УДК 681.326

УЧЕТ НЕУПРАВЛЯЕМОСТИ СИСТЕМЫ В ЗАДАЧЕ ФУНКЦИОНАЛЬНОГО ДИАГНОСТИРОВАНИЯ

А.Н. Жирабок, Е.Ю. Бобко, А.И. Варнаков, А.М. Писарец

Рассмотрена задача функционального диагностирования неуправляемых динамических систем, описываемых нелинейными моделями. Предложен метод учета неуправляемости, позволяющий понизить размерность диагностических наблюдателей.

Ключевые слова: нелинейные системы, неуправляемость, диагностирование, наблюдатели.

ВВЕДЕНИЕ И ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Проблема функционального диагностирования (ФД) к настоящему времени уже достаточно хорошо изучена, задачи обнаружения и поиска дефектов решены для широкого класса динамических систем: линейных [1], билинейных [2], общего вида нелинейных [1, 3], с запаздыванием [4]. Анализ показывает, что в большинстве работ, посвященных решению задачи ФД, неявно предполагается, что рассматриваемая система управляема. На практике может встретиться ситуация, когда система неуправляема и множество возможных начальных состояний таково, что некоторые состояния системы из них недостижимы; учет этого обстоятельства может вылиться в уменьшение размерности диагностического наблюдателя.

В принципе задача ФД неуправляемых систем может быть решена путем определения множества состояний, достижимых из заданных начальных, сужения модели исходной системы на это множество и решения для нее задачи ФД. Этот путь достаточно трудоемок и в полной мере применим только к линейным системам. Суть предлагаемого в настоящей работе метода состоит в аналитическом описании пространства состояний, недостижимых из начального состояния, и использование этого описания для построения наблюдателя пониженной размерности. В качестве основы для реализации этого метода предлагается так называемый логико-динамический (ЛД) подход, который был успешно применен как для решения задачи ФД [2, 3, 5], так и анализа наблюдаемости и управляемости нелинейных систем [6]. Логико-диагностический подход характерен тем, что он не гарантирует достижения оптимального решения задачи в смысле размерности получаемых в результате решения систем, но оперирует только линейными методами даже для систем с недифференцируемыми нелинейностями.

Предполагается, что диагностируемая система описывается следующей моделью:

$$\dot{x}(t) = Fx(t) + Gu(t) + C\begin{pmatrix} \varphi_1(A_1x(t), u(t)) \\ \dots \\ \varphi_p(A_px(t), u(t)) \end{pmatrix} + Dd(t) + L\rho(t),\ y(t) = Hx(t), \qquad (1)$$

где $x(t) \in X \subseteq R^n$, $u(t) \in U \subseteq R^m$ и $y(t) \in Y \subseteq R^l$ — векторы состояния, управления и выхода соответственно; F, G и H — матрицы соответствующих размеров; C — матрица размера $n \times p$: если в правую часть уравнения для i-й компоненты вектора состояния исходной системы входит нелинейная функция $\varphi_j(A_jx(t), u(t))$, то $C(i, j) \neq 0$, в противном случае $C(i, j) = 0$; D и L — известные постоянные матрицы, $d(t)$ — вектор, описывающий дефекты: при их отсутствии $d(t) = 0$, при возникновении $d(t)$ становится неизвестной функцией времени; $\rho(t)$ — неизвестная функция времени, описывающая возмущения на систему. Модель

$$\dot{x}(t) = Fx(t) + Gu(t),\ y(t) = Hx(t)$$

назовем линейной частью системы (1) и обозначим ее $\Sigma = (F, G, H)$.

Поскольку дальнейший анализ основан на ЛД подходе, коротко рассмотрим его.

1. ЛОГИКО-ДИНАМИЧЕСКИЙ ПОДХОД

Данный подход к решению задачи ФД детально рассмотрен в работах [2, 3, 5], поэтому далее излагаются только его основные этапы без их обоснования:

1) замена нелинейной системы (1) ее линейной частью;

2) решение задачи ФД для линейной системы с дополнительным условием линейного вида и построение линейного наблюдателя на основе известной процедуры [1, 3];

3) преобразование линейного наблюдателя в нелинейный.

