УДК 531.3:681.5.01

КРИТЕРИЙ ВЕРОЯТНОСТИ ОБНАРУЖЕНИЯ НА ТРАЕКТОРИИ В ЗАДАЧЕ УПРАВЛЕНИЯ ДВИЖЕНИЕМ ОБЪЕКТА В КОНФЛИКТНОЙ СРЕДЕ[1]

Л.П. Сысоев

Рассмотрена задача синтеза вероятностного критерия оптимальности управления движением объекта в конфликтной среде. Вероятность того, что при прохождении маршрута объект не будет обнаружен, представлена в виде функционала от траектории. Найдена зависимость вероятности обнаружения объекта от времени прохождения оптимального маршрута. Определено оптимальное время прохождения маршрута.

Ключевые слова: синтез вероятностного критерия, оптимальный маршрут, конфликтная среда, вероятность обнаружения объекта, оптимальное время прохождения маршрута.

ВВЕДЕНИЕ

Данная статья связана с проблематикой управления движением объекта в среде с объектами, сближения с которыми управляемому объекту необходимо избегать. Подобную среду принято называть конфликтной (см., например, работы [1—3]).

Пусть требуется оценить качество маневрирования управляемого движущегося объекта при прохождении им из заданной начальной точки в заданную конечную точку, обходя ряд неподвижных объектов (наблюдателей), задача которых состоит в обнаружении объектов, пересекающих некоторый регион. Задача управляемого подвижного объекта — перейти из начальной точки в конечную, минимизируя негативное воздействие наблюдателей, которое, в частности, может выражаться в обнаружении объекта. При определении оптимального маршрута существенную роль играет выбор критерия качества маневрирования управляемого объекта. В работах [1] и [3] задача определения маршрута решалась путем минимизации риска, который можно интерпретировать как суммарную энергию, принятую наблюдателями от движущегося объекта за время его перехода из начальной точки в конечную. В работе [1] решена вариационная задача построения оптимальной траектории при движении с постоянной скоростью, в работе [3] для случая одного наблюдателя решена задача определения оптимальной траектории и оптимального закона изменения скорости при заданном времени прохождения траектории. Отметим, что минимизируемый в этих работах риск косвенным образом связан с возможностью обнаружения объекта. Более непосредственным образом такую возможность характеризуют вероятностные критерии. Например, качество движения объекта можно характеризовать вероятностью того, что за время прохождения объектом маршрута его не обнаружит ни один из нескольких неподвижных наблюдателей, расположенных в регионе и работающих в пассивном режиме. Таким образом, возникает задача представления этой вероятности через закон передвижения управляемого объекта из начальной точки в конечную. Оптимальный закон прохождения маршрута можно строить путем минимизации вероятности обнаружения. Отметим, что при использовании вероятностного критерия можно решать также задачу отыскания оптимального времени прохождения маршрута.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть на плоскости заданы две точки $A(x_1, y_1)$ и $B(x_2, y_2)$, определяющие начало и конец маршрута, который должен пройти управляемый объект за некоторое время T, минуя N наблюдателей, расположенных в точках $(x_k^{\text{наб}}, y_k^{\text{наб}})$ $(k = 1, ..., N)$. Будем исходить из того, что каждый из наблюдателей характеризуется последовательностью «взглядов» (например, обзоров антенной), бросаемых через равные промежутки времени, когда при

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке Программы № 29 Президиума РАН.

каждом взгляде наблюдатель принимает решение о наличии или отсутствии движущегося объекта, причем наблюдатели принимают решения независимо друг от друга. Зададим закон движения управляемого объекта от точки $A(x_1, y_1)$ до точки $B(x_2, y_2)$ посредством зависимости координат объекта от времени: $x(t)$, $y(t)$, $0 \leqslant t \leqslant T$, $x(0) = x_1$, $x(T) = x_2$. Тем самым задается также закон изменения вектора скорости $(\dot{x}(t), \dot{y}(t))$. Качество закона движения будем характеризовать вероятностью того, что за время прохождения объектом маршрута его ни разу не обнаружит ни один из наблюдателей. Наша основная задача заключается в представлении этой вероятности в виде функционала от $x(t)$, $y(t)$, $0 \leqslant t \leqslant T$. Для этого потребуется найти вероятность правильного обнаружения при одном взгляде в виде функции $p(d)$ от расстояния d между объектом и наблюдателем.

Будут рассмотрены также вопросы минимизации функционала и определения оптимального времени прохождения маршрута в случае одного наблюдателя.

