УДК 517.929.21

СИНТЕЗ ЦИФРОВЫХ СТАБИЛИЗИРУЮЩИХ РЕГУЛЯТОРОВ ДЛЯ НЕПРЕРЫВНЫХ СИСТЕМ НА ОСНОВЕ МЕТОДА ФУНКЦИЙ ЛЯПУНОВА[1]

Н.О. Седова

Получены новые результаты по асимптотической устойчивости для непрерывных систем под действием кусочно-постоянных управлений. Результаты получены в терминах функций Ляпунова—Разумихина, определяемых с учетом специфики выбранного типа управления. Приведены иллюстрирующие примеры.

Ключевые слова: кусочно-постоянное управление, устойчивость, стабилизация.

ВВЕДЕНИЕ

Задача стабилизации непрерывных систем кусочно-постоянным (дискретным) управлением активно исследуется в последние десятилетия. Прежде всего, это связано с появлением сложных управляемых объектов, требующих присутствия в системе управления цифровых измерительных и управляющих устройств.

Основная часть исследований посвящена построению кусочно-постоянных управлений для линейных систем, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями или уравнениями с сосредоточенным запаздыванием [1, 2 и др.] Применяются различные подходы, в частности, на основе частотных методов [3], дискретизации непрерывного стабилизирующего регулятора [4], дискретизации непрерывной части системы [5], векторных функций Ляпунова [6]. Как отмечено в работе [7], приближенные методы анализа непрерывно-дискретных систем, основанные на дискретизации, «могут приводить к неудовлетворительным результатам».

Отметим также, что системы указанного типа являются частным случаем систем с кусочно-постоянным аргументом; ссылки на литературу, посвященную теории и приложениям таких систем, можно найти в работе [8].

Если функция $x(t)$ описывает закон изменения состояния системы во времени, то управление строится в виде $u(t) = k(x(\tau_k))$ при $t \in [\tau_k, \tau_{k+1})$, где k — некоторая функция, $\pi = \{\tau_k\}_{k=0}^{\infty}$ — неограниченно возрастающая последовательность моментов времени, такая, что $0 = \tau_0 < \tau_1 < \tau_2 < \ldots$, $d_k = \tau_{k+1} - \tau_k \leqslant d = d(\pi)$ для всех $k = 0, 1, \ldots$; либо в виде $u(t) = k(x(\tau_k - r_k))$, где r_k — последовательность неотрицательных чисел — запаздываний, неизбежно возникающих в системе управления из-за конечного времени формирования и передачи управляющего сигнала, $r_k \in [0, R]$ для всех $k = 0, 1, \ldots$ В обоих случаях система, замкнутая таким управлением, представляет собой систему с запаздыванием. А именно, рассмотрим управляемую систему

$$\dot{x}(t) = g(t, x(t), u(t)), \qquad (1)$$

где $t \in R^+ = [0, +\infty)$, $\dot{x}(t)$ — правосторонняя производная функции x в точке t, $x(t)$ — вектор n-мерного действительного пространства R^n с нормой $|\cdot|$, $u(t) \in R^m$, $g(t, x, y): R^+ \times R^n \times R^m \to R^n$.

[1] Работа выполнена в рамках ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009—2013 гг., а также при финансовой поддержке РФФИ, проект № 11-01-00541, и Министерства образования и науки РФ в рамках постановления Правительства РФ № 218.

Будем искать управление для системы (1) в виде кусочно-постоянной функции

$$u(t) = k_0(t, x(t)) = k(x(\tau_k - r_k)) \qquad (2)$$

при $t \in [\tau_k, \tau_{k+1})$.

Очевидно, систему (1), замкнутую управлением (2), можно рассматривать как систему с сосредоточенным переменным запаздыванием:

$$\dot{x}(t) = g_0(t, x(t), x(t - r(t)),$$

где $g_0(t, x(t), x(t - r(t)) = g(t, x(t), k_0(t, x(t)))$, $r(t) = t - \tau_k + r_k$ при $t \in [\tau_k, \tau_{k+1})$. Обозначим $r^* = d + R$, тогда $r(t) \in [0, r^*]$. Предположим, что $g(t, 0, 0) = 0$ в системе (1), $k(0) = 0$ в управлении (2). Управление (2) назовем стабилизирующим для системы (1), если нулевое решение замкнутой системы асимптотически устойчиво.