Описание линейного наблюдателя, построенного на этапе 2, имеет следующий вид:

$$x_*(t+1) = F_*x_*(t) + G_*u(t) + Jy(t) + Kr(t),$$
$$y_*(t) = H_*x_*(t), \qquad (2)$$

где F_*, G_*, J и H_* — матрицы, описывающие наблюдателя, K — матрица обратной связи, $r(t)$ — невязка, формируемая в виде

$$r(t) = Ry(t) - y_*(t)$$

для некоторой матрицы R. Предполагается, что при отсутствии дефектов и возмущений векторы $x(t)$ и $x_*(t)$ связаны равенством

$$x_*(t) = \Phi x(t)$$

для некоторой матрицы Φ, которая удовлетворяет следующим уравнениям [1, 3, 5]:

$$\Phi F = F_*\Phi + JH, \quad RH = H_*\Phi, \quad G_* = \Phi G.$$

Кроме того, для обеспечения нечувствительности к возмущениям и чувствительности к дефектам матрица Φ должна удовлетворять условиям

$$\Phi L = 0, \quad \Phi D \neq 0. \qquad (3)$$

Дополнительное условие, упомянутое в формулировке этапа 2, имеет вид

$$A' = A_*\begin{pmatrix}\Phi\\ H\end{pmatrix}, \text{ или}$$
$$\operatorname{rank}(\Phi^T\ H^T) = \operatorname{rank}(\Phi^T\ H^T\ A'^T), \qquad (4)$$

где матрица $A' = (A_{j_1}^T\ A_{j_2}^T\ \dots\ A_{j_d}^T)^T$ строится из тех строк матрицы A, номера $j_1, j_2, \dots, j_d$ которых совпадают с номерами ненулевых столбцов произведения ΦC.

На этапе 3 в линейный наблюдатель (2) добавляется нелинейная составляющая в виде

$$C_*\begin{pmatrix}\varphi_{j_1}(A_{*j_1}z(t), u(t))\\ \dots\\ \varphi_{j_d}(A_{*j_d}z(t), u(t))\end{pmatrix},$$

где матрицы-строки A_{*j_1}, A_{*j_2}, ..., A_{*j_d} определяются из линейных алгебраических уравнений $A_j = A_{*j}\begin{pmatrix}\Phi\\ H\end{pmatrix}$, $j = j_1, j_2, \dots, j_d$, $z = \begin{pmatrix}x_*\\ y\end{pmatrix}$.

Обобщая и несколько упрощая, можно сказать, что ЛД подход состоит в решении задачи для линейной части исходной нелинейной системы и добавлении в полученное линейное решение определенным образом преобразованной нелинейной составляющей исходной системы.

2. АНАЛИЗ ДИАГНОСТИРУЕМОЙ СИСТЕМЫ

Для учета неуправляемости диагностируемой системы при решении задачи ФД покажем, прежде всего, как на основе изложенного ЛД подхода можно получить аналитическое описание множества состояний, достижимых из заданного множества начальных состояний.

Основная идея применения ЛД подхода к анализу неуправляемости состоит в том, что анализируется линейная часть системы и при неуправляемости последней выясняется, при каких условиях нелинейная составляющая не нарушит это заключение. Главную роль в этом анализе играет матрица управляемости линейной части системы $W = (G\ FG\ \dots\ F^{n-1}G)$. Пусть

$$\operatorname{rank}(W) = s < n, \qquad (5)$$

т. е. линейная часть рассматриваемой системы неуправляема и T_0 — матрица ранга s, составленная из первых s линейно независимых столбцов матрицы W.