2. ЗАВИСИМОСТЬ ВЕРОЯТНОСТИ ОБНАРУЖЕНИЯ ОТ ПОЛОЖЕНИЯ И СКОРОСТИ ОБЪЕКТА

Далее находится вероятность обнаружения объекта наблюдателем при одном взгляде как функция от скорости объекта и от расстояния между ним и наблюдателем.

Рассмотрим обнаружитель, работающий по принципу сравнения некоторой скалярной функции от наблюдений (решающей статистики) с порогом, выбираемым из условия заданной вероятности ложной тревоги α. Пусть решение о наличии или отсутствии объекта принимается на основе полученной после предварительной обработки сигнала совокупности независимых гауссовских случайных величин X_1, X_2, ..., X_n с нулевым математическим ожиданием. Обозначим через $\sigma^2_{\text{ш}}$ дисперсию помехи (шума) в обнаружителе, а через $\sigma^2_{\text{сиг}}(d)$ — дисперсию сигнала от объекта, зависящую от расстояния d между ним и наблюдателем. При отсутствии сигнала от объекта случайные величины X_i имеют дисперсию $\sigma^2_{\text{ш}}$, а при наличии сигнала от объекта — дисперсию $\sigma^2_{\text{сиг}}(d) + \sigma^2_{\text{ш}}$.

Обозначим через $p_0(x)$ плотность вероятности случайной выборки X_1, X_2, ..., X_n при отсутствии сигнала от объекта, а через $p_d(x)$ — плотность вероятности этой выборки при условии, что в ней содержится сигнал, пришедший от объекта, находящегося на расстоянии d от наблюдателя. Отношение правдоподобия в данном случае имеет вид

$$\frac{p_d(x)}{p_0(x)} =$$

$$= \left(\frac{\sigma^2_{\text{ш}}}{\sigma^2_{\text{сиг}}(d) + \sigma^2_{\text{ш}}}\right)^{\frac{n}{2}} \exp\left\{\frac{\sigma^2_{\text{сиг}}(d)}{2(\sigma^2_{\text{сиг}}(d) + \sigma^2_{\text{ш}})\sigma^2_{\text{ш}}} \sum_{i=1}^{n} x_i^2\right\}$$

и представляет собой строго возрастающую функцию от статистики $T(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2$ при любом значении неизвестного параметра d. Таким образом, $\dfrac{p_d(x)}{p_0(x)}$ есть монотонное отношение правдоподобия, и в данном случае существует равномерно наиболее мощный критерий для проверки гипотезы $\sigma^2_{\text{сиг}}(d) = 0$ (сигнал от объекта отсутствует) против альтернативы $\sigma^2_{\text{сиг}}(d) > 0$ (сигнал от объекта есть) [4]. Оптимальное правило принятия решения таково: величина $T(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2$ сравнивается с порогом h, и если $T(x) \leqslant h$, то принимается решение, что сигнал от объекта отсутствует, а если $T(x) > h$, то принимается решение, что сигнал от объекта есть. При этом порог h определяется из условия $\int\limits_h^{\infty} f_0(t) = \alpha$, где α — заданная вероятность ложной тревоги, а $f_0(t)$ — плотность вероятности статистики T в случае отсутствия полезного сигнала. При сформулированных нами предположениях

$$f_0(t) = \frac{1}{2^{n/2}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\sigma^2_{\text{ш}}}\left(\frac{t}{\sigma^2_{\text{ш}}}\right)^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{t}{2\sigma^2_{\text{ш}}}}, \quad t \geqslant 0,$$

и $h = \sigma^2_{\text{ш}}\chi^2_{1-\alpha,\,n}$, где $\chi^2_{1-\alpha,\,n}$ — $(1 - \alpha)$-квантиль χ^2-распределения с n степенями свободы.

При данном пороге h вероятность $p(d)$ обнаружения объекта, находящегося на расстоянии d от приемника, выражается как $p(d) = \int\limits_h^{\infty} f_d(t)dt$, где $f_d(t)$ — плотность вероятности статистики T при расстоянии d объекта от шумопеленгатора:

$$f_d(t) = \frac{1}{2^{n/2}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)(\sigma^2_{\text{сиг}}(d) + \sigma^2_{\text{ш}})^{\frac{n}{2}}} t^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{t}{2(\sigma^2_{\text{сиг}}(d) + \sigma^2_{\text{ш}})}},$$

