сепаратрисой и первой стенкой; *б* — вертикальная скорость центра плазменного шнура; *в* — вариация тока плазмы; *г* — напряжения на обмотках управления при работе регулятора с прогнозирующей моделью; *д* — напряжения при работе робастного  $H_\infty$ -регулятора; *е* — вариации токов в обмотках управления при работе регулятора с прогнозирующей моделью; *ж* — вариации токов в обмотках управления при работе робастного  $H_\infty$ -регулятора



по сравнению с  $H_\infty$ -регулятором. Кроме того, прогнозирующий регулятор дает меньшую амплитуду отрицательных отклонений зазоров. Это важно, так как отрицательное отклонение, означающее приближение плазмы к внутренней стенке токамака, может привести к разрушению реактора и выбросу энергии плазмы наружу. Такие возможности по сокращению времени переходного процесса и уменьшению размеров отклонений зазоров обеспечиваются тем, что регулятор с прогнозирующей моделью благодаря получению оптимального управления на каждом шаге управляемого процесса приводит к форсированным процессам управления по сравнению с  $H_\infty$ -регулятором (рис. 3, г, д). Управляющие напряжения выходят на насыщение за относительно короткие интервалы времени, что приводит к более быстрым изменениям токов в обмотках, создающих полоидальные магнитные поля (рис. 3, е, ж).

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Результаты сравнения моделирования систем магнитного управления плазмой показывают, что при использовании регулятора с прогнозированием по модели достигается меньшее время переходного процесса. Данные результаты объясняются принципиальным отличием управления с прогнозированием по модели от управления посредством любых линейных регуляторов, состоящее в том, что при оптимизации показателя качества (4) явно учитываются ограничения на входные воздействия (5), результатом чего является нелинейный закон управления. Более того, разработанный регулятор с прогнозирующей моделью одновременно обрабатывает весь набор из 19-ти входных сигналов, поступающих от объекта. Это не приводит к традиционному разбиению системы управления на два контура: быстрый скалярный контур для управления вертикальной скоростью плазмы и медленный многомерный контур для управления формой и током плазмы [1]. В этом заключается оригинальность применяемого регулятора с прогнозирующей моделью по сравнению с известными блок-диагональными регуляторами [1, 5], обеспечивающая новое качество управления.

С другой стороны, система управления с прогнозирующей моделью для своей работы требует больше вычислительных затрат в единицу времени по сравнению с любым линейным регулятором, например,  $H_\infty$  регулятором. Это связано с тем, что на каждом шаге прогнозирующего управления решается задача оптимизации критерия качества с учетом ограничений и находится оптимальное уп-

равляющее воздействие. Сравнительные оценки производительности линейных и нелинейных регуляторов делать преждевременно, поскольку быстрое действие вычислительной техники постоянно растет, а строительство термоядерного реактора займет время масштаба 10 лет. Поэтому сейчас важно разобраться в тех дополнительных ресурсах, которые имеются в системах магнитного управления плазмой в токамаках и которые важно научиться использовать посредством разработки новых эффективных алгоритмов управления. На этом пути и получены результаты в данной работе.

Кроме того, для нелинейного регулятора с прогнозирующей моделью, который учитывает ограничения на входные воздействия, важно в дальнейшем получить оценки запасов устойчивости замкнутой системы, что представляет собой сложную аналитическую задачу и является предметом дальнейших исследований.

## ЛИТЕРАТУРА

1. *Синтез и моделирование  $H_\infty$ -системы магнитного управления плазмой в токамаке-реакторе* / В.Н. Докука, А.В. Кадулин, Ю.В. Митришкин, Р.П. Хайрутдинов // Автоматика и телемеханика. — 2007. — № 8. — С. 126—145.
2. *Rossiter J.A. Model-Based Predictive Control: A Practical Approach*. — CRC Press LLC, 2003. — 318 p.
3. *Application of Cautious Stable Predictive Control to Vertical Positioning in COMPASS-D Tokamak* / J.R. Gossner, P. Vyas, B. Kouvaritakis, A.W. Morris // IEEE Trans. on Control Systems Technology, 1999. — Vol. 7, N 5. — P. 580—587.
4. *Khayrutdinov R.R., Lukash V.E. Studies of Plasma Equilibrium and Transport in a Tokamak Fusion Device with the Inverse-Variable Technique* // Journal Comp. Physics. — 1993. — Vol. 109. — P. 193—201.
5. *Mitishkin Y.V., Kurachi K., Kimura H. Plasma Multivariable Robust Control System Design and Simulation for a Thermonuclear Tokamak-Reactor* // Int. J. Control. — 2003. — Vol. 76, N 13. — P. 1358—1374.
6. *Mitishkin Y.V., Dokuka V.N., Khayrutdinov R.R. Linearization of ITER Plasma Equilibrium Model on DINA Code* // Proc. of The 32<sup>nd</sup> EPS Plasma Physics Conference, Tarragona, Spain, ID P5.080. — 2005.
7. *Лукаш В.Э., Докука В.Н., Хайрутдинов Р.П. Программно-вычислительный комплекс ДИНА в системе MATLAB для решения задач управления плазмой токамака* // Вопросы атомной науки и техники / Сер. Термоядерный синтез. — 2004. — Вып. 1. — С. 40—49.

*Статья представлена к публикации членом редколлегии С.Д. Земляковым.*

**Митришкин Юрий Владимирович** — д-р техн. наук, вед. науч. сотрудник, Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, г. Москва, ☎ (495) 334-87-71, e-mail: yvm@mail.ru

**Коростелев Александр Яковлевич** — аспирант, Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана, ☎ (495) 725-44-32, e-mail: akorostel@gmail.com

# КОНЦЕПЦИЯ БАНКА МАТЕМАТИЧЕСКИХ ЗНАНИЙ ДЛЯ НАУЧНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ.

## Ч. 2. Интерактивное формирование интуитивных доказательств<sup>1</sup>

А.С. Клещев

Статья завершает цикл из двух статей, посвященных концепции системы компьютерной поддержки научной деятельности в области математики. Приведены модель интуитивного доказательства, требования к средствам поддержки исследователей и интеграторов знаний, а также к системным процессам.

**Ключевые слова:** интерактивное доказательство теорем, доказательство теорем по аналогии, интуитивное доказательство, правильность интуитивного доказательства, банки знаний.

### ВВЕДЕНИЕ

Современные системы интерактивного формирования доказательств вынуждают пользователя строить полные доказательства, что неприемлемо в научной деятельности. В настоящей статье, являющейся продолжением работы [1], вводится модель интуитивного доказательства и рассматриваются механизмы его интерактивного формирования и обеспечения его правильности.

### 1. МОДЕЛЬ ИНТУИТИВНОГО ДОКАЗАТЕЛЬСТВА

В данной работе выделены следующие типы интуитивных доказательств (ИД), встречающихся в математической (в том числе и учебной) литературе:

— доказательство целевого утверждения с помощью конкретизации (замены переменных на некоторые термы) некоторого другого утверждения («следует из утверждения ..., если положить ... равным ...»);

— доказательство целевого утверждения, имеющего форму импликации (« $f_1 \Rightarrow f_2$ »), основанное на теореме дедукции («пусть  $f_1$ ; покажем, что  $f_2$ »);

— «доказательство очевидно»;

— вывод целевого утверждения, т. е. последовательность шагов, на каждом из которых в качестве результата получается логическое следствие из уже доказанных утверждений, онтологических знаний и предположений, причем на последнем шаге результатом является целевое утверждение;

— декомпозиция целевого утверждения, т. е. замена целевого утверждения на множество утверждений (компонентов декомпозиции), логическим следствием конъюнкции которых является целевое утверждение, и доказательство этих утверждений («для доказательства данного утверждения достаточно доказать, что ...»);

— декомпозиция предположения, т. е. замена исходного предположения множеством новых предположений (компонентов декомпозиции предположения), дизъюнкция которых равносильна исходному предположению, и доказательство целевого утверждения при каждом из этих новых предположений;

— структурное доказательство, имеющее вид последовательности утверждений вместе с их доказательствами, которые используются для доказательства целевого утверждения («сначала докажем, что ...; затем докажем, что ...; ...; наконец, докажем, что ...»);

— модульное доказательство (множество лемм вместе с доказательствами, которые выносятся из основного доказательства);

<sup>1</sup> Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект 06-070-89071-а, и ДВО РАН в рамках Программы № 15 ОЭММПУ РАН, проект 06-1-П115-055.



— указание на аналогию с другим доказательством («доказательство аналогично доказательству утверждения ...»);

— указание на аналогию с другим доказательством в качестве эвристики для построения доказательства («рассуждая так же, как и при доказательстве ...»).

Модель ИД — это информация об ИД, по которой можно восстановить полное формальное доказательство. Модель ИД состоит из внешней и внутренней частей, внешняя часть состоит из объектов выбора и формирования, а внутренняя — из вычисляемых и вспомогательных объектов. Кроме того, компонентами модели ИД могут быть другие модели ИД. Интерактивное построение модели ИД состоит в построении ее внешней части (через выбор из списков и формирование с помощью редакторов) и ее компонентов; системные процессы должны вычислять вычисляемые объекты ее внутренней части и (возможно, с участием интеграторов) формировать полные доказательства вспомогательных утверждений.

Если ИД есть «утверждение  $p_1$  следует из утверждения  $p_2$  при подстановке  $\theta$ », то внешняя часть модели ИД пуста, вычисляемыми объектами ее внутренней части являются  $p_2$  и  $\theta$ , а вспомогательными — утверждения о том, что значения переменных в подстановке  $\theta$  входят в области значений этих переменных.

**Пример 1.** Введем переменные  $x$ . последовательности,  $a, p, R, N: \mathbb{I}[1, \infty), n: \mathbb{I}[N, \infty)$ . Утверждение

$$\lim x = a \text{ \& } a > 0 \Rightarrow \exists N: \forall n: x(n) > 0 \quad (1)$$

следует из утверждения

$$\lim x = a \text{ \& } a > p \Rightarrow \exists N: \forall n: x(n) > p, \quad (2)$$

находящегося в базе знаний, при подстановке  $\theta = (p/0)$ . Интуитивное доказательство утверждения (1) строится без участия исследователя: в базе знаний ищется утверждение (2), в процессе поиска вычисляется подстановка  $\theta$ . Формируется вспомогательное утверждение  $0 \in R$ . ♦

Модель ИД утверждения вида  $f_1 \Rightarrow f_2$  совпадает с моделью ИД утверждения  $f_2$  в предположении, что справедливо  $f_1$ .

**Пример 2.** Первый шаг построения ИД утверждения (2) выполняется без участия исследователя: пусть

$$\lim x = a \quad (3)$$

и

$$a > p; \quad (4)$$

покажем, что

$$\exists N: \forall n: x(n) > p. \quad (5) \blacklozenge$$

Если ИД есть «доказательство утверждения  $p$  очевидно», то внешняя часть модели ИД пуста, а  $p$  становится вспомогательным утверждением ее внутренней части.

**Пример 3.** Если при построении ИД утверждения

$$x \rightarrow \infty \Leftrightarrow |x| \rightarrow +\infty \quad (6)$$

исследователь выбирает альтернативу «доказательство очевидно», то утверждение (6) становится вспомогательным (оно должно быть доказано без участия исследователя). ♦

Если ИД утверждения  $p$  есть вывод, то модель ИД есть последовательность моделей шагов этого вывода. Возможны два варианта модели шага вывода.

В первом варианте объектами выбора внешней части модели шага вывода являются пропозициональные тавтологии вида  $(v_1: L) \dots (v_m: L) f_1 \& \dots \& f_k \Rightarrow f$ , математические утверждения вида  $(v_1: t_1) \dots (v_m: t_m) f_1 \& \dots \& f_k \Rightarrow f$  или метаматематические аксиомы вида  $(v_1: t_1) \dots (v_m: t_m) MF_1 \& \dots \& MF_k \Rightarrow MF$ , а также значения посылок  $f'_1, \dots, f'_k$ , вычисляемыми объектами ее внутренней части —  $f'$  (результат шага вывода) и  $\theta = (v_1/tt_1, \dots, v_m/tt_m)$  (подстановка, при которой выполнялся шаг вывода), а вспомогательными объектами являются утверждения  $tt_1 \in t_1, \dots, tt_m \in t_m$ .

Во втором варианте объектами формирования внешней части модели шага вывода являются значения посылок  $f'_1, \dots, f'_k$ , и результат шага  $f'$ , а вспомогательным утверждением ее внутренней части — утверждение  $f'_1 \& \dots \& f'_k \Rightarrow f'$ .

**Пример 4.** Интуитивное доказательство утверждения (5) в предположениях (3) и (4) строится как вывод из двух шагов: 1) (второй вариант шага вывода) из значения первой посылки (3) следует

$$\exists N: \forall n: x(n) > a - (a - p) \quad (7)$$

(результат шага); формируется вспомогательное утверждение: предел  $(x, a) \Rightarrow \exists N: \forall n: x(n) > a - (a - p)$ ; 2) (первый вариант шага вывода) используем метаматематическую аксиому (принцип замены равных термов в формулах)

$$t_1 = t_2 \text{ \& } f \vdash t_1 \vdash \Rightarrow f \vdash t_2 \vdash \quad (8)$$

и утверждение из базы знаний  $(r_1: R, r_2: R) r_1 - (r_1 - r_2) = r_2$  (значение первой посылки). Из значения второй посылки (7) получим утверждение (5) (результат шага). На этом шаге вычисляется подстановка  $\theta = (t_1/r_1 - (r_1 - r_2), t_2/r_2, f/\exists N: \forall n: x(n) > a - (a - p), r_1/a, r_2/p)$ . Вспомогательные утверждения на этом шаге не формируются, поскольку области значений переменных  $r_1, a, r_2$  и  $p$  совпадают. ♦

Если ИД утверждения  $f$  есть декомпозиция, то возможны два варианта.

В первом варианте объектом выбора внешней части модели ИД являются пропозициональные тавтологии вида  $(v_1: L) \dots (v_m: L) f_1 \& \dots \& f_k \Rightarrow f$ , математические утверждения вида  $(v_1: t_1) \dots (v_m: t_m) f_1 \& \dots \& f_k \Rightarrow f$  или метаматематические аксиомы вида  $(v_1: t_1) \dots (v_m: t_m) MF_1 \& \dots \& MF_k \Rightarrow MF$ , вычисляемыми объектами ее внутренней части — утверждения компонентов декомпозиции  $f'_1, \dots, f'_k$  и подстановка  $\theta = (v_1/tt_1, \dots, v_m/tt_m)$ , а вспомогательными объектами — утверждения  $tt_1 \in t_1, \dots, tt_m \in t_m$ .

Во втором варианте объектами формирования внешней части модели ИД являются утверждения компонентов декомпозиции  $f'_1, \dots, f'_k$ , а вспомогательным объектом ее внутренней части — ут-

верждение  $f'_1 \& \dots \& f'_k \Rightarrow f'$ . В обоих вариантах компонентами модели ИД утверждения  $f'$  являются модели ИД утверждений  $f'_1, \dots, f'_k$ .

**Пример 5.** Интуитивное доказательство утверждения

$$\text{последовательности } \neq \emptyset \quad (9)$$

строится как декомпозиция из двух шагов: 1) (первый вариант) используется метаматематическая аксиома (8), определение последовательности  $= I[1, \infty) \rightarrow R$  в качестве значения ее первой посылки, и утверждение (9) в качестве значения ее заключения. На этом шаге вычисляется подстановка  $\theta = (t_1/\text{последовательности}, t_2/I[1, \infty) \rightarrow R, f/\text{последовательности } \neq \emptyset)$ . «Для доказательства утверждения (9) достаточно доказать

$$I[1, \infty) \rightarrow R \neq \emptyset; \quad (10)$$

2) (второй вариант) для доказательства (10) достаточно доказать  $I[1, \infty) \neq \emptyset$  и  $R \neq \emptyset$ . Формируется вспомогательное утверждение  $I[1, \infty) \neq \emptyset \& R \neq \emptyset \Rightarrow I[1, \infty) \rightarrow R \neq \emptyset$ . ♦

Если утверждение  $p$  доказывается в предположении  $f$ , а ИД  $p$  состоит в декомпозиции  $f$ , то возможны два варианта модели ИД этого типа.

В первом варианте объектом выбора внешней части модели ИД являются пропозициональные тавтологии вида  $(v_1: L) \dots (v_m: L) f_1 \vee \dots \vee f_k \Leftrightarrow f$ , математические утверждения вида  $(v_1: t_1) \dots (v_m: t_m) f_1 \vee \dots \vee f_k \Leftrightarrow f$  или метаматематические аксиомы вида  $(v_1: t_1) \dots (v_m: t_m) MF_1 \vee \dots \vee MF_k \Leftrightarrow MF$ , вычисляемыми объектами ее внутренней части — утверждения компонентов декомпозиции предположения  $f'_1, \dots, f'_k$  и подстановка  $\theta = (v_1/tt_1, \dots, v_m/tt_m)$ , а вспомогательными объектами — утверждения  $tt_1 \in t_1, \dots, tt_m \in t_m$ .

Во втором варианте объектами формирования внешней части модели ИД являются утверждения компонентов декомпозиции предположения  $f'_1, \dots, f'_k$ , а вспомогательным объектом ее внутренней части — утверждение  $f'_1 \vee \dots \vee f'_k \Leftrightarrow f'$ . В обоих вариантах компонентами модели ИД утверждения  $p$  в предположении  $f$  являются модели ИД утверждения  $p$  в предположениях  $f'_1, \dots, f'_k$ , соответственно.

**Пример 6.** Введем переменную  $r: R(0, \infty)$ . Интуитивное доказательство утверждения

$$\lim x = a \& a \neq 0 \Rightarrow \exists r: \exists N: \forall n: |x(n)| > r$$

после первого шага, имеющего вид: «пусть  $\lim x = a$  и

$$a \neq 0; \quad (11)$$

покажем, что

$$\exists r: \exists N: \forall n: |x(n)| > r; \quad (12)$$

строится как декомпозиция предположения (11); (первый вариант) используем утверждение из базы знаний  $a > 0 \vee a < 0 \Leftrightarrow a \neq 0$ . Для доказательства утверждения (12) достаточно доказать его в предположении  $a > 0$  и в предположении  $a < 0$ . ♦

Если ИД утверждения  $f$  имеет структуру, состоящую из ИД утверждений  $f_1, \dots, f_k$ , то объектами формирования внешней части модели такого ИД являются утверждения  $f_1, \dots, f_k$ , а внутренняя часть

модели ИД пуста. Компонентами модели ИД являются модели ИД утверждений  $f_1, \dots, f_k, f$ .

**Пример 7.** Интуитивное доказательство утверждения  $\lim x = a \Rightarrow \exists r: \forall N: |x(N)| \leq r$  после первого шага: пусть  $\lim x = a$ ; покажем, что

$$\exists r: \forall N: |x(N)| \leq r, \quad (13)$$

имеет следующую структуру: сначала покажем, что  $\exists N: \forall n: |x(n)| \leq M$ , где  $M: R(|a|, \infty)$ . ... Наконец, покажем (13) ... ♦

Если ИД утверждения  $f$  является модульным, т. е. включает в себя леммы  $f_1, \dots, f_k$ , то объектами формирования внешней части модели такого ИД являются утверждения  $f_1, \dots, f_k$ , а внутренняя часть модели ИД пуста. Компонентами модели ИД являются модели ИД утверждений  $f_1, \dots, f_k, f$ .

**Пример 8.** Введем переменные  $y$ : последовательности;  $b: R$ . Интуитивное доказательство утверждения  $\lim x = a \& \lim y = b \Rightarrow \lim(x + y) = a + b$  является модульным, т. е. включает в себя доказательство леммы:  $\alpha + \beta \in$  бесконечно малые, где  $\alpha, \beta$ : бесконечно малые. ♦

Если ИД утверждения  $p_1$  есть указание на аналогию с ИД утверждения  $p_2$ , то внешняя часть модели такого ИД включает в себя  $p_2$ , а внутренняя часть состоит из метадоказательства (обобщения ИД  $p_2$ ), подстановки вместо глобальных синтаксических переменных, при которой получено полное доказательство  $p_1$ , всех математических утверждений из базы знаний, входящих в это полное доказательство, а также полных доказательств всех вспомогательных утверждений (если они есть).

**Пример 9.** Введем переменные  $q: R, \varepsilon: R(0, \infty)$ . Интуитивное доказательство утверждения

$$\lim x = a \& a < q \Rightarrow \exists N: \forall n: x(n) < q \quad (14)$$

аналогично ИД утверждения (2). Интуитивное доказательство утверждения (2) обобщается (как это делалось в работе [2]) до интуитивного метадоказательства примера 10 (см. далее). Утверждение (14) и его ИД получаются из метадоказательства примера 10 при подстановке  $\theta = (T_1/\text{последовательности}, T_2/R, T_3/R, T_4/R(0, \infty), T_5/\tau_1 + \tau_2, T_6/\tau_2 - \tau_1, F_1/\lim x = a, F_2/a < p, F_3/\exists N: I[1, \infty) \forall n: I[N, \infty) x(n) < \tau, p/q)$ , если в базе знаний имеется утверждение

$$\lim x = a \Rightarrow \exists N: \forall n: x(n) < a + \varepsilon. \quad (15)$$

Внутренняя часть (вспомогательное утверждение):  $q - a \in R(0, \infty)$ . ♦

**Пример 10.** Обобщение ИД утверждения (2). Метатеорема ( $x: T_1, a: T_2, p: T_3$ )  $F_1 \& F_2 \Rightarrow F_3 \vdash p$ . Модель интуитивного метадоказательства: внешняя часть  $\varepsilon: T_4$ ; пусть  $F_1$  и  $F_2$ . Докажем  $F_3 \vdash p$ . Используем утверждение  $F_1 \Rightarrow F_3 \vdash T_5 \vdash a, \varepsilon \vdash$ , положим  $\varepsilon = T_6 \vdash a, p \vdash$ . Получим  $F_3 \vdash T_5 \vdash a, T_6 \vdash a, p \vdash$ ; используем метаматематическую аксиому (8) и утверждение  $(v_1: T_2, v_2: T_3) T_5 \vdash v_1, T_6 \vdash v_1, v_2 \vdash = v_2$ . Получим  $F_3 \vdash p$ . Внутренняя часть (вспомогательные метаутверждения):  $T_6 \vdash a, p \vdash \in T_4$ . ♦

Если ИД утверждения  $p_1$  интерактивно строится по аналогии с ИД утверждения  $p_2$ , то внешняя часть модели такого ИД включает в себя внешнюю часть модели ИД утверждения  $p_1$ , а внутренняя часть состоит из метадоказательства (обобщения ИД  $p_2$ ), подстановки вместо синтаксических пере-



менных, при которой получено полное доказательство  $p_1$ , всех математических утверждений из базы знаний, входящих в это полное доказательство, а также полных доказательств всех вспомогательных утверждений (если они есть).

**Пример 11.** Если утверждение (15) отсутствует в базе знаний, то ИД утверждения (14) может быть получено из интуитивного метадоказательства примера 10 интерактивно. Автоматически формируется:  $\varepsilon: R(0, \infty)$ . Пусть  $\lim x = a$  и  $a < q$ . Докажем  $\exists N: I[1, \infty) \forall n: I[N, \infty) x(n) < q$ . Используем лемму  $\lim x = a \Rightarrow \exists N: I[1, \infty) \forall n: I[N, \infty) x(n) < T_5 \uparrow a, \varepsilon \downarrow$ .

Запрос значения  $T_5 \uparrow a, \varepsilon \downarrow$ . Ответ:  $a + \varepsilon$ .

Используем лемму  $\lim x = a \Rightarrow \exists N: I[1, \infty) \forall n: I[N, \infty) x(n) < a + \varepsilon$ , положив  $\varepsilon = T_6 \uparrow a, p \downarrow$ .

Запрос значения  $T_6 \uparrow a, p \downarrow$ . Ответ:  $q - a$ .

Используем лемму  $\lim x = a \Rightarrow \exists N: I[1, \infty) \forall n: I[N, \infty) x(n) < a + \varepsilon$ , положив  $\varepsilon = q - a$ . Получим  $\exists N: I[1, \infty) \forall n: I[N, \infty) x(n) < a + (q - a)$ . Используем метаматематическую аксиому (8) и утверждение  $(r_1: R, r_2: R) r_1 + (r_2 - r_1) = r_2$ .

Запрос подтверждения справедливости этого утверждения. Ответ да.

Получим  $\exists N: I[1, \infty) \forall n: I[N, \infty) x(n) < q$ . ♦

## 2. ПОДДЕРЖКА ИССЛЕДОВАТЕЛЯ

Исследователю, работающему в Банке математических знаний (БМЗ), должны быть доступны как математические знания, хранящиеся в общей базе знаний, так и вся информация из его персональной базы, где фиксируются все результаты его деятельности. Основной вид такой деятельности состоит в интерактивном построении ИД, ее поддержка основана на модели ИД — исследователь строит только ее внешнюю часть, выбирая тип ИД и объекты выбора для этого типа и формируя объекты формирования.

Последнее требует такой же поддержки, как и редактирование математических знаний (в том числе ввод новых определений и формулировок теорем). Эту поддержку может выполнять редактор, представляющий собой интерпретатор грамматики модели математического диалекта и выполняющий порождение и редактирование текстов по этой грамматике под управлением пользователя. При порождении текста пользователь с помощью формируемых по грамматике интерфейсных элементов должен лишь разрешать альтернативы грамматики, определять моменты выхода из циклов, а также вводить лексемы — термины, константы и т. п. Кроме того, редактор должен допускать и некоторые другие действия, например, копирование синтаксических единиц с возможной их модификацией (при соблюдении синтаксической правильности результирующего текста). Наконец, редактор должен формировать утверждения, справедливость которых необходима и достаточна для соблюдения контекстных условий во вводимом (редактируемом) тексте, и передавать их на обработку системным процессам.

Поскольку математический диалект является расширяемым, у исследователя может возникнуть необходимость модифицировать саму грамматику математического диалекта, в частности, дополнить ее новыми правилами (а также дополнить альтернативы уже существующих правил новыми вариантами). Дополнения к грамматике общей базы знаний должны включаться в персональную базу, при этом вид информации из общей базы знаний определяется грамматикой общей базы знаний, а вид информации из персональной базы — модифицированной грамматикой.

## 3. СИСТЕМНЫЕ ПРОЦЕССЫ

Системные процессы предназначены для: выполнения различных операций над математическими утверждениями (символьные преобразования, в том числе дифференцирование, интегрирование и др.); формирования списков предложений при интерактивном построении ИД; поиска полных доказательств вспомогательных математических утверждений; обобщения полных и интуитивных доказательств до метадоказательств; формирования новых теорем на основе метадоказательств.

Операции над математическими утверждениями могут быть реализованы в виде сервисов, либо внешних, либо внутренних по отношению к БМЗ, который должен поддерживать интерфейс с ними в процессе интерактивного построения ИД.

Формирование списков предложений требует специальных способов организации баз знаний, основанной на сходстве синтаксических структур и ориентированной на различные способы формирования таких списков. Можно выделить задачи формирования следующих множеств предложений: утверждений, для которых заданное утверждение является их конкретизацией; метатеорем, для которых заданное утверждение является их конкретизацией; утверждений, имеющих форму импликации, для которых заданное утверждение унифицируемо с их консеквентом.

Поиск полных доказательств (вспомогательных утверждений) может выполняться в четыре этапа. На первом этапе выполняется поиск доказываемого утверждения в базе вспомогательных утверждений, в которой содержатся все ранее доказанные вспомогательные утверждения. В основе этого этапа лежит наблюдение, что при построении разных ИД часто формируются одни и те же вспомогательные утверждения. На втором этапе выполняется поиск такого утверждения в базе знаний, конкретизацией которого является доказываемое утверждение. Если такое утверждение найдено, то доказываемое утверждение помещается в базу вспомогательных утверждений. В основе этого этапа лежит наблюдение, что вспомогательные утверждения

верждения часто являются частными случаями более общих утверждений из базы знаний. На третьем этапе выполняется поиск такого метадоказательства, что его конкретизацией является доказательство вспомогательного утверждения. База метатеорем делится на два раздела — являющихся обобщением вспомогательных утверждений и являющихся обобщением основных теорем. Поиск метатеорем выполняется сначала в первом разделе, а затем во втором. В основе этого этапа лежит наблюдение, что многие вспомогательные утверждения доказываются аналогично друг другу. Наконец, на четвертом этапе может лишь выполняться обращение к подсистеме автоматического поиска полных доказательств с указанием интервала времени, в течение которого эта подсистема должна искать полное доказательство. Если поиск закончился успешно, вспомогательное утверждение и его доказательство обобщаются, результат обобщения (метатеорема) помещается в раздел метатеорем, являющихся обобщением вспомогательных утверждений, а само утверждение — в базу вспомогательных утверждений. Если же поиск закончился неудачей, доказываемое утверждение и результаты попыток его доказательства могут быть переданы на рассмотрение интегратору знаний.

Обобщение полных и интуитивных доказательств до метадоказательств выполняется с помощью методов, предложенных в работе [2]. Для каждого интуитивного доказательства обобщаются его внешние и внутренние части. Внешняя часть интуитивных метадоказательств может затем использоваться для интерактивного построения интуитивных доказательств, а внутренняя — для формирования вспомогательных утверждений в рамках этого процесса.

Формирование новых теорем на основе метадоказательств также выполняется с помощью методов, предложенных в работе [2]. Новая теорема формируется в случае, если все математические утверждения, входящие во внешнюю часть формируемого интуитивного доказательства, присутствуют в базе знаний, а все вспомогательные утверждения, входящие в его внутреннюю часть, доказаны.

#### 4. ПОДДЕРЖКА ИНТЕГРАТОРА ЗНАНИЙ

Интегратор знаний БМЗ должен решать две задачи: формирование полных доказательств, которые не были построены системными процессами за отведенное для этого время; формирование общей базы знаний на основе персональных.

Интегратор знаний должен иметь возможность обозреть все вспомогательные утверждения, для которых системными процессами не были построены их полные доказательства. Для каждого тако-

го утверждения он должен либо принять решение о том, что оно неверно, либо интерактивно построить его полное доказательство. В последнем случае это вспомогательное утверждение должно быть включено в базу доказанных вспомогательных утверждений, а построенное доказательство обобщено.

Также интегратор знаний должен видеть изменения в персональных базах, произошедшие после последнего их просмотра. Для теорем и следствий он должен убедиться, что для них построены модели интуитивных доказательств, включая их внутренние части. Те из этих изменений, которые он считает общезначимыми, он может перевести в общую базу знаний (при этом они должны оставаться и в персональной базе знаний). Часть этих изменений он может перевести в базу дискуссионных вопросов. По ним свое мнение (включать ли их в общую базу) должны высказать заинтересованные пользователи БМЗ.

Интегратору знаний также должны быть доступны все новые теоремы, сформированные (и доказанные) системными процессами (на основе базы метадоказательств). Общезначимые теоремы он может перевести в общую базу знаний, а остальные — в базу дискуссионных вопросов.

#### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе задача построения доказательств разбивается на две: интерактивного построения интуитивных доказательств и обеспечения их правильности средствами системы. Решение второй задачи могут находить системные процессы либо, в случае неудачи, оно может быть построено интерактивно. При этом важна роль аналогии: при поиске по аналогии полных доказательств вспомогательных утверждений; при интерактивном построении по аналогии интуитивных доказательств; при поиске аналогичных теорем. Поэтому актуальная дальнейшая задача состоит в поиске более глубоких моделей аналогии.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Клещев А.С. Концепция банка математических знаний для научных исследований. Ч. 1. Метафора // Проблемы управления. — 2008. — № 4. — С. 2—6.
2. Клещев А.С. Модель аналогии между математическими доказательствами // Проблемы управления. — 2007. — № 1. — С. 20—24.

*Статья представлена к публикации членом редколлегии О.П. Кузнецовым.*

**Клещев Александр Сергеевич** — д-р физ.-мат. наук, зав. отделом, Институт автоматизации и процессов управления ДВО РАН, ☎ (4232) 31-04-24, e-mail: kleshev@iacp.dvo.ru

## ДИНАМИЧЕСКИЕ ПРИНЦИПЫ ПРОГНОЗИРОВАНИЯ И УПРАВЛЕНИЯ

Г.А. Леонов

Описаны подходы к прогнозированию и управлению, основанные на общих закономерностях проявления неустойчивостей в динамических системах. Эти подходы, развиваемые в рамках экспериментальной математики, предполагают отказ от попыток построения, идентификации и анализа приближенных моделей весьма сложных реальных динамических объектов. Вместо этого делаются попытки набрать некоторый экспериментальный материал на реальной модели и использовать его при получении прогноза и построении управления. Отмечено, что возникновение неустойчивостей характеризуется общими закономерностями, учет которых приводит к некоторым общим принципам качественной теории управления.

**Ключевые слова:** прогноз, управление, принцип Клаузевица, принцип «Master-slave».

### ВВЕДЕНИЕ

Для динамических систем, порожденных дифференциальными

$$\frac{dx}{dt} = f(x)$$

или разностными

$$x(t+1) - x(t) = f(x(t)), \quad x \in R^n,$$

уравнениями, имеет место следующее очевидное свойство решений

$$x(t+s, s, x_0) = x(t, 0, x_0) \quad (1)$$

для любой константы  $s > 0$ . Это свойство сохраняется и для более общих описаний динамических систем (в смысле их фазовых пространств или нелинейных операторов, действующих в этих пространствах).

Из равенства (1) следует, что участки траектории  $x(t, x_0)$ , начинающиеся в точке  $x_0$  в момент времени  $t=0$  и в момент времени  $t=\tau$ , совпадают.

Отсюда следует повторяемость физических экспериментов при одних и тех же условиях, и аналогичным образом — возможность прогнозирования процессов и управления ими.

Однако из-за проявления неустойчивостей, которые в последнее время интенсивно изучаются [1], отмеченное совпадение очень часто возможно

только на сравнительно небольших временных интервалах  $(0, \tau)$  и  $(s, s + \tau)$ .

В настоящей работе мы опишем некоторые подходы к прогнозированию и управлению, основанные на общих закономерностях проявления неустойчивостей в динамических системах. Эти подходы, развиваемые в рамках «экспериментальной математики», основаны на отказе от попыток построения, идентификации и анализа приближенных моделей весьма сложных реальных динамических объектов. Вместо этого делаются попытки набрать некоторый экспериментальный материал на реальной модели и использовать его при получении прогноза и построении управления. Кроме того, возникновение неустойчивостей характеризуется общими закономерностями, учет которых приводит к некоторым общим принципам качественной теории управления. Эти принципы также будут далее описаны.

### 1. ПОУЧИТЕЛЬНЫЙ ПРИМЕР. КАК МОЖНО ПРЕДСКАЗАТЬ ПОГОДУ НА НЕДЕЛЮ. ПОЧЕМУ ЕЕ НЕЛЬЗЯ ПРЕДСКАЗАТЬ БОЛЕЕ ЧЕМ НА ДВЕ НЕДЕЛИ

В 1950—1960 гг. прогресс в теории механики сплошных сред, с помощью которой создавались все более точные математические модели изменения атмосферы, в вычислительной математике, с помощью которой создавались все более эффективные алгоритмы решения дифференциальных

уравнений этих моделей, и в создании все более быстродействующих компьютеров, с помощью которых реализовывались эти алгоритмы, сформировал широко распространенное в те годы мнение, что нужно предпринять еще некоторые усилия в этих направлениях и прогноз погоды можно будет с уверенностью делать на многие недели, месяцы и даже годы.

Однако потом оказалось, что длительный прогноз невозможен.

Теоретически невозможность долговременного прогноза погоды была установлена в работах Э. Лоренца и его последователей [1], которые открыли неустойчивости в математических моделях атмосферы. Последнее означало сильную чувствительность решений дифференциальных уравнений, описывающих атмосферные процессы, к начальным условиям. Понимание возможности таких эффектов привело к наблюдательным экспериментам в рамках нового направления в «экспериментальной математике», которые мы здесь опишем.

В Европе накоплен большой материал метеорологических наблюдений. Такие наблюдения регулярно проводились в течение многих десятилетий.

Возьмем, например, наблюдения, которые были проведены 9 мая 2004 г. в выбранном нами регионе Европы. Подберем далее некоторый год (например, 18ху такой, что 9 мая этого 18ху года в этом же регионе наблюдались сходные метеорологические параметры (температура, давление, влажность, сила и направление ветра, облачность и др.). Эти параметры и есть начальные (и граничные) условия, по которым определяются решения дифференциальных уравнений модели атмосферы.

Уравнения адекватны законам механики сплошных сред. В разные годы эти законы не изменяются. Следовательно, и уравнения не изменяются. А решения однозначно определяются по уравнениям и начальным данным.

Начальные данные 9.05.2004 и 9.05.18ху одинаковы, уравнения одинаковы. Значит и решения, которые соответствуют изменению метеорологических данных (температуре, давлению, влажности и др.) также должны быть одинаковыми.

Следовательно, эти параметры, которые наблюдались в течение месяца (с 9.05 по 9.06 2004 и с 9.05 по 9.06.18ху), должны с хорошей точностью совпадать для каждого дня из выбранного временного промежутка. Например, метеоусловия 1.06.2004 и 1.06.18ху должны быть очень близки друг к другу.