Основную роль во второй части анализа играет известная каноническая декомпозиция неуправляемой линейной системы на управляемую (Σ_1) и неуправляемую (Σ_2) подсистемы (рис. 1) [7]. Такая декомпозиция может быть получена путем использования линейного преобразования $T = \begin{pmatrix}T_0^T\\ T_*\end{pmatrix}$, где матрица T_* дополняет матрицу T_0^T до невырожденной. Матрица T_* может быть выбрана множеством способов, для нас наибольший интерес представляет случай, когда строки матрицы T_* ортого-

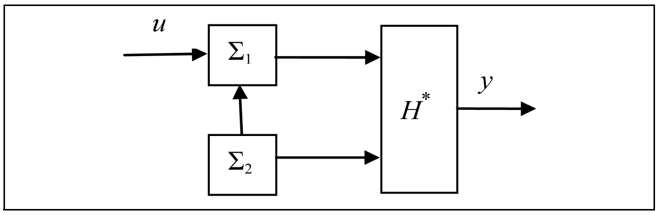

Рис. 1. Каноническая декомпозиция линейной неуправляемой системы

нальны строкам матрицы T_0^T, что всегда можно сделать. Последний факт запишем в виде соотношения

$$T_0^T\, T_*^T = 0, \text{ или } T_* T_0 = 0. \qquad (6)$$

Принятый вид матрицы преобразования T отличается от традиционного [7], поэтому покажем, что он также приводит к необходимой канонической форме. Примем обратное преобразование T^{-1} в виде $T^{-1} = (R_1\ R_2)$, тогда из $TT^{-1} = I_{n\times n}$ следует, в частности, $T_*R_1 = 0$, что с учетом равенства $T_*T_0 = 0$ дает возможность положить $R_1 = T_0$; здесь $I_{n\times n}$ — единичная $n \times n$ матрица.

Матрица F_k преобразованной системы определяется произведением

$$F_k = TFT^{-1} = \begin{pmatrix} T_0^T \\ T_* \end{pmatrix} F(R_1\ R_2) = \begin{pmatrix} T_0^T FR_1 & T_0^T FR_2 \\ T_*FR_1 & T_*FR_2 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим произведение $T_*FR_1 = T_*FT_0$. Поскольку столбцы матрицы T_0 по определению состоят из всех линейно независимых столбцов матрицы W, то столбцы матрицы FT_0 будут линейно выражаться через столбцы этой матрицы, т. е. справедливо равенство $FT_0 = T_0N$ для некоторой матрицы N. Отсюда согласно соотношениям (6) следует $T_*FR_1 = T_*FT_0 = T_*T_0N = 0$, что соответствует отсутствию связи от подсистемы Σ_1 к подсистеме Σ_2 согласно декомпозиции (см. рис. 1).

Кроме того, $G_k = TG = \begin{pmatrix} T_0^T G \\ T_* G \end{pmatrix}$, а поскольку столбцы матрицы G являются составной частью матрицы T_0, то $T_*G = 0$, что также соответствует декомпозиции (см. рис. 1).

Для анализа нелинейной составляющей предположим вначале, что последняя содержит только одну нелинейность, т. е. $p = 1$ и матрица C представляет собой вектор-столбец. При приведении линейной части к канонической форме нелинейная составляющая принимает вид

$$TC\varphi_1(AT^{-1}Tx,\ u) \qquad (7)$$

и добавляется в виде определенных связей в каноническую форму (см. рис. 1), причем возможны три следующие случая.