$$t \geqslant 0.$$

Считая, что дисперсия сигнала от шумящего объекта обратно пропорциональна квадрату его расстояния d от наблюдателя, запишем ее в виде $\sigma^2_{\text{сиг}}(d) = \sigma^2_0(v)\, d_0^2/d^2$, где $\sigma_0^2(v)$ — дисперсия сигнала объекта при некотором эталонном (минимальном) расстоянии d_0 объекта от наблюдателя, v — скорость объекта, и тогда для вероятности $p(d)$ получаем выражение

$$p(d) = \frac{1}{2^{n/2}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\left(\frac{\sigma_0^2(v)d_0^2}{d^2} + \sigma_{\text{ш}}^2\right)^{\frac{n}{2}}} \times$$

$$\times \int\limits_{\sigma_{\text{ш}}^2\chi^2_{1-\alpha,\,n}}^{\infty} t^{\frac{n}{2}-1} \exp\left\{-t\Big/2\left(\frac{\sigma_0^2(v)d_0^2}{d^2} + \sigma_{\text{ш}}^2\right)\right\} dt,$$

т. е.

$$p(d) = 1 - F_n\left(\chi^2_{1-\alpha,\,n}\Big/\left(\frac{\sigma_0^2(v)d_0^2}{\sigma_{\text{ш}}^2 d^2} + 1\right)\right), \qquad (1)$$

где $F_n(x)$ — функция χ^2-распределения с n степенями свободы,

$$F_n(x) = \frac{1}{2^{n/2}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \int\limits_0^x u^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{u}{2}} du.$$

Формула (1) определяет зависимость вероятности обнаружения объекта от расстояния d между объектом и приемником при одном взгляде. Как показывает наличие члена $\sigma_0^2(v)$, эта вероятность зависит также от скорости v объекта. Для получения явного вида этой зависимости необходимо ввести явное выражение для функции $\sigma_0^2(v)$.

Если в соответствии с экспериментальными данными для зависимости шумности объекта от его скорости v принять соотношение $\sigma_0^2(v) = \gamma v^{\mu}$, где γ — некоторый размерный коэффициент, то для вероятности обнаружения объекта, имеющего скорость v и находящегося на расстоянии d от наблюдателя, получим выражение

$$p(d) = 1 - F_n\left(\chi^2_{1-\alpha,\,n}\Big/\left(\frac{\gamma v^{\mu} d_0^2}{\sigma_{\text{ш}}^2 d^2} + 1\right)\right). \qquad (2)$$

Для случаев, когда траектория объекта проходит на достаточно больших расстояниях от наблюдателя и d_0^2/d^2 является малой величиной, раскладывая функцию (2) в ряд по степеням d_0^2/d^2, в первом приближении получаем

$$p(d) = \alpha + \frac{\gamma v^{\mu}}{\sigma_{\text{ш}}^2} \cdot \frac{(\chi^2_{1-\alpha,\,n})^{\frac{n}{2}}}{2^{n/2}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} e^{-\frac{\chi^2_{1-\alpha,\,n}}{2}} \cdot \frac{d_0^2}{d^2}. \qquad (3)$$

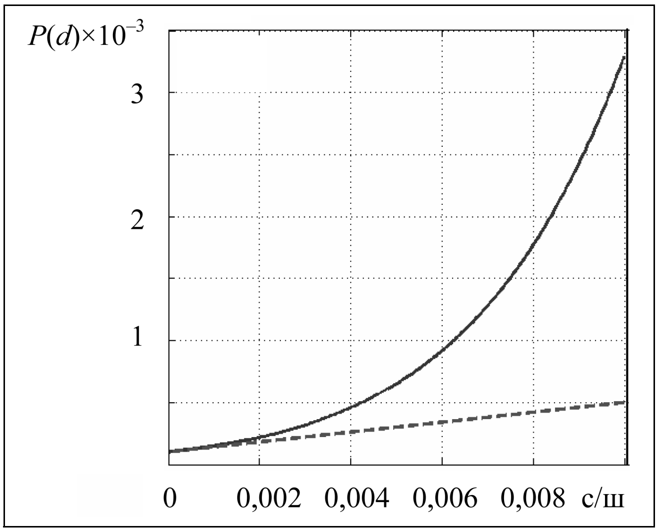

Рис. 1. Вероятность обнаружения как функция от отношения сигнал/шум в приемнике:
—— — точная формула; ----- — первое приближение

На рис. 1 приведены зависимости вероятности обнаружения от отношения сигнал/шум $\frac{\gamma v^{\mu} d_0^2}{\sigma_{\text{ш}}^2 d^2}$ в приемнике, полученные по точной формуле (2) и при использовании первого приближения (3) (в области малых значений этого отношения, т. е. больших расстояний).