Однако описанные нами эксперименты показывают, что такие совпадения имеют место на временных интервалах продолжительностью не более двух недель. В течение недели может быть хорошее совпадение и этим часто пользуются в метеорологии для краткосрочных прогнозов. Далее результа-

ты наблюдений резко расходятся. Поэтому метеоусловия на 1.06.2004 и 1.06.18ху, как правило, совершенно разные.

В чем же дело? Здесь оказывается, что небольшие расхождения в начальных данных в начальные моменты наблюдений приводят к большим расхождениям в наблюдаемых параметрах уже через две недели.

Таким образом, как бы точно мы ни описывали математическую модель атмосферы, какие бы совершенные методы вычислений к этим моделям мы ни применяли, какой бы быстродействующей техникой мы ни пользовались, результат будет один: больше, чем на две недели надежный прогноз погоды невозможен.

По этой причине японцы отказались делать прогнозы на срок более десяти суток.

Отметим здесь одно важное обстоятельство. Если в традиционном подходе основные проблемы состоят в построении все более точных математических моделей, разработке и реализации численных алгоритмов решения дифференциальных уравнений и идентификации параметров этих уравнений, то в описанном здесь подходе необходимо перейти к созданию специальных баз данных.

---

## 2. ПРЕДСКАЗАНИЕ ПОВЕДЕНИЯ РЫНКА КАК АНАЛОГ ПРЕДСКАЗАНИЯ ПОГОДЫ. КАКИЕ АНАЛОГИИ МОЖНО ПРОВЕСТИ МЕЖДУ ИЗМЕНЕНИЯМИ ПОГОДЫ И ИЗМЕНЕНИЯМИ РЫНКА?

---

Если физические законы и соответствующие им уравнения конвекции верны для любого временного интервала, то аналогичные законы рынка зависят от политики, финансового состояния и усмотрений участников рынка, которые неизменны лишь на коротком промежутке времени  $[t_0, T]$  (это дни или часы). Этим законам подчиняются изменения переменных величин рынка  $x_j(t)$ . Их (если проводить аналогию с предсказанием погоды) должно быть около десятка  $j = 1, \dots, 10$ .

Начальные (и граничные) условия в предсказании погоды здесь заменяются изменениями переменных на некотором «начальном» промежутке  $[t_0, t_1]$  ( $t_1$  значительно меньше  $T$ .) Здесь можно провести некоторую аналогию с «начальной функцией» для дифференциальных уравнений с запаздыванием.

**Гипотеза.** *Существуют классы рынков таких, что из «хорошего» совпадения всех наблюдаемых временных характеристик рынка  $x_j(t)$ ,  $j = 1, \dots, N$ , на промежутках  $[t_0, t_1]$  и  $[t_0 + \tau, t_1 + \tau]$ ,  $t_1 + \tau < T$ , следует их «хорошее» совпадение и на некоторых промежутках  $[t_0, t_1 + \varepsilon]$  и  $[t_0 + \tau, t_1 + \tau + \varepsilon]$ ,  $t_1 + \tau + \varepsilon < T$ . ♦*



«Хорошее» означает некоторое предварительное «сглаживание или усреднение» величин  $x_j(t)$ . Это аналогично тому, что мы учитываем, например, некоторое «среднее» значение скорости ветра, сглаживая на небольших временных интервалах его порывы или ослабления.

Таким образом, по-видимому, поведение некоторых рынков можно предсказывать на небольших временных интервалах так, как предсказывают сейчас погоду по схожим параметрам (характеристическим переменным) в предыдущих наблюдениях.

Безусловно, высказанная здесь гипотеза нуждается в проверке на конкретных многопараметрических рынках. Здесь важно удачно определять (также из экспериментов) масштабы времени (т. е. значения  $t_1$ ,  $T$ ,  $\tau$  и  $\varepsilon$ ).

### 3. ПРИНЦИП КЛАУЗЕВИЦА

Этот принцип изучают в любой академии Генерального штаба любой страны, которая заботится о своей безопасности. Для нас очень важно, что он допускает широкие обобщения и применим не только к вооруженной борьбе между государствами.

Сформулируем принцип Клаузевица для военных действий.

*Любая военная операция должна быть спланирована ограниченной в пространстве и во времени. Следующая операция планируется с учетом итогов предыдущей операции.*

Таким образом, любая война, какие бы цели она ни ставила, должна быть разбита на отдельные операции со своими тактическими целями, следующими одна за другой.

Цели операции, силы и средства, привлекаемые для ее выполнения, корректируются с учетом итогов предыдущих операций.

Выбор пространственных и временных ограничений операции составляет предмет военного искусства. Они выбираются из зачастую печального и кровавого предшествующего опыта.

Подчеркнем аналогию с невозможностью предсказать погоду более чем на две недели.

Здесь в сложной вооруженной борьбе также могут проявиться неустойчивости, и заранее утвержденные планы и шаблоны могут уже сами быть причиной краха операции.

Яркий пример применения принципа Клаузевица представляют собой знаменитые «10 Сталинских ударов» 1944 года. Предыдущий опыт войны привел Генеральный штаб Красной Армии к выводу, что оптимальный срок проведения операции 1—2 мес, ее пространственные рамки — 200—300 км. Для этих операций были созданы соответствующие организации — фронты (Ленинградский, Ка-

рельский, Белорусские, Украинские, Прибалтийские). Соединение военного опыта с точным следованием принципу Клаузевица приводило к следовавшим друг за другом успехам всех десяти операций: снятию блокады Ленинграда, освобождению Крыма, Юго-Западной Украины (Корсунь-Шевченковская операция), Белоруссии (операция «Багратион»), Молдавии (Яско-Кишиневская операция) и других регионов СССР.

Стремление после окончания спланированной операции «развить успех», т. е. по инерции продолжить движение, часто кончалось крахом.

Яркий пример этому — жестокое поражение Красной Армии в 1920 г. под Варшавой, крах немецкой армии под Сталинградом.

Поэтому кажущиеся непрофессионалу неестественными остановки немецкой армии под Дюнкерком в 1940 г. (в это время английская армия успела эвакуироваться через Ла-Манш) и Красной Армии под Варшавой в 1944 г. (в это время началось Варшавское восстание) были совершены в полном соответствии с принципом Клаузевица. В этих обоих случаях закончились предыдущие операции и нужно было спланировать и подготовить новые — взятие Дюнкерка и Варшавы.

Принцип Клаузевица необходимо учитывать при проведении любых глобальных реформ (в стране, в фирме, в государственной структуре). Необходимо четкое разделение планируемых преобразований на отдельные части, нужно последовательно проводить отдельные преобразования в жизнь, получить результаты и далее планировать с их учетом дальнейшие преобразования. Затем получить результаты второго этапа преобразований, учесть их при планировании третьего этапа реформ. И только после такого тщательного планирования запустить третий этап. И так далее.

Как разительно отличается управление процессом реформ, вытекающее из принципа Клаузевица, от непоследовательных действий руководства СССР и России в 1980—1990 гг.!

Безусловно, выбор глубины и времени каждого этапа реформ — это предмет административного и экономического искусства (также как аналогичные параметры для военной операции — предмет военного искусства). Конечно, необходимо, чтобы поставленные на каждом этапе цели были достижимы (т. е. чтобы инструментов и средств было достаточно для достижения поставленной цели).

И очень важно, соблюдая указанную выше последовательность действий, не упускать из виду поставленной конечной глобальной цели (также как при проведении военных операций глобальная цель — Победа).

#### 4. ПРИНЦИП КЛАУЗЕВИЦА В ЗАДАЧАХ С ОГРАНИЧЕННЫМИ РЕСУРСАМИ

Одна из модификаций принципа Клаузевица состоит в вычленении и последовательном решении приоритетных задач при ограниченных ресурсах. Напомним, что классический принцип Клаузевица — это расчленение основной задачи на последовательные решения специально выделенных подзадач.

Приведем одно из наиболее ярких применений модифицированного принципа Клаузевица.

В результате Первой мировой войны Германия потерпела жестокое поражение. Ее главный союзник — Австро-Венгрия — была расчленена и прекратила свое существование как мощное европейское государство. На Германию были наложены огромные контрибуции и жесткие ограничения на создание современной армии. В 1920-е гг. Германия была бедным и слабым государством. И вдруг, «почти мгновенно», в 1934—1936 гг. была создана мощная армия, оснащенная самым современным вооружением. В 1936 г. армия Германии превосходила по своей мощи армии Англии и Франции вместе взятых.

Каким образом это произошло?

После поражения в Первой мировой войне Германии удалось сохранить ядро Генерального штаба. Это были высокообразованные офицеры, имеющие боевой опыт и опыт организационной и мобилизационной работы. При их поддержке были сохранены старые и созданы новые конструкторские коллективы, разрабатывающие и создающие образцы новой военной техники, которые затем проходили испытания.

Однако запуска в серийное производство не было. Сразу же конструкторы на основе полученных результатов и рекомендаций Генерального штаба переходили к разработке следующего поколения вооружений.

Все это позволило незаметно для других стран создать лучшие образцы вооружений и практически одновременно в 1934 г. запустить их в серию, мобилизовать армию и снабдить ее этим вооружением в течение очень короткого срока. После этого спохватившиеся западные союзники пришли к выводу, что воевать с Германией в 1937 г. — безнадёжное мероприятие.

Приведенный здесь пример еще раз показывает необходимость применения динамических принципов управления.

#### 5. ПРИНЦИП «MASTER-SLAVE»

Принцип «Master-slave» широко распространен в современной технике. Он означает, что множество однотипных устройств (рабов — *slaves*), не свя-

занных друг с другом, одновременно работают, подчиняясь сигналам только одного эталонного устройства (хозяина, мастера — *master*).

Например, включая свой телевизор, вы одновременно включаете «сидящего» в вашем телевизоре «раба» — генератор строчной развертки, который управляет движением луча в электронно-лучевой трубке. На телевизионной станции есть хозяин — эталонный высокостабильный генератор, который посылает в телевизионном сигнале информацию о своей частоте. Эту информацию принимает ваш телевизионный приемник и специальное устройство — блок синхронизации — подстраивает генератора-раба к частоте генератора-хозяина. Раб не так высокостабилен, как хозяин, и все время необходимо следить за тем, чтобы он не «увел» свою частоту в какую-либо сторону. Такое слежение предполагает наличие обратной связи: как только раб начнет «уходить», так блок синхронизации сравнит частоты хозяина и раба и «заставит» раба снова работать на частоте хозяина.

Таким образом, принцип «master-slave» предполагает наличие мониторинга и обратной связи для каждого раба с тем, чтобы раб выполнял свою рабочую функцию.

Примером динамического планирования и управления по принципу master-slave служит конвейер. Master — это высокостабильная скорость конвейера, slaves — это рабочие, выполняющие независимо друг от друга однотипные операции со скоростью, которую «навязал» master — хозяин. Невыполнение с нужной скоростью необходимых операций сразу будет обнаружено (мониторинг) и предприняты меры к устранению такого невыполнения (обратная связь).

Другим ярким примером принципа «master-slave» служит команда пиратского парусного корабля. Без жестко синхронизированного выполнения команд капитана невозможно управление парусным кораблем. Поэтому абсолютно свободные люди — морские разбойники — добровольно организуются в систему «master-slaves» (хозяин-рабы), где они временно лишены какой-либо свободы.

Обычно этот жесткий принцип управления в коллективах людей стараются смягчить некоторыми иллюзиями «социального партнерства» и «корпоративности». Но, в сущности, хозяин остается хозяином, а раб — рабом.

#### 6. ПРИНЦИП ШИРОКИХ ПОЛНОМОЧИЙ (ПРИНЦИП ФЕДЕРАЛИЗМА)

Принцип широких полномочий (принцип федерализма) в определенной степени противоположен принципу «master-slave».

Конечно, не ко всем случаям подходит такое жесткое и одноканальное управление, как master-



slave. Часто наиболее приспособленной к выполнению поставленных требований оказывается иерархическая федеративная система управления.

Здесь также имеется один мастер (например, президент), но есть и подмастерья (например, губернаторы), которым передается часть полномочий мастера. Эти полномочия должны быть весьма широкими. Иначе система будет близка к работе по принципу master-slave. Однако здесь работа происходит на границах областей устойчивости. Поэтому в структуре системы необходимо предусмотреть серию специальных административных противоаварийных мер.

Прежде всего, в системе должен быть предусмотрен (и практически на автоматическом уровне применяться) механизм быстрой и решительной смены подмастерья, если он не удовлетворяет возложенным на него обязанностям и предъявляемым к нему требованиям.

Далее, должна быть предусмотрена система подготовки, подбора и воспитания подмастерьев, которая также выступала бы стабилизирующим фактором.

Ясно, что при хорошо отлаженной и правильно функционирующей федеративной системе все игроки подчиняются целой системе писаных и неписаных правил. Возникает традиция и система ценностей, на которую ориентируются все участники процесса.

Из изложенного следует, что частая и регулярная сменяемость и мастера, и подмастерьев не является стабилизирующим фактором. Скорее, наоборот. В каждой такой смене кроются элементы дестабилизации. И чем сложнее управляемая динамическая система, тем в большей степени они могут проявиться.

## 7. ПРИНЦИП НЕПРЕРЫВНОГО УСПЕШНОГО ПРОЦЕССА

Принцип непрерывного успешного процесса также является динамическим принципом управления, который стабилизирует систему, не дает возникнуть и развиваться неустойчивостям, которые могут привести к хаосу и разрушению системы «изнутри».

В математической теории динамических систем хорошо известно, что предвестниками развития неустойчивых процессов служат колебательные или «разнонаправленные» движения [1]. В динамической системе, где каждая ее подсистема эволюционирует с положительными производными, как правило, происходит подавление неустойчивостей.

Этот принцип давно применяется в кадровой политике крупных западных фирм. Он трансформируется здесь в следующее правило.

*Работника не рекомендуется понижать в должности, понижать его зарплату. Только движение вверх. Вплоть до последнего дня работы в фирме, когда ему объявляют об увольнении.*

Другими словами: лучше уволить, чем понизить.

В этом случае элементарная подсистема — конкретный работник — непрерывно движется только вверх.

Хорошо известно, что резкое падение какого-либо показателя может привести к частичному или полному разрушению системы. Так началась Великая американская депрессия 1930-х гг.: на Нью-Йоркской фондовой бирже внезапно и резко упали курсы акций.

## 8. ЗАКОН ТЕРМИДОРА

*После каждой революции наступает диктатура.*

Этот закон явился обобщением многих исторических фактов в различных странах: в Англии, во Франции, в России и во многих других.

Как можно пояснить это явление в смысле возникновения и подавления неустойчивостей?

Во время революции оказываются снятыми многие ограничения — возникает много различных «степеней свободы» (в механике этот термин имеет точное значение). Социальная система становится более «многомерной». И такая многомерность может приводить (и, как правило, приводит) к неустойчивостям, которые в свою очередь влекут за собой хаотизацию общества. Общество срывается в хаос, который подавляется только одним (к сожалению!) способом — резким ограничением «степеней свободы». И система становится «маломерной» (а иногда и одномерной, одноканальной — вспомним принцип master-slave).

Такое ограничение свобод подавляет хаос: наступает диктатура, которая некоторое (иногда очень короткое) время приветствуется большинством общества.

## ЛИТЕРАТУРА

1. *Леонов Г.А.* Хаотическая динамика и классическая теория устойчивости движения. — М.: Регулярная и хаотическая динамика, 2006. — 160 с.

*Статья представлена к публикации членом редколлегии Д.А. Новиковым.*

**Леонов Геннадий Алексеевич** — д-р физ.-мат. наук, чл.-корр. РАН, декан, Санкт-Петербургский государственный университет, ☎ (812) 428-69-44, e-mail: leonov@math.spbu.ru

# ИСПОЛЬЗОВАНИЕ CGE-МОДЕЛЕЙ ДЛЯ ОЦЕНКИ ЭФФЕКТИВНОСТИ УПРАВЛЕНЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ<sup>1</sup>

А.Р. Бахтизин

Дано общее представление о новом инструменте для количественной оценки последствий управленческих решений — вычислимых моделях общего равновесия (CGE-моделях). Рассмотрены преимущества данного подхода перед другими методами моделирования экономики, а также вопросы CGE-моделей калибровки. В заключении приведено описание вычислительного эксперимента, в рамках которого была проанализирована связь между некоторыми составляющими теневой экономики и основными макроэкономическими показателями страны (ВВП и индексом потребительских цен).

**Ключевые слова:** вычислимые модели общего равновесия, управленческие решения, теневая экономика.

## ВВЕДЕНИЕ

Проводимые в нашей стране экономические реформы, повлекшие за собой невосполнимые потери как материальных, так и духовных ценностей, продемонстрировали свою слабую проработанность, являющуюся следствием пренебрежения множеством факторов, влияющих на экономическую ситуацию. Государственные управленческие решения зачастую были лишь ответной реакцией на непредвиденное развитие экономической ситуации, носили вынужденный и неадекватный характер и не предусматривали количественной оценки последствий для социально-экономической сферы страны. Однако основной принцип успешных экономических реформ западных стран заключается в крылатой фразе: «семь раз отмерь — один раз отрежь», справедливость которой всегда подтверждается практикой. Этот принцип реализуется через сценарные расчеты последствий принимаемых государственных решений, в том числе с помощью экономико-математических моделей, работающих по принципу «что будет, если...».

В связи с этим особую актуальность приобретают исследования, синтезирующие в себе подходы математического моделирования сложных систем и направленные на системный анализ экономики всей страны и ее регионов с целью получения количественной оценки деятельности государства.

В развитых странах подобного рода модели получили большое распространение. Так, к примеру, в штате Калифорния (США) еще в 1996 г. была разработана известная модель анализа доходов — Dynamic Revenue Analysis for California или DRAM [1]. Примечательно, что эта модель была разработана под контролем Министерства финансов Калифорнии в соответствии с принятым законодательной палатой штата в 1994 г. законом, требующим от Министерства финансов применять математические методы оценки для анализа «возможной реакции налогоплательщиков» вследствие изменения налоговых ставок.

Опыт удачного внедрения DRAM способствовал росту интереса к использованию CGE-моделей для анализа последствий экономических решений правительства и подтолкнул власти некоторых других штатов к организации исследований в этой области.

По своей сути, любая CGE-модель представляет собой систему уравнений, решением которой является общее экономическое равновесие, как правило, сводящееся к уравниванию спроса и предложения на рынках товаров и услуг, рассматриваемых в модели. Равновесие достигается путем итеративного пересчета с помощью специализированных прикладных пакетов (к примеру, GAMS, GEMPACK, MPSGE и др.).

Несмотря на широкое распространение в зарубежных странах моделирования экономических процессов посредством CGE-подхода, в России это направление появилось совсем недавно, а термин «вычислимая модель», являющийся синонимом CGE-модели, был введен академиком РАН

<sup>1</sup> Работа выполнена при финансовой поддержке РГНФ (проект № 07-02-00155а) и РФФИ (проект № 07-06-00325а).



В.Л. Макаровым при разработке модели экономики России. В публикациях последних лет [2—8], а также на сайте [www.rusrand.ru](http://www.rusrand.ru) описаны недавно созданные CGE-модели России и ее регионов и дан подробный обзор зарубежных аналогов, поэтому в данной статье мы не будем анализировать работы в области CGE-моделирования, а просто дадим характеристику этих моделей.

Все CGE-модели можно определить в трех ключевых аспектах. Прежде всего, они включают в себя экономических агентов, результаты деятельности которых находят отражения во всей экономической системе. Именно поэтому CGE-модели называются *общими*. Обычно в число агентов входят домашние хозяйства, фирмы и правительства. Далее, CGE-модели включают в себя систему нелинейных уравнений, посредством решения которой достигается равновесие на рынке каждого товара, услуги и фактора производства. Благодаря этому модели становятся *равновесными*. Наконец, модели выдают количественные результаты, что позволяет называть их *вычислимыми*.

Термин «равновесные» не должен смущать на том основании, что реальное состояние экономики могут быть далеки от равновесия. Сама технология вычислений позволяет моделировать, в частности, имитировать, сам процесс движения к равновесию. И если реальные цены, к примеру, неравновесны, то упомянутая технология позволяет выявить, почему это происходит и как далеко еще до равновесия.

Считается, что первая CGE-модель была разработана шведским экономистом Иохансенем [9], хотя в более широком понимании CGE-моделирование берет свое начало с модели затрат — выпуска, разработанной Леонтьевым. Модель Иохансена состояла из 20 секторов — отраслей промышленности и еще одного сектора, включающего в себя домашние хозяйства. Важную роль в этой модели играли цены, определяющие стратегии действий секторов, входящих в модель, при этом использовался стандартный рыночный механизм ценообразования. После довольно продолжительной паузы в развитии CGE-моделирования произошедшее в 1973 г. изменение мировых цен на нефть вновь стимулировало интерес к CGE-подходу. Кроме того, этому способствовало появление компьютерных программ, позволяющих проводить численные эксперименты с CGE-моделями. На данном этапе CGE-моделирование стало обширным полем исследований для прикладных экономистов, причем CGE-модели используются в основном для решения задач, относящихся к получению количественной оценки действий правительства, например, изменению налоговых ставок, оказывающих влияние на общую экономическую ситуацию.

## 1. ПРЕИМУЩЕСТВА CGE-МОДЕЛЕЙ

Можно выделить следующие преимущества CGE-моделей:

- возможность отслеживания мультипликативного эффекта на многие параметры экономической системы после изменения какого-либо экзогенного показателя;
- при разработке CGE-моделей не обязательно иметь все статистические данные, поскольку часть из них можно вычислить, или, лучше сказать, восстановить эмпирическим путем (в процессе калибровки модели);
- посредством проведения вычислительных экспериментов можно получить неожиданные численные результаты относительно некоторых наблюдаемых величин. Причина заключается в том, что экономические агенты, каждый из которых действует в рамках предписываемых ему возможностей и в соответствии со своей собственной стратегией, взаимодействуя друг с другом, могут спровоцировать некоторые причинно-следственные связи, оставшиеся неизвестными для разработчика модели, закладывающего четко сформулированные «правила игры».

Автор не призывает использовать для оценки последствий того или иного управленческого решения только CGE-модели. Наоборот, если другие инструментальные методы дадут схожие результаты, то достоверность полученных расчетов повысится.

## 2. МЕХАНИЗМЫ УРАВНИВАНИЯ СПРОСА И ПРЕДЛОЖЕНИЯ: КОНЦЕПТУАЛЬНЫЙ ВЗГЛЯД

В процессе итеративного пересчета модели (о котором будет рассказано далее) на рынке каждого товара и услуги уравниваются совокупный спрос и предложение в соответствии с двумя различными механизмами, применяемыми в зависимости от способа установления цены. Отметим, что в большинстве случаев единицами измерения цен служат их индексы относительно базового периода.

### 2.1. Механизм уравнивания на рынке с государственными ценами

Допустим, что суммарный спрос  $D_s^p$  на товар не равен суммарному предложению этого товара  $S_s^p$ , т. е. либо  $D_s^p > S_s^p$ , либо  $S_s^p > D_s^p$ . Для устранения дисбаланса вводится корректирующий коэффициент, называемый *индикатором дефицитности*,  $I = S_s^p / D_s^p$ , который умножается на размер спро-

са, корректируя его на каждом шаге итерации. В итерационном процессе индикатор дефицитности стремится к единице.

Поскольку в моделях в ряде случаев суммарный спрос  $D_s^p$  на товар есть сумма спросов нескольких агентов, то в реальности введенный нами коэффициент корректирует долю бюджета каждого агента, идущую на покупку соответствующего товара.

Предположим, что  $D_1^p$  — спрос агента 1, а  $D_2^p$  — спрос агента 2 на один и тот же товар по цене  $P$ . Спрос обоих агентов в модели определяется следующими соотношениями:  $D_1^p = (O_1^p B_1)/P$  и  $D_2^p = (O_2^p B_2)/P$ , где  $O_1^p$  и  $O_2^p$  — доли бюджетов  $B_1$  и  $B_2$  первого и второго агента соответственно. Для корректировки совокупного спроса доли  $O_1^p$  и  $O_2^p$  следует умножить на индикатор дефицитности  $I$ .

## 2.2. Рыночный и теневой механизмы уравнивания спроса и предложения

Этот механизм стандартен и выглядит следующим образом:  $P[Q + 1] = P[Q] + (D_{s[Q]}^p - S_{s[Q]}^p)/C$ , где  $P$  — цена товара,  $Q$  — шаг итерации, а  $C$  — положительное число, называемое *константой итераций*. При его уменьшении экономическая система быстрее приходит в состояние равновесия, однако увеличивается опасность ухода цены в отрицательную область.

Резюмируя, отметим, что в случае государственной цены на товар или услугу равновесие достигается посредством изменения доли бюджета, а в случае рыночной и теневой цены — путем изменения самой цены.

Заметим, что в CGE-моделях, разработанных на Западе, механизм уравнивания спроса и предложения с помощью изменений доли бюджета не применяется. Поэтому такие модели более ограничены. В них не может быть адекватно представлен механизм ценообразования для продуктов и услуг, который называется рационированием.

После записи всех формул в пакет для численного разрешения CGE-моделей и наполнения переменных модели статистической информацией наступает один из важнейших этапов построения модели — этап ее *калибровки*.

## 3. КАЛИБРОВКА CGE-МОДЕЛЕЙ

*Калибровка* модели — это процесс, заключающийся в подгонке некоторых неизвестных экзогенных переменных до таких значений, при которых интегральные эндогенные показатели модели, такие как ВВП, объем производства в физических

единицах, индекс потребительских цен и др., совпадают бы с показателями официальной статистики. Важно подчеркнуть, что в процессе калибровки изменяются только неизвестные экзогенные параметры, и соответственно, чем их больше, тем больше степеней свободы при калибровке модели, что, конечно же, плохо, поскольку в этом случае есть риск подобрать некорректный набор значений изменяемых параметров. В этой связи при построении моделей обычно стремятся к максимальному их наполнению данными официальной статистики, а в случае ее отсутствия — к сокращению числа переменных модели для достижения разумного баланса между известными и калируемыми параметрами.

Как правило, на первом этапе калибровки подбираются параметры производственных функций. Вообще говоря, эти параметры желательно рассчитать с помощью эконометрических методов, но, к сожалению, из-за недостатка статистической информации это не всегда возможно сделать.

В этой связи для приближенной оценки параметров производственной функции можно использовать отношения учитываемых в уравнении факторов производства к объему выпуска продукции (т. е. вклад факторов в выпуске). Для этого необходимо переоценить все факторы производства в сопоставимые с выпуском единицы измерения. К примеру, вместо числа работников отрасли использовать сумму всей заработной платы этих работников и др. Полученные таким образом коэффициенты представляют собой грубые оценки параметров (базовые значения), которые затем калибруются до совпадения расчетных показателей с фактическими.

Как правило, из статистики нам известны пропорции распределения произведенного экономическим объектом продукта, поэтому после калибровки значений выпуска следующий шаг состоит в калибровке неизвестных долей бюджета экономических агентов таким образом, чтобы совокупный спрос на определенный вид продукции совпал с его предложением. Это чисто техническая работа, однако достаточно трудоемкая, поскольку при этом могут разбалансироваться аналогичные показатели на других рынках. Для некоторого облегчения работы целесообразно до определенного момента фиксировать некоторые эндогенные параметры.

Таким образом, можно сказать, что основными калибровочными параметрами модели служат коэффициенты производственных функций и доли бюджета экономических агентов.

Отметим специфику калибровочных параметров. Подбор коэффициентов производственных функций — грубая калибровка, поскольку они постоянны на всем временном интервале, рассмат-



риваемом в CGE-моделях, и в этом случае мы просто приводим в соответствие числовой порядок расчетных и фактических значений выпуска. В то же время правильная подгонка коэффициентов производственных функций — одна из важнейших задач, возникающих при построении CGE-моделей, так как сама функция представляет собой, по сути, технологию переработки экономическим агентом ресурсов в продукты, а значит, от этого зависит, к примеру, эффективность финансовых вложений в отрасль (или другой рассматриваемый субъект экономики).

С другой стороны, неизвестные доли бюджета экономических агентов представляют собой более тонкие калибровочные параметры. Они меняются в каждом временном интервале, и, следовательно, в том числе, возможна более тонкая подгонка эндогенных значений выпуска, которые рассчитываются с помощью производственных функций.

Важно, чтобы изменчивость калибровочных переменных была незначительной, поскольку эти параметры, по сути, служат «статистическими характеристиками» CGE-модели. Здесь уместна аналогия с эконометрическими уравнениями. При расчете последних мы получаем фиксированные для всего оцениваемого периода коэффициенты, аппроксимирующие вычисляемое уравнение к некоторому набору точек. Соответственно при подборе калибровочных коэффициентов также следует избегать их сильного изменения, поскольку иначе «статистические характеристики» всей модели будут свидетельствовать о чересчур сильной подгонке к фактическим значениям в ущерб качеству результатов, получаемых с ее помощью.

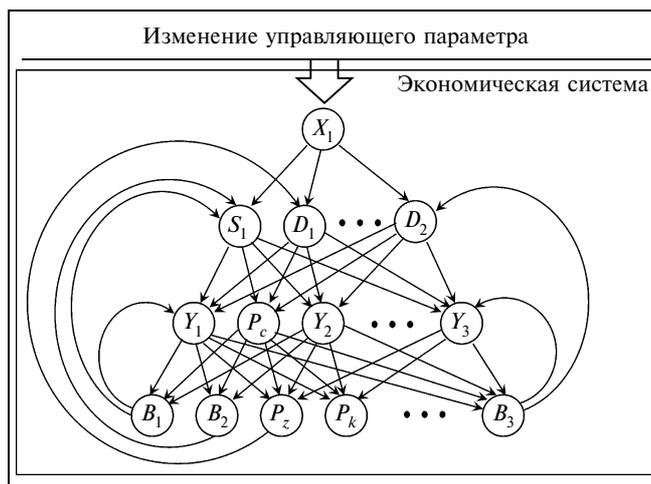
#### 4. ТЕХНОЛОГИЯ ПРОВЕДЕНИЯ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ ЭКСПЕРИМЕНТОВ

При вычислительных экспериментах мы меняем один или несколько экзогенных параметров и запускаем модель на пересчет.

Пересчет уравнений модели происходит до совпадения совокупного спроса и предложения на рынке каждого товара и услуги, рассматриваемых в модели, посредством итерационного процесса с помощью соответствующих прикладных пакетов. Сходимость модели достигается примерно на 10 000-м шаге итераций (хотя это, безусловно, зависит от конкретной модели).

Как уже говорилось, на каждой итерации корректируются доли бюджета экономических агентов (в случае государственной цены) или изменяется цена (в случае рыночного или теневого механизма уравнивания спроса и предложения).

Более подробно процесс вычислений выглядит следующим образом. Допустим, что мы изменили



**Рис. 1. Последовательность изменения эндогенных параметров модели (концептуальный взгляд) и обратная рекурсия**

(символы обозначают разнообразие взаимоувязанных параметров какой-либо условной модели, относящейся к классу CGE моделей)

долю бюджета агента-производителя, идущую на покупку какого-либо фактора производства. Что мы получаем дальше? При «запуске» модели на пересчет на следующей итерации меняется спрос агента на данный вид фактора производства. Соответственно нарушается баланс спроса и предложения на этом рынке, в результате чего получается новая равновесная цена. Одновременно с этим меняется бюджет агента, поскольку теперь изменилась сумма средств, потраченных на покупку фактора производства, и, как следствие, в следующий момент времени он стал располагать большими (или меньшими) средствами для покупки всего остального. Соответственно возникает дисбаланс на других товарных рынках. Однако это далеко не все, поскольку изменившаяся ситуация на рынках затрагивает других участников экономической системы и приводит к пересмотру их поведенческой стратегии. Таким образом, мы имеем целое дерево изменений абсолютно всех эндогенных параметров модели (рис. 1) с обратной рекурсией.

Другой важный аспект проведения экспериментов заключается в том, насколько сильно мы изменили экзогенный параметр (или параметры) модели, т. е. насколько сильный шок испытала экономическая система. Это можно проиллюстрировать следующим образом (рис. 2). Чем сильнее вмешательство извне, тем больший дисбаланс вносится в начальный момент времени на рассматриваемые в модели рынки и тем дольше будет происходить поиск равновесия. Вообще говоря, процесс поиска можно ускорить, изменяя значения *константы итераций* и *индикатора дефицитности*.

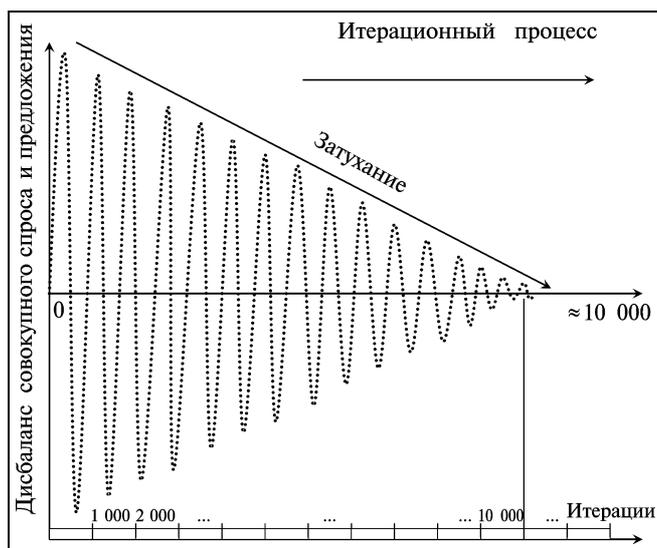


Рис. 2. Процесс затухающих флуктуаций при пересчете моделей

При уменьшении константы итераций сходимость достигается быстрее, однако возникает опасность ухода цены в отрицательную область (особенно в случае значительного изменения экзогенного параметра).

Вообще говоря, поиск баланса между скоростью расчетов и их безопасностью (в плане недопустимости ухода цен в область отрицательных значений) также имеет большое значение.

Далее мы переходим к описанию результата эксперимента, проведенного с помощью одной из разработанных в ЦЭМИ РАН моделей. Другие расчеты и подробное описание CGE-моделей приведены в книге «Применение вычислимых моделей в государственном управлении», выложенной на сайте [www.rusrand.ru](http://www.rusrand.ru).

## 5. ОЦЕНКА ВЛИЯНИЯ ТЕНЕВОЙ ЭКОНОМИКИ НА ЭКОНОМИЧЕСКИЙ РОСТ

В рамках исследования нами была проанализирована связь между некоторыми составляющими теневой экономики и основными макроэкономическими показателями страны (ВВП и индексом потребительских цен).

**Первая серия** вычислительных экспериментов представляет собой имитацию процесса **изъятия денежных средств из консолидированного бюджета страны и направления этих средств домашним хозяйствам**. Таким образом, нами имитировался процесс хищения напрямую или, что встречается чаще, вполне «легальный» процесс освоения бюджетных средств. К примеру, на бюджетные деньги закупается различное оборудование, офисная тех-

ника для государственных учреждений. При этом объявляется конкурс поставщиков-производителей, но только формально, так как на самом деле победитель уже известен. После выделения соответствующих средств происходит «откат» довольно существенной суммы наличными непосредственно чиновникам.

Конкретно в модели мы рассматриваем следующие варианты изъятия бюджетных средств с последующим перенаправлением их домашним хозяйствам: варианты 1, 2 и 3 — изъятие 10, 20 и 30 % средств консолидированного бюджета соответственно, и вариант 0, представляющий собой базовый вариант развития экономики.

Таким образом, в модели происходит перераспределение финансовых ресурсов следующим образом: средства консолидированного бюджета, расходуемые в рамках варианта 0 в соответствии с существующей схемой (т. е. в большей степени на субсидирование отраслей экономики), по новой схеме попадают непосредственно домашним хозяйствам. Последние, в свою очередь, большую часть своих средств тратят на приобретение потребительских товаров, инициируя дополнительный прирост инфляции. Поскольку в структуре затрат предприятий и организаций реального сектора большая часть средств уходит на покупку промежуточной продукции, а также готовых к использованию основных фондов, то на индекс потребительских цен эти затраты влияют опосредованно и по нашему предположению в меньшей степени, нежели траты конечных потребителей.

Следует оговориться о еще одном допущении. В модели домашние хозяйства поделены на пять доходных групп, первая из которых охватывает домашние хозяйства с наименьшими доходами, а пятая — с наибольшими. Мы делаем предположение о том, что изъятые из консолидированного бюджета денежные средства поступают только пятой группе домашних хозяйств (с высокими доходами), что может и не совпадать с реальным положением вещей. Однако, учитывая, что на практике проблематично вычленив группу домохозяйств, имеющих отношение к хищению госсредств (для последующего включения в модель), мы предположили, что только пятая группа домохозяйств имеет отношение к этой составляющей теневой экономики. В этой связи в качестве результирующих макропоказателей мы будем рассматривать не доходы различных групп населения, а ВВП и индекс потребительских цен. Такое же допущение мы делаем и для второй серии вычислительных экспериментов (см. далее).

В 2005 г. расходы консолидированного бюджета составили 6820,6 млрд. руб. Суммы, эквивалентные 10, 20 и 30 %, изъятые и перенаправ-



ленные домашним хозяйствам, составляют примерно 682 млрд. руб. (или 26 млрд. долл. США), 1364 млрд. руб. (или 53 млрд. долл.) и 2046 млрд. руб. (или 78 млрд. долл.). В модели мы проигрываем варианты предполагаемого развития экономики с 2008 по 2015 г. Пролонгированные значения изъятых денежных средств в 2008 г. составляют примерно 43 млрд. долл., 87 млрд. долл. и 130 млрд. долл. для трех вариантов соответственно. Средства изымаются ежегодно вплоть до последнего рассматриваемого в модели года.