- Произведение TC имеет вид $TC = \begin{pmatrix} T_0^T C \\ T_* C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_0^T C \\ 0 \end{pmatrix}$, т. е. новые связи вводятся только в первую подсистему. Это означает, что они соответствуют структуре связей, существующих в канонической форме, и, следовательно, заключение о неуправляемости линейной части не нарушается. Условие $T_*C = 0$ с учетом соотношений (6) означает, что столбцы матрицы C линейно выражаются через столбцы матрицы T_0, т. е. $\mathrm{rank}(T_0) = \mathrm{rank}(T_0\ \ C)$, а поскольку $\mathrm{rank}(W) = \mathrm{rank}(T_0)$, то
$$\mathrm{rank}(W) = \mathrm{rank}(W\ C). \qquad (8)$$
- Условие (8) не выполняется и нелинейная составляющая не зависит от управления u, т. е. $\varphi_1(Ax, u) = \varphi_1(Ax)$. В этом случае новые связи не будут нарушать заключение о неуправляемости линейной части, если они будут формироваться только за счет вектора состояния подсистемы Σ_2. Так будет тогда, когда матрица AT^{-1} в выражении (7) имеет вид $AT^{-1} = (AR_1\ AR_2) = (0\ AR_2)$, что приводит к равенству
$$AR_1 = AT_0 = AW = 0. \qquad (9)$$
- Не выполняются условия (8) и (9) или нелинейная составляющая зависит от управления. В этом случае задача будет иметь нетривиальное решение, если подсистема Σ_2 может быть декомпозирована так, как показано на рис. 2. Выяснить возможность такой декомпозиции можно путем расширения вектора управления за счет

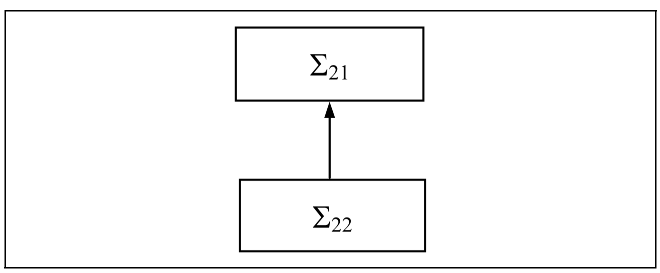

Рис. 2. Декомпозиция неуправляемой подсистемы

фиктивного входа $v = \varphi_1(Ax,\ u)$ с матрицей C: $(G\ C)\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$. Обозначим $G_0 = (G\ C)$ и рассмотрим матрицу управляемости W_0:

$$W_0 = (G_0\ FG_0\ \dots\ Fn^{-1}G_0). \qquad (10)$$

Пусть

$$\mathrm{rank}(W_0) < n; \qquad (11)$$

тогда в силу того, что условие (8) выполняется при $W = W_0$, новая связь не изменит структуру связей, существующих в канонической форме, и, следовательно, заключение о неуправляемости линейной части не нарушается.

При наличии в системе $p \geqslant 2$ нелинейностей, когда C — матрица размера $n \times p$, полученные соотношения несколько модифицируются. Рассмотрим три случая.

- Если условие (8) выполняется для указанной матрицы C, система Σ неуправляема.
- Предположим, что условие (8) не выполняется для столбцов $C_{i_1},\ C_{i_2},\ \dots,\ C_{i_v}$ матрицы C. Проверим условия $A_jW = 0$, $j \in \{i_1,\ i_2,\ \dots,\ i_v\}$. Если все они выполняются и функция φ_j не зависит от u для всех $j \in \{i_1,\ i_2,\ \dots,\ i_v\}$, система Σ неуправляема.
- Пусть $A_{j_1}W \neq 0$, $A_{j_2}W \neq 0$, ..., $A_{j_k}W \neq 0$ или функции $\varphi_{j_1}, \varphi_{j_2}, \dots, \varphi_{j_k}$ зависят от u. Образуем матрицы $C' = (C_{j_1}\ \ C_{j_2}\ \dots\ C_{j_k})$ и $G_0 = (G\ C')$ и используем последнюю для построения расширенной матрицы управляемости W_0 согласно выражению (10). Если условие (11) выполняется, система Σ неуправляема.

3. ПОСТРОЕНИЕ НАБЛЮДАТЕЛЯ

Пусть выполняются условия (5) и (8) или (5) и (9), или (11). Покажем, как это можно использовать для понижения размерности диагностического наблюдателя. Предполагается, что начальное состояние диагностируемой системы находится в s-мерном подпространстве состояний $X_0 \subset X$, достижимых из нулевого начального состояния. Для конкретности рассмотрим случай, когда выполняются условия (5) и (8) или (5) и (9).