3. ВЕРОЯТНОСТЬ ОБНАРУЖЕНИЯ ПРИ ПОЛНОМ ПРОХОЖДЕНИИ МАРШРУТА

Соотношения (2) и (3) далее будут использованы для получения формул, по которым вычисляется вероятность того, что объект ни разу не будет обнаружен за время прохождения им заданного маршрута.

Рассмотрим вначале случай одного наблюдателя. Пусть объект в течение некоторого интервала времени продолжительностью T двигается по круговой траектории на постоянном расстоянии d от наблюдателя. При условии статистической независимости решений при разных взглядах число решений о наличии объекта на этом интервале подчиняется биномиальному распределению с вероятностью успеха $p(d)$, зависящей от расстояния d. Для траектории объекта, проходящей достаточно далеко от наблюдателя, вероятность обнаружения мала, и биномиальное распределение можно аппроксимировать пуассоновским распределением с параметром $\lambda = np(d)$, где n — число обнаружений за время T. При этом для вероятности $P_T(0)$ того, что за время T объект ни разу не будет обнаружен данным наблюдателем, имеем $P_T(0) = e^{-\lambda} = e^{-\nu T}$, где ν — среднее число правильных обнаружений за единичный интервал времени: $\nu = n_0 p(d)$, n_0 — число взглядов за единичный интервал времени. Отсюда вероятность $P_{\Delta T}(0)$ того, что за малый промежуток времени ΔT не будет ни одного правильного обнаружения, получаем в виде

$$P_{\Delta T}(0) = e^{-n_0 p(d)\Delta T}. \tag{4}$$

Рассмотрим теперь процесс обнаружений объекта наблюдателем на интервале времени продолжительностью T, когда объект перемещается на значительные расстояния и при этом существенно изменяется расстояние между ним и наблюдателем. Разбивая полный интервал времени на подынтервалы длительностью ΔT_i, $i = 1, 2, ...$, на каждом из которых расстояние между объектом и наблюдателем можно считать постоянным, и принимая во внимание, что решения наблюдателя на непересекающихся интервалах времени независимы, вероятность $P_T(0)$ того, что за время T объект не будет обнаружен наблюдателем, получаем как произведение вероятностей (4): $P_T(0) = \prod\limits_i e^{-n_0 p(d_i)\Delta T_i} = e^{-n_0 \sum\limits_i p(d_i)\Delta T_i}$. Пользуясь малостью ΔT_i, заменяем сумму на интеграл по времени:

$$P_T(0) = e^{-n_0 \int\limits_0^T p(d(t))dt} \tag{5}$$

(интегральное представление полезно для применения методов вариационного исчисления при оптимизации маршрута).

В формуле (5) вероятность $p(d)$ как функцию от расстояния можно определить из выражений (2) или (3), причем само расстояние d — функция времени, определяемая законом движения объекта. Тем самым вероятность $P_{\text{необн}}$ того, что объект не будет обнаружен данным наблюдателем при прохождении им пути $x(t)$, $y(t)$ $(0 \leqslant t \leqslant T)$, в соответствии с равенством $d(t) = \sqrt{x^2(t) + y^2(t)}$ запишется в виде

$$P_{\text{необн}} = \exp\left\{-n_0\left(T - \int\limits_0^T F_n\left(\chi^2_{1-\alpha,\,n}\Big/\left[\frac{d_0^2\gamma(\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2)^m}{\sigma^2_{\text{ш}}[x(t)^2 + y(t)^2]} + 1\right]\right)dt\right)\right\},$$
$$m = \mu/2. \tag{6}$$

В случае N независимых наблюдателей, находящихся в пунктах с координатами $x_k^{\text{наб}}$, $y_k^{\text{наб}}$ $(k = 1, ..., N)$, вероятность $P^{(N)}_{\text{необн}}$ того, что ни один из них не обнаружит объект за время прохождения им маршрута, равна произведению вероятностей вида (6):

$$P^{(N)}_{\text{необн}} = \exp\left\{-T\sum_{k=1}^N n_k + \sum_{k=1}^N n_k \int\limits_0^T F_n \times \right.$$
$$\left.\times\left(\chi^2_{1-\alpha,\,n}\Big/\left[\frac{d_0^2\gamma(\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2)^m}{\sigma_k^2[(x(t) - x_k^{\text{наб}})^2 + (y(t) - y_k^{\text{наб}})^2]} + 1\right]\right)dt\right\},$$

где n_k — число взглядов за единицу времени, а σ_k^2 — дисперсия шума для k-го наблюдателя.