В табл. 1 представлены результаты расчетов.

Вырисовывается следующая картина. Поступившие домашним хозяйствам бюджетные деньги спровоцировали рост расходов на потребительские товары, что в свою очередь вызвало рост цен, поскольку, с одной стороны, вырос спрос, а с другой — недополученные производителем субсидии из бюджета спровоцировали снижение объема производства товаров и услуг.

В итоге при реализации варианта 3 мы получили снижение среднегодовых темпов роста ВВП с 6,92 % (инерционный вариант развития экономики) до 5,66 %, и, таким образом, к 2015 г. нереализованный потенциал прироста ВВП по отношению к 2007 г. составил 5,12, 10,24 и 15,26 % для трех вариантов соответственно.

Что касается индекса потребительских цен, то мы имеем прирост среднегодовых значений на 0,71, 1,43 и 2,14 % для рассмотренных случаев.

**Вторая серия расчетов** предполагает **изъятие средств у производителя и перенаправление их домашним хозяйствам России**. В этом случае нами имитируется процесс дачи (со стороны производителя) и получения взяток (в конечном счете домашними хозяйствами). Примеров такой схемы

множество: открытие предпринимателем своего дела, получение разрешения на строительство, «выдуманные» штрафы и т. д., выплачиваемые производителем товаров и услуг, в итоге транслируются в цену на его продукцию или услуги, что в конечном счете бьет по карману простого потребителя.

С другой стороны, обогащение благодаря такой схеме определенной части населения приводит к повышенному спросу на потребительские товары и услуги и в результате — к росту цен. Ситуация усугубляется изъятием денег у производителей, поскольку в этом случае они лишаются возможности инвестирования средств в производство.

В этом случае, как и в предыдущем, мы предполагаем, что расходы предприятий, в структуре которых большая часть средств расходуется на покупку промежуточной продукции и основных фондов, в меньшей степени влияют на индекс потребительских цен, нежели прямые затраты домашних хозяйств на потребительские товары, которые в структуре их расходов составляют более 80 %.

Отметим, что в этой серии расчетов по сравнению с предыдущей изымаемые средства представляют собой более существенную сумму, эквивалентную примерно 70, 140 и 210 млрд. долл. США, для следующих трех вариантов: варианты 1, 2 и 3 — изъятие 10, 20 и 30 % средств производителей товаров и услуг соответственно, и вариант 0, представляющий собой базовый вариант развития экономики.

В табл. 2 представлены результаты расчетов.

Как видно, изъятие средств у производителей приводит к крайне негативным последствиям. Нереализованный потенциал прироста ВВП к 2015 г. составляет 7,80, 15,81 и 22,45 % для трех вариантов соответственно.

Таблица 1

**Результаты расчетов последствий изъятия денег из консолидированного бюджета и перенаправления их домашним хозяйствам**

Годы	2008	2009	2010	2011	2012	2013	2014	2015	Среднегодовой рост
ВВП России, в процентах к 2007 г.									
Вариант 0	106,78	114,12	122,03	130,51	139,61	149,33	159,68	170,74	6,92
" 1	106,75	113,34	120,46	128,19	136,56	145,50	155,22	165,62	6,51
" 2	106,72	112,57	118,89	125,87	133,52	141,67	150,76	160,50	6,09
" 3	106,69	111,79	117,32	123,55	130,47	137,84	146,30	155,38	5,66
Индекс потребительских цен, в процентах к предыдущему году									
" 0	9,84	9,87	9,90	9,94	9,97	9,98	9,99	9,99	9,94
" 1	10,75	10,70	10,66	10,64	10,63	10,59	10,60	10,61	10,65
" 2	11,65	11,53	11,42	11,34	11,30	11,20	11,22	11,22	11,36
" 3	12,56	12,36	12,17	12,05	11,96	11,82	11,83	11,84	12,07

**Результаты расчетов последствий изъятия денег из бюджета производителей товаров и услуг и перенаправления их домашним хозяйствам**

Годы	2008	2009	2010	2011	2012	2013	2014	2015	Среднегодовой рост
ВВП России, в процентах к 2007 г.									
Вариант 0	106,78	114,12	122,03	130,51	139,61	149,33	159,68	170,74	6,92
" 1	106,70	110,89	118,19	126,00	134,45	143,32	152,82	162,94	6,29
" 2	106,70	107,95	114,89	122,07	129,72	137,65	146,06	154,92	5,62
" 3	106,69	105,02	111,66	118,38	125,49	132,75	140,38	148,29	5,05
Индекс потребительских цен, в процентах к предыдущему году									
" 0	9,84	9,87	9,90	9,94	9,97	9,98	9,99	9,99	9,94
" 1	16,58	11,82	10,33	10,41	10,38	10,54	10,52	10,53	11,39
" 2	23,31	14,88	10,55	10,88	10,97	11,23	11,26	11,33	13,05
" 3	37,42	18,15	10,69	11,19	11,34	11,69	11,80	11,95	15,53

Более того, в варианте 3 на следующий год после изъятия денег ВВП снижается почти на 1 % по сравнению с предыдущим годом.

Что касается инфляции, то наблюдается значительный прирост среднегодовых значений: на 1,45, 3,12 и 5,59 % для рассмотренных случаев. Более того, в первый год происходит ее сильный всплеск, хотя отметим, что в последующие годы экономическая система приспособилась к такому перераспределению средств и к 2015 г. прирост индекса потребительских цен в случае варианта 3 (наиболее экстремального) составил 1,96 % по отношению к базовому варианту.

Резюмируя, отметим, что рассмотренные аспекты теневой экономики — хищения из бюджета и взятки — приводят к ярко выраженным негативным последствиям для экономики страны. В обоих случаях возрастает спрос на потребительские товары, что приводит к естественному росту потребительских цен. Помимо этого, зачастую производитель транслирует издержки, идущие на взятки, в цену своей продукции, что также приводит к росту цен. В любом случае, в конечном счете, страдает большая часть населения страны, не имеющая отношения к дележу бюджетных средств и получению взяток и «откатов».

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Проведенный эксперимент показал, что CGE-модели можно легко модифицировать под конкретную задачу — благодаря своей гибкой форме, внесение изменений в математическую часть CGE-модели, с технической точки зрения, не представляет особой сложности. Благодаря ряду преимуществ, CGE-подход может заменить другие экономико-математические методы во многих об-

ластях исследований. Как уже отмечалось, результаты других экспериментов и показатели адекватности используемых в расчетах моделей подробно описаны на сайте Центра проблемного анализа и государственно-управленческого проектирования [www.rusrand.ru](http://www.rusrand.ru).

### ЛИТЕРАТУРА

1. *Berck P., Golan E. and Smith B.* Dynamic Revenue Analysis for California. — Berkeley: University of California, 1996.
2. *Бахтизин А.Р.* Вычислимая модель «Россия: Центр — Федеральные округа» / Препринт # WP/2003/151. — М.: ЦЭМИ РАН, 2003.
3. *Бесстремляная Г.Е., Бахтизин А.Р.* Вычислимая модель «Социальная Россия» / Препринт # WP/2004/173. — М.: ЦЭМИ РАН, 2004.
4. *Макаров В.Л.* Вычислимая модель российской экономики (RUSEC) / Препринт # WP/99/069. — М.: ЦЭМИ РАН, 1999.
5. *Макаров В.Л., Бахтизин А.Р.* Эффективный способ оценки государственной политики // Экономика и управление. — 2001. — № 4.
6. *Макаров В.Л., Бахтизин А.Р., Бахтизина Н.В.* CGE-модель социально-экономической системы России со встроенными нейронными сетями. — М.: ЦЭМИ РАН, 2005.
7. *Макаров В.Л., Бахтизин А.Р., Бахтизина Н.В.* CGE-модель экономики знаний / Препринт # WP/2007/223. — М.: ЦЭМИ РАН, 2007.
8. *Макаров В.Л., Бахтизин А.Р., Сулакшин С.С.* Применение вычислимых моделей в государственном управлении. — М.: Научный эксперт, 2007.
9. *Johansen L.* A Multi-sectoral Study of Economic Growth. — North-Holland, Amsterdam, 1960.

Статья представлена к публикации членом редколлегии Р.М. Нижегородцевым.

**Бахтизин Альберт Рауфович** — канд. экон. наук, ст. науч. сотрудник, Центральный экономико-математический институт РАН, г. Москва, ☎ (495) 129-07-44, e-mail: [albert@cemi.rssi.ru](mailto:albert@cemi.rssi.ru)



# РЕФЛЕКСИВНЫЕ ИГРЫ: ТРАНСФОРМАЦИЯ СТРУКТУР ИНФОРМИРОВАННОСТИ

А.Г. Чхартишвили

Построена теоретико-игровая модель рефлексивного принятия решений. Отмечено, что если рефлексивная игра в нормальной форме повторяется несколько раз, то некоторые (или даже все) агенты могут наблюдать результаты (действия оппонентов, значения целевых функций и др.), отличные от ожидаемых, и структура информированности игры меняется. Рассмотрены три проблемы: структура информированности, основанные на ней действия агентов, трансформация структуры информированности.

**Ключевые слова:** рефлексивные игры, информационное равновесие, трансформация структуры информированности.

## ВВЕДЕНИЕ

Для начала сформулируем задачу, которая могла бы встретиться<sup>1</sup> на олимпиаде по математике для школьников.

*Условие задачи.* Трое друзей играют в игру со следующими правилами. Третий задумывает два (возможно, совпадающих) целых числа в промежутке от 1 до 9 включительно и сообщает первому сумму этих чисел, а второму — их произведение. Затем третий спрашивает: «Какие числа задуманы?» Первый и второй должны назвать эти числа либо ответить «не знаю» (отвечают одновременно и не обмениваясь какой-либо информацией).

Оба ответили на вопрос одинаково: «Не знаю». Третий повторил вопрос: какие числа задуманы? Первый и второй, подумав, опять ответили: «Не знаю». Третий опять повторил вопрос и получил тот же ответ. Так повторялось семь раз, а на восьмой первый назвал задуманные числа.

*Вопрос задачи:* какие числа были задуманы?

Эта задача (в дальнейшем для ее обозначения будем употреблять курсив) послужит для иллюстрации вводимых по ходу статьи понятий и конструкций.

Ясно, что для ответа на вопрос задачи необходимо описать, как изменялась информированность первого и второго игроков (в частности, каким образом первый игрок от неполной информированности о ситуации — ведь он знал лишь сумму чисел — пришел к полной информированности). Для этого, в свою очередь, необходимо описать эту

информированность (в том числе ее рефлексивный компонент — информированность об информированности оппонента), а также связь между информированностью и ответами игроков.

Обсуждению этих трех проблем (структура информированности, действия игроков на ее основании, изменение информированности) и посвящена данная статья. Отметим, что она продолжает серию работ (см., например, работы [1–4]), в которых принятие решений в условиях неполной информированности моделируется при помощи аппарата рефлексивных игр. Принципиальная новизна состоит в рассмотрении множественной структуры информированности, позволяющей моделировать динамику — см. далее.

Отметим, что альтернативным подходом к моделированию ситуаций с неполной информированностью является подход в русле байесовых игр, подробно изложенный, например, в статье [5] (см. также [6]).

## 1. СТРУКТУРА ИНФОРМИРОВАННОСТИ

Опишем структуру информированности агентов в ситуации неполной информированности. Сначала приведем формальное описание — в терминах множеств, их элементов, отображений. Затем (в § 2) поясним введенные понятия на примерах, обращаясь к задаче.

Пусть в ситуации участвует  $n$  субъектов, будем их называть *реальными агентами*. Введем следующие понятия и множества (множества далее будем считать конечными):

$\Theta$  — множество состояний природы;

<sup>1</sup> Если и встретилась, то автору это не известно.

$A_i$  — множество возможных экземпляров  $i$ -го агента,  $i \in N = \{1, \dots, n\}$ ; ровно один из них реальный, прочие являются *фантомными агентами*<sup>2</sup> [1–4];

$A = A_1 \cup \dots \cup A_n$  — множество всех агентов;

$\Omega \subset \Theta \times A_1 \times \dots \times A_n$  — множество *возможных миров*.

В каждом возможном мире  $\omega = (\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_n)$  имеет место определенное состояние природы  $\omega_0 \in \Theta$  и определенные экземпляры  $\omega_i \in A_i$  каждого агента. Будем говорить, что агент  $\omega_i$  принадлежит миру  $\omega$  или входит в мир  $\omega$ .

Далее:

$\eta$  — *функция информированности* агента, которая каждому агенту  $a \in A$  ставит в соответствие множество миров  $\eta(a) \subseteq \Omega$ , которые агент считает возможными в силу своей информированности;

$\omega^* \in \Omega$  — *реальный мир*. Один из возможных миров является реальным, т. е. характеризуется тем состоянием природы  $\omega_0^*$  и теми агентами  $\omega_i^*$ , которые существуют на самом деле.

Входящие в реальный мир агенты являются реальными, прочие экземпляры агентов — фантомные.

Будем считать, что выполнены следующее условия.

**Условие 1** (идентичности агента).  $\forall i \in N, \forall a_i \in A_i, \forall \omega \in \eta(a_i)$  имеет место  $\omega_i = a_i$ , т. е. каждый агент входит во все миры, которые он считает возможными. ♦

Далее, для каждого мира  $\omega$  следующим образом определим множество миров и агентов  $I(\omega)$ , *связанных с миром  $\omega$* .

Мир  $\omega'$  *связан* с миром  $\omega^1$ , если существуют конечные последовательности миров  $\omega^2, \dots, \omega^m$  и агентов  $a_{i_1}, \dots, a_{i_m}$  такие, что

$$\begin{aligned} a_{i_1} &= \omega_{i_k}^k, \quad k = 1, \dots, m, \\ \omega^{k+1} &\in \eta(a_{i_k}), \quad k = 1, \dots, m-1, \\ \omega' &\in \eta(a_{i_m}). \end{aligned}$$

Агент связан с миром  $\omega'$ , если он входит в мир, связанный с миром  $\omega'$ .

Понятие миров и агентов, связанных с данным миром, позволяет определить

**Условие 2** (единства мира).  $\omega \in I(\omega^*), a \in I(\omega^*)$  для любого мира  $\omega \in \Omega$  и любого агента  $a \in A$ , т. е.

<sup>2</sup> Здесь и далее экземпляры агента будем, как правило, также называть агентами.

каждый мир и каждый агент связан с реальным миром. ♦

Назовем (*множественной*) *структурой информированности* набор  $(\Theta, A_1, \dots, A_n, \Omega, \omega^*, \eta(\cdot))$ , где  $\Omega \subset \Theta \times A_1 \times \dots \times A_n, \omega^* \in \Omega, \eta: A_1 \times \dots \times A_n \rightarrow 2^\Omega$  и выполнены условия идентичности агента и единства мира (здесь через  $2^\Omega$  обозначено множество всех подмножеств  $\Omega$ ).

В работах [1–4] рассматривалась *точечная* структура информированности, в которой каждый агент считает возможным лишь один мир, т. е. для каждого  $a \in A$  множество  $\eta(a)$  состоит ровно из одного элемента.

Назовем структуру информированности *правильной*, если для любого агента существует хотя бы один мир, который агент считает возможным:  $\forall a \in A \eta(a) \neq \emptyset$ .

Назовем структуру информированности *регулярной*, если агент считает возможными все миры, в которые входит:  $\forall \omega \in \Omega, \forall i \in N \omega \in \eta(\omega_i)$ .

Иначе говоря, правильность означает следующее: нет агента, который находится в полностью неопределенной ситуации. Регулярность же означает следующее: нет агента, который заблуждается настолько, что в его сознании вообще нет мира, в который он входит.

Нетрудно показать, что каждая регулярная структура информированности является правильной. Действительно, возьмем произвольного агента. Из условия единства мира следует существование мира, в который входит данный агент; из условия регулярности следует, что этот мир является для агента возможным. В силу произвольности агента это доказывает правильность структуры.

## 2. ГРАФ СТРУКТУРЫ ИНФОРМИРОВАННОСТИ

Структуру информированности можно наглядно изображать в виде ориентированного графа с вершинами двух типов — миры (прямоугольники) и агенты (круги), реальный мир выделен особо. Стрелка от агента к миру означает, что данный агент входит в данный мир. Стрелка от мира к агенту означает, что данный агент считает данный мир возможным. Стрелка с двумя остриями является сокращенным обозначением двух стрелок — от агента к миру и от мира к агенту. Легко видеть, что для правильных структур информированности к каждому агенту идет хотя бы одна стрелка, а для регулярных все стрелки являются двойными.

Обратимся к задаче и приведем пример структуры информированности.

**Пример 1.** Пусть задумана пара чисел (6, 6). Тогда структура информированности имеет вид, изображенный на рис. 1. Каждый круг отмечен индексом  $i \in N = \{1, 2\}$ , означающим, что данный

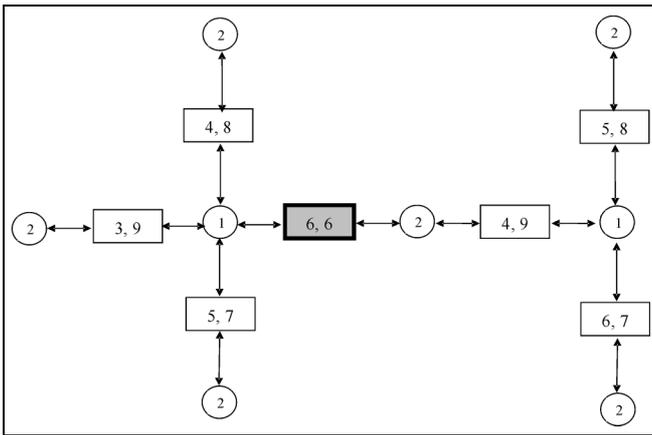


Рис. 1. Задумана пара (6, 6)

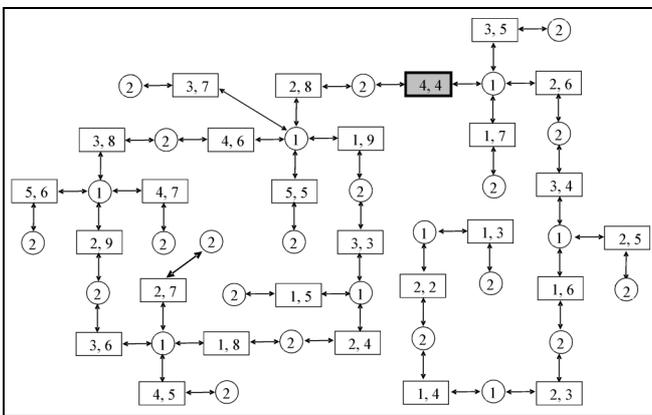


Рис. 2. Задумана пара (4, 4)

агент является экземпляром  $i$ -го агента. Каждый прямоугольник отмечен парой задуманных чисел. Поскольку в реальности задумана пара (6, 6), соответствующая вершина затемнена (если бы была задумана любая другая из отмеченных на рис. 1 пар, рисунок остался бы таким же с точностью до маркировки реального мира).

Реальный второй агент знает произведение задуманных чисел 36, поэтому наряду с истинной парой (6, 6) он считает возможной пару (4, 9). Реальный первый агент знает сумму чисел 12, поэтому он считает возможными пары (3, 9), (4, 8), (5, 7) и (6, 6).

В мире, где была задумана пара (4, 9), первый (фантомный) агент считает также возможными пары (5, 8) и (6, 7).

Для мира, в котором задумана одна из пар (3, 9), (4, 8), (5, 7), (5, 8) и (6, 7), второй агент знает эту пару (поскольку она однозначно определяется на основе известного ему произведения задуманных чисел).

**Пример 2.** Пусть задумана пара чисел (4, 4). Тогда структура информированности имеет вид, изображенный на рис. 2. В этом нетрудно убедиться, последовательно перебирая все пары чисел с данными суммами и произведениями.

### 3. РАЗЛИЧНЫЕ АСПЕКТЫ ИНФОРМИРОВАННОСТИ

В терминах структуры информированности можно формализовать различные аспекты информированности агентов. В рамках данной работы остановимся на трех из них.

Рассмотрим  $i$ -го и  $j$ -го агентов в мире  $\omega$ .

**Одинаковая информированность агентов.** Будем называть агентов *одинаково информированными*, если совпадают множества миров, которые они считают возможными:

$$\eta(\omega_i) = \eta(\omega_j).$$

**Адекватная информированность одного агента о другом.** У  $i$ -го агента существует множество миров, которые он считает возможными; в каждом из этих миров существует свой экземпляр  $j$ -го агента. Эти экземпляры могут совпадать либо не совпадать друг с другом и с  $j$ -м агентом. Будем говорить, что  $i$ -й агент *адекватно информирован* о  $j$ -м агенте, если такое совпадение имеет место:

$$\forall \xi \in \eta(\omega_i) \xi_j = \omega_j.$$

**Большая либо меньшая информированность одного агента по сравнению с другим.** Понятно, что наиболее информирован (в данном мире) тот агент, для которого единственно возможный мир — данный, если такой агент существует. В более сложных случаях не всегда можно сравнивать агентов по критерию их большей информированности. Однако естественно считать, что  $i$ -й агент *более информирован*, чем  $j$ -й агент, если выполнены следующие два условия:

$\omega \in \eta(\omega_i)$  ( $i$ -й агент считает возможным мир, в который входит);

$\eta(\omega_i) \subset \eta(\omega_j)$  (множество возможных миров  $j$ -го агента шире, т. е. больше неопределенность).

### 4. ИНФОРМАЦИОННОЕ РАВНОВЕСИЕ

Если наряду со структурой информированности (характеризующей информированность агентов) заданы целевые функции (характеризующие интересы агентов) и их возможные действия, то можно задаться традиционным для теории игр (см., например, работы [7, 9]) вопросом: какие действия выберут агенты? Далее предлагается ответ на этот вопрос.

Пусть  $\theta \in \Theta$  — состояние природы, а  $x_i \in X_i$  — действие, выбираемое  $i$ -м агентом. Действия вы-

бираются агентами одновременно и независимо, т. е. рассматривается игра в нормальной форме.

Пусть, далее,  $f_i(\theta, x_1, \dots, x_n)$ ,  $i \in N$ , — целевые функции агентов, и структура информированности является правильной<sup>3</sup>.

Тогда назовем *информационным равновесием* набор функций  $\chi_i: A_i \rightarrow X_i$ ,  $i \in N$ , таких, что

$$\chi_i(a_i) \in \operatorname{Argmax}_{x \in X_i} \min_{\omega \in \eta(a_i)} f_i(\omega_0, \chi_1(\omega_1), \dots, \chi_{i-1}(\omega_{i-1}), x, \chi_{i+1}(\omega_{i+1}), \dots, \chi_n(\omega_n)).$$

Это означает, что каждый агент максимизирует свой наихудший результат во всех мирах, которые он считает возможными.

Отметим, что это определение информационного равновесия представляет собой обобщение информационного равновесия в случае точечной структуры информированности (см. работы [1, 3, 4]), которое, в свою очередь, является обобщением равновесия Нэша — наиболее общепринятой концепции решения в некооперативных играх.

Для иллюстрации понятия информационного равновесия вновь обратимся к задаче. В ней у каждого из агентов существует возможность либо назвать задуманные числа, либо сказать «не знаю» (что будем обозначать прочерком: {—}). Таким образом, множества возможных действий обоих агентов имеет вид  $X_1 = X_2 = \Theta \cup \{-\}$ , где  $\Theta = \{(a, b) | a \in \{1, \dots, 9\}, b \in \{1, \dots, 9\}\}$ .

Целевые функции агентов (в данном случае они совпадают) определим следующим образом (здесь  $i = 1, 2$ ):

$$f_i(\theta, x_1, x_2) = \begin{cases} 1, & \text{если } (x_1 = x_2 = \theta) \text{ или} \\ & (x_1 = \theta, x_2 = \{-\}) \text{ или } (x_1 = \{-\}, x_2 = \theta); \\ 0, & \text{если } x_1 = x_2 = \{-\}; \\ -1 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Иными словами, агенты получают выигрыш 1 в случае, если хотя бы один из них верно назвал задуманные числа, а второй при этом не ошибся. Если оба сказали «не знаю», то каждый получает выигрыш 0. Если хотя бы один агент неверно назвал задуманные числа, оба получают выигрыш -1.

Тогда информационное равновесие имеет следующий вид: агент сообщает пару чисел в том и только том случае, когда он считает возможным ровно один мир (т. е. точно знает, какая пара чисел задумана). В противном случае он говорит «не знаю».

<sup>3</sup> Если структура не является правильной, то существует агент, который не считает возможным ни один из миров. Моделирование действий такого агента выходит за рамки данной работы.

## 5. ТРАНСФОРМАЦИЯ СТРУКТУРЫ ИНФОРМИРОВАННОСТИ

Структура информированности представляет собой своего рода «моментальный снимок» взаимной информированности агентов. Ясно, что с течением времени информированность может меняться. В ряде работ последних лет были рассмотрены модели изменения структуры информированности под влиянием сообщений [2] либо наблюдения агентами тех или иных результатов игры [8]. Однако в этих моделях допускалась возможность достаточно радикального отказа агентов от имеющейся информированности в пользу новой. По сути, агенты при этом предполагались в большей степени забывчивыми либо неуверенными в своей информированности.

Здесь мы опишем трансформацию структуры информированности игры вследствие наблюдения агентами ее результатов. При этом мы считаем, что сохраняется вся имеющаяся у агентов информированность, не противоречащая новым наблюдениям.

Напомним, что мы рассматриваем игру в нормальной форме, т. е. ходы выбираются агентами одновременно и независимо. Если в результате игры информированность агентов меняется, то каждую следующую игру (если она состоится) агенты разыграют с новой информированностью независимо от предыдущих и последующих.

Пусть у  $i$ -го реального агента имеется являющаяся общим знанием функция наблюдения  $w_i = w_i(\theta, x_1, \dots, x_n)$  (подробнее о функции наблюдения в точечном случае см. в работе [4]). Смысл ее следующий: если в мире, в который входит агент<sup>4</sup>  $a_i \in A_i$ , имеет место состояние природы  $\theta$  и агенты выбрали действия  $(x_1, \dots, x_n)$ , то агент  $a_i$  наблюдает значение  $w_i \in W_i$ , где  $W_i$  — множество возможных наблюдений экземпляров  $i$ -го агента.

Суть трансформации структуры информированности состоит (вкратце) в следующем: для каждого агента  $a \in A$  (как реального, так и фантомного), модифицируется множество миров  $\eta(a)$ , которые он считает возможными. Модификация состоит в том, что исключаются те миры, для которых значение функции наблюдения принимает значение, отличное от наблюдаемого агентом. При этом может оказаться, что агенту поступают разные «сигналы» (разные значения функции наблюдения) из разных миров. В этом случае агент «исчезает», и вместо него «возникает» несколько агентов, каждый со своей информированностью (см.

<sup>4</sup> Напомним, что в каждый мир входит ровно один экземпляр  $i$ -го агента,  $i \in N$ .

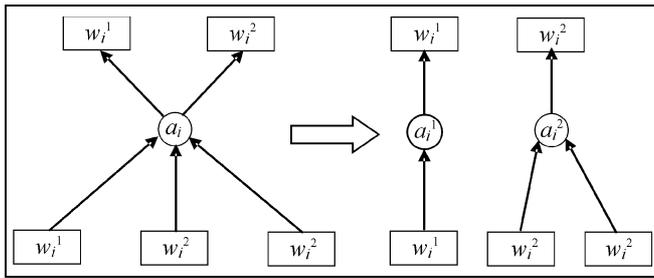


Рис. 3. При трансформации структуры информированности число агентов может меняться

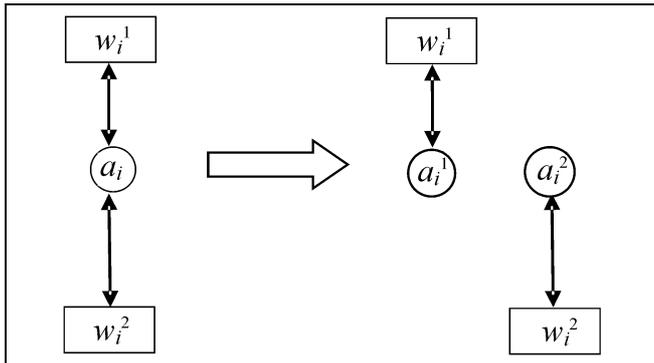


Рис. 4. При трансформации свойство регулярности структуры информированности сохраняется

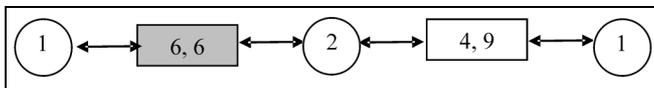


Рис. 5. После первого вопроса и ответов (задумана пара (4, 4))

рис. 3, в прямоугольниках приведены значения функции наблюдения).

Теперь опишем правило трансформации структуры информированности подробнее — в предположении, что существует единственное информационное равновесие  $\chi$ , в результате реализации которого функция наблюдения каждого агента принимает определенное значение в каждом мире  $\omega$ :  $w_i = w_i(\omega_0, \chi_1(\omega_1), \dots, \chi_n(\omega_n))$ . Тогда значение функции наблюдения зависит лишь от мира  $\omega$ , т. е.  $w_i = w_i(\omega)$ .

Пусть имеется агент  $a_i \in A_i, i \in N$ . Опишем процедуру трансформации его информированности. Будем использовать обозначение  $H(a_i) = \{\omega \in \Omega | \omega_i = a_i\}$  для множества миров, в которые входит агент  $a_i$ . Далее, обозначим через  $M = M(a_i)$  число попарно различных значений функции наблюдения  $w_i$  на

мирах из множества  $H$ , а сами эти значения обозначим  $w_i^1, w_i^2, \dots, w_i^M$ .

Тогда в результате трансформации вместо агента  $a_i$  образуется (т. е. добавляется в множество  $A_i$ )  $M$  агентов, обозначим их  $a_i^1, a_i^2, \dots, a_i^M$ , причем связи этих агентов с мирами задаются следующими двумя соотношениями для каждого  $k \in \{1, \dots, M\}$ :

$$H(a_i^k) := \{\omega \in H(a_i) | w_i(\omega) = w_i^k\},$$

$$\eta(a_i^k) := \{\omega \in \eta(a_i) | w_i(\omega) = w_i^k\}.$$

Агент  $a_i$  при этом удаляется из множества  $A_i$ .

После выполнения описанной процедуры для всех агентов  $a \in A$ , из множеств  $\Omega$  и  $A$  удаляются все миры и агенты, не связанные с реальным миром. Тем самым завершается изменение структуры информированности в результате наблюдения агентами результатов взаимодействия.

Для регулярных структур информированности множества  $H(a_i)$  и  $\eta(a_i)$  совпадают, поэтому совпадают и множества  $H(a_i^k)$  и  $\eta(a_i^k)$ . Отсюда вытекает, что при трансформации свойство регулярности структуры информированности сохраняется, т. е. регулярная структура трансформируется в регулярную структуру (рис. 4).

Обратимся к задаче и рассмотрим продолжение примера 1 (см. рис. 1). Функции наблюдения обоих агентов таковы: агент узнает сообщение оппонента и свой выигрыш. Как было показано в § 4, агент называет конкретную пару чисел лишь тогда, когда точно знает ее (т. е. лишь один мир считает возможным). Поэтому после первого вопроса и ответов структура информированности примет вид, представленный на рис. 5: удалены миры, в которых один из агентов называл конкретную пару чи-

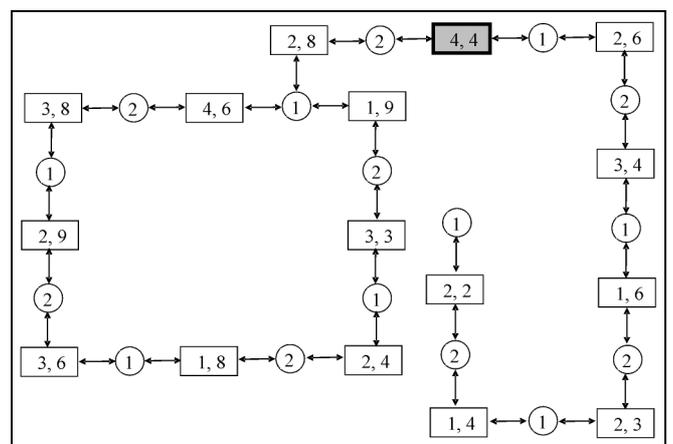


Рис. 6. После первого вопроса и ответов (задумана пара (6, 6))

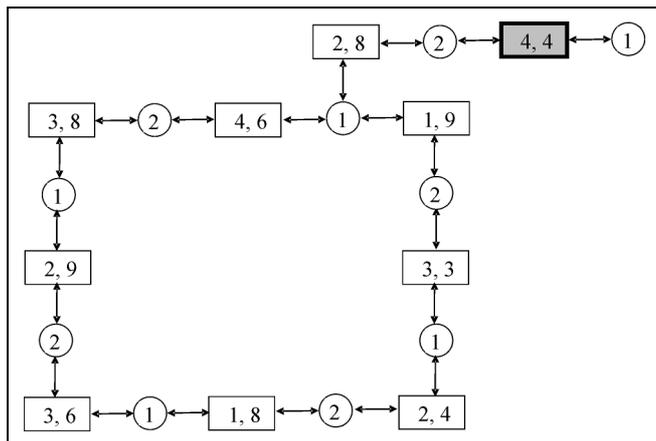


Рис. 7. После седьмого вопроса и ответов (задумана пара (6, 6))

сел. Видно, что теперь первый агент точно знает, какие числа задуманы.

Рассмотрим теперь продолжение примера 2 (см. рис. 2). Здесь после первого вопроса и ответов структура информированности примет вид, показанный на рис. 6.

Как нетрудно убедиться, для достижения полной информированности одного из агентов потребуется ровно семь вопросов и ответов (рис. 7).

Тем самым, мы ответили на вопрос задачи — была задумана пара (4, 4).

Строго говоря, для исчерпывающего ответа надо рассмотреть все возможные варианты задуманных пар чисел. Однако нетрудно убедиться, что лишь для одного из них — (4, 4) — ровно через семь вопросов и ответов достигается полная информированность.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе рассмотрена структура информированности агентов в рефлексивной игре и показано, как она меняется в результате наблюдения агентами результатов своих действий. Перспек-

тивное направление дальнейших исследований состоит в моделировании изменения информированности в результате сообщений внешних по отношению к множеству агентов субъектов (в том числе с целью информационного управления [4]), коммуникаций агентов между собой и пр.

В § 5 показано, что свойство регулярности структуры информированности при ее трансформации сохраняется. Представляет интерес исследование и других свойств структуры информированности (а также информационного равновесия) и условий сохранения этих свойств при трансформации.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Новиков Д.А., Чхартишвили А.Г. Рефлексивные игры. — М.: СИНТЕГ, 2003. — 158 с.
2. Романько А.Д., Чхартишвили А.Г. Моделирование информационных воздействий в рефлексивных играх: простые сообщения // Сб. тр. ВГАСУ. — Воронеж, 2006. — С. 157–167.
3. Чхартишвили А.Г. Информационное равновесие // Управление большими системами. — 2003. — Вып. 3. — С. 100–119.
4. Чхартишвили А.Г. Теоретико-игровые модели информационного управления. — М.: ПМСОФТ, 2004. — 227 с.
5. Aumann R. Interactive epistemology I: Knowledge // International Journal of Game Theory. — 1999. — Vol. 28, N 5. — P. 263–300.
6. Aumann R., Heifetz A. Incomplete Information / Handbook of Game Theory. Vol. 3, ed. by R.J. Aumann and S. Hart. — Amsterdam: Elsevier, 2002. — P. 1665–1686.
7. Губко М.В., Новиков Д.А. Теория игр в управлении организационными системами. — М.: СИНТЕГ, 2002. — 148 с.
8. Новиков Д.А. Математические модели формирования и функционирования команд. — М.: Физматлит, 2008. — 184 с.
9. Myerson R.B. Game theory: analysis of conflict. — London: Harvard Univ. Press, 2001. — 568 p.

Статья представлена к публикации членом редколлегии Д.А. Новиковым.

**Чхартишвили Александр Гедванович** — д-р физ.-мат. наук, вед. науч. сотрудник, Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, г. Москва, ☎ (495) 334-90-51, e-mail: sandro\_ch@mail.ru

## Новая книга

**Воронин А.А., Губко М.В., Мишин С.П., Новиков Д.А. Математические модели организаций. — М.: Ленанд, 2008. — 360 с.**

Настоящее учебное пособие представляет собой введение в математическую теорию управления организационными системами и предназначено для студентов вузов и аспирантов управленческих специальностей, а также для научных и практических работников.

Дано определение модели, приведена классификация видов моделей и методов моделирования, перечислены функции моделирования и требования к моделям. Рассмотрены этапы построения и исследования математических моделей, сформулированы задачи оптимизации и обсуждены проблемы устойчивости и адекватности моделей. Приведены общая модель управления и технология решения соответствующих задач моделирования.

Приведены минимально необходимые и используемые при построении моделей функционирования организаций сведения из теории принятия решений, в том числе, в условиях природной и игровой неопределенности. Рассмотрены основные подходы и результаты исследований теоретико-игровых задач стимулирования.