Итак, система (1), замкнутая управлением вида (2), при $r_k \geqslant 0$ является системой с запаздывающим аргументом. С учетом этого обстоятельства можно с единой позиции рассмотреть непрерывные управляемые системы, внутренняя динамика которых описывается как обыкновенными дифференциальными уравнениями, так и уравнениями с запаздыванием. К исследованию устойчивости и стабилизации таких систем можно, таким образом, применить методы качественного анализа систем с запаздыванием, в частности, прямой метод Ляпунова в обоих его вариантах — использующий вспомогательные функции и вспомогательные функционалы. При этом необходимо учитывать специфическое свойство рассматриваемых систем — отсутствие непрерывной производной $\dot{x}(t)$ в моменты τ_k, и структуру запаздывания $r(t) = t - \tau_k + r_k$, которое является кусочно-непрерывным. Отметим, что известные результаты об устойчивости для систем с переменным запаздыванием, полученные методом функционалов Ляпунова, в большинстве случаев зависят как от максимального значения запаздывания $r(t)$, так и от производной $\dot{r}(t)$, причем существенным оказывается не только предположение непрерывной дифференцируемости функции запаздывания, но и оценка $\dot{r}(t) \leqslant v < 1$ (см., например, работу [9]). Ни одно из этих условий, очевидно, не выполняется в рассматриваемом случае. В работе [1] к исследованию линейной системы вида $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bx(\tau_k - r_k)$ удалось применить метод функционалов Ляпунова, избежав указанных ограничений. Однако при этом достаточные условия устойчивости формулируются в виде линейно-матричных неравенств, накладывающих ограничения на параметры матриц системы, а также на величины d и R, и содержащих одиннадцать дополнительных матриц-параметров. При усложнении системы применение предлагаемого метода сопряжено со значительными трудностями. Другая возможность исследования состоит в применении конечномерных функций типа функций Разумихина.

В данной работе представлены достаточные условия асимптотической устойчивости для непрерывных систем под действием кусочно-постоянного управления вида (2) в терминах функций Ляпунова—Разумихина. Полученные результаты развивают ряд исследований, изложенных в работах [8, 10].

1. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ПРЕДПОЛОЖЕНИЯ

Обозначим x_t элемент (банахова) пространства $C(n) = C([-r, 0], R^n)$ с супремум-нормой $\|\cdot\|$, определяемый формулой $x_t(s) = x(t + s)$ для $s \in [-r, 0]$, $f(t, \varphi)$ — функционал, определенный в области $R^+ \times C(n)$ со значениями в R^n (например, $f(t, \varphi) = g_0(t, \varphi(0), \varphi(-r(t)))$ для системы (1) при управлении (2)).

Будем рассматривать систему вида

$$\dot{x}(t) = f(t, x_t). \qquad (3)$$

Здесь $r > 0$ — фиксированная величина, характеризующая максимальное запаздывание в системе (например, для системы (1), (2) $r = r^*$).

Введем обозначения $C_q(n) = \{\varphi \in C(n) : \|\varphi\| < q\}$, $\bar{C}_q(n) = \{\varphi \in C(n) : \|\varphi\| \leqslant q\}$.

Далее будем считать выполненными следующие предположения.

Предположение 1. Функционал $f(t, \varphi)$ в области $R^+ \times C(n)$ является непрерывным по φ при каждом фиксированном t, измеримым по t при фиксированном φ, и для каждого $q > 0$ существуют локально интегрируемые по Лебегу функции $M_q(t)$ и $L_q(t)$ такие, что для всех $\varphi, \psi \in \bar{C}_q(n)$ и $t \in R^+$ справедливы оценки: $|f(t, \varphi)| \leqslant M_q(t)$ $|f(t, \varphi) - f(t, \psi)| \leqslant L_q(t)\|\varphi - \psi\|$.