При использовании приближения (3) имеем

$$P_{\text{необн}} = \exp\left\{-n_0\int\limits_0^T\left[\alpha + \frac{(\chi^2_{1-\alpha,\,n})^{\frac{n}{2}}}{2^{n/2}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} e^{-\frac{\chi^2_{1-\alpha,\,n}}{2}} \times \right.\right.$$
$$\left.\left.\times\frac{d_0^2\gamma}{\sigma^2_{\text{ш}}}\frac{(\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2)^m}{x(t)^2 + y(t)^2}\right]dt\right\} \tag{7}$$

в случае одного наблюдателя, находящегося в начале координат, и

$$P^{(N)}_{\text{необн}} = \exp\left\{-\alpha T\sum_{k=1}^N n_k - \frac{(\chi^2_{1-\alpha,\,n})^{\frac{n}{2}}}{2^{n/2}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} e^{-\frac{\chi^2_{1-\alpha,\,n}}{2}} d_0^2\gamma \times \right.$$
$$\left.\times\sum_{k=1}^N \frac{n_k}{\sigma_k^2}\int\limits_0^T \frac{(\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2)^m}{(x(t) - x_k^{\text{наб}})^2 + (y(t) - y_k^{\text{наб}})^2}dt\right\}$$

в случае N наблюдателей с координатами $x_k^{\text{наб}}$, $y_k^{\text{наб}}$, $k = 1, ..., N$.

4. ОПТИМИЗАЦИЯ ВЕРОЯТНОСТНОГО КРИТЕРИЯ В СЛУЧАЕ ОДНОГО НАБЛЮДАТЕЛЯ

Рассмотрим далее вопросы оптимизации маршрута по критерию минимума вероятности обнаружения, т. е. максимума вероятности необнаружения $P_{\text{необн}}$, в случае одного наблюдателя. Максимизация вероятности $P_{\text{необн}}$ эквивалентна минимизации риска $R_p = (-1/n_0)\ln P_{\text{необн}}$, представляющегося в силу выражения (7) в виде функционала от $x(t)$, $y(t)$ $(0 \leqslant t \leqslant T)$:

$$R_p = \int_0^T \left[\alpha + \frac{(\chi^2_{1-\alpha,\,n})^{\frac{n}{2}}}{2^{n/2}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} e^{-\frac{\chi^2_{1-\alpha,\,n}}{2}} \frac{d_0^2\gamma}{\sigma^2_{\text{ш}}} \frac{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^m}{x^2 + y^2}\right] dt. \quad (8)$$

Рассмотрим задачу минимизации риска R_p как по x, y, так и по времени T прохождения маршрута при граничных условиях $x(0) = x_1$, $y(0) = y_1$, $x(T) = x_2$, $y(T) = y_2$. Эта задача решается путем минимизации риска R_p по x, y при заданном времени T и последующей минимизации по T значения риска, полученного для оптимальной траектории.

Обозначая

$$\beta = \frac{(\chi^2_{1-\alpha,\,n})^{\frac{n}{2}}}{2^{n/2}\Gamma(n/2)} \exp\left\{-\frac{\chi^2_{1-\alpha,\,n}}{2}\right\} \frac{d_0^2\gamma}{\sigma^2_{\text{ш}}},$$

запишем вероятностный риск (8) в виде $R_p = \alpha T + \beta R$, где $R = \int_0^T (\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^m/(x^2 + y^2)dt$ — энергетический риск, путем минимизации которого в работе [3] были найдены оптимальные траектории. Из данного представления риска R_p следует, что при заданном времени прохождения маршрута оптимальный закон перемещения объекта из начальной точки в конечную в случае вероятностного критерия такой же, как и в случае энергетического критерия. Отличие только в зависимости рисков от времени прохождения маршрута.