Дан обзор моделей иерархических структур, описаны базовая и общая модель иерархии управления, формулируются и решаются задачи синтеза оптимальных иерархических организационных структур. Каждая глава завершается списком тем для самостоятельного изучения, снабженным необходимыми библиографическими ссылками. При формировании списков используемой и рекомендуемой для изучения литературы авторы стремились при наличии такой возможности приводить источники, тексты которых имеются в свободном доступе в Интернете.



# ИНФОРМАЦИОННО-АНАЛИТИЧЕСКАЯ ПОДДЕРЖКА УПРАВЛЕНИЯ ЖИЛИЩНО-КОММУНАЛЬНЫМ ХОЗЯЙСТВОМ (НА ПРИМЕРЕ ПЛАНИРОВАНИЯ КАПИТАЛЬНОГО РЕМОНТА)

Л.А. Панкова, В.А. Пронина

Предложена схема решения задачи определения очередности капитального ремонта жилищного фонда на основе многокритериальной оптимизационной модели и OLAP-технологии.

**Ключевые слова:** жилищный фонд, капитальный ремонт, многокритериальная оптимизационная модель, метод анализа иерархий, OLAP-технология.

## ВВЕДЕНИЕ

Жилищно-коммунальное хозяйство (ЖКХ) — зона стратегических интересов органов государственной власти всех уровней в силу его высокой социальной значимости и значительными объемами финансирования из федерального и местных бюджетов.

Анализ состояния информационно-аналитического обеспечения городского ЖКХ выявил ряд проблем:

— отсутствие единого подхода к решению задач управления на основе учета взаимодействия всех управляемых процессов территории или отрасли с макро- и микропроцессами, происходящими в пределах и за пределами управляемого субъекта;

— многократное дублирование однотипных данных в различных территориальных и отраслевых системах;

— отсутствие актуальной и объективной статистики о текущем состоянии сферы городского хозяйства, необходимой органам исполнительной власти для принятия наиболее эффективных управленческих решений;

— отсутствие информационной инфраструктуры для перехода к комплексному решению задач управления;

— отсутствие средств оперативного анализа и поддержки принятия управленческих решений.

Перечисленные проблемы (список далеко не полный) указывают на необходимость разработки и реализации комплексного подхода к обеспечению информационно-аналитической поддержки

управления ЖКХ. Реализация такого подхода невозможна без применения технологии оперативной аналитической обработки данных (OLAP — Online Analytical Processing), в основе которой лежат три концепции [1]:

— интеграция пространственно-распределенных разнотипных данных в хранилище данных и гибкая навигация в целях генерации нерегламентированных запросов и представления результатов в виде различных отчетов;

— многомерный анализ данных, позволяющий организовать агрегированную информацию в виде гиперкубической модели и обеспечить ее удобный просмотр и анализ;

— интеллектуальный анализ данных, позволяющий выявить скрытые закономерности, причинно-следственные связи и другие неявные знания в данной предметной области.

В процессе принятия решений по управлению ЖКХ лицам, принимающим решения (ЛПР), приходится учитывать большое количество показателей, критериев и факторов. Каждая конкретная задача по управлению ЖКХ обычно носит комплексный характер. Риски и потенциальные отрицательные последствия принятого решения могут быть достаточно велики. Практически в любых управленческих задачах существуют разного рода неопределенности, связанные с противоречивостью критериев, неполнотой знаний о проблеме, невозможностью количественного измерения тех или иных факторов и показателей. Принятие решения, как правило, представляет собой выбор из списка возможных альтернатив. Принять «правильное»

решение — значит выбрать альтернативу из числа возможных, обеспечивающую с учетом всех разнообразных критериев, факторов и требований оптимизацию общей ценности, т. е. в максимальной степени способствующую достижению поставленной цели.

Такие задачи в теории принятия решений относятся к классу многокритериальных слабоструктурированных задач, которые полностью не формализуемы. Подобные задачи целесообразно решать с помощью информационно-аналитической системы поддержки принятия решений на основе OLAP-технологии и методов ранжирования многокритериальных альтернатив, учитывающих субъективные предпочтения ЛПР. Такая система обеспечивает аналитику быстрый и удобный просмотр и анализ данных путем нерегламентированных запросов и позволяет учесть многочисленные факторы и цели, неявные воздействия и неопределенности в оценке альтернативных вариантов решений. В качестве иллюстрации возможностей метода ранжирования многокритериальных вариантов и OLAP-технологии приведем решение одной из задач управления ЖКХ — задачу планирования капитального ремонта.

## 1. ПЛАНИРОВАНИЕ КАПИТАЛЬНОГО РЕМОНТА

В управлении ЖКХ задача планирования капитального ремонта — одна из ключевых в плане создания комфортной среды проживания граждан и сохранения жилищного фонда города в удовлетворительном техническом состоянии. Анализ показывает, что 11 % всего жилищного фонда России нуждается в неотложном капитальном ремонте. «Для успешного выполнения программы капитального ремонта жилищного фонда необходимо в ближайшие годы создать систему нормального планирования работ по капитальному ремонту» [2].

Различают *комплексный* и *выборочный* капитальные ремонты. Так, правительство Москвы в принятом постановлении [3] утверждает план осуществления капитального ремонта на 2007—2009 гг.:

- формировать адресный перечень на проведение *комплексного* капитального ремонта многоквартирных домов, находящихся в неудовлетворительном состоянии, на основании данных мониторинга, проводимого Государственной жилищной инспекцией г. Москвы, отдавая предпочтение домам, в которых имеются помещения, являющиеся собственностью города;
- формировать адресный перечень на проведение *выборочного* капитального ремонта многоквартирных домов с наибольшей степенью износа конструктивных элементов (ремонт кровель, фасадов, реконструкция внутридомовых систем газоснабжения, вынос газовых вводов из подва-

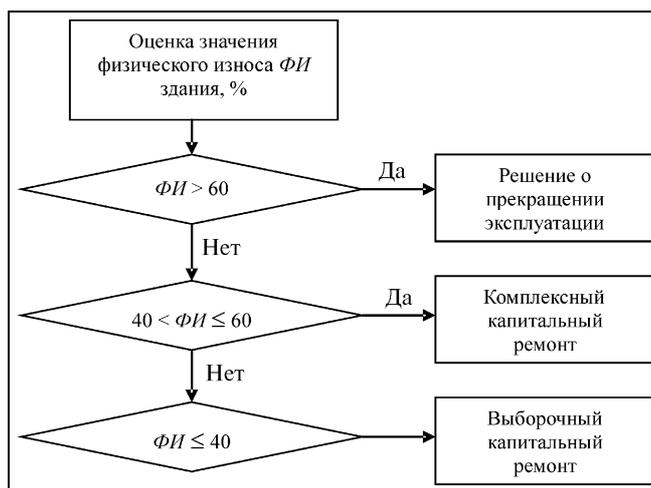


Рис. 1. Выбор вида капитального ремонта

лов и подъездов, замена и модернизация лифтов, модернизация систем дымоудаления и противопожарной автоматики, реконструкция внутридомовых инженерных коммуникаций, объединенных диспетчерских служб, ремонт электрохозяйства многоквартирных домов и т. д.).

На рис. 1 показан алгоритм выбора видов капитального ремонта в зависимости от физического износа здания [4].

Далее рассматривается задача определения очередности капитального ремонта (как комплексного, так и выборочного) на основании критериев, выбираемых ЛПР в диалоге с компьютером.

## 2. ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА РАНЖИРОВАНИЯ МНОГОКРИТЕРИАЛЬНЫХ ВАРИАНТОВ МЕТОДА АНАЛИЗА ИЕРАРХИЙ ДЛЯ ПЛАНИРОВАНИЯ КАПИТАЛЬНОГО РЕМОНТА

Задачу определения очередности капитального ремонта жилищного фонда предлагается решать с помощью одного из наиболее популярных методов принятия решений — метода анализа иерархий [5], не требующих трудных и длительных процедур выявления функций полезности.

Рассматриваемая задача полностью не формализуема, так как выбор очередности зависит от стратегии планирования и выбора приоритетов, которые выявляются при участии ЛПР. В связи с этим необходимо обеспечить интерактивную процедуру общения ЛПР с компьютером.

### 2.1. Определение очередности комплексного капитального ремонта

**Выбор критериев и шкал.** При определении очередности комплексного капитального ремонта жилых домов в неудовлетворительном состоянии, т. е. с уровнем физического износа от 41 до 60 %



Таблица 1

## Уровни физического износа жилых зданий

Уровень	Состояние здания	Физический износ, %
1	Хорошее	0—10
2	Вполне удовлетворительное	11—20
3	Удовлетворительное	21—30
4	Не вполне удовлетворительное	31—40
5	Неудовлетворительное	41—60
6	Ветхое	61—75
7	Непригодное (аварийное)	Более 75

(табл. 1 [4]) учитываются критерии, определяющие степень приоритетности, например:

- уровень физического износа здания;
- форма собственности (доля городской собственности в жилом доме);
- уровень морального износа здания;
- тип постройки (дореволюционные постройки, постройки эпохи советского конструктивизма, первых массовых серий и т. д.).

Для критерия «уровень физического износа здания» в пределах неудовлетворительного состояния задается интервальная шкала с двумя градациями {41—50, 51—60} (физический износ в процентах).

Сущность морального износа зданий заключается в том, что основные фонды, будучи физически пригодными к использованию, обесцениваются в результате появления новых, более дешевых или более совершенных по своим потребительским свойствам домов. Уровень морального изно-

са здания определяется в соответствии с табл. 2 [6], по шкале с пятью градациями.

Доля городской собственности в жилом доме определяется как процент площади городской собственности в доме от общей жилой площади дома. Выделяются три формы собственности: преимущественно частная (доля городской собственности до 30 %), смешанная (от 31 до 60 %) и преимущественно городская (более 60 %). Для критерия «форма собственности» задается шкала с тремя градациями.

Для критерия «тип постройки» выбирается шкала с числом градаций, равным числу выделенных типов постройки.

Дома, требующие комплексного капитального ремонта, разбиваются на классы. Каждый класс характеризуется уровнями физического и морального износа здания, формой собственности и типом постройки. Полученные непустые классы (альтернативы) должны быть упорядочены по степени приоритетности, определяющей очередность ремонта.

**Структуризация.** Решение задачи по методу анализа иерархий состоит в представлении всех элементов и различных факторов, так или иначе влияющих на принятие решения, в виде иерархии. Элементы каждого уровня служат непосредственными критериями для элементов нижнего уровня.

Структура задачи, решаемой в соответствии с методом анализа иерархий, имеет только два уровня иерархии — уровень критериев и уровень альтернатив.

**Выделение множества Парето.** Для сокращения числа классов выделяется множество Парето-оп-

Таблица 2

## Уровни морального износа жилых зданий

Уровень	Характеристика планировки, основных конструктивных элементов и внутреннего благоустройства	Моральный износ, %
1	Планировка квартир регулярная, удобная для посемейного заселения; площадь квартир до 45 кв. м; дом оснащен всеми видами благоустройства по норме; перекрытия и перегородки нестораемые	0—15
2	То же, но перекрытия и перегородки деревянные полностью или частично	16—25
3	Планировка квартир в основном регулярная, но недостаточно удобная для посемейного заселения; площадь квартир до 65 кв. м; отсутствуют некоторые виды благоустройства (горячее водоснабжение, лифт, мусоропровод, телефонная связь); перекрытия и перегородки деревянные полностью или частично	26—35
4	Планировка квартир нерегулярная, неудобная для посемейного заселения; площадь квартир до 85 кв. м; частичное несовпадение санузлов по вертикали; отсутствуют горячее водоснабжение, лифт, мусоропровод, телефонная связь, ванные комнаты; перекрытия и перегородки деревянные полностью	36—45
5	Хаотическая планировка квартир, несовпадающая по вертикали, непригодная для посемейного заселения; многокомнатные коммунальные неблагоустроенные квартиры; специальные помещения для кухонь отсутствуют полностью или частично; перекрытия и перегородки деревянные	Более 45

Таблица 3

**Шкала относительной важности**

Уровень важности	Значение
Равная важность	1
Умеренное превосходство	3
Существенное превосходство	5
Значительное превосходство	7
Очень большое превосходство	9

тимальных классов — недоминируемых, т. е. не сравнимых между собой [7]. При этом отбрасывается множество доминируемых классов — классов, у которых значения критериев не лучше, чем у какого-либо класса из множества Парето-оптимальных классов. Рассмотрим алгоритм нахождения множества недоминируемых альтернатив (Парето)  $P(Y)$ .

Пусть  $Y = \{y_1, y_2, \dots, y_N\}$  — множество альтернатив,  $X_i = (x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{iM})$  — вектор значений критериев для  $i$ -й альтернативы;  $X_{ij}$  — матрица с элементами  $x_{ij}$ , где  $x_{ij}$  — значение  $i$ -й альтернативы по  $j$ -му критерию,  $N$  — число альтернатив,  $M$  — число критериев. Знак « $\succ$ » будем использовать для обозначения предпочтения, т. е. запись  $a \succ b$  означает, что  $a$  предпочтительнее  $b$ . Алгоритм состоит в следующем.

1.  $P(Y) = Y, i = 1, j = 2$ .
2. Если  $X_i \succ X_j$ , т. е.  $x_{ir} \succ x_{jr}$ , для всех  $r = 1 \dots M$ , то перейти к п. 3. В противном случае — к п. 5.
3. Удалить  $y_j$  из текущего множества  $P(Y)$ . Перейти к п. 4.
4. Если  $j < N$ , то  $j = j + 1$  и перейти к п. 2. В противном случае — перейти к п. 7.
5. Если  $X_j \succ X_r$ , т. е.  $x_{jr} \succ x_{rr}$ , для всех  $r = 1 \dots m$ , то перейти к п. 6. В противном случае — к п. 4.
6. Удалить из множества  $P(Y)$  вектор  $y_i$  и перейти к п. 7.
7. Если  $i < N - 1$ , то  $i = i + 1, j = i + 1$  и перейти к п. 2. В противном случае вычисления закончить. Множество недоминируемых альтернатив  $P(Y)$  построено.

**Вычисление весов критериев на основе парных сравнений.** Для вычисления веса важности критериев производятся парные сравнения всех критериев, при этом ЛПР отвечает на вопрос: «Какой критерий из двух важнее?». Значения парных сравнений выражены в терминах естественного языка, которые переводятся в числовые значения  $a_{ij}$  согласно шкале относительной важности. При сравнении критериев ЛПР выражает свое мнение, пользуясь одним из приведенных в табл. 3 определений. Соответствующее число заносится в матрицу парных сравнений  $A = \|a_{ij}\|$ , по которой рассчитываются веса  $w_i$  важности критериев. Для этого нужно вычислить вектор, каждая компонента которого есть корень  $n$ -й степени ( $n \times n$  — размерность матрицы сравнений) из произведений элементов соответствующей строки, а затем пронормировать его.

**Проверка согласованности суждений ЛПР.** При заполнении матриц парных сравнений ЛПР может делать ошибки. Например, одна из возможных ошибок состоит в нарушении транзитивности: из  $a_{ij} > a_{jk}$  и  $a_{jk} > a_{ks}$  может не следовать  $a_{ij} > a_{ks}$ . Возможны нарушения согласованности численных суждений:  $a_{ij} * a_{jk} \neq a_{ik}$ . Для обнаружения несогласованности применяется специальный алгоритм подсчета индекса согласованности сравнений, осуществляемый по матрице парных сравнений и состоящей в следующем.

1. В матрице парных сравнений суммируются элементы каждого столбца. Сумма элементов каждого столбца умножается на соответствующие нормализованные компоненты вектора весов, определенного из этой же матрицы. Полученные числа суммируются (сумму обозначим через  $\lambda_{\max}$ ).

2. Вычисляется индекс согласованности  $L = (\lambda_{\max} - n)/(n - 1)$ , где  $n$  — число сравниваемых элементов ( $n \times n$  — размер матрицы).

3. Выбирается значение  $R$  для соответствующего  $n$  из табл. 4. Вычисляется отношение согласованности  $T = L/R$  для каждой матрицы парных сравнений. Если значение  $T$  превышает уровень 0,1, ЛПР рекомендуется провести сравнения заново.

Результаты решения предъявляются ЛПР, которое может скорректировать решение, заменив свои первоначальные оценки.

**Вычисление приоритетов альтернатив на основе парных сравнений.** По аналогичной процедуре вычисляются приоритеты альтернатив — классов домов  $V_j$ . Для этого попарно сравниваются задан-

ные результаты решения предъявляются ЛПР, которое может скорректировать решение, заменив свои первоначальные оценки.

Результаты решения предъявляются ЛПР, которое может скорректировать решение, заменив свои первоначальные оценки.

Таблица 4

**Среднее значение индекса согласованности для кососимметричных матриц**

$n$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$R$	0		0,58	0,9	1,12	1,24	1,32	1,41	1,45	1,49



ные классы по каждому критерию отдельно. На основе матриц парных сравнений рассчитывается вес важности каждого класса по каждому из критериев — локальный приоритет  $V_{ji}$ , где  $j$  — номер критерия;  $i$  — номер класса. По локальным приоритетам вычисляется (глобальный) приоритет класса  $V_j = \sum_{i=1}^n w_i V_{ji}$ , где  $V_j$  — приоритет  $j$ -го класса,  $w_i$  — вес  $i$ -го критерия.

Проверка согласованности осуществляется отдельно для каждой из матриц парных сравнений.

Полученные классы (альтернативы) упорядочиваются по приоритетам  $V_j$ , которые определяют очередность комплексного капитального ремонта.

## 2.2. Определение очередности выборочного капитального ремонта

Задача определения очередности *выборочного* капитального ремонта жилищного фонда решается аналогично. При определении очередности выборочного капитального ремонта жилых домов с физическим износом до 40 % учитываются критерии<sup>1</sup>, определяющие степень приоритетности, например, такие:

- тип элемента, требующего ремонта (крыля, фасад, подвал, лифт и др.);
- уровень физического износа элемента;
- форма собственности дома.

Для критерия «тип элемента» выбирается шкала с числом градаций, равным числу выделенных типов элементов<sup>2</sup>. Ремонту подлежат элементы с уровнем физического износа 5 и 6, что соответствует шкале с двумя градациями. Для критерия «форма собственности» задается шкала с тремя градациями. Линейный порядок на шкалах определяется ЛПР. На множестве домов с физическим износом менее 40 % (см. табл. 1) проводится классификация «адресных» конструктивных элементов с уровнем физического износа 5 и 6. Полученные непустые классы упорядочиваются по степени приоритетности.

## 3. ПРИМЕНЕНИЕ OLAP-СИСТЕМЫ ДЛЯ ПЛАНИРОВАНИЯ КАПИТАЛЬНОГО РЕМОНТА

В основе OLAP-системы лежит многомерная модель данных — множественная перспектива (куб), состоящая из независимых измерений

<sup>1</sup> Дома с физическим износом более 40 % подлежат комплексному ремонту.

<sup>2</sup> Уровень физического износа элемента определяется по табл. 1.

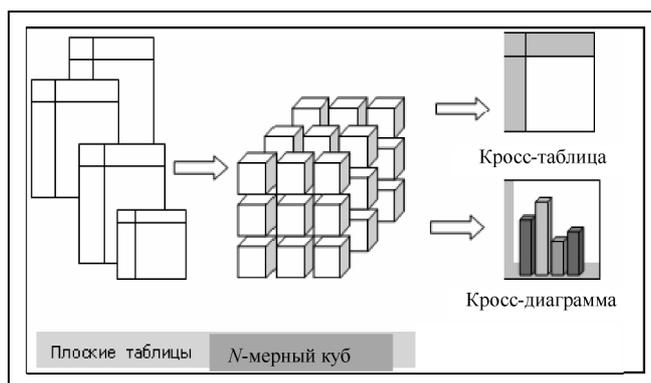


Рис. 2. К пояснению технологии OLAP

(осей), вдоль которых могут быть проанализированы данные [1]. Измерение — это последовательность значений анализируемого параметра. Каждое измерение может быть представлено в виде иерархической структуры. Например, измерение «Территориальное расположение» может быть представлено иерархией «Административный округ», «Район», «Улица». На пересечении осей измерений располагаются меры — данные, количественно характеризующие анализируемые факты (детализированные и агрегированные). Каждое измерение включает в себя направления агрегирования данных, состоящие из серии последовательных уровней обобщения (уровней иерархии), где каждый вышестоящий уровень соответствует большей степени агрегации данных по соответствующему измерению (различные уровни их детализации). В этом случае становится возможным произвольный выбор желаемого уровня детализации информации по каждому из измерений.

Общая схема работы OLAP-системы представлена на рис. 2. Множество плоских таблиц преобразуется в многомерный куб. Инструмент запросов OLAP-системы предлагает быстрый доступ к OLAP-данным, простой в пользовании графический интерфейс и позволяет создавать запросы и отчеты методом буксировки мышь, предоставляя возможности углубления в данные до требуемого уровня. Такая модель представления данных позволяет получать любые нужные аналитику данные в виде соответствующих срезов (сечений) OLAP-куба. Срезы исходного куба представляются на экране кросс-таблицей (группировочной таблицей) и (или) кросс-диаграммой. Кросс-таблица отличается от обычной плоской таблицы наличием уровней вложенности — разбиением строк (столбцов) на подстроки (подстолбцы).

В качестве источника данных для построения куба «Капитальный ремонт» используется фраг-

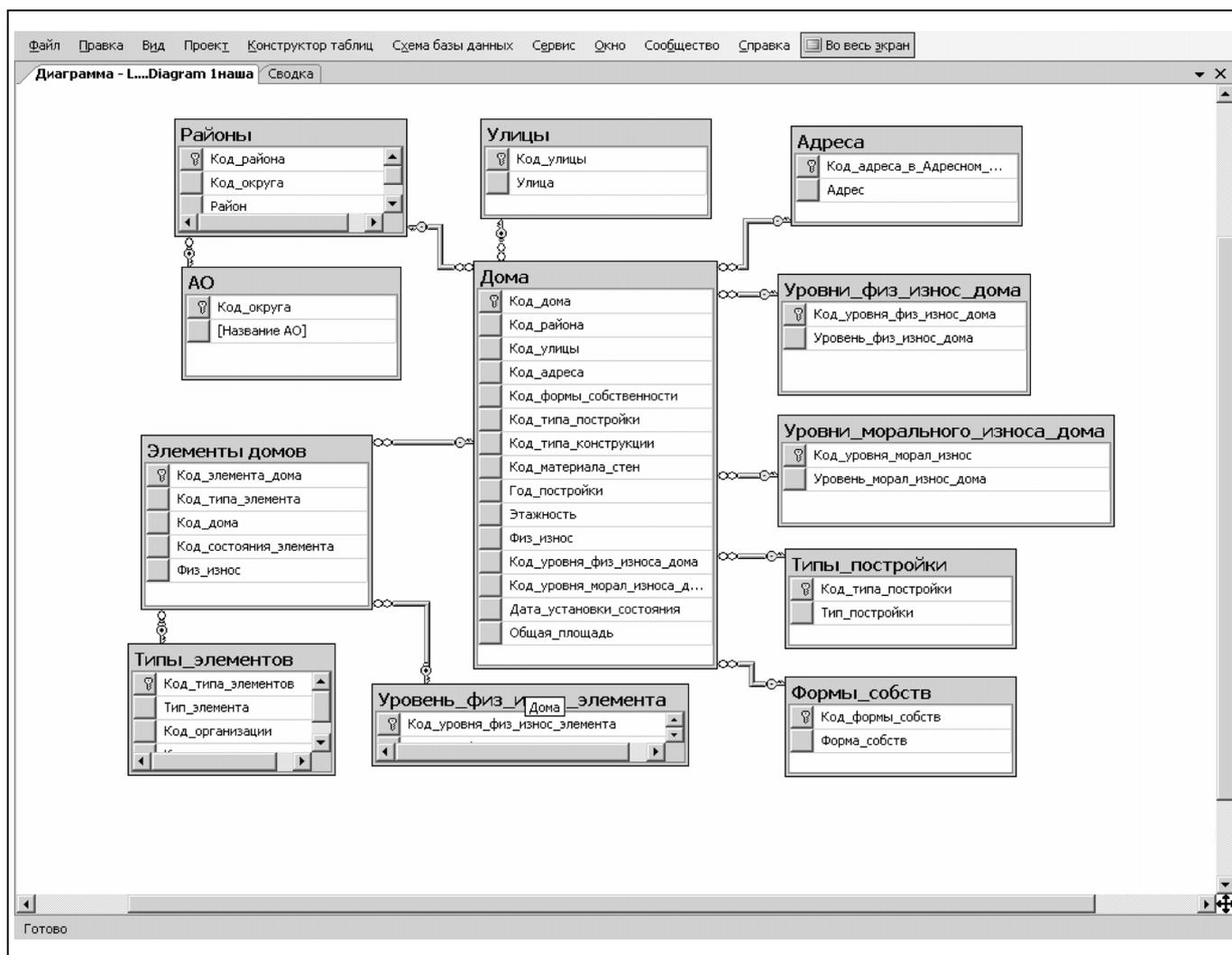


Рис. 3. Представление источника данных для проекта «Капитальный ремонт»

мент базы данных ЖКХ, диаграмма которого представлена на рис. 3.

Фрагмент содержит основные таблицы «Дома» и «Элементы домов», а также справочники административных округов, районов, улиц, адресов, уровней физического износа здания, уровней морального износа здания, форм собственности, типов постройки, типов элементов дома и уровней физического износа элементов. Таблица «Дома» содержит список домов со всеми параметрами, таблица «Элементы домов» — список элементов каждого дома (крыши, подвалы, инженерные системы и т. д.) со своими параметрами.

Создается куб с измерениями «Дома», «Районы», «Улицы», «Адреса», «Уровни физического износа дома», «Формы собственности», «Типы постройки», «Уровни морального износа дома», «Типы элементов», «Уровни физического износа

элемента» и мерами «Число домов» и «Число элементов домов».

Для просмотра нужного среза куба в полях столбцов и строк кросс-таблицы задается выбираемая пользователем иерархия измерений, а в области данных — требуемая мера. В полях фильтра может быть задан любой интервал или набор значений какого-либо атрибута измерения.

Для иллюстрации эффективности формирования и визуализации ранжируемых классов с помощью инструмента запросов OLAP-системы на рис. 4 и 5 показаны экранные формы результатов конкретных запросов демонстрационного примера в среде Microsoft SQL Server 2005 Analysis Services. На рис. 4 показана кросс-таблица, отображающая все непустые классы домов центрального административного округа (ЦАО), требующих комплексного капитального ремонта. На рис. 5 представлена кросс-таблица, отображающая непустые



Уровень Физ Износ Дома	Уровень Мо	Форма Собств	Тип Постройки	АО	Район	Адрес	Число Домов	
неудовл (41-50%)	16-25%	0-30% госсобств	современные	ЦАО	Хановники	ул. М.Грузинская д.7	3	
						Итого	1	
		60-100% госсобств	Итого	Итого	Итого	Итого	Итого	1
								1
								1
	Итого	Итого	Итого	Итого	Итого	Итого	4	
							1	
							1	
							1	
							1	
26-35%	0-30% госсобств	панельные	ЦАО	Арбат	ул.Плющиха д.13	1		
					Итого	1		
		современные	ЦАО	Хановники	ул.Остоженка д.18	1		
					Итого	1		
					Итого	1		
	Итого	Итого	Итого	Итого	Итого	Итого	2	
							1	
							1	
							1	
							1	
36-45%	0-30% госсобств	панельные	ЦАО	Арбат	ул.Арбат д.9	1		
					Итого	1		
		современные	Итого	Итого	Итого	Итого	Итого	2
								2
								4
	Итого	Итого	Итого	Итого	Итого	Итого	3	
							4	
							4	
							4	
							19	
очень неудовл (51-60%)	16-25%	0-30% госсобств	современные	ЦАО	Арбат	ул.Моховая д.22	1	
						Итого	1	
		60-100% госсобств	Итого	Итого	Итого	Итого	Итого	1
								1
								1
	Итого	Итого	Итого	Итого	Итого	Итого	1	
							1	
							1	
							1	
							1	

Рис. 4. Результаты запроса: классы домов в ЦАО, требующие комплексного капитального ремонта

классы «адресных» конструктивных элементов, требующих ремонта, для жилых домов с физическим износом менее 40 %.

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Жилищно-коммунальное хозяйство относится к классу крупномасштабных [8] и слабоструктурированных [9] систем, характеризующихся:

- комплексным взаимодействием элементов, распределенных на значительной территории, требующих для развития существенных затрат ресурсов и времени,

- наличием разного рода неопределенностей, связанных с противоречивостью критериев, неполнотой знаний о проблеме, невозможностью количественного измерения тех или иных факторов и показателей.

Для эффективного управления крупномасштабными системами требуется интеграция пространственно-распределенных разнотипных дан-

ных, а также гибкая навигация, многомерный и интеллектуальный анализ, что обеспечивается современными информационными технологиями — OLAP-технологиями.

Слабоструктурированность «преодолевается» применением методов многокритериального оценивания с использованием знаний и предпочтений экспертов и лиц, принимающих решения.

В статье на примере задачи выбора очередности капитального ремонта представлен интерактивный алгоритм поддержки принятия решений, при котором пользователь в среде Microsoft SQL Server 2005 Analysis Services с помощью нерегламентированных запросов формирует набор объектов, выбирает критерии для их оценки, отвечает на вопросы в целях выявления относительной важности критериев и ранжирования выбранных объектов.

В перспективе представляется необходимым:

- на основе анализа задач управления ЖКХ разработать структуру хранилища данных и многомерную модель данных, эффективные для ана-

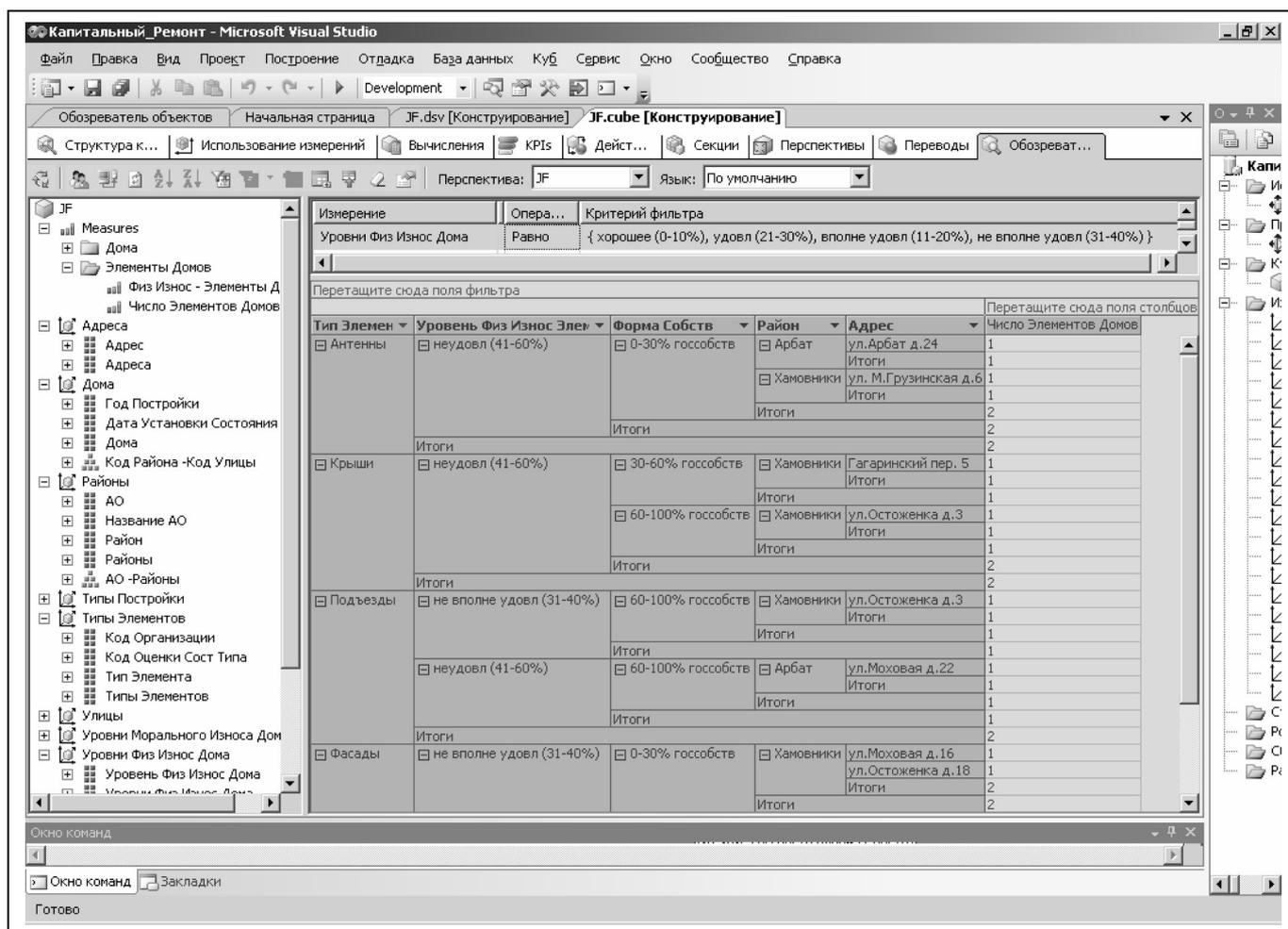


Рис. 5. Результаты запроса: адресные списки элементов домов в ЦАО, требующие ремонта

лиза больших объемов многоаспектной оперативной и исторической информации по состоянию ЖКХ, и методы актуализации данных;

— разработать структуру информационно-аналитической системы поддержки принятия решений на основе методов многомерного оперативного и интеллектуального анализа данных;

— разработать интерактивные алгоритмы поддержки принятия решений задач управления ЖКХ, основанных на применении методов многокритериального ранжирования.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Технологии анализа данных: Data Mining, Visial Mining, Text Mining, OLAP / А.А. Барсегян, М.С. Куприянов, В.В. Степаненко, И.И. Холод. — СПб.: БХВ-Петербург, 2007. — 375 с.
2. [http://www.i-stroy.ru/docu/JKHreform/Artur\\_Keskinov\\_kapital\\_no\\_otremontiruet\\_Moskvu/5637.html](http://www.i-stroy.ru/docu/JKHreform/Artur_Keskinov_kapital_no_otremontiruet_Moskvu/5637.html) (дата обращения 2.06.08).
3. О планировании капитального ремонта жилищного фонда города Москвы на 2007—2009 гг. / Постановление правительства Москвы № 485-ПП. — URL: от 11.07.2006.

<http://www.stroi.ru/nrmdocs/d2634dr409248m429.html> (дата обращения 2.06.08).

4. Положение о порядке решения вопросов о сносе жилых домов при реконструкции и застройке городов, утвержд. Госстроем СССР. — URL: <http://www.math.rsu.ru/build/base/doc/61.ru.txt> (дата обращения 2.06.08).
5. Саати Т. Принятие решений. Метод анализа иерархий. — М.: Радио и связь. 1993. — 316 с.
6. [http://www.moshouse.ru/likbez/habitation\\_aging.php](http://www.moshouse.ru/likbez/habitation_aging.php) (дата обращения 2.06.08).
7. Подиновский В.В., Ногин В.Д. Парето-оптимальные решения многокритериальных задач. — М.: Физматлит, 2007. — 255 с.
8. Васильев С.Н., Цвиркун А.Д. Проблемы управления развитием крупномасштабных систем // Тр. первой междунар. конф. «Управление развитием», Москва, 1—3 октября 2007 / ИПУ РАН. — М., 2007. — С. 9—14.
9. Ларичев О.И. Теория и методы принятия решений. — М.: Университетская книга, Логос, 2006. — 392 с.

Статья представлена к публикации членом редколлегии Ф.Т. Алескеровым.

Панкова Людмила Александровна, Пронина Валерия Александровна — ст. науч. сотрудники, кандидаты техн. наук, Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН; г. Москва, ☎ (495) 334-92-49, e-mail: [pankova@ipu.ru](mailto:pankova@ipu.ru), [pron@ipu.ru](mailto:pron@ipu.ru)

# МЕЖСЕРВЕРНАЯ МАРШРУТИЗАЦИЯ HTTP/SOAP-ВЗАИМОДЕЙСТВИЙ В РАСПРЕДЕЛЕННЫХ СИСТЕМАХ

Р.Э. Асратян

Рассмотрен подход к повышению эффективности HTTP/SOAP-взаимодействий в глобальных сетях путем организации тоннеля между HTTP-клиентами и HTTP-серверами, обеспечивающего возможность межсерверного взаимодействия и межсерверной маршрутизации данных в сети, защиту от несанкционированного доступа и концептуальную устойчивость к сетевым сбоям. Описаны принципы организации такого тоннеля, включая принципы функционирования сетевых шлюзов, необходимых для его построения.