Предположение 2. Функция $L_q(t)$ удовлетворяет условию: существует $N(q) > 0$ такое, что если $t \in R^+$, то $\int\limits_t^{t+1} L_q(s)ds \leqslant N(q)$; функция $M_q(t)$ удовлетворяет условию: для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta = \delta(q, \varepsilon) > 0$ такое, что если $t \in R^+$ и E — измеримое подмножество интервала $[t, t+1]$, мера которого не больше δ, то $\int_E M_q(s)ds \leqslant \varepsilon$. ♦

Введенные предположения аналогичны условиям, предложенным для обыкновенных дифференциальных уравнений в работе [11] и являются условиями типа Каратеодори; для системы (1) с непрерывной правой частью при управлении вида (2) с непрерывной функцией k соответствующая система (3) удовлетворяет этим предположениям. Воспользуемся также определением решения по Каратеодори [12] (поскольку производная решения не обязательно непрерывна): функцию $x(t; \alpha_0, \varphi_0)$ назовем решением уравнения (3) с начальной точкой $(\alpha_0, \varphi_0) \in R^+ \times C(n)$, если $x_{\alpha_0} = \varphi_0$, $x \in C([\alpha_0 - r, \alpha_0 + A), R^n)$ для некоторого $A > 0$ и $x(t)$ — абсолютно непрерывная функция на $[\alpha_0 - r, \alpha_0 + A)$, удовлетворяющая почти всюду на $[\alpha_0 - r, \alpha_0 + A)$ уравнению (3).

Справедлив следующий результат [13].

Лемма 1. *Если функционал f удовлетворяет предположениям 1, 2, то для любой начальной точки $(\alpha, \varphi) \in R^+ \times C(n)$ существует единственное решение $x(t) = x(t; \alpha_0, \varphi_0)$ системы (3), определенное на некотором интервале $[\alpha - r, \beta)$, $\beta > \alpha$, кроме того, если решение ограничено, то оно бесконечно продолжимо вправо.*

Если при этом $\alpha_k \to \alpha$, $\varphi_k \to \varphi$, то для любого $A \in (\alpha, \beta)$ для достаточно больших k каждое решение $x^k(t; \alpha_k, \varphi_k)$ системы (3) существует на $[\alpha_k - r, A]$ и $x^k(t) \to x(t)$ равномерно на $[\alpha - r, A]$ (то есть для каждого $\varepsilon > 0$ найдется $k_0(\varepsilon) > 0$ такое, что при $k \geqslant k_0$ решения $x^k(t)$ определены для $[\alpha - r + \varepsilon, A]$ и сходятся к $x(t)$ равномерно на этом отрезке).

2. УТВЕРЖДЕНИЯ ОБ УСТОЙЧИВОСТИ

Предположим, что $f(t, 0) = 0$ для всех $t \in R^+$, так что система (3) допускает нулевое решение.

Для исследования устойчивости систем с запаздыванием, в особенности если система нелинейна, применяется, как правило, прямой метод Ляпунова. Специфика рассматриваемых систем определила разделение этого метода на два самостоятельно развивающихся направления: метод функций и метод функционалов. Сложности с применением функционалов к исследованию систем с кусочно-постоянным управлением обсуждались во Введении. Далее рассмотрены результаты по устойчивости, полученные с применением метода функций.

Учитывая специфику рассматриваемой системы, определим такую вспомогательную функцию следующим образом.

Определение. Функцию $V \in C(R^+ \times R^n, R^+)$, такую, что $V(t, 0) = 0$, $V(t, x) \geqslant 0$, непрерывно дифференцируемую при $t \neq \tau_k$, назовем функцией Ляпунова. Ее производная в силу системы (3) есть функционал $V'\colon R^+ \times C(n) \to R$, определяемый формулой

$$V'(t, \varphi) = \frac{\partial V}{\partial t}(t, \varphi(0)) + \left(\frac{\partial V}{\partial x}(t, \varphi(0))\right)^T f(t, \varphi). \ ♦$$

Докажем следующее утверждение.