Как указано в § 1, наблюдатель строится на основе уравнений $\Phi F = F_*\Phi + JH$, $RH = H_*\Phi$ и $A = A_*\begin{pmatrix} \Phi \\ H \end{pmatrix}$, которые можно представить коммутативными диаграммами

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "F"] \arrow[d, "\begin{pmatrix} \Phi \\ H \end{pmatrix}"'] & X \arrow[d, "\Phi"] \\ X_* \times Y \arrow[r, "(F_* J)"] & X_* \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "H"] \arrow[d, "\Phi"'] & Y \arrow[d, "R"] \\ X_* \arrow[r, "H_*"] & X_* \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "A'"] \arrow[d, "\begin{pmatrix} \Phi \\ H \end{pmatrix}"'] & \{0, 1\} \\ X_* \times Y \arrow[r, "A_*"] & \{0, 1\} \end{tikzcd}$$

Учесть наличие подпространства X_0 можно следующей модификацией этих диаграмм:

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "T_0"] & X \arrow[r, "F"] \arrow[d, "\begin{pmatrix} \Phi \\ H \end{pmatrix}"'] & X \arrow[d, "\Phi"] \\ & X_* \times Y \arrow[r, "(F_* J)"] & X_* \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "T_0"] & X \arrow[r, "H"] \arrow[d, "\Phi"'] & Y \arrow[d, "R"] \\ & X_* \arrow[r, "H_*"] & Y_* \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "T_0"] & X \arrow[r, "A'"] \arrow[d, "\begin{pmatrix} \Phi \\ H \end{pmatrix}"'] & \{0, 1\} \\ & X_* \times Y \arrow[r, "A_*"] & \{0, 1\} \end{tikzcd}$$

В приведенных диаграммах V — некоторое s-мерное векторное пространство, X_* — пространство состояний наблюдателя, Y_* — пространство его выходов. Из коммутативности последних диаграмм следуют равенства

$$\Phi F T_0 = (F_* \Phi + JH) T_0, \quad RHT_0 = H_* \Phi T_0,$$
$$A' T_0 = A_* \begin{pmatrix} \Phi \\ H \end{pmatrix} T_0. \qquad (12)$$

Перепишем первое из них в виде $(\Phi F - F_*\Phi - JH)T_0 = 0$, откуда из свойства матрицы T_* следует равенство $\Phi F - F_*\Phi - JH = N_F T_*$ для некоторой матрицы N_F. Слагаемое $N_F T_*$ в уравнении

$$\Phi F = F_*\Phi + JH + N_F T_* \qquad (13)$$

можно рассматривать в качестве носителя информации о состояниях объекта диагностирования, дополнительной к той информации, которая поступает в наблюдатель через вектор выхода y. Эта дополнительная информация и позволяет уменьшить размерность наблюдателя.

По аналогии с уравнением (13) на основе второго и третьего равенств (12) можно записать уравнения

$$RH = H_*\Phi + N_H T_*, \quad A' = A_* \begin{pmatrix} \Phi \\ H \end{pmatrix} + N_A T_* \qquad (14)$$

для некоторых матриц N_H и N_A. С учетом уравнений (14) условие (4) заменяется на

$$\text{rank}(\Phi^T \; H^T \; T_*^T) = \text{rank}(\Phi^T \; H^T \; T_*^T \; A'^T). \qquad (15)$$

Известно [3, 5], что наиболее простой процедура синтеза наблюдателя получается при его реализации в канонической форме, когда описывающие его матрицы имеют вид

$$F_* = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \quad H_* = (1 \; 0 \; 0 \; \dots \; 0).$$

В этом случае уравнение (13) можно представить в виде совокупности k уравнений [3, 5]:

$$\Phi_i F = \Phi_{i-1} + J_i H + N_{Fi} T_*, \quad i = 1, 2, \dots, k-1,$$
$$\Phi_k F = J_k H + N_{Fk} T_*, \qquad (16)$$

где N_{Fi} — i-я строка матрицы N_F, $i = 1, 2, \dots, k$, k — размерность наблюдателя.