**Ключевые слова:** распределенные системы, Интернет-технологии, сетевые протоколы, Web-сервисы.

## ВВЕДЕНИЕ

В последние годы возрастает интерес разработчиков распределенных систем к технологии Web-сервисов, основанных на сетевом протоколе SOAP (вариация протокола HTTP) [1]. Этот интерес объясняется рядом признанных достоинств этой технологии:

- языковой и платформенной независимостью;
- эффективной поддержкой взаимодействий в двухзвенной (клиент—сервер) и трехзвенной (клиент—сервер приложений—сервер баз данных) архитектурах в режиме on-line;
- ориентацией на машинную обработку результатов информационных запросов благодаря строгой формализации структуры электронных документов в сети (XML-формат);
- обеспечением строго формализованных спецификаций сервисов (WSDL) и удаленного доступа к этим спецификациям в процессе разработки приложений;
- поддержкой технологии в ряде развитых интегрированных сред разработки (MS Visual Studio, Borland C++ Builder), обеспечивающих удобный программный интерфейс (API), основанный на модели вызовов методов удаленных объектов, а также информационную связь с сервисами в период разработки и отладки приложений.

Хотя последнее из перечисленных достоинств является по сути конъюнктурным, оно играет едва ли не решающую роль в успехе Web-сервисов на «рынке» Интернет-технологий.

Тем не менее, технология Web-сервисов не свободна от ряда недостатков, которые особенно ощутимо проявляются в разработках больших распределенных систем, (т. е. систем, включающих в себя десятки и сотни взаимодействующих компонентов, удаленных друг от друга на сотни и тысячи километров).

- Как и большинство Интернет-технологий, работающих в режиме on-line, Web-сервисы крайне неустойчивы к сетевым сбоям. Если в процессе обработки клиентского запроса (возможно, весьма длительной) возникает разрыв сетевого соединения с сервером, то результаты обработки, как правило, оказываются потерянными. (Именно этим объясняется тот факт, что разработчики больших систем до сих пор часто строят удаленные взаимодействия на базе технологической электронной почты, т. е. путем отказа от режима on-line.)
- Web-сервисы не содержат встроенных средств защиты от несанкционированного доступа.
- Web-сервисы не поддерживают собственных средств межсерверного взаимодействия и межсерверной маршрутизации данных в сети. Это означает, что клиент может требовать обслуживания только у того сервера, с которым он непосредственно соединился, а два клиента могут взаимодействовать только при условии обслуживания общим сервером. Это ограничение может оказаться чрезмерно жестким для распределенных систем, предназначенных для функционирования в неоднородных сетях (т. е. в сетях, не обеспечивающих возможность прямого сетевого соединения между любыми двумя узлами). Все более часто встреча-

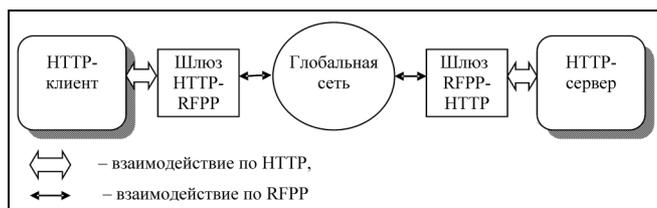


Рис. 1. RFPS-тоннель

ется ситуация, в которой сетевая среда распределенной системы представляет собой множество удаленных друг от друга частных локальных сетей, объединенных глобальной сетью (именно эту ситуацию мы и будем иметь в виду в данной статье). Желание «спрятать» сетевые узлы (и клиентские, и серверные) в частных сетях может быть продиктовано соображениями безопасности и (или) нехваткой уникальных IP-адресов. В этом случае возможность взаимодействия по схеме «клиент—сервер—сервер—...—сервер», т. е. взаимодействия через «посредников», оказывается чрезвычайно важной. (Отметим, что применение в этом случае защищенных VPN-тоннелей [2] для организации межсетевое взаимодействия является весьма жестким решением и может оказаться совершенно неэффективным, если число частных сетей больше двух.)

Разумеется, в каждой конкретной разработке эти недостатки могут быть хотя бы отчасти «компенсированы» на прикладном уровне, не это всегда хуже, чем доступность универсальных и готовых к использованию решений. Одно из таких решений предлагается в данной статье.

В работах [3, 4] описываются новая сетевая служба RFPS (Remote File Packets Service) и, соответственно, сетевой протокол RFPP, предназначенные для организации сетевых взаимодействий в распределенных системах. В разработке этой службы основной акцент сделан именно на средствах межсерверного взаимодействия, межсерверной маршрутизации данных и защиты от несанкционированного доступа, а также на концептуальной устойчивости к сетевым сбоям. В данной работе описывается подход к объединению преимуществ обеих сетевых технологий путем организации RFPS-тоннеля между HTTP-клиентом и HTTP-сервером (рис. 1). Идея подхода основана на использовании HTTP-взаимодействий в пределах частных локальных сетей и переходе на RFPP-взаимодействия для обменов данными в глобальной сети. Разумеется, главное требование к тоннелю заключается в его абсолютной «прозрачности» и для HTTP-клиентов, и для HTTP-серверов.

## 1. КРАТКИЕ СВЕДЕНИЯ О RFPS

Главная особенность RFPS состоит в том, что «контекст» сеанса связи ассоциируется не с сете-

вым соединением, а с новым, явно определяемым понятием — удаленным пакетом файлов (далее будем называть его просто «пакетом»), существующим независимо от наличия или отсутствия сетевого соединения. Клиент RFPS сам открывает новый пакет на RFPS-сервере при необходимости удаленного взаимодействия и закрывает его, когда он больше не нужен. В промежутке между этими событиями он может наполнить пакет данными, вызвать те или иные удаленные обработчики данных, получить результаты их работы, передать пакет другому клиенту или переслать его по сети на другой сервер, продолжить обработку на другом сервере, а потом получить его обратно. Причем, все это может быть сделано или за одно TCP-соединение, или за несколько. Сохраняя полученный от сервера уникальный идентификатор пакета, клиент всегда может восстановить контекст сеанса после случайного (или намеренного) разрыва соединения и продолжить работу.

В смысле управления пакетами файлов RFPS-сервер имеет дело с объектами пяти типов:

- *клиенты* — источники запросов на обслуживание (в том числе — на открытие и закрытие пакетов);
- *обработчики* — программы (исполняемые модули), запускаемые сервером для обработки наборов данных в пакетах;
- *агенты* — постоянно активные (или периодически запускаемые) программы, объединяющие в себе свойства клиентов и обработчиков; в отличие от обработчиков, агенты могут выполняться на отдельных машинах (т. е. не на тех, на которых работает сервер и (или) клиенты); пакеты передаются на обработку агентам через связанные с агентами очереди пакетов;
- *процедуры* — подпрограммы из динамических библиотек, подключаемых к серверу для расширения его функций;
- *серверы* — другие RFPS-серверы, доступные для взаимодействия.

Объекты всех типов должны быть предварительно зарегистрированы на сервере RFPS. Другими словами, сервер отвергает запросы, исходящие от незарегистрированных клиентов или агентов, или же запросы на запуск незарегистрированных обработчиков. При регистрации объекту присваивается уникальное имя; кроме того, с ним связывается определенная управляющая информация (пароль, права доступа, спецификация исполняемого модуля обработчика и т. п.). Отметим, что обращение клиента к серверу сопровождается «двусторонней проверкой подлинности» (защита сервера от неавторизованного клиента и защита клиента от фальсифицированного сервера) и «скрытой» передачей пароля по сети на основе примерно той же идеи, на которой построен протокол MS-Char v2 [2].



К основным формам обработки пакетов файлов относятся:

- создание и уничтожение пакета;
- заполнение пакета данными от клиента;
- применение к пакету одной или нескольких обрабатывающих программ (обработчиков), зарегистрированных на обрабатывающем сервере;
- постановка пакета в очередь на обработку к постоянно активному или периодически запускаемому агенту;
- перемещение пакета с одного сервера на другой;
- выборка клиентом результатов обработки.

Все перечисленные формы обработки можно комбинировать в разных сочетаниях. Создав удаленный пакет файлов на каком-либо сервере RFPS, клиент может последовательно или параллельно применить к нему несколько обработчиков и (или) последовательно поставить его в очередь на обработку к нескольким агентам и (или) переместить его на другой RFPS-сервер для продолжения обработки. Все эти действия инициируются одной и той же клиентской функцией Process, которая имеет два основных параметра: идентификатор пакета файлов и командную строку, задающую последовательность имен обработчиков и агентов, которые должны принять участие в его обработке. В смысле организации RFPS-тоннеля наиболее важно, что эти обработчики и агенты могут быть «размещены» не только в том RFPS-сервере, с которым соединился клиент, но и на других (удаленных) серверах.

Рассмотрим следующий пример. Предположим, что клиентская программа выполнила соединение с RFPS-сервером с именем alpha (рис. 2), открыла на сервере пакет файлов и «заполнила» его какими-то данными. Вслед за этим программа выполняет функцию Process, которая передает серверу alpha довольно длинную командную строку для обработки пакета (остальные параметры функции Process мы отбросим) и переходит в состояние ожидания результатов обработки. Обработка пакета на сервере alpha начнется с вызова обработчика, зарегистрированного под именем unzip (во время работы обработчика пакет файлов предоставляется ему в форме рабочего каталога с полным доступом ко всем, содержащимся в нем, файлам).

Следующий элемент командной строки требует организации межсерверного взаимодействия. Он содержит регистрационное имя удаленного сервера (beta), отделенное знаком \$ от «вложенной» командной строки (wk,gamma\$trans,kw), которая должна быть выполнена на сервере beta. Организация межсерверного взаимодействия включает в себя:

- поиск параметров доступа к серверу beta (IP-адрес или Интернет-имя, порт, пароль и т. д.) в регистрационных данных сервера alpha и установление сетевого соединения с ним;
- создание «пакета-клона» на сервере beta, являющегося копией обрабатываемого пакета;

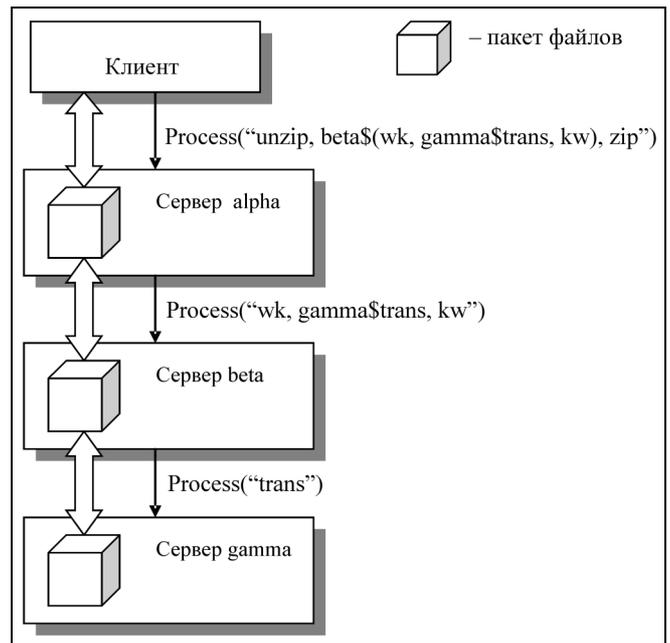


Рис. 2. Обработка пакета файлов на удаленных серверах

- передачу серверу beta вложенной командной строки для продолжения обработки.

Во все время обработки пакета на сервере beta сервер alpha будет находиться в состоянии ожидания. После завершения обработки вся информация из пакета-клона будет скопирована в исходный пакет, а сервер alpha продолжит обработку пакета вызовом обработчика с именем zip. (Существуют варианты взаимодействия без ожидания и без возврата результатов, но мы не будем останавливаться на них.)

В процессе обработки вложенной командной строки сервер beta, в свою очередь, обнаружит в ней имя удаленного сервера (gamma) и обратится к нему (по аналогичным правилам) для выполнения единственного обработчика trans.

Как видно из данного примера, RFPS совмещает в себе функции передачи и распределенной обработки данных, обеспечивая возможность аккумуляции результатов обработки одного и того же пакета файлов на разных серверах.

## 2. ПРИНЦИПЫ ОРГАНИЗАЦИИ RFPS-ТОННЕЛЯ

Рассмотрим множество частных локальных сетей (LAN), объединенных глобальной сетью, и предположим, что проектируемая распределенная система требует организации взаимодействия между узлами, размещенными не только в одной частной сети, но и в разных. Объединение частных сетей через глобальную сеть предполагает наличие в каждой из них, по крайней мере, одного «пограничного» узла, соединенного и с локальной, и с

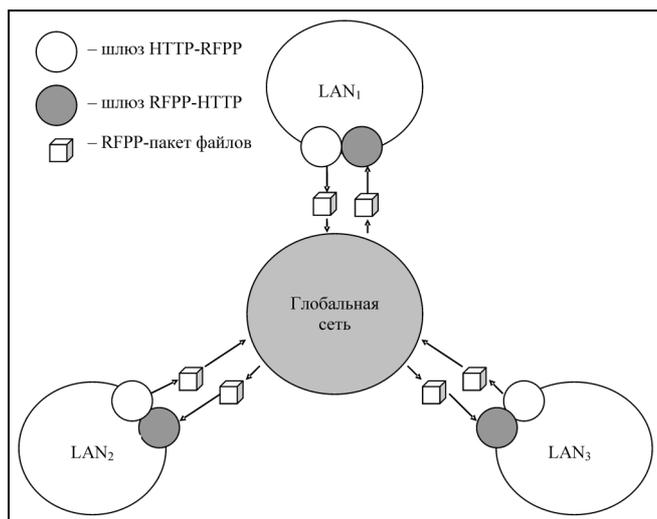


Рис. 3. Шлюзы между HTTP и RFPP

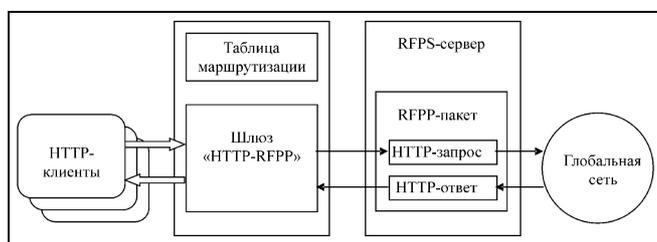


Рис. 4. Шлюз HTTP-RFPP

глобальной сетью и выполняющего роль IP-маршрутизатора [5]. Будем считать, что именно на таких узлах устанавливаются программные средства шлюзов HTTP-RFPP и RFPP-HTTP, обеспечивающих энкапсуляцию (и деэнкапсуляцию) потоков HTTP-запросов и HTTP-ответов в RFPP-пакеты файлов таким образом, что каждая пара {HTTP-запрос, HTTP-ответ} помещается в один пакет (рис. 3).

**Шлюз HTTP-RFPP** включает в себя две постоянно активные программы (службы): собственно шлюз и RFPP-сервер, обеспечивающий создание и обработку RFPP-пакетов (рис. 4). Каждой программе отводится выделенный сетевой порт. Шлюз приводится в действие путем глобальной настройки всех HTTP-клиентов в локальной сети на работу через «прокси-сервер» с указанием IP-адреса и порта шлюза в качестве параметров настройки. В результате все исходящие HTTP-соединения от клиентов (независимо от URL адресуемого Интернет-ресурса) будут поступать непосредственно «на вход» шлюза.

Обработка каждого входящего HTTP-соединения в шлюзе HTTP-RFPP опирается на таблицу маршрутизации шлюза, которая связывает доменные имена адресуемых Интернет-ресурсов с име-

нами удаленных RFPP-серверов и IP-адресами узлов в удаленных локальных сетях. С помощью таблицы маршрутизации шлюза выполняется первый шаг маршрутизации — последующие шаги реализуются средствами RFPP.

Обработка входящего соединения состоит из следующих основных шагов.

- Прием HTTP-запроса от HTTP-клиента по сети.
- Извлечение Интернет-имени удаленного узла из URL адресуемого Интернет-ресурса (Web-страницы, Web-сервера и т. п.) и поиск записи, соответствующей этому имени в таблице маршрутизации шлюза. Если такая запись отсутствует, шлюз устанавливает соединение с удаленным узлом без «перехода» на протокол RFPP и выполняет обработку данного входящего соединения в режиме классического прокси-сервера (данный режим мы рассматривать не будем).
- Извлечение командной строки RFPP и IP-адреса адресуемого ресурса в удаленной локальной сети из найденной строки таблицы маршрутизации. Командная строка RFPP должна содержать полное имя шлюза RFPP-HTTP на удаленном сервере (т. е. имя RFPP-сервера и регистрационное имя шлюза в форме «имя\_сервера\$имя\_шлюза»). Полученный из таблицы IP-адрес ресурса помещается в заголовок HTTP-запроса.
- Соединение с RFPP-сервером, открытие RFPP-пакета и размещение в нем HTTP-запроса в форме текстового файла.
- Инициация обработки пакета с помощью полученной командной строки RFPP. В результате пакет будет передан по глобальной сети в один из удаленных RFPP-серверов и обработан шлюзом RFPP-HTTP в другой локальной сети.
- Ожидание окончания обработки и прием обработанного пакета от удаленного RFPP-сервера по глобальной сети (обработанный пакет должен содержать не только файл HTTP-запроса, но и файл HTTP-ответа).
- Отправка HTTP-ответа HTTP-клиенту и закрытие RFPP-пакета.

Во все время обработки входящего соединения HTTP-клиент находится в состоянии ожидания.

Таблица маршрутизации шлюза представляет собой текстовый файл, каждая строка которого имеет следующий формат:

```
«Имя ресурса» «Командная строка
RFPP-сервера» «IP-адрес ресурса»
```

Имя ресурса играет роль ключа при поиске строки, а остальные реквизиты представляют собой результат поиска. Рассмотрим следующий пример таблицы.

```
alpha Srv1$RfppHttp 192.168.0.10
beta Srv2$ RfppHttp 192.168.0.10
gamma Srv3$ RfppHttp 192.168.0.20
```

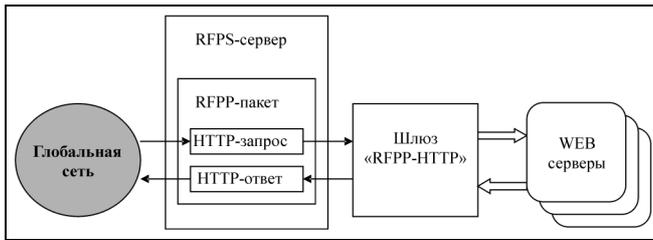


Рис. 5. Шлюз RFPP-HTTP

При обработке запроса к ресурсу `http://beta/document1` будет найдена вторая строка таблицы. После создания RFPP-пакета он будет передан по глобальной сети в удаленный RFPS-сервер `Srv2`, где к нему будет применен обработчик с регистрационным именем `RfppHttp` — шлюз RFPP-HTTP. Этот шлюз должен обеспечить обращение к ресурсу `http://192.169.0.10/document1` в обслуживаемой им локальной сети по протоколу HTTP.

**Шлюз RFPP-HTTP** выполняет обратную задачу по отношению к шлюзу HTTP-RFPP. По своему «статусу» он представляет собой специализированный обработчик в RFPS-сервере (рис. 5). Это означает, что он получает управление в результате выполнения в RFPS-сервере командной строки, в которой обозначено его имя. Обработка RFPP-пакета в шлюзе состоит из следующих шагов.

- Просмотр заголовка HTTP-запроса и извлечение IP-адреса адресуемого ресурса в локальной сети.
- Установление соединения с Web-сервером на соответствующем узле по локальной сети.
- Передачу HTTP-запроса по установленному соединению.
- Ожидание окончания обработки запроса, прием HTTP-ответа и запись его в обрабатываемый RFPP-пакет в форме текстового файла.

Доставка пакета по глобальной сети в исходный RFPS-сервер осуществляется средствами RFPS.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Описанные в данной работе принципы организации RFPS-тоннеля одинаково применимы для обслуживания взаимодействий двух видов:

- «тонких» HTTP-клиентов (Web-браузеров) с Web-сайтами,
- «толстых» HTTP-клиентов с Web-сервисами.

Безусловно, RFPS-тоннель вносит определенную задержку во взаимодействие HTTP-клиентов и HTTP-серверов. (Эта задержка особенно заметна в случае обращения «тонких» клиентов к «нагруженным» Web-страницам с большим числом картинок и внешних таблиц стилей или скриптов — ведь каждая такая «деталь оформления» влечет за собой отдельное HTTP-обращение и отдельную

доставку в RFPP-пакете). Поэтому, область эффективного применения подхода включает в себя взаимодействия, связанные с достаточно длительной удаленной обработкой (информационные запросы к базам данных, формирование отчетов и т. п.) и с передачей в основном содержательных данных. Через Web-сервисы обычно реализуются взаимодействия именно такого типа.

Кроме основных преимуществ RFPS-тоннеля, перечисленных в начале статьи, упомянем еще одно: возможность организации дополнительной обработки передаваемых данных средствами RFPS. В тот период времени, в который HTTP-запрос и (или) HTTP-ответ содержатся в форме наборов данных в RFPP-пакете, они являются весьма удобным объектом для применения к ним самых различных форм обработки, включая, например, следующие:

- шифровка данных перед отправкой в глобальную сеть и дешифровка после приема из глобальной сети;
- отправка копий всех RFPP-пакетов специализированному удаленному агенту для централизованного мониторинга взаимодействий в распределенной системе;
- преобразования форматов данных (например, их XML в HTML) и т. п.

В настоящее время программные средства поддержки RFPS-тоннеля (шлюз HTTP-RFPP и шлюз RFPP-HTTP) реализованы в операционной среде Win32. Эксперименты подтвердили применимость и эффективность подхода для обслуживания разных форм «технологических» HTTP-взаимодействий: обращения к Web-сервисам из клиентских рабочих станций, вызов удаленных CGI-программ из Web-браузеров, обращения интегрированной среды разработки к удаленному Web-серверу за спецификациями Web-сервисов и т. п.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Шапошников И.В. Web-сервисы Microsoft.NET. — СПб: БХВ-Петербург, 2002. — 336 с.
2. Widows 2000: Server и Professional / Андреев А.Г. и др. — СПб.: «БХВ-Санкт-Петербург», 2001. — 1055 с.
3. Асратян Р.Э. Интернет-служба для поддержки распределенных информационно-управляющих систем // Проблемы управления. — 2005. — № 6. — С. 73—77.
4. Асратян Р.Э. Интернет-служба для поддержки межсерверных взаимодействий в распределенных информационных системах // Там же. — 2006. — № 5. — С. 58—62.
5. Джамса К., Коуп К. Программирование для Интернет в среде Windows. — СПб: Питер, 1996. — 659 с.

Статья представлена к публикации членом редколлегии В.Г. Лебедевым.

Асратян Рубен Эзрасович — канд. техн. наук, вед. науч. сотрудник, Институт проблем управления им. В.А.Трапезникова РАН, ☎ (495) 334-88-61, e-mail: rea@L9.ipu.rssi.ru

# О ФУНКЦИОНАЛЬНОМ ДИАГНОСТИРОВАНИИ ДИСКРЕТНЫХ УСТРОЙСТВ В УСЛОВИЯХ РАБОТЫ С НЕТОЧНЫМИ ДАННЫМИ

Г.П. Аксёнова

Рассмотрены изменения, происходящие в функционировании дискретного устройства и его схемы встроенного контроля (СВК) при переходе к работе с неточными данными. Показано, как при этом меняется аппаратная сложность СВК. Представлен аппаратно-совмещенный вид синтеза СВК по модулю 2 для работы и с точными, и с приближенными данными.

**Ключевые слова:** дискретное устройство, схема встроенного контроля, таблица истинности, метод синтеза по модулю 2.

## ВВЕДЕНИЕ

В связи с возрастающим значением обработки неточных (приближенных) данных возникает необходимость осмысления некоторых вопросов функционального диагностирования в условиях работы с неточными данными. Впервые эти вопросы были затронуты А.В. Дроздом в статье [1], где обсуждаются цели и задачи рабочего (функционального) диагностирования вычислительных устройств в режиме обработки приближенных данных.

Неточность данных возникает из-за [2]:

- неточного соответствия математического описания самой задаче (в частности, неточно заданы исходные данные описания);
- применения приближенных методов обработки данных;
- округления данных при арифметических операциях, при их вводе и выводе.

Для работы с неточными данными применяются те же устройства, которые спроектированы для работы с точными данными. Точнее, одно и то же устройство в одни моменты может работать с точными данными, а в другие — с приближенными. В связи с этим схема встроенного контроля (СВК), предназначенная для функционального диагностирования устройства в режиме точных данных и построенная традиционными методами синтеза [3, 4], может браковать работу устройства даже в тех случаях, когда выходной результат, не являясь точным, все же не выходит за рамки установленного допуска.

Казалось бы, что в таком случае надо исключить из рассмотрения неточные выходы (для вычислительных устройств это обычно младшие разряды) и не принимать во внимание их значения. Однако СВК, заложенная в устройство, спроектирована так, что отслеживает все выходы устройства, и отбрасывание каких-либо из них приведет к непредсказуемой реакции СВК. Например, в вычислительном устройстве, состоящем из ряда блоков, организован сквозной контроль по модулю 3 [3]. Это означает, что заложенные в него СВК блоков вырабатывают «предсказание» значения  $\text{mod } 3$  для всего выходного слова блока, а не для какой-то его части. И чтобы получить «предсказание» для части выходного слова, надо об этом позаботиться еще на стадии проектирования вычислительного устройства.

Цель излагаемого исследования — распространить методы синтеза СВК [3, 4] на режим работы с неточными данными.

## 1. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ СИНТЕЗА СХЕМ ВСТРОЕННОГО КОНТРОЛЯ

Схема встроенного контроля для произвольного дискретного устройства (ДУ) в общем случае синтезируется методом, изложенным в работе [4], согласно рис. 1, где  $x_1, \dots, x_n$  и  $z_1, \dots, z_m$  — входы и выходы ДУ соответственно;  $f$  — выход СВК, значение которого сигнализирует о достоверности выходного значения ДУ.



Таблица 1

Таблица истинности дискретного устройства

Вход	Выход
$X_1$	$Z_1$
...	...
$X_j$	$Z_j$
...	...
$X_r$	$Z_r$

Таблица 2

Таблица истинности схемы встроенного контроля

		Вход СВК	$f$
ПТ <sub>и</sub>	}	$X_1 Z_1$	1
		...	...
		$X_j Z_j$	1
		...	...
ПТ <sub>1</sub>	}	$X_j Z_r$	1
		...	...
		$X_1 Z_1^1$	0
		...	...
ПТ <sub>k</sub>	}	$X_j Z_j^1$	0
		...	...
		$X_r Z_r^1$	0
		...	...
ПТ <sub>k</sub>	}	$X_1 Z_1^k$	0
		...	...
		$X_j Z_j^k$	0
		...	...
ПТ <sub>k</sub>	}	$X_r Z_r^k$	0
		...	...

Для простоты изложения будем считать, что ДУ есть комбинационное устройство, а СВК несамостоятельная, т. е. имеет один, а не два выхода.

Дискретное устройство задается своей структурной схемой и таблицей истинности — табл. 1, где  $X_j = \{x_{1j}, \dots, x_{nj}\}$  — двоичный набор значений входных переменных;  $Z_j = \{z_{1j}, \dots, z_{mj}\}$  — двоичный набор значений выходных переменных;  $j = 1, \dots, r$ ;  $r \leq 2^n$  — число рабочих наборов.

Схема встроенного контроля синтезируется для заданного класса неисправностей. В работе [4] дан алгоритм получения для заданного класса неисправностей сокращенного списка неисправностей. По таблице истинности ДУ и для имеющегося списка неисправностей получают таблицу истинности СВК (табл. 2) [4].

Таблица истинности СВК состоит из  $k + 1$  подтаблиц, где  $k$  — число неисправностей в списке. Верхняя подтаблица (обозначим ее через ПТ<sub>и</sub>) со-

ответствует правильному (истинному — «и») функционированию ДУ и представляет собой таблицу истинности ДУ (см. все столбцы, кроме последнего), для которой в столбце  $f$  проставлены единицы.

Каждая из  $k$  остальных подтаблиц ПТ<sub>1</sub>, ..., ПТ<sub>k</sub> соответствует неправильному функционированию, когда в ДУ имеется соответственно неисправность  $i = 1, \dots, k$  (устойчивая или кратковременная) из имеющегося списка, в результате которой на выходе ДУ возникает неправильное значение  $Z_j^i$ . В подтаблицах ПТ<sub>1</sub>, ..., ПТ<sub>k</sub> в столбце  $f$  проставлены нули. Если при построении подтаблиц ПТ<sub>1</sub>, ..., ПТ<sub>k</sub> возникает строка  $X_j Z_j = \{x_{1j}, \dots, x_{nj}, z_{1j}, \dots, z_{mj}\}$ , совпадающая с какой-либо строкой подтаблицы ПТ<sub>и</sub>, то она вычеркивается, т. е. неисправность здесь не проявляется (не искажается выходной набор ДУ  $z_{1j}, \dots, z_{mj}$ ).

Всего таблица истинности СВК содержит  $2^{n+m}$  строк. Функция  $f$  определена на  $r(k + 1)$  наборах (если не было вычеркиваний). На остальных  $2^{n+m} - r(k + 1)$  наборах  $f$  не определена, и в столбце  $f$  проставляются знаки  $\sim$ , т. е. в этих разрядах допустимо как значение 0, так и 1. Считается, чем больше знаков  $\sim$ , тем больше возможностей для упрощения функции  $f$  путем соответствующего ее доопределения.

Обычно ДУ и его СВК проектируются для работы с точными данными. Посмотрим, какую специфику вносят приближенные данные.

## 2. НЕТОЧНЫЕ ДАННЫЕ НА ВХОДЕ ДИСКРЕТНОГО УСТРОЙСТВА

Каждое ДУ проектируется на множестве входных наборов, которое является его областью определения  $R$ . На всех остальных наборах, не принадлежащих области  $R$ , выходная функция ДУ не определена.

Рассмотрим ситуацию, когда на вход ДУ поступают приближенные данные, т. е. данные, неточные по своей физической сущности. Для входного набора ДУ это означает, что в каких-то его разрядах можно поставить знак  $\sim$ . Назовем такие разряды неточными. Для вычислительных устройств это обычно младшие разряды.

На первый взгляд кажется, что неточные разряды входов ДУ со значением  $\sim$  можно не учитывать при синтезе СВК, т. е. на рис. 1 надо ликвидировать связи СВК с этими входами ДУ. Однако от значения этих разрядов во входном наборе могут существенно зависеть значения точных разрядов выходного набора ДУ. В результате отбрасывания неточных разрядов может возникнуть ситуация неопределенности, когда в ответ на значения на

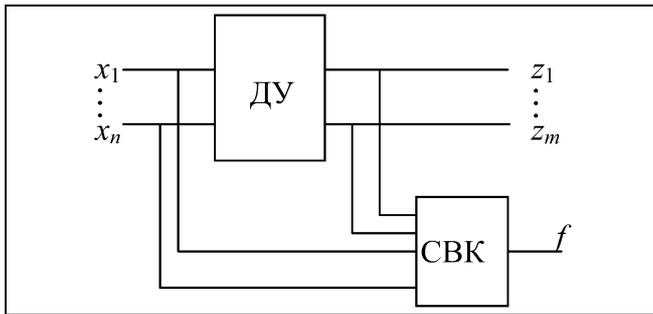


Рис. 1. Схема встроенного контроля в общем виде

оставшихся (точных) входах выходная реакция ДУ может быть неоднозначна, т. е. данное ДУ при меньшем числе входов будет неполностью определенным.

Для ДУ безразлично, каким считается поступивший на его входы набор, точным или приближенным, лишь бы он принадлежал его области определения. Оно перерабатывает поступивший набор в соответствии со своей функцией, а СВК оценивает правильность переработки. Поэтому

- при синтезе СВК не имеет смысла говорить о входных данных, поступающих на ДУ, точные они или приближенные,
- неточные разряды входов ДУ в любом случае должны охватываться СВК.

А неточность выходных данных при такой постановке вопроса определяется только техническим состоянием самого ДУ, т. е. правильно или нет оно перерабатывает входной набор. Если входной набор переработан неправильно, но ошибка касается только неточных разрядов, то выходное значение ДУ считается допустимым.

### 3. НЕТОЧНЫЕ ДАННЫЕ НА ВЫХОДЕ ДИСКРЕТНОГО УСТРОЙСТВА

Пусть от выходных данных ДУ требуется верность значений не всех  $m$  разрядов выходного набора, а лишь  $l$  из них,  $l < m$ . Вскроем механизм изменений, происходящих при переходе к неточным данным.

Пусть неточным будет один последний разряд с номером  $m$ . Рассмотрим таблицу истинности СВК. При работе с **точными данными** ПТ<sub>и</sub> (см. табл. 2) будет содержать некоторые наборы  $X_j Z_j = \{x_{1j}, \dots, x_{nj}, z_{1j}, \dots, z_{mj}\}$ ,  $j = 1, \dots, r$ , а наборы  $\{x_{1j}, \dots, x_{mj}, z_{1j}, \dots, \bar{z}_{mj}\}$ , где неточный разряд  $z_m$  имеет инверсное значение, будут обязательно находиться в одной (или нескольких) из подтаблиц ПТ<sub>г</sub> ( $i = 1, \dots, k$ ), потому что такие наборы являются неправильными.

Однако при работе с **неточными данными** такие наборы переместятся в подтаблицу ПТ<sub>и</sub>, так как они являются допустимыми, и СВК должна оценивать их как правильные (т. е. в столбце  $f$  вместо 0 надо проставить 1). В результате дизъюнктивная нормальная форма функции  $f$  будет содержать для каждого  $j, j = 1, \dots, r$ , наборы, которые в сумме дают терм, не зависящий от переменной  $z_m$ , а именно:

$$\begin{aligned} x_{1j} \dots x_{nj} z_{1j} \dots z_{(m-1)j} z_{mj} \vee x_{1j} \dots x_{mj} z_{1j} \dots z_{(m-1)j} \bar{z}_{mj} &= \\ &= x_{1j} \dots x_{nj} z_{1j} \dots z_{m-1} \end{aligned}$$

Таким образом, при работе с неточными данными сокращаются:

- число входов СВК (благодаря отбрасыванию неточных выходов ДУ (но не входов ДУ!));
- список неисправностей ДУ (неисправности, приводящие к искажению значений только неточных выходов ДУ, теперь будут несущественными).

Посмотрим, как эти факты отражаются на сложности СВК.

### 4. АНАЛИЗ СЛОЖНОСТИ СХЕМ ВСТРОЕННОГО КОНТРОЛЯ

Уменьшение числа входов СВК и списка неисправностей ДУ не обязательно приводит к сокращению аппаратных затрат на СВК. Продемонстрируем это для метода синтеза СВК по модулю 2 (рис. 2) как наиболее наглядного по сравнению с общим методом (см. рис. 1).

Пусть ДУ представляет собой комбинационное устройство, для которого построена СВК по модулю 2 [5] согласно рис. 2, где  $A_d$  — комбинационный автомат, значение выхода которого *дополняет* до нечетного выходной набор ДУ (т. е. схема предсказания четности);  $M2$  — свертка по модулю 2.

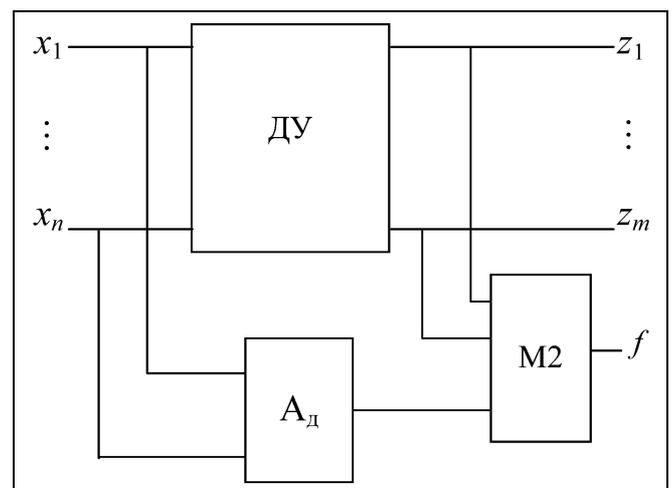


Рис. 2. Схема встроенного контроля по модулю 2

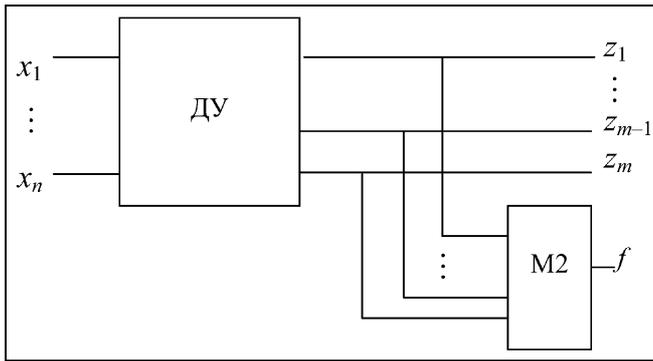


Рис. 3. Частный случай схемы встроенного контроля по модулю 2

Предположим, что  $z_m$  — неточный выход. Построим СВК только для точных выходов  $z_1, \dots, z_{m-1}$  и сравним ее с СВК для всех  $m$  выходов. Здесь может представиться четыре варианта:

- 1)  $z_1 \oplus \dots \oplus z_m = \text{const}$ , но  $z_1 \oplus \dots \oplus z_{m-1} \neq \text{const}$ ;
- 2)  $z_1 \oplus \dots \oplus z_m = \text{const}$  и  $z_1 \oplus \dots \oplus z_{m-1} = \text{const}$ ;
- 3)  $z_1 \oplus \dots \oplus z_m \neq \text{const}$  и  $z_1 \oplus \dots \oplus z_{m-1} \neq \text{const}$ ;
- 4)  $z_1 \oplus \dots \oplus z_m \neq \text{const}$ , но  $z_1 \oplus \dots \oplus z_{m-1} = \text{const}$ .