Лемма 2. *Предположим, что существует функция Ляпунова $V(t, x)$, такая, что если $t \in (\tau_k, \tau_{k+1})$ для некоторого k, $\varphi \in C(n)$ и $\max\limits_{\tau_k - r_k - t \leq s \leq 0} V(t + s, \varphi(s)) \leqslant V(t, \varphi(0))$, то $V'(t, \varphi) \leqslant 0$. Пусть $x(t) = x(t; \alpha_0, \varphi_0)$ — произвольное решение системы (3), $v(t) = \max\limits_{\tau_k - r_k \leq s \leq t} V(s, x(s))$ при $t \in [\tau_k, \tau_{k+1})$. Тогда функция $v(t)$ не возрастает.*

Доказательство. Зафиксируем произвольный момент $t \geqslant \alpha_0$. Пусть $v(t) = V(h, x(h))$ для некоторого $h \in [\tau_k - r_k, t]$. Тогда если $h < t$, то $v(s) = \text{const}$ при $s \in [t, t + \delta]$ для некоторого $\delta > 0$. Пусть теперь $h = t$. Тогда если $t \neq \tau_k$, то из условия леммы получаем $v'(t) \leqslant 0$. Предположим теперь, что $v(\tau_k) = V(\tau_k, x(\tau_k))$. Если $v(t)$ возрастает на некотором интервале $[\tau_k, \tau_k + \delta]$, то для всех t из этого интервала $\frac{d}{dt}V(t, x(t)) > 0$. С другой стороны, для $t \in (\tau_k, \tau_k + \delta]$ в этом случае получаем $V(t, x(t)) = \max\limits_{\tau_k \leq s \leq t} V(s, x(s)) = \max\limits_{\tau_k - r_k \leq s \leq t} V(s, x(s)) = v(t)$, и тогда по условию леммы $\frac{d}{dt}V(t, x(t)) \leqslant 0$. Полученное противоречие доказывает, что $v(t)$ не возрастает вдоль решений системы (3). Лемма доказана. ♦

На основе доказанной леммы можно получить достаточные условия устойчивости и асимптотической устойчивости нулевого решения системы (3) в терминах функции Ляпунова. В частности, по аналогии с работой [14] можно доказать результаты на основе знакопостоянной функции (в упомянутой работе получены утверждения для систем с запаздыванием с непрерывной правой частью). Для их формулировки введем некоторые дополнительные обозначения.

Для каждого действительного числа c, непрерывной функции $V(t, x)$ и непрерывного функционала $U : R^+ \times C(n) \to R$ определим множества

$$V_{\max}^{-1}(\infty, c) = \{\varphi \in C(n) | \exists \varphi_n \to \varphi,\ t_n \to +\infty:$$
$$: \lim_{n \to \infty} \max_{-r \le s \le 0} V(t_n + s, \varphi_n(s)) = \lim_{n \to \infty} V(t_n, \varphi_n(0)) = c\},$$
$$U^{-1}(\infty, c) = \{\varphi \in C(n) | \exists \varphi_n \to \varphi,\ t_n \to +\infty:$$
$$: \lim_{n \to \infty} U(t_n, \varphi_n) = c\}.$$

Справедливы следующие результаты.

Теорема 1. *Предположим, что существует функция Ляпунова* $V(t, x)$, *такая, что:*

1) *если* $t \in (\tau_k, \tau_{k+1})$ *для некоторого* k, $\varphi \in C(n)$ *и* $\max_{\tau_k - r_k - t \le s \le 0} V(t + s, \varphi(s)) \leqslant V(t, \varphi(0))$, *то* $V'(t, \varphi) \leqslant 0$;

2) *нулевое решение является равномерно притягивающим относительно множества* $V_{\max}^{-1}(\infty, c)$.

Тогда нулевое решение системы (3) *устойчиво.*

Если дополнительно $V(t, x) \leqslant b(|x|)$ *для некоторой строго возрастающей функции* $b : R^+ \to R^+$, *такой, что* $b(0) = 0$, *то нулевое решение системы* (3) *равномерно устойчиво.*

Теорема 2. *Предположим, что существует функция Ляпунова* $V(t, x)$, *такая, что:*

1) *выполняются условия теоремы 1;*

2) $|V'(t, \varphi)| \geqslant U(t, \varphi) \geqslant 0$ *для всех* $(t, \varphi) \in R^+ \times C(n)$, $t \ne \tau_k$, *где* $U(t, \varphi)$ — *функционал, равномерно непрерывный на каждом множестве вида* $R^+ \times K$, $K \subset C(n)$ — *компакт;*

3) *множество* $U^{-1}(\infty, 0) \cap V_{\max}^{-1}(\infty, c)$ *пусто при* $c > 0$.