Для обеспечения нечувствительности наблюдателя к возмущениям введем матрицу L_* максимального ранга, удовлетворяющую условию $L_* L = 0$. Из определения матрицы L_* следует, что $\Phi = N_L L_*$ для некоторой матрицы N_L. Как показано в работе [3], это дает ограничение на матрицу R в виде $R = N_R R^0$, где R^0 — матрица максимального ранга, удовлетворяющую уравнению $(R \; N_Q)\begin{pmatrix} H \\ L_* \end{pmatrix} = 0$; N_R, N_Q — некоторые матрицы. Тогда из уравнений (14) следует $N_R R^0 H = \Phi_1 + N_H T_*$. По аналогии с работой [3], уравнения (16) и последнее равенство можно свернуть в одно:

$$N_R R^0 H F^k = J_1 H F^{k-1} + N_{F1} T_* F^{k-1} + \dots + J_k H +$$
$$+ N_{Fk} T_* - N_H T_* F^k. \qquad (17)$$

Выражение (17) можно упростить. Как показано ранее, $FT_0 = T_0 N$, тогда $F^i T_0 = T_0 N^i$ для всех $i = 1, 2, \dots$ Поскольку $T_* F^i T_0 = T_*(F^i T_0) = T_* T_0 N^i$, то из соотношений (6) следует $T_* F^i T_0 = 0$. Последнее равенство также с учетом соотношений (6) означает, что строки матрицы $T_* F^i$ линейно выражаются через строки матрицы T_* при всех $i = 1, 2, \dots$ Таким образом, сумма всех слагаемых вида $N_j T_* F^i$ в правой части равенства (17) сводится к единственному члену $N_* T_*$ для некоторой матрицы N_*, что дает

$$N_R R^0 H F^k = J_1 H F^{k-1} + \dots + J_k H + N_* T_*. \qquad (18)$$

Наличие слагаемого $N_* T_*$ дает формальное основание для уменьшения размерности наблюдателя у неуправляемой системы. Это слагаемое можно интерпретировать следующим образом. Оно формирует дополнительный вход в наблюдатель в виде $N_* T_* x$; поскольку предполагается, что состояние x достижимо из начального нулевого, то вектор x может быть представлен в виде линейной комбинации столбцов матрицы T_0. Последнее означает, что произведение $N_* T_* x$ всегда равно нулю, и, следовательно, фактически этот вход отсутствует.

Как следует из уравнения (18), слагаемое $N_* T_*$ имеет такую же структуру, что и слагаемое $J_k H$, поэтому в соотношениях (16) и (17) следует положить $N_H = 0$, $N_{Fi} = 0$, $i = 1, 2, \dots, k-1$.

На основе уравнения (18) известным образом [3] определяются минимальная размерность наблюдателя k и матрицы N_R, J_1, ..., J_k, T_*, с помощью которых определяются матрица $R = N_R R^0$ и строки матрицы Φ согласно уравнениям (16) при

$\Phi_1 = N_R R^0 H$ и $N_{Fi} = 0$, $i = 1, 2, ..., k - 1$. Если найденная матрица Ф удовлетворяет условиям (3) и (15), то построение линейной части наблюдателя заканчивается. В противном случае находится другое решение уравнения (18) (возможно при большей размерности наблюдателя), определяется матрица Ф и производятся указанные проверки.

Нелинейная составляющая добавляется в линейный наблюдатель на основе второго из уравнений (14), разрешенного относительно матрицы A_*. Для этого предварительно рассчитывается произведение ΦC и строится матрица A'. Наличие матрицы T_* в этом уравнении упрощает условия его разрешимости, что косвенно также приводит к уменьшению размерности наблюдателя. Как и ранее, слагаемое $N_A T_*$ во втором из уравнений (14) носит формальный характер, в строящийся наблюдатель матрица T_* не входит.