Рассмотрим каждый из них.

*Вариант 1.* Все выходные значения для  $m$  выходов имеют постоянную четность, а для  $m-1$  выходов это не выполняется. Схема встроенного контроля для  $m$  выходов выглядит максимально просто:  $A_d$  отсутствует и остается только свертка  $M2$  (рис. 3). А СВК для  $m-1$  выходов будет содержать автомат  $A_d$ , значение выхода которого дополняет до нечетного выходной набор ДУ, согласно рис. 2. Фактически, автомат  $A_d$  должен реализовать функцию, равную  $z_m$ . Наиболее выгодно взять в качестве автомата  $A_d$  сам выход  $z_m$  (конечно, при этом должно быть выполнено условие отдельной реализации  $z_m$  с остальными выходными функциями ДУ). В результате СВК опять примет вид, показанный на рис. 3, но при этом часть аппаратуры ДУ переместится из объекта контроля в СВК. Таким образом, аппаратные затраты на СВК для  $m$  и для  $(m-1)$  выходов одинаковы.

Если же выход  $z_m$  связан общей аппаратурой с остальными выходными функциями ДУ, то надо либо разделить их аппаратурно путем дублирования общей части аппаратуры, либо построить новый автомат  $A_d$ . Тогда аппаратные затраты на СВК для  $m-1$  выходов увеличатся по сравнению с СВК для  $m$  выходов. (Требование отдельности реализации основной аппаратуры и контролирующей необходимо для того, чтобы в результате неисправности не было одновременного искажения выхода автомата  $A_d$  и выходов ДУ).

Что касается числа неисправностей в рассматриваемом случае, то и здесь уменьшение числа входов у СВК не дает никакого выигрыша, а именно: неисправности, приводящие к искажению выхода  $z_m$ , стали несущественными для объекта контроля (с выходами  $z_1, \dots, z_{m-1}$ ), но остались существенными для контролирующего оборудования (выход  $z_m$ ). А так как СВК сигнализирует об ошибке независимо от того, где она находится, в ДУ или в СВК, то все осталось по-прежнему и никакого сокращения числа существенных неисправностей не произошло.

*Вариант 2.* Все выходные значения и для  $m$  выходов, и для  $(m-1)$  выходов имеют постоянную четность. Схема встроенного контроля представляет собой свертку  $M2$  на  $m$  входов и на  $(m-1)$  входов соответственно. Следовательно, имеется выигрыш в аппаратуре, составляющий один двухвходовый элемент «сумма по модулю 2», и сокращается число существенных неисправностей благодаря отбрасыванию выхода  $z_m$ .

*Вариант 3.* Схемы встроенного контроля и для  $m$  выходов, и для  $(m-1)$  выходов имеют вид, представленный на рис. 2, т. е. содержат автомат  $A_d$ . Аппаратурные затраты определяются сложностью автомата  $A_d$ , а для  $(m-1)$  выходов он может оказаться сложнее, чем для  $m$  выходов.

Ничего определенного нельзя сказать и о числе существенных неисправностей, так как взамен одних неисправностей (приводящих к искажению выхода  $z_m$ ) появляются другие (в автомате  $A_d$ ).

*Вариант 4.* Схема встроенного контроля для  $m$  выходов содержит автомат  $A_d$  и свертку  $M2$  (см. рис. 2), а для  $(m-1)$  выходов — только свертку  $M2$  (по типу рис. 2). Таким образом, имеются выигрыш в аппаратуре СВК из-за отбрасывания выхода  $z_m$  и, кроме того, уменьшение списка неисправностей, который отслеживает СВК.

## 5. ПРИНЦИП ПОСТРОЕНИЯ СХЕМ ВСТРОЕННОГО КОНТРОЛЯ ДЛЯ СОВМЕСТНОЙ РАБОТЫ КАК С ТОЧНЫМИ, ТАК И С ПРИБЛИЖЕННЫМИ ДАННЫМИ

Рассмотренные в § 4 всевозможные ситуации дают картину деформирования СВК при переходе от работы с точными данными к работе с приближенными данными. Так как ДУ используется для работы и с теми, и с другими данными, то о контроле ДУ в режиме работы с приближенными данными надо задуматься еще на этапе проектирования ДУ.

Как видно из изложенного, никакого единого решения предложить нельзя. В одних случаях (см. вариант 1) выгоднее при работе с приближенными данными оставить СВК для точных данных и тем

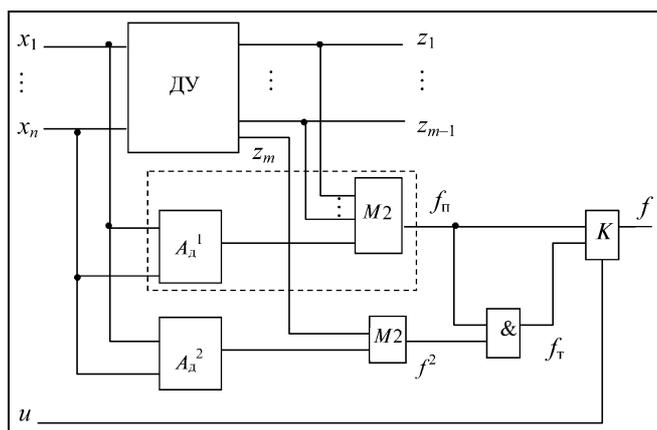


Рис. 4. Аппаратурно-совмещенный вид синтеза схемы встроенного контроля по модулю 2

самым отслеживать неточные выходы, так как никакого выигрыша в сокращении числа неисправностей получить нельзя. В других случаях (варианты 2 и 4) следует отключить от СВК неточные выходы. При этом должна быть предусмотрена возможность такого отключения и введен для этого управляющий вход. В остальных случаях (вариант 3) СВК надо синтезировать и для точных, и для приближенных данных заранее, на этапе проектирования ДУ.

Можно предложить два вида синтеза СВК: аппаратурно-раздельный и аппаратурно-совмещенный.

В первом случае синтез СВК для точных данных (СВК<sub>Т</sub>) и для приближенных данных (СВК<sub>П</sub>) осуществляется независимо друг от друга. Это самый невыгодный способ построения СВК в смысле аппаратурных затрат.

Во втором случае используются все возможности совмещения аппаратуры СВК<sub>Т</sub> и СВК<sub>П</sub>. А возможности эти немалые. На рис. 4 показано совмещение аппаратуры для метода синтеза по модулю 2, где СВК<sub>П</sub> (с выходом  $f_P$ ) очерчена штриховой линией, а СВК<sub>Т</sub> (с выходом  $f_T$ ) содержит СВК<sub>П</sub> плюс добавочную часть (с выходом  $f^2$ ), которая отсле-

живает неохваченный выход  $z_m$ ;  $K$  — коммутатор, который по сигналу управляющего входа  $u$  переключает выходы  $f_T$  и  $f_P$  в зависимости от режима работы ДУ. В целях дополнительного сокращения аппаратурных затрат следует автоматы  $A_d^1$  и  $A_d^2$  также пытаться синтезировать совместно.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Проанализировано, что означают для работы схемы встроенного контроля (СВК) неточные данные на входе и на выходе дискретного устройства. Показано, какие изменения претерпевает СВК при переходе к режиму работы с неточными данными. Отмечено, что отбрасывание неточных выходов дискретного устройства при переходе к этому режиму не обязательно приводит к уменьшению аппаратурной сложности СВК и не всегда дает выигрыш в сокращении числа существенных неисправностей. Выявлены случаи, когда синтез СВК для приближенных данных надо осуществлять вместе с синтезом СВК для точных данных, т. е. на этапе проектирования объекта контроля.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Дрозд А.В. Нетрадиционный взгляд на рабочее диагностирование вычислительных устройств // Проблемы управления. — 2008. — № 2. — С. 48–56.
2. Бахвалов Н.С. Численные методы. Ч. I. — М.: Наука, 1975.
3. Путинцев Н.Д. Аппаратный контроль управляющих цифровых вычислительных машин. — М.: Советское радио, 1966.
4. Пархоменко П.П., Согомонян Е.С. Основы технической диагностики. — М.: Энергоиздат, 1981.
5. Аксенова Г.П. Метод синтеза схем встроенного контроля для автоматов с памятью // Автоматика и телемеханика. — 1973. — № 2. — С. 109–116.

Статья представлена членом редколлегии П.П. Пархоменко.

Аксёнова Галина Петровна — канд. техн. наук, ст. науч. сотрудник, Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, г. Москва, ☎ (495) 334-77-39, e-mail: Vkhach@ipu.rssi.ru

## Новая книга

Бурков В.Н., Новиков Д.А., Щепкин А.В. Механизмы управления эколого-экономическими системами / Под ред. академика С.Н. Васильева. — М.: Изд-во физико-математической литературы, 2008. — 244 с.

Монография содержит результаты разработки и исследования комплекса оптимизационных, теоретико-игровых и имитационных моделей механизмов управления эколого-экономическими системами, включающего в себя механизмы: комплексного оценивания интегрального риска и ущерба, штрафов, платы за риск, финансирования снижения уровня риска, компенсации затрат на снижение уровня риска, продажи квот на уровень риска, аудита, снижения ожидаемого ущерба, экономической мотивации, оптимизации региональных программ, согласования интересов органов управления.

Для студентов вузов, аспирантов и специалистов по математическому моделированию и управлению эколого-экономическими, социально-экономическими и организационными системами.



# ВЫБОР ВАРИАНТА СИСТЕМЫ ЗАЩИТЫ ЦЕНТРОВ ОБРАБОТКИ ДАННЫХ

В.В. Павельев, С.В. Павельев

Предложена модель выбора варианта защиты выделенного центра обработки данных от аварий и катастроф в территориально-распределенной автоматизированной системе, построенной с использованием каналов глобальных сетей связи. В модели применен метод векторной стратификации многомерных объектов и методы анализа и управления рисками.

**Ключевые слова:** выбор вариантов, защита от аварий и катастроф, обработка данных, метод векторной стратификации, многомерный объект.

## ВВЕДЕНИЕ

Многие организации целенаправленно внедряют технологии обеспечения непрерывности и безопасности бизнеса в непредвиденных ситуациях. Поскольку затраты на внедрение и эксплуатацию таких технологий составляют значительную долю ресурсов многих организаций, важное значение приобретает проблема оптимизации этих затрат. Один из основных подходов, применяемых в настоящее время для оптимизации затрат на системы безопасности, состоит в анализе и управлении рисками [1—4]. В качестве меры риска используется пара показателей: определяемые экспертами мера возможности неблагоприятного события  $Q$  и последствия (ущерб)  $W$  при его наступлении. Оба показателя могут быть мультипликативным образом объединены в один:  $R = QW$ , что позволяет сравнивать ситуации с различными последствиями и возможностями их наступления [1].

Развитие информационных технологий позволило строить автоматизированные системы управления бизнес-процессами, распределенными на значительной территории (например, управление работой транснациональных корпораций). При этом необходимая информация сосредоточивается в Центрах обработки данных (ЦОД), обеспечивающих ее своевременное обновление и разрешенный доступ для клиентов.

Принятие ответственных решений по выбору схемы защиты ЦОД от аварий и катастроф в процессе проектировании территориально-распределенной автоматизированной системы требует всесторонней комплексной оценки рассматриваемых

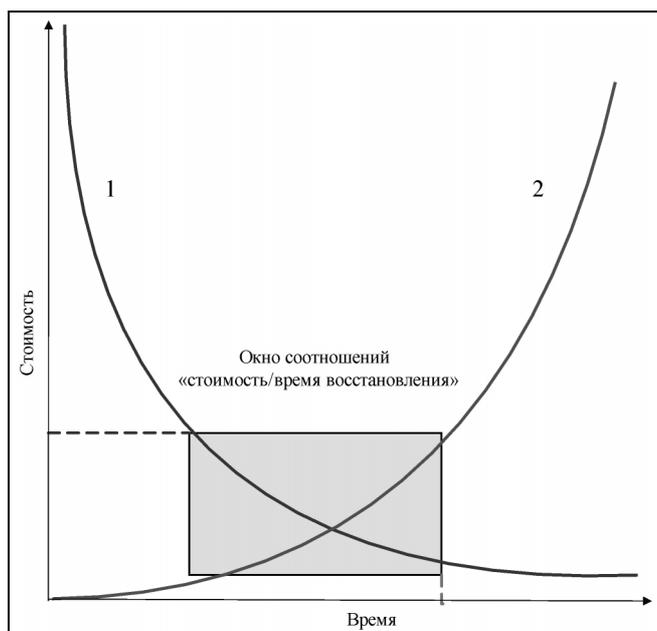
вариантов, механизм которой прозрачен и понятен для лиц, принимающих решения. В качестве основных частных критериев учитываются следующие показатели:

- возможный ущерб от нарушения нормальной работы автоматизированной системы в результате выхода из строя ЦОД;
- мера возможности наступления событий, наносящих существенный ущерб;
- затраты (капитальные и эксплуатационные) на мероприятия по защите ЦОД от аварий и катастроф.

В связи с этим, актуально решение задачи комплексной оценки и обоснованного выбора лучшего варианта системы защиты ЦОД из множества возможных альтернативных решений.

## 1. ОБЕСПЕЧЕНИЕ ТРЕБУЕМОГО УРОВНЯ ДОСТУПНОСТИ ИНФОРМАЦИОННЫХ РЕСУРСОВ В ТЕРРИТОРИАЛЬНО-РАСПРЕДЕЛЕННЫХ АВТОМАТИЗИРОВАННЫХ СИСТЕМАХ

При эксплуатации любых автоматизированных систем всегда существует определенная возможность разрушения информационных массивов (ИМ) и программных модулей (ПМ). Для обеспечения сохранности информации и повышения живучести системы обычно применяют методы резервирования — создается резерв из некоторого числа копий и (или) предысторий ИМ и ПМ, предусматривается также резервирование средств обработки данных и каналов связи. Каналы глобальных сетей связи позволяют территориально разнести узлы с резервом ИМ и ПМ, что существенно



**Рис. 1.** Зависимости финансовых потерь (2) из-за недоступности информационных ресурсов от времени их недоступности и стоимости (1) создания системы высокой доступности от допустимого времени простоя

повышает возможность сохранения доступности данных при различных авариях и катастрофических ситуациях (пожары, землетрясения, наводнения и др.), в случае возникновения которых могут быть уничтожены (или выведены из строя на длительный срок) все локально расположенные копии ИМ и ПМ (как основные, так и резервные) и (или) элементы поддерживающей инфраструктуры. При использовании каналов глобальных сетей связи и децентрализованном хранении резерва возможно быстрое возобновление работы при выходе из строя одного из узлов, содержащего рабочие информационные массивы и программные модули, и (или) обслуживающих его каналов связи. Зависимость финансовых потерь, которые несет организация из-за недоступности ИТ-сервисов (служб и средств, поддерживающих информационные технологии (ИТ), необходимые для реализации бизнес-процесса) от времени их недоступности, приведена на рис. 1. Здесь же приведена зависимость стоимости создания системы высокой доступности от допустимого времени простоя. Размер финансовых потерь, как правило, растет нелинейно, нелинейная зависимость наблюдается и у размера затрат на мероприятия по обеспечению непрерывности ИТ-сервисов от гарантированного времени восстановления. Оптимальное решение обычно лежит в области, которая на рисунке обозначена как окно соотношений «стоимость/время восстановления» [5].

## 2. ОСНОВНЫЕ СХЕМЫ ОРГАНИЗАЦИИ РЕЗЕРВИРОВАНИЯ ИНФОРМАЦИОННЫХ МАССИВОВ И ИТ-СЕРВИСОВ В ТЕРРИТОРИАЛЬНО-РАСПРЕДЕЛЕННЫХ СИСТЕМАХ

Архитектура современных территориально-распределенных автоматизированных систем обычно предусматривает один или несколько ЦОД, иногда находящихся на значительном расстоянии друг от друга. Приняв за основу семиуровневую классификацию построения систем резервирования и управления данными [5] и опираясь на отечественный и международный опыт построения территориально-распределенных ИТ-архитектур с выделенными ЦОД [6–8], авторы определили 10 следующих наиболее распространенных схем (уровней) организации резервирования информационных массивов и ИТ-сервисов в системах данного класса.

- Регулярное резервное копирование ИМ и ПМ с хранением резервных копий в том же помещении (здании).
- Регулярное резервное копирование с хранением резервных копий в отдельном помещении (здании). Данные на извлекаемых носителях регулярно вывозятся на хранение в отдельное защищенное помещение (здание).
- Применяются технологии резервного копирования и архивирования данных на резервную площадку. Дополнительно, в законсервированном состоянии, существует резервный центр.
- Применяются технологии резервного копирования и архивирования наиболее критичных данных на резервную площадку по каналам связи. Резервный центр не законсервирован полностью, а осуществляет по сети регулярное копирование наиболее часто обновляемых и самых критичных для бизнеса данных.
- Репликация данных на резервную площадку в асинхронном режиме (с небольшим запаздыванием).
- Репликация данных на резервную площадку в синхронном режиме.
- Оперативное резервирование. Режим постоянной готовности. Репликация данных на резервную площадку осуществляется в синхронном режиме.
- Вычислительный центр распределен по нескольким площадкам, находящимся на удалении не более 50 км. В этом случае из нескольких площадок можно создать единый вычислительный центр, рассматривая их просто как разные комнаты в одном здании.
- Вычислительный центр распределен по нескольким площадкам, находящимся на существенном удалении (в несколько тысяч километров).
- Вычислительный центр состоит из нескольких площадок, расположенных в пределах одного го-



рода, плюс одна или несколько площадок на существенном удалении (в другом регионе). Между площадками в пределах города организована синхронная репликация, на удаленные площадки осуществляется асинхронная репликация.

### 3. МОДЕЛЬ КОМПЛЕКСНОЙ ОЦЕНКИ И ВЫБОРА ВАРИАНТА ЗАЩИТЫ ЦЕНТРА ОБРАБОТКИ ДАННЫХ ОТ АВАРИЙ И КАТАСТРОФ

Широко распространены методики выбора лучших вариантов, в которых в качестве целевой функции принята аддитивная линейная свертка частных показателей с весовыми коэффициентами. В частности, такая свертка применяется в качестве целевой функции в известном методе анализа иерархий Т. Саати. Она предполагает инвариантность весового коэффициента каждого из частных показателей относительно изменений фиксированных значений остальных показателей, а также допустимость взаимной компенсации худших оценок по одним показателям лучшими оценками по другим показателям, что на практике далеко не всегда выполняется. Модель  $M = \langle A, S, F \rangle$  решения задачи целенаправленного выбора лучшего варианта на основе метода векторной стратификации [9] свободна от перечисленных недостатков. Здесь  $A$  — заданная формулировка цели,  $S$  — структура критериально-целевых свойств (показателей) оцениваемых объектов,  $F$  — решающее правило, функция выбора, комплексный критерий.

Особенности модели:

- в явном виде используется заданная документированная формулировка цели, отсутствующая в типичных моделях принятия решений, где это приводит к неопределенности в выборе системы показателей;

- путем дихотомической декомпозиции заданной формулировки цели строится древовидная структура показателей комплексной оценки (бинарная иерархия подцелей, а также характеристик и параметров средств, необходимых для их достижения, совокупность значений которых определяет степень достижения заданной цели);

- в узловых вершинах полученной древовидной структуры показателей размещаются «матрицы последовательной логической свертки» оценок по показателям нижнего уровня иерархии в комплексную оценку, в совокупности образующие решающее правило, комплексный критерий;

- имеется возможность не только выбрать лучший вариант из рассматриваемых, но и оптимизировать сочетание его параметров по комплексному критерию.

- значения показателей могут быть представлены как в числовом, так и в словесном выраже-

нии, например, оценка — очень высокая, высокая, средняя, низкая, очень низкая.

Оценка соответствия фактического значения  $P_i$  рассматриваемого показателя предъявляемым требованиям производится следующим образом (применяются два варианта оценки).

**Вариант 1.** Оценка  $Y$  фактического значения показателя  $P_i$ , измеренного в числовой шкале, вычисляется по формуле:  $Y = (P_i - P_{\min}) / (P_{\max} - P_{\min})$ , если  $P_{\max}$  — требуемое для полного достижения заданной цели идеальное значение измеряемого показателя, а  $P_{\min}$  — наибольшее из практически бесполезных для достижения заданной цели значение измеряемого показателя. Если наилучшим является наименьшее значение показателя, то оценка фактического значения показателя  $P_i$  определяется по формуле  $Y = (1/P_i - 1/P_{\max}) / (1/P_{\min} - 1/P_{\max})$ , где  $P_{\min}$  — идеальное значение измеряемого показателя, а  $P_{\max}$  — наименьшее из практически бесполезных для достижения заданной цели значение измеряемого показателя.

Далее с помощью вербально-числовой психофизической шкалы Харрингтона [10] формируется шкала стратификации и соответствующая ей балльная шкала:

- 5-я страта:  $0,8 < Y \leq 1 \Rightarrow 5$  баллов;
- 4-я страта:  $0,63 < Y \leq 0,8 \Rightarrow 4$  балла;
- 3-я страта:  $0,37 < Y \leq 0,63 \Rightarrow 3$  балла;
- 2-я страта:  $0,2 < Y \leq 0,37 \Rightarrow 2$  балла;
- 1-я страта:  $0 < Y \leq 0,2 \Rightarrow 1$  балл.

**Вариант 2.** Экспертная оценка  $Y$  фактического значения показателя  $P_i$ , включая нечисловое, определяется как соответствующая точка на балльной шкале, задаваемой следующими реперными точками на интервале  $P_{\max} - P_{\min}$ :

$Y = 5$  баллов  $\Rightarrow P_i = P_{\max}$  (или  $P_{\min}$ , в зависимости от смысла показателя) — требуемое для полного достижения заданной цели идеальное значение показателя,

$Y = 4$  балла  $\Rightarrow P_i = P_4$  (хорошее значение);

$Y = 3$  балла  $\Rightarrow P_i = P_3$  (удовлетворительное значение);

$Y = 2$  балла  $\Rightarrow P_i = P_2$  (плохое значение);

$Y = 1$  балл  $\Rightarrow P_i = P_{\min}$  (или  $P_{\max}$ , в зависимости от смысла показателя) — бесполезное для достижения заданной цели значение показателя.

Между реперными точками находятся страты с дробными значениями баллов:

5-я страта:  $4$  баллов  $< Y < 5$  баллов;

4-я страта:  $3$  баллов  $< Y < 4$  баллов;

3-я страта:  $2$  баллов  $< Y < 3$  баллов;

2-я страта:  $1$  баллов  $< Y < 2$  баллов;

1-я страта:  $Y \leq 1$  балла.

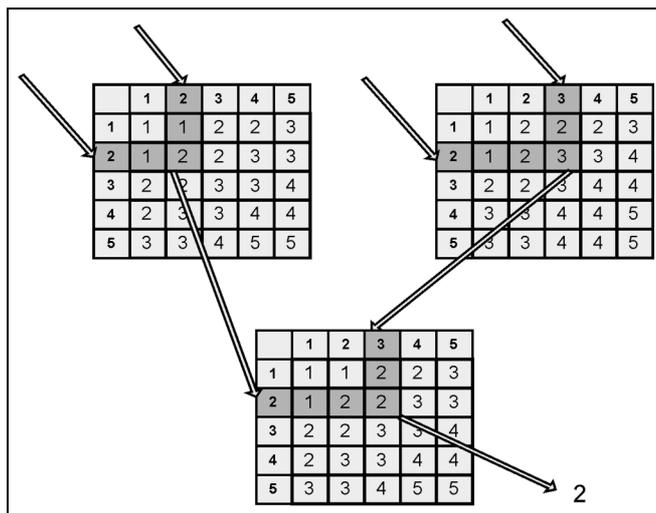


Рис. 2. Фрагмент решающего правила комплексной оценки

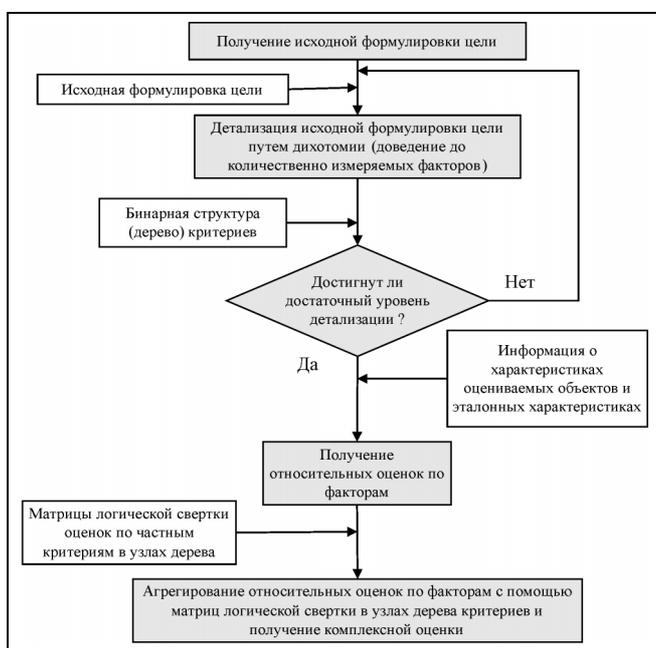


Рис. 3. Алгоритм комплексной оценки

По реперным точкам путем интерполяции строятся непрерывные функции  $Y = f(P)$ .

Для каждого узла древовидной структуры показателей лицо, принимающее решение, или эксперты заполняют матрицы размерности  $5 \times 5$  логической свертки частных оценок в баллах в обобщающую оценку. Строки матрицы соответствуют значениям оценок по одному из объединяемых показателей, столбцы — значениям оценок по второму показателю. Значения оценок варианта по обобщающему показателю проставляются на пере-

сечении столбцов и строк. Их определяет эксперт или лицо, принимающее решение, с учетом относительной значимости оценок по объединяемым показателям.

Заполненные матрицы логической свертки показателей, помещенные в соответствующих узлах древовидной структуры комплексного критерия, порождают решающее правило комплексной оценки. Оно может быть реализовано в виде компьютерной программы. Пример фрагмента такого правила представлен на рис. 2.

С помощью этого решающего правила все оцениваемые объекты можно разделить на 5 страт, упорядоченных по их предпочтительности. Самые лучшие отнесены к 5-й страте, самые худшие — к 1-й.

Алгоритм комплексной оценки представлен на рис. 3.

Рассмотрим решение задачи выбора лучшей схемы защиты ЦОД из десяти приведенных в § 2 наиболее распространенных и обеспеченных современными программными и техническими средствами схем.

Основные процедуры процесса комплексного оценивания и выбора лучшего варианта защиты состоят в следующем.

1. Формулировка цели: обеспечение минимального риска нарушения доступности информационных ресурсов ЦОД при приемлемой стоимости создания и эксплуатации системы защиты центра от аварий и катастроф.

2. С помощью регулярной процедуры путем дихотомии, формируется древовидная структура по-

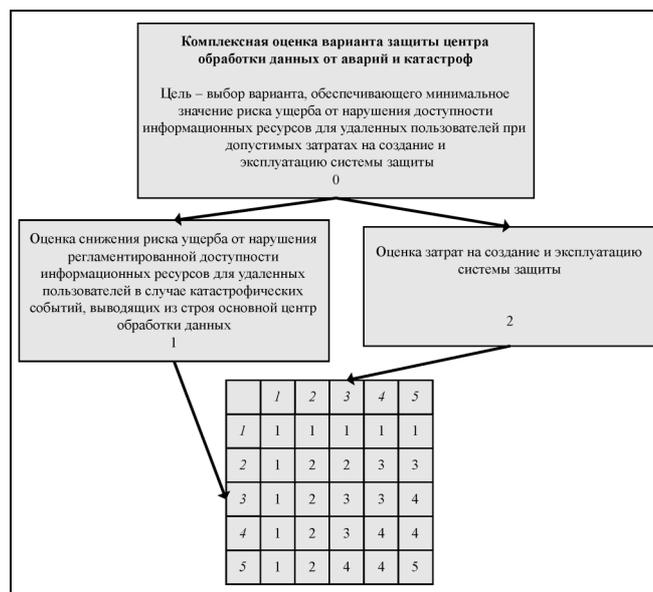


Рис. 4. Фрагмент древовидной структуры показателей комплексного критерия



## Фрагменты показателей групп П1 и П2

Код показателя	Наименование показателя
<i>Группа П1</i>	
1.1.1.1.2	Оценка снижения риска ущерба от недоступности средств обработки данных вследствие природных пожаров, наводнений и прочих негативных природных факторов
1.1.1.2.1.1	Оценка снижения риска ущерба от недоступности средств обработки данных вследствие аварий на опасных производствах
1.1.1.2.1.2	Оценка снижения риска ущерба от недоступности средств обработки данных вследствие прочих негативных техногенных воздействий
<i>Группа П2</i>	
2.1.1.1	Оценка затрат на закупку оборудования и организацию каналов связи производственной площадки
2.1.1.2	Оценка затрат на закупку оборудования и организацию каналов связи резервной площадки
2.1.2.1	Оценка затрат на оборудование помещений производственной площадки
2.1.2.2	Оценка затрат на оборудование помещений резервной площадки
2.2.1.1	Оценка текущих затрат на эксплуатацию системы, находящейся в производственном режиме
2.2.1.2	Оценка текущих затрат на эксплуатацию системы, находящейся в резерве
2.2.2	Оценка затрат на оплату труда персонала

казателей комплексного критерия, отражающая их причинно-следственную связь с формулировкой цели. Ограниченный объем статьи не позволяет привести структуру и состав показателей полностью. Фрагмент прикорневой части этой структуры представлен на рис. 4.

3. Выделение групп конечных показателей: группа П1 — показатели, определяющие снижение риска ущерба благодаря мерам защиты; группа П2 — показатели, определяющие размер затрат на создание системы защиты.

В таблице в качестве примера приведена часть показателей групп П1 и П2.

4. Определение путем опроса экспертов меры возможности реализации отдельных опасностей (находящихся на нижних ветвях дерева опасностей) в отношении выделенных групп объектов опасности в случае отсутствия мероприятий по защите ЦОД от аварий и катастроф.

5. Расчет ущерба в случае реализации опасностей (находящихся на нижних ветвях дерева опас-

ностей) при отсутствии мероприятий по защите ЦОД от аварий и катастроф.

6. Расчет суммарного риска нарушения доступности информационных ресурсов при отсутствии мероприятий по защите ЦОД от аварий и катастроф:  $R_{\Sigma} = \sum_i Q_i W_i$ , где  $Q_i$  и  $W_i$  — определяемая эк-

спертами мера возможности реализации опасностей и ущерб в случае их реализации в отношении  $i$ -й группы объектов опасности. Каждой группе объектов опасности соответствует риск  $R_i = Q_i W_i$ .

7. Расчет затрат на реализацию каждого варианта для имеющегося перечня вариантов защитных мероприятий:  $C_n = \sum_i C_{ni}$ , где  $n$  — номер рассматриваемого варианта,  $i$  — статья затрат в соответствии с деревом затрат.

8. Исключение из перечня рассматриваемых вариантов всех вариантов, не соответствующих условию

$$C_n \leq kR_{\Sigma}, \quad (1)$$

где  $R_{\Sigma}$  — суммарный риск нарушения доступности информационных ресурсов при отсутствии мероприятий по защите ЦОД от аварий и катастроф,  $k$  — коэффициент, отражающий склонность лица, принимающего решения к риску.

9. Расчет значений рисков для каждой группы объектов опасности для каждого из рассматриваемых вариантов после исключения вариантов, не соответствующих условию (1):  $R_{ni} = Q_{ni} W_{ni}$ , где  $n$  — номер варианта;  $i$  — номер группы опасностей, воздействующих на определенную группу объектов опасностей. Например,  $R_{n1.1.1.1.1} = Q_{n1.1.1.1.1} W_{n1.1.1.1.1}$  — риск ущерба от недоступности средств обработки данных по причине неработоспособности основного производственного оборудования или персонала вследствие ураганов и землетрясений.

10. Расчет размера снижения риска — для каждого из рассматриваемых вариантов вычисляются размеры снижения риска для каждой группы объектов опасности по сравнению с размерами рисков, рассчитанными для случая отсутствия мер защиты (см. п. 6) по формуле  $\Delta R_{ni} = R_i - R_{ni}$ .

11. Получение оценок по показателям — размеры величин снижения риска и постатейных расходов на создание систем защиты, характеризующих каждый из рассматриваемых вариантов, преобразуются в единую шкалу из пяти градаций.

12. Заполнение матриц логической свертки частных оценок в обобщающую оценку.

13. Оценка по комплексному критерию и выбор лучшего варианта защиты.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассмотрены основные стратегии обеспечения доступности информационных ресурсов и обеспечения непрерывности IT-сервисов в случае аварий и катастроф. На основе анализа российского и международного опыта построения территориально-распределенных IT-архитектур выделены 10 наиболее распространенных схем (уровней) защиты центров обработки данных, обеспеченных современными программно-техническими средствами. Разработана модель выбора лучшего варианта системы защиты ЦОД, позволяющая учитывать специфику конкретной организации в части соотношения ценности используемой информации и затрат на создание системы ее защиты. Используются как количественные (числовые), так и качественные (вербальные) исходные данные. Применение в модели матриц логической свертки оценок по частным критериям в обобщающую оценку обеспечивает прозрачность и наглядность решающего правила выбора для лиц, принимающих решения.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Вишняков Я.Д., Радаев Н.Н. Общая теория рисков. — М.: Изд. центр «Академия», 2007. — 390 с.
2. Соложенцев Е.Д. Сценарное логико-вероятностное управление риском в бизнесе и технике. — СПб.: Изд. дом «Бизнес-пресса», 2004. — 176 с.
3. Управление рисками: обзор потребительских подходов. Ч. I // Jet Info. — 2006. — № 11 (162). — С. 2—15
4. Управление рисками: обзор потребительских подходов. Ч. II // Там же. — № 12 (163). — С. 2—19.
5. IBM Total Storage Business Continuity Solutions Guide/ C.Warrick ets. — International Technical Support Organization. — IBM Redbooks SG24-6547-02. — August 2005. — P. 49.
6. Голубев Д.Л. Распределенные центры обработки данных // Jet Info. — 2006. — № 5 (156). — С. 3—15.
7. Массиглиа П. Технологии управления хранением данных компании VERITAS Software // Jet Info. — 2001. — N 8 (99). — С. 3—44.
8. Гончаров А. Методы защиты данных: обзор решений // Storage News — 2006. — № 2 (27). — С. 20—23.
9. Готов В. А., Павельев В.В. Векторная стратификация. — М.: Наука, 1984. — 95 с.
10. Harrington E.C. The Desirability Function // Industrial Quality control. — 1965. — Vol. 21, N 10. — P. 494—498.

Статья представлена к публикации членом редколлегии В.В. Кульбой.

Павельев Владимир Васильевич — ст. науч. сотрудник, Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, г. Москва, ☎ (495) 334-88-21, e-mail: pavvvs@ipu.ru,

Павельев Сергей Владимирович — вед. эксперт, Департамент информатизации ОАО «Федеральная сетевая компания Единой энергетической системы РФ», г. Москва, ☎ (985) 921-76-07, e-mail: paveljev-sv@rao.elektra.ru

## Новая книга

**Вишневецкий В.М., Семенова О.В. Системы поллинга: теория и применение в широкополосных беспроводных сетях. — М.: Техносфера, 2007. — 312 с.**

При проектировании и оценке производительности беспроводных сетей передачи информации с централизованным управлением широко применяются модели поллинга (циклического опроса), которые активно разрабатываются и исследуются с конца 1950-х гг.

Систематизация и обобщение теоретических результатов, полученных в данной области до 1985 г., проведены в монографии Х. Такаги "Analysis of polling systems" (MIT Press, 1986). Дальнейшее развитие теоретических результатов в этом направлении, опубликованных до 1995 г., нашло отражение в монографии С. Борста "Polling systems" (Amsterdam: Stichting Mathematisch Centrum, 1996). Однако быстрое развитие телекоммуникационных систем и сетей, в частности, систем сотовой связи и широкополосных беспроводных сетей, потребовало разработки новых методов анализа и синтеза систем поллинга. Поэтому в последнее десятилетие появилось значительное число работ по системам поллинга в этом направлении.

Настоящая монография посвящена обобщению и систематизации методов исследования стохастических моделей поллинга и применения их для проектирования широкополосных беспроводных сетей Wi-Fi и Wi-MAX с централизованным механизмом управления. Рассмотрены новые модели, адекватно описывающие функционирование широкополосных беспроводных сетей под управлением протоколов IEEE 802.11 и IEEE 802.16. Даны определение и классификация систем поллинга. Изложены условия стационарности и методы анализа и оптимизации характеристик систем поллинга. Представлены системы с механизмом резервирования и пороговыми дисциплинами обслуживания, а также новые модели с ограниченным обслуживанием очередей, анализ которых представляет как теоретический, так и практический интерес. Рассмотрены приоритетные системы, представляющие собой отдельный класс системы поллинга. Приведены численные результаты проектирования и оценки производительности широкополосных беспроводных сетей с централизованным управлением и механизмом циклического опроса.

Значительный интерес представляют вошедшие в книгу оригинальные теоретические результаты авторов по адаптивному поллингу и практическое использование этих результатов в разработанном ИППИ РАН аппаратно-программном комплексе радиоэлектронной системы РАПИРА, которая в настоящее время серийно выпускается отечественной промышленностью.