Введением полярных координат $x = \rho\cos\psi$, $y = \rho\sin\psi$ и величины $r = \ln\rho$ энергетический риск R в работе [3] приведен к виду $R = \int_0^T (\dot{r}^2 + \dot{\psi}^2) \times \Phi(r)dt$, где $\Phi(r) = \exp\{(2m - 2)r\}$. Соответственно для вероятностного риска имеем

$$R_p = \int_0^T [\alpha + \beta(\dot{r}^2 + \dot{\psi}^2)\Phi(r)dt. \quad (9)$$

Граничные условия, записанные в полярных координатах, имеют вид

$$\rho(0) = \rho_1, \quad \psi(0) = \psi_1,$$
$$\rho(T) = \rho_2, \quad \psi(T) = \psi_2. \quad (10)$$

Уравнения Эйлера в случае функционала (9) совпадают с полученными в работе [3] уравнениями Эйлера в задаче минимизации функционала R, при этом форма уравнений различна для случаев $m = 1$ и $m \neq 1$. В случае $m \neq 1$ уравнения Эйлера имеют вид [3]

$$\frac{d}{dt}[2m(\dot{r}^2 + \dot{\psi}^2)^{m-1}\Phi(r)] = 0,$$

$$\frac{d}{dt}[2m\dot{r}(\dot{r}^2 + \dot{\psi}^2)^{m-1}\Phi(r)] -$$
$$-(2m - 2)(\dot{r}^2 + \dot{\psi}^2)^m\Phi(r) = 0; \quad (11)$$

при этом для первого уравнения в работе [3] выписан первый интеграл в виде

$$[2m\dot{\psi}(\dot{r}^2 + \dot{\psi}^2)^{m-1}\Phi(r)] = C_1 \quad (12)$$

и найдена оптимальная траектория, отвечающая случаю $C_1 \neq 0$. Отметим, что в этом случае $\dot{y}$ не меняет знака на оптимальной траектории ($\mathrm{sgn}\,\dot{y} = \mathrm{sgn}\,C_1$) и нельзя рассматривать граничные условия с $\psi_1 = \psi_2$. Полученные в работе [3] соотношения

$$\rho = \rho_0 \left|\cos\left(\frac{m-1}{m}\psi + C_2\right)\right|^{-\frac{m}{m-1}}, \quad (13)$$

$$\Phi(r) = \rho_0^{2m-2}\left[\cos^2\left(\frac{m-1}{m}\psi + C_2\right)\right]^{-m}, \quad (14)$$

где ρ_0 и C_2 — постоянные интегрирования, подлежащие определению из граничных условий (10), далее будут использованы для отыскания оптимальных зависимостей полярных координат от времени и зависимости вероятности обнаружения на траектории от времени ее прохождения.

Найдем вначале постоянные интегрирования исходя из граничных условий (10), используя выражение (12) (отметим, что полярный угол для точек на траектории может изменяться только в тех пределах, в которых косинус не обращается в нуль). Имеем

$$\cos\left(\frac{m-1}{m}\psi_2 + C_2\right) = \left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)^{(m-1)/m}\cos\left(\frac{m-1}{m}\psi_1 + C_2\right),$$

откуда следует, что

$$C_2 = \operatorname{arctg}\frac{\left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)^{(m-1)/m}\cos\frac{m-1}{m}\psi_2 - \cos\frac{m-1}{m}\psi_1}{\left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)^{(m-1)/m}\sin\frac{m-1}{m}\psi_2 - \sin\frac{m-1}{m}\psi_1}. \quad (15)$$

При этом $\rho_0 = \rho_1\left|\cos\left(\frac{m-1}{m}\psi_1 + C_2\right)\right|^{(m-1)/m}$.

Используя соотношения (13), (14) и

$$\dot r = \dot\psi\,\mathrm{tg}\left(\frac{m-1}{m}\psi + C_2\right)$$

(см. работу [3]), из выражения (12) получаем дифференциальное уравнение для полярного угла

$$\dot\psi = \operatorname{sgn}C_1|C_1|^{1/(2m-1)}\rho_0^{-(2m-2)/(2m-1)} \times$$
$$\times (2m)^{1/(2m-1)}\cos^2\left(\frac{m-1}{m}\psi + C_2\right),$$

которое, обозначая

$$C_3 = \operatorname{sgn}C_1|C_1|^{1/(2m-1)}\rho_0^{-(2m-2)/(2m-1)}(2m)^{1/(2m-1)},$$

запишем в форме

$$\frac{d\psi}{\cos^2\left(\frac{m-1}{m}\psi + C_2\right)} = C_3dt.$$

Интегрируя это уравнение, получаем следующую зависимость от времени для полярного угла на оптимальной траектории:

$$\frac{m}{m-1}\,\mathrm{tg}\left(\frac{m-1}{m}\psi + C_2\right) = C_3t + C_4. \quad (16)$$

Постоянная C_4 определяется из условия $\psi(0) = \psi_1$ и оказывается равной

$$C_4 = \frac{m}{m-1}\,\mathrm{tg}\left(\frac{m-1}{m}\psi_1 + C_2\right). \quad (17)$$

Подставляя выражение (17) в зависимость (16) и используя граничное условие $\psi(T) = \psi_2$, получаем

$$C_3 = \frac{1}{T}\frac{m}{m-1}\left[\mathrm{tg}\left(\frac{m-1}{m}\psi_2 + C_2\right) - \right.$$
$$\left. - \mathrm{tg}\left(\frac{m-1}{m}\psi_1 + C_2\right)\right], \quad (18)$$

где C_2 определяется выражением (15).