Тогда нулевое решение уравнения (3) *равномерно асимптотически устойчиво.* ♦

Из теоремы 2 непосредственно получаем

Следствие. *Предположим, что существует функция Ляпунова* $V(t, x)$, *такая, что:*

1) $a_1(|x|) \leqslant V(t, x) \leqslant a_2(|x|)$;

2) *если* $t \in (\tau_k, \tau_{k+1})$ *для некоторого целого* k, $\varphi \in C(n)$ *и* $\max_{\tau_k - r_k - t \le s \le 0} V(t + s, \varphi(s)) \leqslant V(t, \varphi(0))$, *то* $V'(t, \varphi) \leqslant -a_3(|\varphi(0)|)$, *для некоторых строго возрастающих функций* $a_i : R^+ \to R^+$, *таких, что* $a_i(0) = 0$. *Тогда нулевое решение уравнения* (3) *равномерно асимптотически устойчиво.* ♦

Теорема об асимптотической устойчивости, аналогичная классической теореме метода функций [15] и являющаяся следствием последнего результата, для системы вида $\dot x(t) = g(t, x(t), x(\beta(t)))$ с непрерывной функцией g и кусочно-постоянной функцией $\beta(t)$, представлена в работе [8] при дополнительных ограничениях на максимальную длину интервала непрерывности функции $\beta(t)$. Аналогичные условия асимптотической устойчивости получены также в работе [10] для системы (1), (2) с учетом неопределенностей правой части. Отметим, что существование функции Ляпунова для замкнутой системы обеспечивает своеобразный «запас устойчивости», так что управление обладает свойством робастности по отношению к ошибкам измерения $e(t)$, погрешности регулирования $d(t)$ и возмущению системы $p(t)$, т. е. если асимптотически устойчиво нулевое решение системы $\dot x(t) = f(t, x(t), k(x(\tau_k)))$, то тем же свойством обладает система $\dot x(t) = f(t, x(t), k(x(\tau_k)) + e(\tau_k)) + d(t)) + p(t)$. Это легко показать в случае малости указанных возмущающих величин. Дополнительные ограничения в ряде случаев позволяют также воспользоваться функциями Ляпунова для оценки допустимых диапазонов соответствующих «не малых» величин, при которых не нарушаются стабилизирующие свойства управления (см. по этому поводу также работу [16]).

Важно также отметить, что оптимальный выбор величины d представляет собой нетривиальную задачу. С одной стороны ясно, что «слишком большие» значения d ухудшают качество управления, поскольку в этом случае недостаточно учитывается динамика системы. Этим обстоятельством объясняется введение в работе [17] определения s-стабилизируемости («s» — от английского «sampling», определение дано для автономной системы обыкновенных дифференциальных уравнений):

> управление вида (2) с функцией $k : R^n \to R^m$ называется s-стабилизирующим для системы $\dot x = f(x)$, если для каждой пары $0 < h < H$ существует $B = B(H) > 0$, $\delta = \delta(h, H) > 0$ и $T = T(h, H) > 0$ такие, что для любого разбиения π, $d(\pi) < \delta$, и для любой начальной точки $|x_0| < H$ соответствующее решение замкнутой системы удовлетворяет неравенствам:
>
> $|x(t)| \leqslant h$ для любого $t \geqslant T$;
>
> $|x(t)| \leqslant B(H)$ для любого $t \geqslant 0$;
>
> $\lim_{H \downarrow 0} B(H) = 0$.

В работе [17] доказано, что существование s-стабилизирующего управления для автономной системы (1) эквивалентно асимптотической управляемости системы (т. е. возможности глобально стабилизировать нулевое положение равновесия посредством некоторого ограниченного управления).