Монография отражает дальнейшее развитие теоретических основ проектирования компьютерных сетей и может рассматриваться как второй том книги В.М. Вишневецкого "Теоретические основы проектирования компьютерных сетей" (М.: Техносфера, 2003).

Для специалистов в области стохастических систем, проектировщиков компьютерных сетей, аспирантов и студентов высших учебных заведений.

# Пороговые эффекты в управлении популяционной динамикой раковых клеток в организме

Е.В. Инжеваткин, В.А. Неговорова, А.А. Савченко, В.А. Слепков, Е.В. Слепов,  
В.Г. Суховольский, Р.Г. Хлебопрос

В рамках популяционной модели взаимодействия опухолевых клеток с организмом, основанной на феномене локального межклеточного взаимодействия, рассмотрены проблемы возникновения, роста и формообразования раковых опухолей в однородной ткани, дана оценка статистического распределения характерных размеров опухолей в организме. Показаны возможности управления динамикой опухолевых клеток. Предложен метод оценки эффектов воздействия экзо- и эндогенных факторов на риск развития онкологического заболевания. Приведены результаты экспериментов, подтверждающих теоретические положения.

**Ключевые слова:** популяционная динамика, рак, статистическое распределение опухолей, метастазирование, пороговый эффект.

## ВВЕДЕНИЕ

Изучению взаимодействия злокачественной опухоли с многоклеточным организмом, в особенности с организмом человека, посвящена более чем обширная литература последних десятилетий XX и начала XXI вв. В настоящей работе с помощью теоретических и экспериментальных методов предпринята попытка развить популяционный подход к системе раковая «опухоль—организм» в рамках обобщенной модели «хищник—жертва». При этом особое внимание уделяется выявлению пороговых эффектов в динамике популяции раковых клеток.

## 1. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ОПУХОЛЕВЫХ КЛЕТОК С ОРГАНИЗМОМ

Моделирование роста раковых опухолей широко представлено в современной литературе (см., например, работы [1—8]). Однако существующие математические модели не учитывают два важных феномена:

— неравноправное в смысле частоты деления клеток положение раковых клеток в зависимости от расстояния до поверхности раздела (этот пробел был существенно восполнен в работе [9]);

— контактное взаимодействие между популяцией раковых клеток и нормальными клетками ткани [10, 11], одним из проявлений которого является зависимость скорости деления опухолевых клеток от их локальной концентрации [12—14]. Здесь мы развиваем предложенный нами ранее подход, основанный на использовании функции размножения популяции [15] и впоследствии модифицированный авторами с учетом действия локального межклеточного взаимодействия [16, 17].

При построении модели будем исходить из следующих положений.

- При низких концентрациях опухолевых клеток в ткани их деление подавляется в результате локального взаимодействия со здоровыми клетками даже при нулевой активности иммунной системы. По мере увеличения концентрации  $x$  раковых клеток удельная скорость их размножения  $a(x)$  начинает расти, достигая максимального значения, после чего снижается до отрицательных значений. Иначе говоря:  $a(0) = 0$ ,  $a(\infty) < 0$ , и существует такая точка  $x_0 > 0$ , что  $a'(x) > 0$  при  $0 < x < x_0$  и  $a'(x) < 0$  при  $x > x_0$ , причем  $a(x_0) > 0$ .
- В организме происходит постоянный прирост численности опухолевых клеток в результате мутаций под действием канцерогенных факто-

ров и их постоянная убыль в силу естественной смертности.

- При низких концентрациях опухолевых клеток и на первых двух стадиях онкологического заболевания опухолевые клетки уничтожаются особым видом лимфоцитов — НК-киллерами — число и активность которых возрастает до некоторого постоянного значения. Математически динамика НК-киллеров задается уравнением  $\dot{y} = c(x) - dy$ , где  $c(x)$  — монотонно возрастающая функция, описывающая производство организмом НК-киллеров,  $c(0) = c_1$ ,  $c(\infty) = c_2$ ,  $0 < c_1 < c_2$ ,  $c'(x) < 0$ , а член  $dy$ , где  $d$  — положительная константа, описывает естественную смертность НК-киллеров.
- НК-киллерам свойственен эффект «насыщения». Это означает, что функция  $b(x)$ , описывающая число жертв, истребляемых в единицу времени одним киллером, принимает нулевое значение в точке  $x = 0$  и асимптотически стремится к некоторой константе  $b > 0$ .

Итак, запишем популяционную модель взаимодействия опухолевых клеток с организмом:

$$\dot{x} = a(x)x - b(x)y - \sigma x + \alpha, \quad \dot{y} = c(x) - dy, \quad (1)$$

где  $\alpha$ ,  $\sigma$  и  $d$  — положительные константы, а  $a(x)$ ,  $b(x)$  и  $c(x)$  — гладкие функции, определенные на положительной полуоси  $x \geq 0$  и удовлетворяющие приведенным выше условиям. В первом уравнении член  $\sigma x$  описывает естественную смертность опухолевых клеток, а константа  $\alpha$  — их постоянный прирост в силу действия канцерогенных факторов.

На рис. 1 изображены возможные варианты взаимного расположения главных изоклин системы (1)  $y = [(a(x) - \sigma)x + \alpha]/b(x)$  и  $y = c(x)/d$ . Как

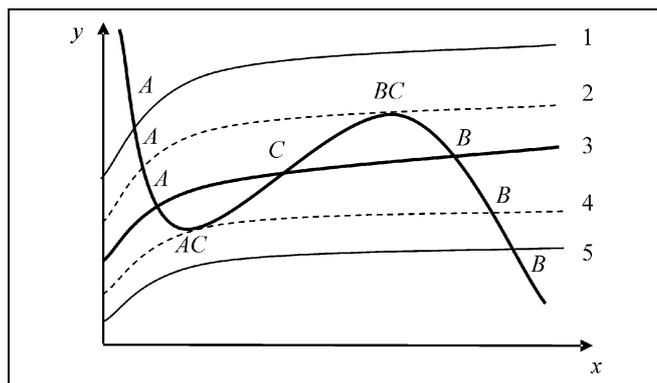


Рис. 1. Возможные варианты взаимного расположения главных изоклин системы (1):

1, 5 — имеется единственная стационарная точка с низким (A) и высоким (B) количеством опухолевых клеток; 3 — система относится к триггерному типу с тремя стационарными точками A, B и C; 2, 4 — бифуркация системы с переходом через вырожденное состояние седло-узел BC или AC

можно видеть, изоклина горизонтальных наклонов представляет собой монотонно возрастающую кривую, изоклина вертикальных наклонов — немонотонную кривую с двумя экстремумами.

Варианты 1 и 5 характеризуются наличием единственной стационарной точки, узла или фокуса, которые могут быть устойчивыми или неустойчивыми. Если равновесия устойчивы, система стабилизируется в соответствующих стационарных точках с низкой (1) или высокой (5) численностью опухолевых клеток в организме, если неустойчивы — система описывает циклические колебания вокруг стационарных точек. Случай 1 соответствует ситуации, когда иммунная система полностью защищает ткань от возникновения злокачественных опухолей. В случае 5 реакция иммунной системы в силу каких-либо факторов подавлена, и происходит тотальное распространение раковой опухоли в организме. Варианты 2 и 4 соответствуют вырожденным состояниям, когда в системе возникает бифуркация, связанная с появлением особой точки типа седло-узел. Особый интерес представляет случай 3, когда система снова становится грубой и характеризуется наличием трех особых точек — седла и двух узлов/фокусов. Далее нас будет интересовать случай триггерной системы, по-видимому, основной в динамике онкологических заболеваний, когда крайние стационарные точки устойчивы. Фазовый портрет соответствующей динамической системы изображен на рис. 2.

Фазовая плоскость системы (1) разделяется сепаратрисой на две области притяжения устойчивых точек A и B — изображающие точки стремятся к одной из них, пока в силу каких-либо внешних факторов не окажутся переброшенными через сепаратрису, после чего система стабилизируется во второй устойчивой точке. С этой особенностью триггерных систем связан ряд возможностей управления динамикой системы в смысле понижения вероятности развития неблагоприятного для организма сценария.

Первый тип возможностей связан с переброшением изображающей точки  $(x, y)$  через сепаратрису, чтобы она оказалась «слева» от нее при неизменном состоянии самой системы. Этого можно достичь либо резким уменьшением количества опухолевых клеток в ткани, либо повышением концентрации антител. Первый способ широко применяется в медицинской практике. Что касается второго, то его применение в настоящее время ограничено, по-видимому, только сферой инфекционных заболеваний. Однако это направление может также оказаться весьма перспективным в практической онкологии.

Второй тип возможностей управления математически описывается варьированием параметров, входящих в правые части уравнений (1), с целью изменить положения самих стационарных точек.

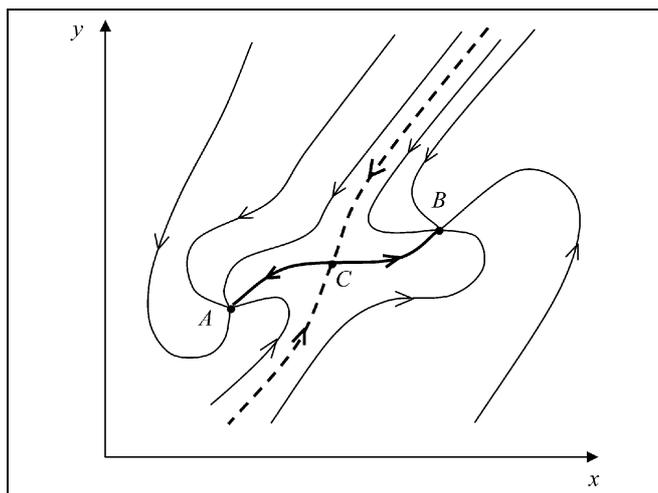


Рис. 2. Фазовый портрет системы (1) с двумя устойчивыми стационарными точками  $A$  и  $B$  и одной седловой точкой  $C$

Например, даже незначительный сдвиг седловой точки  $C$  вправо может означать существенное снижение вероятности развития онкологического заболевания в организме. Математически это достигается поднятием изоклины горизонтальных наклонов, т. е. повышением скорости производства антител, или опусканием изоклины вертикальных наклонов, т. е. увеличением коэффициента хищничества  $b(x)$  и повышения коэффициента смертности опухолевых клеток  $d$ . Биологическая интерпретация этого типа контроля состоит в повышении уровня производства и скорости активации НК-киллеров с одновременным применением терапевтических мер, направленных на создание неблагоприятных условий для размножения злокачественных клеток.

## 2. РОСТ И ФОРМООБРАЗОВАНИЕ СОЛИДНЫХ ФОРМ РАКОВОЙ ОПУХОЛИ

Применим полученную модель к динамике роста солидных (твердых) опухолей в частном случае узкого фазового портрета, когда динамика размножения жертвы зависит только от ее численности  $x$ . С биологической точки зрения, сужение фазового портрета законно в следующих случаях:

- заболевание носит начальный характер, иммунная система еще не активирована, и динамика опухолевых клеток определяется только эффектами локального взаимодействия;
- организм настолько ослаблен, что деятельность иммунной системы полностью подавлена;
- организм подвергается интенсивному терапевтическому воздействию, по сравнению с которым колебаниями уровня НК-киллеров в организме можно пренебречь;

— иммунная система уже прошла все первоначальные стадии активации и вышла на стабильный уровень функционирования с достаточно высоким уровнем производства и активации антител, чтобы их локальные колебания можно было считать эффектами второго порядка на сравнительно больших временных интервалах.

В этих предположениях динамика опухолевых функций описывается первым уравнением системы (1), где положено  $y(x) = y_0 = \text{const}$ , т. е.  $\dot{x} = \varphi(x) = a(x)x - b(x)y_0 - \sigma x + \alpha$ . В зависимости от величины  $y_0$  и функции  $b(x)$  возможны три принципиальных варианта расположения кривой размножения  $V(x)$  (рис. 3). Нас будет по-прежнему интересовать вариант с двумя устойчивыми стационарными точками  $x_1$  и  $x_3$  и одной неустойчивой  $x_2$ .

Далее для простоты будем рассматривать задачу в двумерном случае, считая, что опухолевый рост определяется преимущественно локальным взаимодействием с клетками ткани, т. е. процессами, происходящими в некоторой окрестности поверхности опухоли и зависящими от ее локальной кривизны [9]. Будем также считать, что из-за дефицита кислорода и питательных веществ раковые клетки размножаются только вблизи поверхности опухоли. Рассмотрим сферическую опухоль радиуса  $R$ , состоящую из раковых клеток радиуса  $r$  и находящуюся в среде нераковых клеток, имеющих тот же радиус  $r$ . Определим концентрацию  $v$  раковых клеток на границе опухоли как отношение  $S_c / (S_c + S_t)$ , где  $S_c = 4\pi r(R - r)$  — площадь одного слоя злокачественных клеток, примыкающих к границе опухоли изнутри, а  $S_t = 4\pi r(R + r)$  — площадь одного слоя клеток ткани, примыкающего к опухоли снаружи. Тогда  $v = (R - r) / 2R$ ,  $R = r / (1 - 2v)$ ,  $\dot{R} = 2rv / (1 - v)^2$ . Пусть  $V = 2\pi R \dot{R}$  — скорость роста площади, занимаемой раковыми клетками. С другой стороны, поскольку скорость  $V$  равна площади раковых клеток, произведенных за едини-

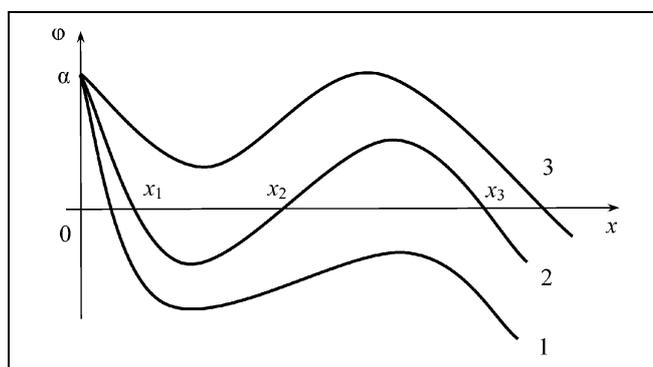


Рис. 3. Зависимость скорости  $\varphi(x)$  размножения опухолевых клеток от их локальной концентрации  $x$  в случае узкого фазового портрета

цу времени площадью  $S_c + S_p$ , то  $V = (S_c + S_p)\varphi(v) = 8\pi r\varphi(v)$ , следовательно  $\dot{R} = 4r\varphi(v)$ , и получаем уравнение для роста концентрации раковых клеток на границе опухоли  $\dot{v} = 2\varphi(v)(1 - 2v)^2 = \psi(v)$ . График  $\psi(v)$  изображен на рис. 4; для сравнения на этом же рисунке штрихами изображен график функции  $\varphi(v)$ .

Запишем выражения  $\varphi(v)$  для минимального и максимального радиусов сферической опухоли, соответствующие двум устойчивым точкам  $v_1$  и  $v_2$ , а также пороговое значение, при достижении которого опухоль начинает расти, пока не достигнет максимального значения:

$$R_1 = r/(1 - 2v_1), \quad R_2 = r/(1 - 2v_2), \quad R_3 = r/(1 - 2v_3).$$

При достижении радиуса  $R_0$  на границе раковой опухоли происходит наиболее быстрое размножение раковых клеток. В пределах между  $R_2$  и  $R_0$  сферическая форма роста устойчива по отношению к малым деформациям, меняющим кривизну поверхности. Например, при сплющивании сферы в эллипсоид участки с большей кривизной начнут расти медленнее, а с меньшей — быстрее, и опухоль снова примет сферическую форму. Кроме того, образующиеся на поверхности шара выступы и углубления будут сглаживаться, так как устойчива сферическая форма опухоли (рис. 5, а).

Когда характерный размер опухоли превышает  $R_0$ , но не достигает  $R_3$ , то в силу обратного процесса сферическая форма роста опухоли перестает быть устойчивой — небольшие деформации нарастают, и опухоль приобретает форму, например, вытянутого эллипсоида. Одновременно с этим поверхность эллипсоида или другой формы приобретает шероховатость (рис. 5, б). Далее, пока радиус кривизны на остром конце эллипсоида превышает значение  $R_0$ , на нем будет достигаться наибольшая скорость размножения опухолевых клеток, и он продолжает вытягиваться, приобретая форму тяжа

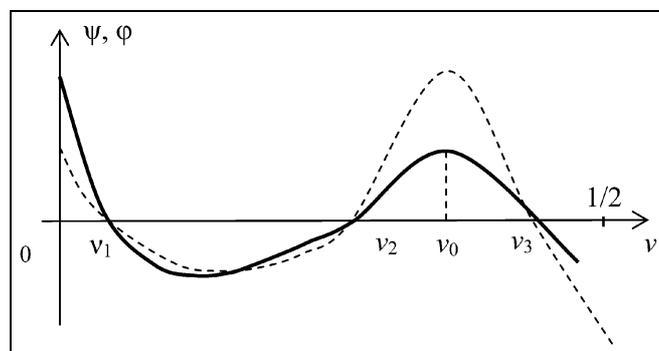


Рис. 4. Скорость  $\psi(v)$  роста концентрации раковых клеток на границе опухоли (сплошная линия) и исходная функция размножения  $\varphi(v)$  (штриховая линия)

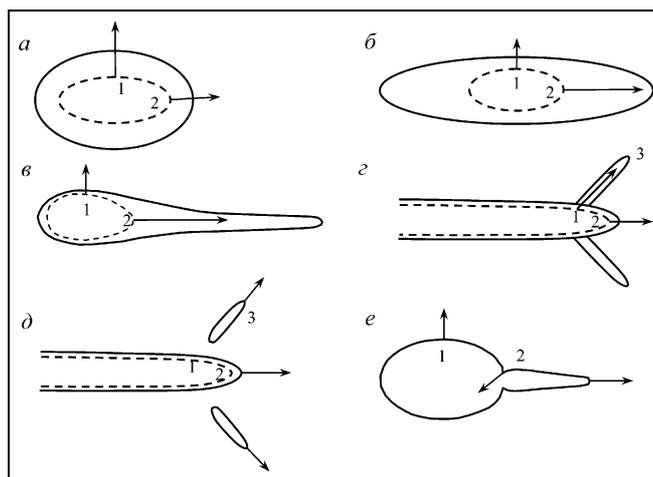


Рис. 5. Рост и формообразование опухоли при малых деформациях: штрихами изображена деформированная опухоль, сплошной линией — форма опухоли через некоторое время после деформации; стрелками показаны величина и направление роста опухоли в соответствующих точках, обозначенных цифрами 1, 2, 3; а — исходная сферическая опухоль имеет радиус кривизны между  $R_2$  и  $R_0$ ; б — исходная сферическая опухоль имеет радиус кривизны между  $R_0$  и  $R_3$ ; в — радиус кривизны на конце «эллипсоида» превышает  $R_0$ ; г — радиус кривизны на конце тяжа меньше  $R_0$ ; д — отрыв отростков от тяжа на участке с отрицательной кривизной; е — отрыв тяжа от основной опухоли и развитие метастазы; при достижении объема большего, чем  $R_3$ , рост опухоли происходит исключительно из-за возрастания шероховатостей, тяжей, отростков и древовидных структур

(рис. 5, в). Если же на конце тяжа радиус кривизны станет меньшим, чем  $R_0$ , то участки с наиболее быстрым ростом клеток будут расположены на некотором расстоянии от конца тяжа, и в этих местах могут появиться новые отростки, придающие тяжу форму разветвления (рис. 5, г), с возможным отрывом отростков на участках отрицательной кривизны, где скорость роста раковых клеток отрицательна (рис. 5, д). Если участок с отрицательным радиусом кривизны образуется в месте соединения тяжа с основной опухолью, то возможны отрыв тяжа и дальнейшая его эволюция в форме метастазы (рис. 5, е).

### 3. СТАТИСТИЧЕСКОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ОПУХОЛЕЙ В ОРГАНИЗМЕ

Пусть спонтанное появление опухоли радиуса  $R = R(v)$  в некоторой ткани задается функцией плотности вероятности  $\eta(v)$ , а скорость роста плотности опухоли на границе уравнением

$$\dot{v} = \psi(v), \quad (2)$$

причем  $v_1 < v < v_2$ . Требуется найти среднюю плотность вероятности распределения опухолей  $p(v)$  в



ткани за время  $T$  после начала процесса. Пусть общее решение уравнения (2) задается функцией

$$v = \bar{v}(t, v_0), \quad (3)$$

где  $v_0$  — значение переменной  $v$  в начальный момент времени  $t = 0$  и  $v_1 < v_0 < v_2$ . Функция  $\bar{v}(t, v_0)$  задает состояние опухоли через время  $t$  после того, как она имела на границе плотность  $v_0$ . Из выражения (3) получаем, что

$$dv = \frac{\partial \bar{v}}{\partial v_0} dv_0 \quad (4)$$

для каждого фиксированного момента  $t$ . Очевидно, что вероятности, соответствующие интервалу  $dv_0$  и его образу  $dv$ , равны, т. е.  $\eta(v)dv = \eta(v_0)dv_0$ , где  $v_1 \leq v \leq v_2$ ,  $v_1 \leq v_0 \leq v_2$  и  $v = v(t, v_0)$ . Из последнего равенства и формулы (4) получаем

$$\eta(v) \frac{\partial \bar{v}}{\partial v_0} dv_0 = \eta(v_0) dv_0. \quad (5)$$

Предполагая, что в каждый момент  $t$  функция  $v$  имеет обратную функцию  $v_0 = \bar{v}_0(v, t)$ , перепишем выражение (5) в виде  $\eta(v) = \frac{\partial \bar{v}_0}{\partial v} \eta(v_0)$  и получим:

$$p(v, t) = \begin{cases} \frac{\partial \bar{v}_0}{\partial v} \eta(\bar{v}_0(v, t)), & v \in [\bar{v}(t, v_1), \bar{v}(t, v_2)], \\ 0, & v \notin [\bar{v}(t, v_1), \bar{v}(t, v_2)], \end{cases} \quad (6)$$

$$p(v) = \frac{1}{T} \int_0^T p(v, t) dt, \quad v_1 \leq v \leq v_2.$$

Положим  $\eta(v) = e^{-v}$ , в качестве функции  $\psi(v)$  используем кусочно-линейное приближение  $\dot{v} = \chi(v)$  (рис. 6), где  $v^1 = (v_1 + v_2)/2$ ,  $v^2 = (v_2 + v_3)/2$ .

Обозначим  $\Delta v^1 = v_2 - v_1$ ,  $\Delta v^2 = v_3 - v_2$ ,  $\frac{\alpha^0}{v_1} = \frac{2\alpha^1}{\Delta v^1} = \frac{2\alpha^2}{\Delta v^2} = \alpha$ ,  $\varepsilon = e^{-\alpha T}$ . В силу большой величины  $T$  далее будем предполагать, что  $\varepsilon$  удовлетворяет всем требуемым условиям малости. Функцию  $p(v)$  будем искать отдельно на интервалах  $[0, v_1]$ ,  $[v_1, v_2]$ ,  $[v_2, v_3]$  и  $[v_3, v^3]$ . После интегрирования на участке  $[0, v_1]$  получаем

$$p(v) = \begin{cases} \frac{e^{-v_1}}{\alpha T} \frac{e^{v_1 - v} - e^{-v_1 - v}}{v_1 - v}, & 0 \leq v \leq v_1 T, \\ \frac{e^{-v_1}}{\alpha T} \frac{e^{(v_1 - v)\alpha T} - e^{-v_1 - v}}{v_1 - v}, & v_1 T \leq v \leq v_1. \end{cases}$$

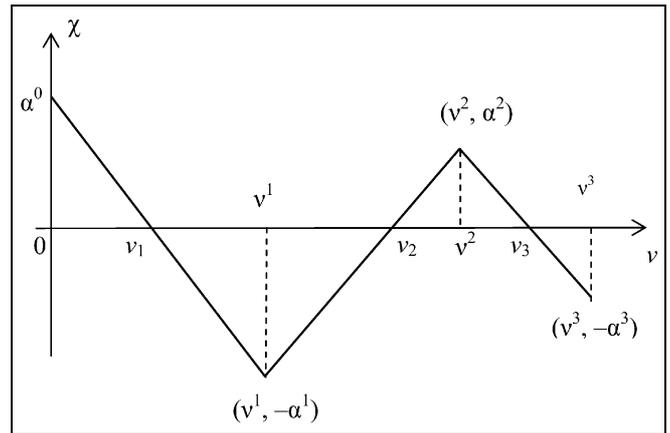


Рис. 6. Кусочно-линейная функция  $\dot{v} = \chi(v)$  в качестве приближения функции  $\psi(v)$

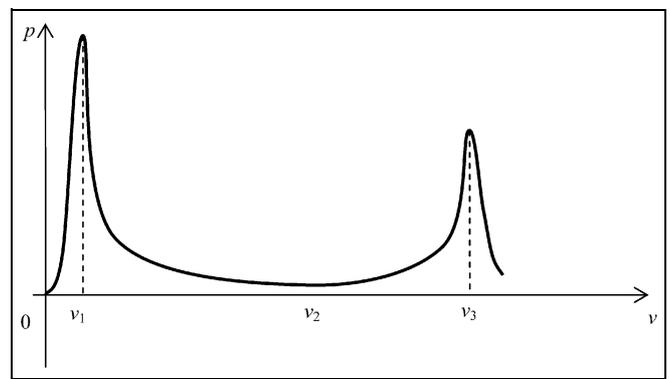
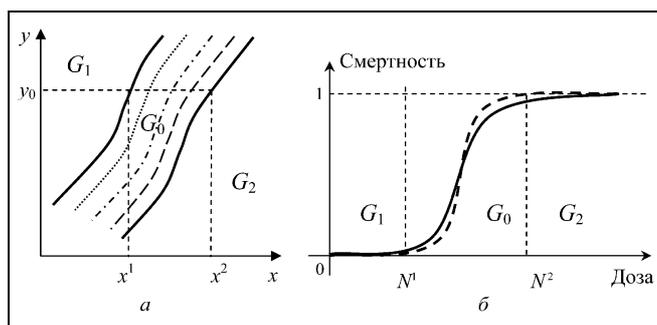


Рис. 7. Функция плотности вероятности, описывающая статистическое распределение опухолей в ткани на больших значениях  $T$

На остальных участках значений  $v$  рассуждения проводятся аналогичным образом, при этом легко убедиться, что полное статистическое распределение на больших значениях  $T$  имеет вид, изображенный на рис. 7 [18]. Как можно видеть, в точках устойчивого равновесия  $v_1$  и  $v_3$  имеются два выраженных пика.

#### 4. КАЧЕСТВЕННЫЙ ПОДХОД К ОЦЕНКЕ ВЛИЯНИЯ ЭКЗОГЕННЫХ И ЭНДОГЕННЫХ ФАКТОРОВ НА РИСК РАЗВИТИЯ РАКОВОГО ЗАБОЛЕВАНИЯ

Как мы уже отмечали, риск развития раковых заболеваний связан с положением второй точки пересечения  $C$  (см. рис. 2). Принципиальное отличие нашего подхода к изучению воздействия внешних факторов на развитие ракового заболевания в том и состоит, что мы рассматриваем не влияние факторов на выздоровление или на замедление развития рака у уже заболевших индивидов, а их влияние на вероятность развития рака у здоровых индивидов.



**Рис. 8.** Распределение кривых размножения и пороговых точек, разделяющих всю плоскость на три области развития ракового заболевания (а); зависимость смертности от дозы инокулированных клеток (б); сплошная линия — контрольная группа, штриховая линия — подопытные группы

Пусть в эксперименте участвуют  $N$  подопытных животных. Тогда на фазовой плоскости все сепаратрисы их фазовых портретов будут заключены внутри некоторой области  $G_0$ , содержащей все седловые точки  $C$ , слева от нее находится область  $G_1$  с устойчивыми точками  $A$ , и область справа от нее  $G_2$  с устойчивыми точками  $B$  (рис. 8). Согласно теории, при введении здоровым животным с активностью иммунной системы  $y_0$  различных доз опухолевых клеток риск развития ракового заболевания должен быть близок к нулю внутри области  $G_1$  (т. е. при  $0 < x < x^1$ ) и к единице внутри области  $G_2$  ( $x > x^2$ ), принимая все значения между нулем и единицей внутри области  $G_0$  ( $x^1 < x < x^2$ ).

В координатах смертности и дозы инокулированных раковых клеток статистическая картина представляет собой  $S$ -образную кривую, изображенную на рис. 8, б сплошной линией. При этом дозы  $N^1$  и  $N^2$  соответствуют концентрациям в ткани  $x_1$  и  $x_2$  на рис. 3. При некоторых внешних воздействиях соответствующая кривая может сместиться и поменять форму, опустившись ниже контрольной кривой при благоприятных для организма дозах воздействия и поднявшись выше ее при неблагоприятных. Все эти рассуждения без изменений переносятся и на случай исследования воздействия эндогенных факторов.

## 5. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ПОДТВЕРЖДЕНИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКИХ ПОЛОЖЕНИЙ

### 5.1. Влияние режима питания на рост опухолей у экспериментальных животных

По утверждению ряда исследователей, в условиях голодания или недостаточного объема пита-

ния организма интенсивно питающиеся злокачественные клетки зачастую погибают [19, 20]. В связи с этим рекомендуют различные виды диет и голоданий, направленных на профилактику и лечение раковых заболеваний [21]. Между тем, терапевтический эффект голодания при развитии злокачественных новообразований до сих пор не подтвержден достоверными экспериментальными данными. Однако при исследовании влияния режима питания, связанного с потреблением экспериментальными животными различных объемов пищи, на возникновение и рост опухолей при введении в организм пороговых количеств опухолевых клеток было обнаружено, что в таких условиях опухоль возникает только у части животных, при этом получены статистически значимые подтверждения того, что режим кормления способен влиять на соотношение долей заболевших и не заболевших животных [22, 23].

### 5.2. Связь онкологической заболеваемости с биохимическим статусом лимфоцитов крови

Известно, что вероятность возникновения злокачественных опухолей в организме в большой степени зависит от функционального состояния иммунной системы. В свою очередь, способность к адекватному функционированию иммунных клеток, как и любых других, связана с характером протекания в них метаболических процессов, поскольку именно метаболические процессы обеспечивают клетку пластическими и энергетическими ресурсами, необходимыми для осуществления функциональных реакций [24–26].

Следовательно, используя в качестве экспериментальной модели злокачественного новообразования перевиваемую опухоль и исследуя метаболические особенности лимфоцитов животных непосредственно перед введением опухолевых клеток в организм, можно выявить закономерности, обуславливающие возникновение опухоли у одних, и ее отсутствие у других животных. При этом важно вводить животным такое количество клеток опухоли, которое находится ниже порога 100 % прививаемости.

Нами были изучены метаболические особенности лимфоцитов периферической крови здоровых мышей и связь этих особенностей с последующей прививаемостью этим животным экспериментальной злокачественной опухоли — асцитной карциномы Эрлиха. На основе полученных результатов мы предполагаем, что уровень активности ферментов метаболизма лимфоцитов периферической крови может иметь прогностическое значение для возникновения и дальнейшего хода онкологического процесса [23].



## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Популяционный подход к исследованию динамики злокачественных клеток в организме позволил по-новому взглянуть на вероятность возникновения опухоли в данном организме. Открывается возможность прогнозирования развития ракового заболевания в организме и управления вероятностью его возникновения. Выводы из предложенной математической модели эволюции в организме солидных и диффузных форм опухолей подтверждаются проведенными экспериментами.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Adam J. A simplified model of tumor growth // *Math. Biosci.* — 1986. — N 81. — P. 229–244.
2. Dewanji A., Moolgavkar S., Luebeck E. Two-mutation model for carcinogenesis: joint analysis of premalignant and malignant lesions // *Ibid.* — 1991. — N 104. — P. 97–109.
3. Calderon C., Kwembe T. Modeling tumor growth // *Math. Biosci.* — 1991. — N 103. — P. 97–114.
4. Kopp-Shneider A., Portie C. A stem cell model for carcinogenesis // *Ibid.* — 1994. — N 120. — P. 211–232.
5. Bellomo N., Fornì G. Dynamics of tumor interaction with the host immune system // *Mathl. Comput. Modelling.* — 1994. — Vol. 20, N 1. — P. 107–122.
6. Bajzer Ž., Marušić M., Vuk-Pavlović S. Conceptual frameworks for mathematical modelling of tumor growth dynamics // *Ibid.* — 1996. — Vol. 23, N 6. — P. 31–46.
7. A patient-specific in vivo tumor model / R. Wasserman, R. Acharya, C. Sibata, K. Shin // *Math. Biosci.* — 1996. — N 13. — P. 111–140.
8. Orme M., Chaplain M. A mathematical Model of vascular tumour growth and invasion // *Mathl. Comput. Modelling.* — 1996. — Vol. 23, N 10. — P. 43–60.
9. The Universal Dynamics of Tumor Growth / A. Brú A., et al. // *Biophysical Journal.* — 2003. — N 85. — P. 2948–2961.
10. Abercrombie M. Contact inhibition and malignancy // *Nature.* — 1979. — N 281. — P. 259–262.
11. Synthesis of alpha-fetoprotein in hepatocytes is co-ordinately regulated with cell-cell and cell-matrix interactions / A.S. Gleiberman, E.I. Kudrjavitseva, Yu.Yu. Sharovskaya, G.I. Abelev // *Mol. Biol. Med.* — 1989. — N 6. — P. 95–107.
12. Jongen W., Fitzgerald D., Asamoto M. Regulation of connexin 43-mediated gap junctional intercellular communication by Ca<sup>2+</sup> in mouse epidermal cells is controlled by E-cadherin // *J. Cell Biol.* — 1991. — Vol. 114, N 3. — P. 545–555.
13. Sharovskaya Yu., Chailakhjan L.M. Local cell interaction and cell growth control // *Doklady Biochemistry.* — 1999. — N 366. — P. 80–83.
14. Organoid culture of human colon adenocarcinoma as a model of local intercellular interactions / Yu. Sharovskaya, et al. // *Biological Science.* — 2001. — N 377. — P. 187–190.
15. Dynamics of forest insect density: bifurcation approach / Bazykin A.D., Berezovskaya F.S., Isaev A.S., Khlebopros R.G. // *J. Theor. Biol.* — 1997. — Vol. 186, N 3. — P. 267–278.
16. Khlebopros R., Slepkov V., Sukhovolsky V. Mathematical Model of Solid Tumor Formation. Proceedings of the 8<sup>th</sup> World Multi-Conference on Systemics, Cybernetics and Informatics, July 18–21, 2004, Orlando, Florida, USA, SCI 2004/ ISAS 2004. — Vol. XVI. — P. 43–49.
17. Сленков В.А., Суховольский В.Г., Хлебопрос Р.Г. Моделирование роста и формообразования раковых опухолей // Доклады академии наук. — 2006. — Т. 411, № 4. — С. 562–566.
18. Сленков В.А., Суховольский В.Г., Хлебопрос Р.Г. Моделирование роста раковых опухолей: популяционный подход / Препринт 011003 Международного центра исследования экстремальных состояний КНЦ СО РАН. — Красноярск, 2003.
19. Thompson H., Zhu Z., Jiang W. Dietary Energy Restriction in Breast Cancer Prevention // *Journal of Mammary Gland Biology and Neoplasia.* — 2003. — Vol. 8, N 1. — P. 133–142.
20. New Fat-Cancer Study Underscores an Important Evolution (Not a Revolution) in Scientific Thinking. [Электронный ресурс] — Режим доступа: <http://www.aicr.org/site/Page-Server>.
21. Gorman C. How to starve a tumor // *Time.* — 1995. — Vol. 145, N 1. — P. 60.
22. Неговорова В.А. Влияние кормового режима на рост опухолей у экспериментальных животных // Тез. докл. науч. конф. студентов, аспирантов и молодых ученых физиков НКФСФ-XXXV (2006) / КрасГУ. — Красноярск, 2006. — 76 с.
23. Управление популяционной динамикой раковых клеток в организме / Инжеваткин Е.В. и др. // Тр. VII междунар. конф. «Идентификация систем и задачи управления», Москва 28–31 января 2008 / ИПУ РАН. М., 2008. — С. 644–668. ISBN 978-5-91450-002-0.
24. Gonadectomy impairs lymphocyte proliferation and macrophage function in male and female rats. Correlation with key enzyme activities of glucose and glutamine metabolism / R.B. De Azevedo, L.F. Rosa, Z.G. Lacava, R. Curi // *Cell Biochem. Funct.* — 1997. — Vol. 15, N 4. — P. 293–298.
25. Савченко А.А., Смирнова С.В., Пыцкий В.И. Метаболические особенности лимфоцитов крови у больных истинной аллергией и псевдоаллергией // *Аллергология и иммунология.* — 2002. — Т. 3, № 1. — С. 180–187.
26. Смирнова С.В., Савченко А.А., Манчук В.Т. Клинико-иммунологические проявления и нарушение метаболизма внутриклеточных ферментов лимфоцитов у больных хроническим лимфолейкозом // *Сибирский онкологический журнал.* — 2007. — № 2 (22). — С. 15–21.

Статья представлена к публикации членом редколлегии В.Н. Новосельцевым.