Поскольку в случае оптимальной траектории подынтегральное выражение в формуле для энергетического риска постоянно и согласно работе [3] равно $|C_3|^{2m}\rho_0^{2m-2}$, из формулы (18) получаем следующую зависимость минимального энергетического риска от времени T прохождения маршрута:

$$R(T) = \frac{1}{T^{2m-1}}\left(\frac{m}{m-1}\right)^{2m}\rho_0^{2m-2} \times$$
$$\times \left|\mathrm{tg}\left(\frac{m-1}{m}\psi_2 + C_2\right) - \mathrm{tg}\left(\frac{m-1}{m}\psi_1 + C_2\right)\right|^{2m}.$$

Отсюда видно, что в случае энергетического критерия не существует оптимального времени передвижения из начальной точки в конечную, поскольку минимальное значение риска стремится к нулю при $T \to \infty$.

Обозначая

$$\delta = \left(\frac{m}{m-1}\right)^{2m}\rho_0^{2m-2} \times$$
$$\times \left|\mathrm{tg}\left(\frac{m-1}{m}\psi_2 + C_2\right) - \mathrm{tg}\left(\frac{m-1}{m}\psi_1 + C_2\right)\right|^{2m},$$

зависимость от времени T для вероятностного риска $R_p = \alpha T + \beta R$ получаем в виде

$$R_p(T) = \alpha T + \frac{\beta\delta}{T^{2m-1}}, \quad (19)$$

где α — вероятность ложной тревоги, а β — множитель, определенный в начале параграфа. Отсюда следует, что в предполагаемом случае $m > 1$ существует оптимальное время прохождения маршрута, получаемое минимизацией риска (19) по T:

$$T_{\text{опт}} = \left(\frac{(2m-1)\beta\delta}{\alpha}\right)^{1/2m}.$$

Соответствующая максимальная вероятность того, что объект не будет обнаружен на оптимальном маршруте, выражается как

$$P_{\max} = \exp\left\{-n_0 2m(2m-1)^{-\frac{2m-1}{2m}}\alpha^{\frac{2m-1}{2m}}(\beta\delta)^{\frac{1}{2m}}\right\}.$$

(Напоминаем, что n_0 — число взглядов наблюдателя за единицу времени.) На рис. 2 приведены зависимости оптимального вероятностного риска от времени прохождения маршрута при различных значениях вероятности ложной тревоги α.

Разберем теперь случай, когда в формуле (12) $C_1 = 0$ и, следовательно, $\dot y \equiv 0$, $\psi = \text{const}$. В этом случае имеем задачу об уклонении, когда управляемый объект удаляется от наблюдателя. Второе из уравнений (11) приводится к виду $2m\ddot r + (2m-1)\dot r^2 = 0$, откуда получаем $\dot r = Ce^{-\frac{m-1}{m}r}$ и для подынтегрального выражения в риске — значение C^m. Для $\rho = e^r$

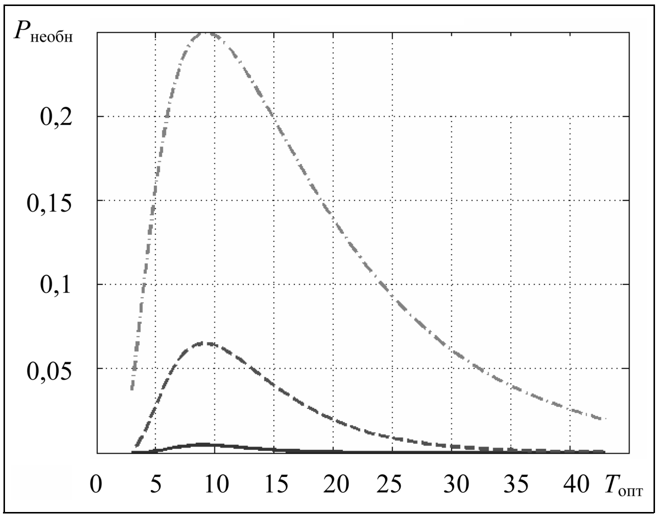

Рис. 2. Зависимость оптимального вероятностного риска от времени *T* прохождения маршрута:
—— — α = 0,0001; ----- — α =0,00005; —·— — α = 0,000025