Матрица обратной связи K, обеспечивающая устойчивость наблюдателя и вводимая в его модель согласно уравнению (2), может быть определена методами, изложенными в статье [8].

4. ОБСУЖДЕНИЕ ПОСТАНОВКИ ЗАДАЧИ И ПОЛУЧЕННЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

Отметим, прежде всего, что диагностируемая система может быть неуправляемой по причине неоптимальности процедуры ее синтеза или при работе системы в особых режимах при ограничении поступающих на нее управляющих воздействий. Отметим также, что неуправляемость не предполагает обязательного наличия в системе неуправляемой подсистемы. Свойство неуправляемости означает, прежде всего, что в пространстве состояний системы имеется область состояний, не достижимых из некоторого множества начальных состояний.

В неуправляемой технической системе каждый составляющий ее элемент может полностью реализовывать свои функциональные возможности; например, в цифровой системе каждый триггер будет принимать все свои возможные состояния. В то же время в совокупности (из-за особенностей закона функционирования системы) эти элементы могут работать так, что в пространстве состояний модели этой системы появляются состояния, не достижимые из множества начальных состояний. В цифровой системе этому может соответствовать случай, когда два триггера, работая совместно, принимают не четыре, а три состояния.

При решении задачи локализации дефектов обычно используется банк наблюдателей, каждый из которых чувствителен к одной группе дефектов и инвариантен к другой. Для некоторых наблюдателей предложенная в работе процедура учета неуправляемости может быть реализована в полной мере, что приведет к уменьшению их размерности. Для других наблюдателей из банка процедура не даст такого эффекта по той причине, что для матрицы Ф, характеризующей каждый такой наблюдатель, не будет выполняться условие (3) или (15). Можно предположить, что такой результат будет характерен для наблюдателей, чувствительных к дефектам, появление которых может сделать систему управляемой. Окончательное решение о возможности применения предложенной процедуры должно приниматься на основе моделирования системы с дефектами.

5. ИЛЛЮСТРАТИВНЫЙ ПРИМЕР

Рассмотрим систему, описываемую следующей моделью:

$$\dot{x}_1 = x_2 - 2\operatorname{sign}(x_5 - x_3) + x_6 + u_2 + \vartheta,$$
$$\dot{x}_2 = x_3 + 2(x_1 + x_6)u_2, \quad \dot{x}_3 = x_4 + x_6 u_2,$$
$$\dot{x}_4 = x_1 + u_2 + x_5 u_1 + x_6 + d, \quad \dot{x}_5 = x_4 + x_6 u_2,$$
$$\dot{x}_6 = 2\operatorname{sign}(x_5 - x_3) - x_6, \quad y_1 = x_1 + x_6, \quad y_2 = x_3.$$

Приведем правую часть каждого уравнения к виду (1), что даст следующий набор матриц:

$$F = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$L = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\varphi_1 = \operatorname{sign}(x_5 - x_3) - x_5 + x_3, \quad \varphi_2 = x_1 u_2 - x_1 - u_2,$$
$$\varphi_3 = x_5 u_1 - x_5 - u_1, \quad \varphi_4 = x_6 u_2 - x_6 - u_2.$$

Найдем три первых блока матрицы управляемости $W' = (G \; FG \; F^2G)$:

$$W' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Поскольку rank(W') = 4, линейная часть системы неуправляема. Условие (8) не выполняется для первой строки матрицы C, но поскольку $A_1W = 0$ и функция $\varphi_1 = \mathrm{sign}(x_5 - x_3) - x_5 + x_3$ не зависит от u, нелинейная система остается неуправляемой. Нетрудно проверить, что в нашем случае $T_* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $R^0 = (0\ 1)$ и уравнение (18) разрешимо только при $k = 2$:

$$N_R(0\ 1)HF^2 = (1\ 0\ -1\ 0\ 2\ 0) = H_1 + H_2 + 2T_{*1} - T_{*2},$$

откуда $N_R = 1$, $J_1 = 0$, $J_2 = (1\ 1)$. Из уравнений $\Phi_1 = N_RR^0H$ и (16) найдем строки матрицы Φ: $\Phi_1 = (0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0)$, $\Phi_2 = (0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 1)$. Отсюда получаем $\Phi C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ и $G_* = \Phi G = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Ненулевые столбцы в матрице ΦC — первый, третий и четвертый, что определяет структуру матрицы A'. Нетрудно проверить, что условия (3) и (15) выполняются, что позволяет получить следующее описание линейного наблюдателя:

$$\dot{x}_{*1} = x_{*2} + u_2, \quad \dot{x}_{*2} = y_1 + y_2 + u_1 + u_2.$$

Второе из уравнений (14) дает следующее: $A_{*1} = 0$, $N_{A1} = (1\ 0)$, $A_{*3} = (0\ 0\ 0\ 1)$, $N_{A3} = (1\ 0)$, $A_{*4} = 0$, $N_{A4} = (0\ 1)$. Это позволяет получить следующие нелинейные составляющие для переменных x_{*1} и x_{*2}: $-u_2$ и $-y_2 - u_1 + y_2u_1$ соответственно. В результате получаем следующее окончательное описание нелинейного наблюдателя:

$$\dot{x}_{*1} = x_{*2}, \quad \dot{x}_{*2} = y_1 + y_2u_1 + u_2.$$

Отметим, что неучет неуправляемости исходной системы приводит к увеличению размерности наблюдателя до трех.

Поскольку нелинейная составляющая в наблюдателе не зависит от его вектора состояния, матрица обратной связи K определяется, как в линейном случае. Поэтому, задавая, например, $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$, получим $K = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предложен метод учета неуправляемости нелинейной системы при решении задачи функционального диагностирования на основе логико-динамического подхода. Особенность подхода состоит в том, что он позволяет решать задачу для нелинейных систем линейными методами без сложных аналитических выражений и дает возможность рассматривать с единых позиций как непрерывные, так и дискретные системы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Мироновский Л.А.* Функциональное диагностирование динамических систем. — М.; СПб.: МГУ-ГРИФ, 1998.
2. *Жирабок А.Н, Летенко А.А.* Логико-динамический подход к диагностированию билинейных систем // Проблемы управления. — 2006. — № 4. — С. 20—25.
3. *Шумский А.Е., Жирабок А.Н.* Методы и алгоритмы диагностирования и отказоустойчивого управления динамическими системами. — Владивосток: ДВГТУ, 2009. — 196 с.
4. *Шумский А.Е.* Функциональное диагностирование нелинейных динамических систем с запаздыванием // Автоматика и телемеханика. — 2009. — № 3. — С. 172—184.
5. *Жирабок А.Н., Усольцев С.А.* Линейные методы при диагностировании нелинейных систем // Автоматика и телемеханика. — 2000. — № 7. — С. 149—159.
6. *Жирабок А.Н.* Анализ наблюдаемости и управляемости нелинейных динамических систем линейными методами // Изв. РАН. Теория и системы управления. — 2010. — № 1. — С. 10—17.
7. *Квакернаак Х., Сиван Р.* Линейные оптимальные системы управления. — М.: Мир, 1977.
8. *Misawa E.A., Hedrick J.K.* Nonlinear observers — a state of the art survey // Journal of dynamic systems, measurements and control. — 1989. — Vol. 111. — P. 344—352.

Статья представлена к публикации членом редколлегии чл.-корр. РАН П.П. Пархоменко.

Жирабок Алексей Нилович — д-р техн. наук, профессор,
☎ (4232) 45-08-64, ✉ zhirabok@mail.ru,

Бобко Евгений Юрьевич — аспирант,

Варнаков Алексей Игоревич — аспирант,

Писарец Антон Михайлович — ст. преподаватель,

Дальневосточный государственный технический университет, г. Владивосток.