<sup>(1)</sup> Инжеваткин Евгений Владимирович — канд. биол. наук, доцент, ☎ (3912) 49-57-39, e-mail: inscience@mail.ru,

<sup>(1)</sup> Неговорова Вера Александровна — аспирантка, ☎ (3912) 49-01-36, e-mail: negovorova@mail.ru,

<sup>(1)</sup> Савченко Андрей Анатольевич — д-р мед. наук, зав. кафедрой, ☎ (3912) 44-67-40, e-mail: aasavchenko@yandex.ru,

<sup>(2)</sup> Сленков Владимир Анатольевич — науч. сотрудник, ☎ (383) 330-75-31, e-mail: vslepkov@mail.ru,

<sup>(1)</sup> Слепов Евгений Владимирович — аспирант, ☎ (3912) 98-31-69, e-mail: slepov@pochta.ru,

<sup>(3)</sup> Суховольский Владислав Григорьевич — д-р биол. наук, гл. науч. сотрудник, ☎ (3912) 21-74-72, e-mail: soukhovolsky@nm.ru,

<sup>(4)</sup> Хлебопрос Рем Григорьевич — д-р физ.-мат. наук, гл. науч. сотрудник, ☎ (3912) 49-57-39, e-mail: olikru@yandex.ru

<sup>(1)</sup> Сибирский федеральный университет, Институт фундаментальной биологии и биотехнологии, г. Красноярск;

<sup>(2)</sup> Институт неорганической химии им. А.В. Николаева СО РАН, г. Новосибирск;

<sup>(3)</sup> Красноярский научный центр СО РАН;

<sup>(4)</sup> Институт биофизики КНЦ СО РАН, г. Красноярск.



## МЕРОПРИЯТИЯ IFAC – Международной федерации по автоматическому управлению

Мероприятие	Дата	Место проведения
IFAC IFIP Workshop Intelligent Manufacturing Systems (9th) – IMS	October 09–10, 2008	Szczecin POLAND
IFAC Çankaya University, Ankara, T Workshop Fractional Differentiation and its Applications – FDA 08	November 05–07, 2008	Ankara TURKEY
IFAC IEEE Chile Section Workshop Logistics	December 05–06, 2008	Santiago CHILE
IFAC Workshop Programmable Devices and Embedded Systems, PDES 2009	February 10–12, 2009	Roznov pod Radhostem CZECH REPUBLIC
IMACS IFAC Symposium Mathematical Modelling – 6th MATHMOD	February 11–13, 2009	Vienna AUSTRIA
IFAC Workshop Control Applications of Optimisation – CAO 2009	May 06–08, 2009	AGORA Center, Univer FINLAND
IFAC Conference Fieldbuses and nETworks in industrial and embedded systems FeT 2009	May 20–22, 2009	Ansan KOREA
IFAC IFIP Symposium Information Control Problems in Manufacturing (INCOM'2009)	June 03–05, 2009	Moscow RUSSIA
IFAC IEEE tbc Workshop Dependable Control of Discrete Systems (IFAC DCDS'09)	June 10–12, 2009	Bari ITALY
IFAC Symposium Robust Control Design – ROCOND	June 16–18, 2009	Haifa ISRAEL
IFAC Conference Analysis and Control of Chaotic Systems – CHAOS 2009	June 22–24, 2009	London UNITED KINGDOM
IFAC VDE, VGB, CIGRE, Finnish Socie Symposium IFAC Symposium on Power Plants and Power Systems Control	June 28–July 01, 2009	Tampere FINLAND
IFAC Symposium Fault Detection, Supervision and Safety for Technical Processes – SAFEPROCESS	June 30–July 03, 2009	Barcelona SPAIN
IFAC Workshop Aerospace Guidance, Navigation and Flight Control Systems – AGNFCS	June 30–July 02, 2009	Samara RUSSIA
IFAC Symposium Identification and System Parameter Estimation – SYSID'09 (15th)	July 06–08, 2009	St. Malo FRANCE
IFAC Symposium Advanced Control of Chemical Processes – ADCHEM	July 12–15, 2009	Istanbul TURKEY
CACHE IFAC Conference Foundations of Systems Biology in Engineering – FOSBE 2009	August 09–12, 2009	Denver, CO USA
IFAC Danish Society for Biomedical Symposium Modelling and Control in Biological and Medical Systems (MCBMS'09)	August 12–14, 2009	Aalborg DENMARK
IFAC Symposium Transportation Systems	September 02–04, 2009	Redondo Beach, CA USA
IFAC Symposium Robot Control, SYROCO 2009 – 9th	September 09–12, 2009	Gifu JAPAN
IFAC Conference Analysis and Design of Hybrid Systems – 7th – ADHS 09	September 16–19, 2009	Zaragoza SPAIN
IFAC Workshop Automation in Mining, Mineral and Metal Industry	October 21–23, 2009	Vina del Mar CHILE

Более подробную информацию см. на сайте <http://www.ifac-control.org/>

## III ВСЕРОССИЙСКАЯ МОЛОДЕЖНАЯ КОНФЕРЕНЦИЯ ПО ПРОБЛЕМАМ УПРАВЛЕНИЯ (ВМКПУ'2008)

Москва, 7–9 апреля 2008 г.

Организация Всероссийской молодежной конференции по проблемам управления в Институте проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН продолжает традицию проведения конференций, совещаний и школ по проблемам управления (с 1953 по 1989 г. Институтом проблем управления (ИПУ) было проведено 33 таких мероприятия). Работа конференции была возобновлена три года назад в форме молодежных школ по проблемам управления. Успешно были проведены школы в Самаре на базе Самарского государственного аэрокосмического университета им. С.П. Королева (2006 г.) и в Воронеже на базе Воронежского архитектурно-строительного университета (2007 г.).

Конференция была организована Советом молодых ученых и специалистов ИПУ под общим руководством Ученого совета Института и при активном участии научно-образовательных центров, созданных ИПУ совместно с рядом ведущих российских вузов. Круг участников конференции охватывает представителей академических институтов и многих высших учебных заведений России, что способствует как интеграции академической и вузовской науки, так и укреплению научных связей между региональными научными школами и ведущими научными центрами.

Открыл конференцию председатель оргкомитета д-р техн. наук Д.А. Новиков.

На пленарном заседании первым выступил председатель программного комитета академик РАН С.Н. Васильев, который своим докладом «Логический подход к интеллектуальному<sup>1</sup> управлению» продолжил цикл лекций, читаемых аспирантам и молодым ученым ИПУ в рамках избранных лекций по логике. Он изложил основные тенденции развития систем управления от систем программного управления до интеллектуальных систем (с целеполаганием, формированием новых поня-

тий и отношений в развиваемой модели мира). Докладчик отметил, что современный уровень исследований позволяет пока говорить лишь о возможности построения автоматических систем интеллектуального управления (без целеполагания). Интеллектуальное управление (intelligent control) — пограничная область теории управления и искусственного интеллекта. Система интеллектуального управления должна обладать способностью воспринимать информацию о процессах, возмущениях и условиях функционирования, выводить заключения и обучаться. В конечном счете, она обеспечивает автоматическое достижение цели управления, поставленной человеком. Создание автоматических систем с целеполаганием (систем интеллектуального управления) остается весьма сложной научной проблемой. Принципиальное качество интеллектуальной системы управления — *мотивированный интеллектуальный выбор цели, не сводящийся к традиционному выбору цели из предусмотренных и хорошо формализованных целей* — пока не достигается. Однако и для систем интеллектуального управления существуют проблемы повышения уровня интеллекта для решения сложных задач управления. В докладе сделан вывод об их разрешимости на основе разработки, развития и применения мощных средств логического вывода и порождения гипотез.

Далее докладчик остановился на некоторых проблемах интеллектуального управления:

— *проблеме неполноты* и, наоборот, перенасыщения иррелевантными знаниями (т. е. не имеющими существенного отношения к решаемому классу задач), которые в рамках логического подхода могут решаться путем автоматического гипотезирования и некоторых других средств;

— *полуразрешимости проблемы выводимости* — фундаментального негативного свойства богатых логических систем, которое является прямым продолжением их достоинств (высокой выразительности и универсальности);

<sup>1</sup> Понятие «интеллектуальное» в данном контексте означает, что мы ожидаем достичь некоторого сходства с интеллектом, демонстрируемым живыми существами.

— *динамичности мира*, которая, как следствие, приводит к необходимости разработки и применения немонотонных логик и ряда других.

Во многих случаях классический логический вывод не годится для решения практических задач, называемых конструктивными. Такие задачи отличаются тем, что по выводу факта достижимости целей управления требуется произвести построение средства достижения этой цели. В докладе были приведены примеры конструктивных задач, для которых классический вывод бесполезен. Далее докладчик подробно остановился на новом перво-порядковом логическом исчислении, в том числе в языке конструктивной логики, ориентированном на эффективную автоматизацию выводов, а также сформулировал ряд проблем и задач в этой области, увлекая слушателей в мир интересных логик с новыми возможностями и, одновременно, интересными научными проблемами и задачами. Затронутые в докладе проблемы подробно рассматриваются в многочисленных научных трудах докладчика (см., например, книгу [1]). Академик С.Н. Васильев пообещал продолжить лекции, посвященные столь актуальному направлению, не только в рамках молодежных мероприятий в ИПУ, но и на выездных молодежных мероприятиях, ближайшее из которых состоится на базе Казанского государственного технического университета им. А.Н. Туполева.

В пленарном докладе д-ра техн. наук *В.Н. Букова* «Метод сетевого программирования в задачах дискретной оптимизации» был дан обзор методов решения задач дискретной оптимизации и описан новый метод — сетевого программирования, представляющий собой обобщение метода динамического программирования и метода множителей Лагранжа. Этот метод позволяет находить оптимальные решения или верхние (нижние) границы для задач дискретной оптимизации. В докладе рассмотрено понятие структурно-эквивалентных функций и роль таких функций при решении задач методом сетевого программирования. Рассмотрены также алгоритмы решения упомянутым методом ряда известных задач дискретной оптимизации: задачи о ранце, о максимальном потоке, о камнях и задачи коммивояжера. Дано определение двойственной задачи для аддитивных задач дискретной оптимизации, разработаны методы решения двойственной задачи и дана оценка их вычислительной сложности (см., например, книгу [2]).

В своей обзорной лекции д-р физ.-мат. наук *А.А. Лазарев* рассказал о методах и алгоритмах дискретной оптимизации в применении к теории расписаний на примере ряда классических задач (одноприборной задачи и задачи о ранце) и затронул проблему целочисленности и основные принципы

оптимальности. Основная часть лекции была посвящена алгоритмам решения NP-трудных задач, которые разделены на три класса: эвристические, приближенные и сокращенного перебора. Основная проблема состоит в необходимости развития способов проверки качества методов. Докладчик рассказал о результатах проверки основных алгоритмов на расширенной области и показал, что декларируемая сложность алгоритма резко повышается на расширенной области. Сразу видны проблемные области, попадание в которые в практике применения методов теории расписания не редки и приводят к ошибкам. Докладчик также предложил молодежи интересные новые задачи по разработке адаптивных методов построения личного расписания.

В докладе д-ра техн. наук *В.М. Вишневого* был дан обстоятельный анализ состояния и перспектив развития широкополосных беспроводных сетей передачи информации.

В рамках своего пленарного доклада д-р техн. наук *Э.Л. Ицкович* рассказал об основных тенденциях развития современных технических и программных средств автоматизации производства и уделил значительное внимание тому, что для эффективного решения задач автоматизации производства работающие в этой сфере промышленные консультанты должны иметь возможность использовать программно-технические решения, составленные из компонентов различных производителей. Иными словами, промышленные консультанты должны быть «независимыми» консультантами, а не представителями отдельных компаний-производителей технических и программных средств автоматизации производства. Стандартизация протоколов передачи информации между подобными различными продуктами и их «модульность» — вот пути решения задачи обеспечения «независимости» специалистов по промышленной автоматизации от продуктов отдельных вендоров. Поэтому основной акцент в историческом экскурсе лектором был сделан на развитие стандартов и тех этапах научно-технического прогресса в освещаемой области, которые позволили облегчить решение задачи стандартизации и унификации технических и программных средств автоматизации производства.

В своей лекции д-р техн. наук *Б.Т. Поляк* осветил историю теории автоматического управления, рассказал об актуальных задачах, которые давали толчок ее развитию с конца 19-го до конца 20-го века, и о порожденных этими задачами методами и направлениях исследований.

**На заседании секции «Теория систем управления»**, состоявшей из двух разделов: «Теория систем управления» и «Управление подвижными объекта-



ми и навигация», затрагивалось большое число разнообразных проблем, связанных с теорией управления. Из принятых после рецензирования 28-ми докладов было заслушано 23, почти половина из которых были посвящены задачам моделирования физических систем, остальные доклады были связаны с традиционными задачами теории управления и смежными задачами.

Стоит выделить доклады *О.С. Гребенника, И.И. Ибрагимова, С.В. Спиридонова, П.Д. Купцова, и Е.Я. Ярошенко*, связанных с анализом и моделированием газожидкостных сред (затрагивающие, частично, задачи, возникающие в нефтяной отрасли). Например, в докладе *П.Д. Купцова* газовый поток лаконично и эффективно анализируется с помощью теории бюджетов, в работе *Е.А. Ярошенко* для моделирования разработки нефтяных месторождений эффективно применяются мультипроцессорные системы.

Доклады, связанные с теорией управления, охватывали широкий спектр задач: от исследования блочных форм и скользящих режимов динамических систем до синтеза робастных регуляторов, регуляторов низкого порядка и  $H_\infty$ -синтеза. Среди этих работ хорошее впечатление оставляют доклады *А.Г. Ахобадзе* (о применении синтеза и декомпозиции блочных матричных форм при описании систем в пространстве состояний при наличии внешних возмущений) и *А.В. Уткина* (о разрывном управлении роботом-манипулятором и анализе возникающих скользящих режимов).

В нескольких докладах (*Е.Н. Грязиной, А.Ю. Мазурова, Я.И. Петрикевич и А.А. Трэмбы*) были рассмотрены задачи, связанные со случайными процессами и рандомизированными методами. *Я.И. Петрикевич* доложила о синтезе стабилизирующих регуляторов низкого порядка с помощью генерации случайных устойчивых полиномов и последующей оптимизации. *А.Ю. Мазуров* показал, как можно успешно исследовать стохастические системы с рисками с помощью понятия диссипативности. Интересны доклады *Р.Ф. Гилимьянова* и *Ю.В. Морозова*, посвященные двум актуальным задачам навигации мобильного робота.

На секции «Управление в социально-экономических и медико-биологических системах» было представлено более 30-ти докладов, охватывающих своей тематикой формальные методы обработки экспертных данных, когнитивные методы, а также различные задачи управления в биологических, региональных, производственных, финансовых и даже научных системах.

Среди работ, посвященных задачам анализа данных, можно отметить доклад *Ю.А. Дорофеев*, которая описала целый комплекс алгоритмов и

методов, предлагаемый к применению в слабоформализованных системах управления для решения задач структурно-классификационного анализа и прогнозирования, в том числе и на основе экспертных оценок. В нем рассматриваются: задача кластеризации многопараметрических объектов в заданные моменты времени, процесс временного изменения структуры кластеров и прогнозирование будущей структуры кластеров на такт вперед. Подчеркивается прикладная направленность решаемой задачи: в качестве исходных многопараметрических объектов выступают регионы РФ, которые в процессе кластеризации разбиваются на 7–9 кластеров. Подобный комплекс методов крайне перспективен для практического применения, в частности, для анализа эффективности функционирования органов исполнительной власти в регионах. Слушателями была отмечена необходимость дальнейшей практической апробации предложенных подходов.

Проблеме эффективности экспертных механизмов был посвящен доклад *Н.А. Коргина*, в котором дан анализ влияния конфигурации множеств допустимых результатов на эффективность неманипулируемых механизмов активной многокритериальной экспертизы. Несмотря на теоретическую направленность данной работы, ее результаты предоставляются актуальными, так как могут быть использованы для построения механизмов экспертизы, защищенных от коррупционных воздействий.

Эксперты, работающие на секции, особенно отметили доклад *К.Б. Погорельского* «Проблемы моделирования управляющих структур МВФ», в котором была предложена имитационная модель динамики переходов между объединениями стран в исполнительном совете Международного валютного фонда. Докладчик сообщил о результатах анализа влияния стран на принятие решения в совете.

Значительная часть докладов на секции была посвящена когнитивным методам в управлении слабоструктурированными проблемными ситуациями. Это направление представлено работами участников молодежных школ под руководством д-ров техн. наук *Н.А. Абрамовой* и *О.П. Кузнецова* в ИПУ РАН и д-ра техн. наук *Г.В. Гореловой* в Таганрогском технологическом институте Южного федерального университета (ТТИ ЮФУ).

Доклад *З.К. Авдеевой* был посвящен очень важной задаче, связанной с систематизацией процесса выявления и постановки различных задач управления в слабоструктурированных ситуациях. В качестве методов решения такой задачи докладчик предложила методы, основанные на построении и анализе когнитивных карт и привела ряд при-

меров, демонстрирующих эвристические правила выявления в слабоструктурированной ситуации конфликтных задач, ресурсных задач управления, а также дала обоснование приоритетов в решении тех или иных задач при разрешении проблемной ситуации.

Доложенные на заседании секции работы *С.Г. Куливец* «Игра на линейной когнитивной карте с импульсным начальным управлением» и *И.Н. Гореловой* «Моделирование позиционных игр на когнитивных картах социально-экономических объектов» находятся в русле перспективных направлений когнитивного подхода. На протяжении многих лет и теоретико-игровые, и когнитивные модели успешно используются для описания сложных систем. Сравнительно недавно появились работы, в которых делается попытка интеграции этих двух подходов и систематизации возникающих на их пересечении задач [3]. На следующих молодежных конференциях *С.Г. Куливец* пообещал доложить о результатах экспериментов применения теории игр в такой постановке, отличных от интересных (для практики) результатов по выработке различных стратегий взаимодействия с учетом максимального соблюдения интересов на базе имитационного моделирования [4].

В представленных докладах молодых специалистов ТТИ ЮФУ были затронуты аспекты практического применения моделей и методов на основе когнитивных карт для решения следующих прикладных задач:

- управление развитием туристского комплекса в социально-экономической системе, когнитивный подход (*Е.В. Жертовская*);
- применение когнитивного подхода к решению проблем экономической безопасности на уровне региона (*И.Ю. Казанин*);
- когнитивное моделирование системы управления банковскими рисками на рынке потребительского кредитования (*Т.М. Вандышева*).

Несмотря на длительную историю разработки и применения методов на базе когнитивных карт, необходимо отметить, с одной стороны, слабую научную обоснованность и рискованность их применения, но, с другой стороны, подтвержденную практическую значимость при управлении в слабоструктурированных ситуациях. Одним из слабых и рискованных мест в когнитивных методах является этап структуризации первичных представлений о проблемной ситуации. Риск, например, состоит в неверном учете важных факторов (или неучете), определяющих ситуацию. В этой связи примечателен доклад студента МФТИ *А.А. Федотова* «Об исследовании рисков при структуризации проблемной ситуации», в котором дан

анализ применения SWOT-анализа к этапу структуризации и предложена мера риска.

В рамках работы секции были представлены сильные работы в области управления здоровьем человека и анализа демографической ситуации. В докладе *М.А. Костенко* «Моделирование процесса старения организма и управление им с использованием гомеостатического подхода» проанализирована возможность применения гомеостатической модели старения к процессу старения человека и сделан вывод о том, что модель необходимо модифицировать с учетом сложности структуры человека и влияния таких факторов, как образ жизни и пр.

Доклад *Ю.Н. Судакова* был посвящен одному из возможных подходов к моделированию учета влияния здоровья человека на его производительность. Исследования в данном направлении представляются крайне перспективными. С учетом сложности трактовки проиллюстрированных докладчиком результатов были предложены возможные направления упрощения модели и ее дальнейшего развития.

В докладе *П.Л. Отоцкого* «Об историческом прогнозе численности населения» проанализированы различные подходы к задаче прогнозирования численности населения, дан их сравнительный анализ, выделены и обоснованы недостатки существующих методов. Особое внимание акцентировано на учете различий национальных групп, составляющих население России, по таким характеристикам, как коэффициент рождаемости и смертности.

Внутрилетняя часть докладов в рамках секции была посвящена практическому применению математических моделей и методов для решения частных практических задач в управлении производственными и региональными системами.

В области управления в региональных системах примечательны работы аспирантов Волгоградского государственного университета *М.А. Эйфельд* «Моделирование региональных эффектов» и *Т.С. Матасовой* «Эконометрические модели на рынке жилья групп регионов со сходными экономическими макро показателями», в которых показано применение кластерного анализа статистических данных и построены эконометрические модели регионов для решения задач управления регионами.

Среди наиболее интересных работ в области управления производственными системами следует отметить «Модель оценки эффективности многомерной производственно-экономической системы» (*М.В. Цапенко*, СГАУ); «Применение имитационного моделирования для поддержки принятия решений в управлении предприятиями оптовой торговли» (*Г.Г. Зайковская*, ВЗФИ); «Дескриптив-



но-оптимизационная модель управления промышленным предприятием» (М.В. Радчик, ВолГУ).

По качеству изложения доклада и степени проработанности задачи стоит отметить доклад Т.И. Овчинниковой и Т.С. Ивлевой «Оценка морального ущерба в системах управления безопасностью жизнедеятельности предприятия».

Как общий недостаток, присущий многим докладам, следует отметить недостаточную обоснованность методов, применявшихся для решения задач, что крайне затрудняет систематизацию и унификацию полученных результатов. На этом фоне заметен доклад Ф.В. Новикова «Метод оперативной коррекции оценки результативности научной деятельности на основе ПРНД», в котором затронута важная для научной организации проблема адекватности внедряемой системы показателей результативности деятельности при стимулировании труда научных сотрудников.

По результатам оценок докладов были отмечены качественные и практически значимые студенческие работы О.А. Подольской (СГАУ, г. Самара), Ю.В. Рязанцевой (ЛГТУ, г. Липецк) и А.А. Федотова (МФТИ). Председатель секции д-р техн. наук Д.А. Новиков пожелал авторам дальнейших успехов и предложил участвовать в конкурсе на лучшую студенческую работу, проводимом ИПУ.

На заседании секции «Системы управления технологическими процессами» были заслушаны 14 докладов.

Особый интерес представляла группа докладов аспирантов ИПУ С.В. Толмачёва, С.А. Браништова, К.Г. Накашидзе, Е.Е. Томилина, А.С. Хадеева и С.А. Чернова. В их работах предложены расширенная модель поточного производства и схема управления на ее основе. Алгоритмы на основе событийных моделей реализованы в рамках программного продукта с помощью инструмента объектного проектирования систем управления технологическими процессами ClearSCADA, что является следующим шагом в развитии АСУТП для поточных производств.

Не менее интересны были доклады А.Ю. Башина (ИПУ РАН) «Применение радиочастотного метода для определения объёмного соотношения потока газа и жидкости в трубопроводе», А.С. Кудряшова и С.В. Сталянского (ИПУ РАН) «Обеспечение безопасной передачи данных с использованием криптографического контроллера», А.А. Томилина (ЛГТУ, г. Липецк) «Особенности аппарата формирования организационных структур на основе окрестностно-временных моделей».

Заинтересовали своими работами, посвященными изучению логистических сетей с потерями, но без ограничения пропускной способности, студенты МФТИ И.С. Сунчугашев и Д.А. Фёдоров.

Среди заслушанных докладов, пожалуй, самыми яркими были доклады аспирантов ИПУ С.В. Андреева о моделировании энергосистемы с управлением по частоте и активной мощности, Е.Б. Иванова, занимающегося вопросами разработки экспертных систем металлургического производства, и П.В. Коврыгина об исследовании отказоустойчивости струйного акселерометра для летательных аппаратов.

На заседаниях секции «Информационные технологии в управлении» были заслушаны 37 принятых после рецензирования докладов, большая часть которых представлена молодыми специалистами Института проблем передачи информации им. А.А. Харкевича РАН. На хорошем профессиональном уровне доложил А.А. Сафонов о своей работе, посвященной обзору механизмов синхронизации в сетях IEEE 802.11. В продолжение темы, затронутой А.А. Сафоновым, прозвучал доклад С.А. Шнулева «Проактивная маршрутизация в IEEE 802.11s mesh-сетях», в котором представлены результаты экспериментов по производительности протоколов маршрутизации в сетях нового поколения — mesh-сетях.

Ряд докладов был посвящен информационно-вычислительным сетям, их теории и применению в системах управления. Председатель секции д-р техн. наук В.М. Вишневецкий особенно отметил доклад П.В. Сараева (ЛГТУ, г. Липецк) «Глобальное обучение нейронных сетей», посвященный разработке эффективных средств моделирования сложных систем нейронными сетями прямого распространения. В докладе проанализированы различные подходы к обучению нейросетей, основной недостаток которых состоит в отсутствии гарантии поиска глобального решения. Исследования докладчика в этой области были направлены на поиск подхода, лишенного такого недостатка. Один из основных результатов данного этапа исследований заключается в анализе подхода, основанного на глобальных методах интервальной оптимизации и обосновании эффективности его применения к решению задачи обучения нейросети.

В докладе И.А. Ходаковского «Программный метод повышения надежности распределенных вычислений и процессов управления» рассмотрена проблема эффективного использования потенциала открытых компьютерных сетей для непрерывного спектра задач управления техногенными, экономическими и другими социально значимыми процессами в массовых проявлениях. Повышение надежности счета в ненадежной вычислительной среде достигается путем внедрения на программном уровне избыточных действий хранения, передачи и преобразования информации.

Часть докладов лежала в русле тематики автоматизированных систем организационного управления и обработки данных, и немногочисленные доклады были посвящены разработке программного обеспечения систем управления. Так, в докладе *Е.В. Бурнаева* «Быстрый расчет аэродинамических характеристик самолета на основе аппроксимации многомерных зависимостей» рассмотрена задача аналитического описания множества данных. Новизна полученных результатов состоит в предложенной методике построения искусственных нейронных сетей, эффективность применения которой показана на примере расчета аэродинамических характеристик самолета.

Не осталось без внимания участников такое развивающееся и важное направление в информационных технологиях, как системы управления знаниями. Помимо традиционных докладов этого направления, связанных с разработкой и внедрением экспертных систем, в этой связи примечателен доклад *Л.И. Микулича* и *Д.А. Губанова* «Онтологический подход к управлению компетенциями в научной организации».

Группа докладов была посвящена технологиям обучения и тестирования, в частности проблемам оценки знаний обучаемых и качества обучения в целом. Среди них заметна работа *А.И. Глущенко* «О применении гибридных нейронных сетей в задачах адаптивного тестирования». Докладчик рассказал о проблеме «подстройки» тестов под уровень подготовки испытуемого и проанализировал методы, которые можно применять для оценки сложности вопросов.

Ограничения на объем настоящей публикации не позволяют даже упомянуть многие достойные доклады. Более подробную информацию можно найти в Трудах конференции [5].

В заключение отметим, что конференция сочла целесообразным:

— интеграцию различных подходов, моделей и методов управления системами на основе рассмотрения комплексных междисциплинарных проблем и ориентации на их решение;

— усилить информационное взаимодействие с представителями вузовской науки в регионах, специализирующимися на решении задач управления большими системами;

— рассмотреть перспективы и пути повышения экспертной значимости научного сообщества в решении практических задач управления на федеральном, отраслевом и региональном уровнях;

— развитие информационных технологий, реализующих современные научные подходы к управ-

лению системами и ориентированных на конечного пользователя;

— рекомендовать Оргкомитету провести очередную молодежную конференцию по проблемам управления весной 2009 г. и регулярно информировать участников настоящей конференции о других научных мероприятиях, проводимых ее организаторами.

К сожалению, развитие теории управления различными системами сдерживается недостаточной обеспеченностью научными кадрами и научным оборудованием, заметна тревожная тенденция сокращения «поля» исследований из-за небольшого притока новых, в первую очередь, молодых научных кадров. Нехватка научного оборудования и информационного обеспечения наблюдается, в основном, в региональных научных центрах.

Судя по представленным докладом, проблематика проектов, поддержанных РФФИ, в основном соответствует рассмотренным актуальным направлениям исследований. Однако целесообразна поддержка не только хорошо зарекомендовавших себя в исторической ретроспективе научных направлений и научных школ, но и проектов по пионерским исследованиям, так как во многом благодаря последним зарождаются новые направления и развиваются существующие.

## ЛИТЕРАТУРА

1. *Интеллектуальное* управление динамическими системами / С.Н. Васильев, А.К. Жерлов, Е.А. Федосов, Б.Е. Федун. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2000. — 352 с.
2. *Задачи* управления в социально-экономических системах / В.Н. Бурков и др. — М.: СИНТЕГ, 2005 — 256 с.
3. *Новиков Д.А.* «Когнитивные игры»: линейная импульсная модель // Проблемы управления. — 2008. — № 3. — С. 2—8.
4. *Корноушенко Е.К.* Формальный подход к поиску консенсуса в ситуациях с противоречивыми интересами участников (на примере когнитивной модели потребительского рынка) // Когнитивный анализ и управление развитием ситуаций (CASC-2006). Материалы 5-й Междунар. конф. / ИПУ РАН. — М., 2006. — С. 118—135.
5. *III Всероссийская* молодежная конференция по проблемам управления (ВМКПУ'2008): Труды / Под ред. Д.А. Новикова, З.К. Авдеевой. — М.: ИПУ РАН, 2008. — 302 с.

*З.К. Авдеева, Н.А. Коргин*

**Авдеева Зинаида Константиновна** — канд. техн. наук, ст. науч. сотр., Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, г. Москва, ☎ (495) 334-78-00, e-mail: max@ipu.ru

**Коргин Николай Андреевич** — канд. техн. наук, ст. науч. сотр., Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, г. Москва, ☎ (495) 334-79-00, e-mail: kolyah@edunet.ru



# CONTENTS & ABSTRACTS

ROBUST CONTROL OF UNSTEADY-STATE NONLINEAR STRUCTURALLY UNDEFINED OBJECTS .....	2
---	---

**Furtat I.B., Tsykunov A.M.**

The robust control problem for unsteady-state nonlinear in output objects under a priori, functional, and structural uncertainty is solved. In process of system operation, the order of its mathematical model can change in unpredictable way. The solution is based on the application of a robust algorithm enabling the compensation of this class of uncertainty. The control system's efficiency is proved, and the simulation results are included.

**Keywords:** robust control, nonstationary, nonlinear control plant, prior, functional, structural uncertainty, observer, Lypunov function.

ON THE ROUGHNESS OF NONLINEAR DYNAMIC SYSTEMS .....	8
--	---

**Zhukov V.P.**

The conditions under which the stability type of the equilibrium state of a Lyapunov-type random-order nonlinear dynamic system would not change under any relatively small linear or nonlinear perturbances of its right-hand member (roughness in the sense of stability type conservation). Nonlinear components of right-hand members of the original (unperturbed) system and nonlinear perturbances of those right-hand members are considered to belong to a wide class of nonlinear functions containing both analytic functions and various classes of nonanalytic functions. Sufficient and necessary roughness conditions are derived.

**Keywords:** nonlinear dynamic system, roughness, stability type.

OPTIMAL MULTISTEP NEUROCONTROL .....	14
--------------------------------------	----

**Saraev P.V.**

Optimal control of dynamic systems based on feed-forward neural network models is discussed. A multistep optimal control algorithm using direct propagation neuron network structure is developed. The algorithm takes uses the superpositional structure of a neuron network and into account the long-term influence of control signals on the controlled object. The algorithm can be applied commercial companies management.

**Keywords:** neural networks, neurocontrol, dynamic systems.

A SYSTEM WITH PREDICTIVE MODEL FOR PLASMA SHAPE AND CURRENT CONTROL IN A TOKAMAK .....	19
--	----

**Mitrishkin Yu.V., Korostelev A.Ya.**

The results of synthesis and simulation of system with a predictive model for plasma shape and current control in a tokamak are presented. The comparison against a system with an H<sub>∞</sub> robust controller in the feedback loop is undertaken. Some features of model predictive control application to the magnetic plasma control problem are discussed.

**Keywords:** model predictive control, robust control, feedback, system synthesis, modeling, plasma magnetic control, tokamak.

A CONCEPT OF A MATHEMATICAL KNOWLEDGE BANK FOR SCIENTIFIC RESEARCH. P. 2. INTERACTIVE FORMATION OF INTUITIVE PROOFS .....	26
--	----

**Kleschev A.S.**

This is the second paper of the two ones dedicated to the concept of a computer supporting system for scientific research in mathematics. A model of intuitive proof and the requirements to support tools for researchers and knowledge integrators as well as to system processes are presented.

**Keywords:** interactive theorem proving, theorem proving by analogy, intuitive proof, correctness of intuitive proof, knowledge banks.

DYNAMIC PRINCIPLES OF PREDICTION AND CONTROL .....	31
---	----

**Leonov G.A.**

The approaches to prediction and control based on generic instability mechanisms in dynamic systems are described. These approaches, developed within the framework of experimental mathematics presume the denial of any attempts to construct, identify, or analyze the approximate models of rather complicated real dynamic objects. Instead, attempts are made to gather same experimental data connected with real models and then use it for prediction and control design. The occurrence of instabilities comply with certain generic regularities, which taken into account result in certain general principles of the qualitative control theory.

**Keywords:** forecast, control, Klausewitz principle, "Master-slave" principle.



## APPLICATION OF CGE MODELS FOR ESTIMATING THE EFFICIENCY OF MANAGERIAL DECISIONS . . . . .36

**Bahtizin A.R.**

The paper overviews Computable General Equilibrium (CGE) modeling as a new tool for quantitative estimations of the consequences of managerial decisions. It examines the advantages of this class of models as against other modeling techniques and dwells on calibration issues. Finally, the paper describes a quantitative tool, which was employed for the analysis of the relations between certain components of shadow economy and major macroeconomic indicators of Russia (e.g., GDP and consumer price index).

**Keywords:** computable general equilibrium models, managerial decisions, shadow economy.

## REFLEXIVE GAMES: INFORMATIONAL STRUCTURE TRANSFORMATION . . . . .43

**Chkhartishvili A.G.**

A game-theoretical model of reflexive decision-making is built. If a normal form reflexive game is repeated several times, some (or even all) agents may observe the results such as choices of opponents, values of goal functions etc., different from the expected one. In such case, the informational structure of the game is changed. The paper discusses three problems: informational structure, actions of the agents based on it, and informational structure transformation.

**Keywords:** reflexive games, informational equilibrium, informational structure transformation.

## INFORMATIONAL AND ANALYTICAL SUPPORT OF HOUSING AND COMMUNAL SERVICES MANAGEMENT (CAPITAL MAINTENANCE PLANNING). . . . .49

**Pankova L.A., Pronina V.A.**

A solution scheme for the problem of determining the sequence of capital maintenance of housing on the basis of multi-criterion optimization model and OLAP technology is proposed.

**Keywords:** housing, capital repair, multicriterial optimization model, Hierarchy Analysis Method, OLAP-technology.

## SERVER-TO-SERVER ROUTING OF HTTP/SOAP-INTERACTIONS IN DISTRIBUTED SYSTEMS . . . . .57

**Asratian R.E.**

An approach to improving the efficiency of HTTP/SOAP interactions in global networks is proposed. The approach is based on establishing a tunnel between HTTP clients and HTTP servers to provide server-to-server interaction and server-to-server data routing,

unauthorized access protection and conceptual tolerance to network connection breaks. The concepts of tunnel organization are described including the principles of tunnel's gateway operations.

**Keywords:** distributed systems, Internet technologies, network protocols, Web-services.

## ON FUNCTIONAL DIAGNOSIS OF DISCRETE DEVICES UNDER IMPERFECT DATA PROCESSING CONDITIONS . . . . .62

**Aksyonova G.P.**

The paper discusses the variations of a discrete device operation and of its built-in checking circuit at imperfect data processing and shows how the complexity of a built-in checking circuit changes hereby. The paper presents A block diagram hardware-integrated synthesis of a modulo 2 built-in checking circuit for both precise and imperfect data is presented.

**Keywords:** discrete device, built-in checking circuit, truth table, modulo 2 synthesis method.

## SELECTING THE PROTECTION SYSTEM VARIANTS FOR DATA PROCESSING CENTERS . . . . .67

**Paveliev V.V., Paveliev S.V.**

The paper offers a model for solving the problem of a dedicated data processing center protection against failures and accidents in geographically distributed automated system built with the help of global network channels. The model employs the method of vector stratification of multi-dimensional objects and risk analysis and management techniques.

**Keywords:** alternative choice, protection against failures and accidents, data processing, vector stratification, multi-dimensional object.

## THRESHOLD EFFECTS IN THE CONTROL OF POPULATION DYNAMICS OF CANCER CELLS IN AN ORGANISM . . . . .73

**Inzhevatin E.V., Negovorova V.A., Savchenko A.A., et al.**

The problem of the onset and growth of solid tumors in homogeneous tissues, statistical distribution of tumors in an organism, as well as the possibilities of tumor growth control are studied in the context of a population model based on the phenomenon of local cell interaction. A method for estimating the effects of exogenic and endogenic factors on cancer risk is offered. The results of two experiments justifying theoretical predictions are included.

**Keywords:** population dynamics, cancer, tumor distribution, metastasis, threshold effects.

## THE 3-rd ALL-RUSSIAN YOUTH CONFERENCE ON CONTROL PROBLEMS. . . . .81