получаем дифференциальное уравнение $\dot{\rho} = C\rho^{1/m}$, из которого с учетом граничных условий следует, что $C = \frac{m}{(m-1)T}\left[\rho_2^{-\frac{m-1}{2}} - \rho_1^{-\frac{m-1}{2}}\right]$. Таким образом, для вероятностного риска получаем следующую зависимость от времени T:

$$R_p(T) = \alpha T + \beta\delta_0/T^m,$$

где $\delta_0 = \left(\frac{m}{m-1}\right)^m\left[\rho_2^{-\frac{m-1}{2}} - \rho_1^{-\frac{m-1}{2}}\right]$.

Оптимальное время $T_{опт} = (\beta\delta_0/\alpha)^{m+1}$.

В случае $m = 1$ критерий (11) принимает вид

$$R_P = \int_0^T [\alpha + \beta(\dot{r}^2 + \dot{\psi}^2)]dt, \qquad (20)$$

и, как в работе [3], уравнения Эйлера имеют вид $\ddot{r} = 0$, $\ddot{\psi} = 0$ откуда $\dot{r} = c_1$, $\dot{\psi} = c_2$ и согласно выражению (20)

$$R_p = \int_0^T [\alpha + \beta(c_1^2 + c_2^2)]dt \qquad (21)$$

и $r = r_1 + c_1 t$, $\psi = \psi_1 + c_2 t$.

Отсюда в силу граничных условий $r(0) = \ln\rho_1$, $r(T) = \ln\rho_2$, $\psi(0) = \psi_1$, $\psi(T) = \psi_2$ получаем

$$c_1 = \frac{1}{T}\ln\frac{\rho_2}{\rho_1}, \quad c_2 = \frac{1}{T}(\psi_2 - \psi_1)$$

и согласно выражению (21)

$$R_{опт}(T) = \alpha T + \beta\delta_1/T, \qquad (22)$$

где $\delta_1 = \ln^2\frac{\rho_2}{\rho_1} + (\psi_2 - \psi_1)^2$.

Таким образом, в случае $m = 1$ оптимальное время прохождения маршрута, получаемое минимизацией риска (22) по T, выражается как $T_{опт} = (\beta\delta_1/\alpha)^{1/2}$.

Отметим, что во всех рассмотренных случаях оптимального в смысле энергетического критерия времени не существует, ибо оптимальное значение энергетического риска стремится к нулю при $T \to \infty$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Получена зависимость вероятности обнаружения управляемого объекта от закона его движения из заданной начальной точки в заданную конечную точку в конфликтной среде с несколькими наблюдателями. На примере одного наблюдателя показано, что оптимальный закон движения согласно вероятностному критерию оказывается таким же, как по критерию минимума энергии, принятой наблюдателем от шумящего объекта. Однако в случае вероятностного критерия существует оптимальное время прохождения маршрута, тогда как энергетический риск стремится к нулю при неограниченном увеличении этого времени.

Выражаю благодарность канд. техн. наук И.М. Рудько за предоставление экспериментальных результатов.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Zabarankin M., Uryasev S., Pardalos P.* Optimal Risk Path Algorithms // Cooperative Control and Optimisation Ch. 1 / Eds. R. Murphey, P. Pardalos. — Dortrecht: Kluer Acad., 2002. — P. 271—303.
2. *Zabarankin M., Uryasev S., Murphey R.* Aircraft Routing under the Risk of Detection // Naval Research Logistics. — 2006. — Vol. 53, N. 8. — P. 728—747.
3. *Галяев А.А., Маслов Е.П., Рубинович Е.Я.* Об одной задаче управления движением объекта в конфликтной среде // Изв. РАН. Теория и системы управления. — 2009. — № 3. — С. 134—140.
4. *Леман Э.* Проверка статистических гипотез. — М.: Наука, 1964. — С. 498.

Статья представлена к публикации членом редколлегии Е.Я. Рубиновичем.

Сысоев Леонид Павлович — канд. техн. наук,
ст. науч. сотрудник, Институт проблем управления
им. В.А. Трапезникова РАН, г. Москва,
☎ (495) 334-91-61, ✉ sysoev@ipu.ru.