С другой стороны, «выбор слишком маленького периода квантования нецелесообразен, поскольку это требует существенных вычислительных ресурсов, может приводить к эффекту нестабильного квантования и пропуску такта, повышает чувствительность свойств системы к ошибкам...» [7]. Известно [16], что для асимптотически автономной системы (1), (2) стабилизирующие свойства управления (2) сохраняются при наличии ошибок измерения, если выполняется условие $|e(t)| \leqslant \kappa \underline{d}(\pi)$, где $\kappa > 0$ — некоторая постоянная, $\underline{d}(\pi) = \inf(\tau_{k+1} - \tau_k)$.

1. ПРИМЕРЫ

Пример 1. Рассмотрим систему вида

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + f(t, x(t)) + B(t)u(t), \tag{4}$$

где $x(t) \in R^n$, $u(t) \in R^m$, $A(t)$ и $B(t)$ — матрицы соответствующих размерностей с непрерывными ограниченными элементами, функция $f(t, x)$ удовлетворяет предположениям 1, 2 и $\lim\limits_{|x| \to 0} \dfrac{|f(t,x)|}{|x|} = 0$ равномерно по $t \in R^+$. Управление, стабилизирующее нулевое решение системы (4), будем строить в виде

$$u(t) = -Kx(\tau_k - r_k)), \ t \in [\tau_k, \tau_{k+1}) \tag{5}$$

с постоянной матрицей K.

Перепишем систему (4), замкнутую управлением (5), в виде

$$\dot{x}(t) = (A(t) - B(t)K)x(t) - B(t)K(x(\tau_k - r_k) - x(t)) + \\ + f(t, x(t)).$$

Используя функцию $V(x) = x^T P x$ и приведенное ранее следствие, получаем следующий результат.

Теорема 3. *Предположим, что существует положительно определенная матрица* P, *матрица* K *и число* $q > 0$ *такие, что при всех* $t \in R^+$, $|x| < q$ *для некоторых* $R^* > 0$, $\lambda > 0$ *выполняются неравенства* $x^T[(A(t) - B(t)K)^T P + P(A(t) - B(t)K)]x \leqslant -2\lambda|x|^2$, $\lambda - R^*\|B(t)K\| \cdot \{\|A(t)\| + \mu\|B(t)K\|\} \geqslant \alpha > 0$ *(здесь* $|\cdot|$ *— векторная норма в пространстве* R^n, $\|\cdot\|$ *— соответствующая матричная норма,* μ^2 *равен отношению наибольшего и наименьшего собственных значений матрицы* P*). Тогда управление* (5) *при любом* $0 < r^* \leqslant R^*$ *стабилизирует равновесие* x^* *системы* (4) *до равномерной асимптотической устойчивости. При этом область притяжения содержит по крайней мере множество* $\{x: |x| < h\}$, *где число* $h \in (0, q)$ *определяется из условий* $\delta(\|P\| + R^*\|B(t)K\|) < \alpha$, $|f(t, x)| \leqslant \delta|x|$ *при* $|x| < h$, $t \in R^+$. ♦

Заметим, что если A и B постоянны и пара (A, B) управляема, то при достаточно малом r^* для системы (4) всегда существует стабилизирующее управление вида (5).

В силу неавтономности рассматриваемой системы (1) и применяемой функции Ляпунова, приведенные результаты остаются справедливыми и в том случае, когда закон управления явно зависит от времени: $u(t) = k(t, x(\tau_k - r_k))$ при $t \in [\tau_k, \tau_{k+1})$. В этом случае управляющее воздействие является кусочно-непрерывной функцией, зависящей от дискретных состояний системы. Иллюстрацией такой ситуации служит следующий пример.

Пример 2. Рассмотрим задачу слежения для мобильного робота, движущегося в одной плоскости [18]. Движение описывается вектор-функцией $(x_1(t), x_2(t), \theta(t))$, где первые две компоненты обозначают координаты центра тяжести, а третья — угол поворота. Линейную и угловую скорости $v(t) = \sqrt{(\dot{x}_1(t))^2 + (\dot{x}_2(t))^2}$ и $\omega(t) = \dot{\theta}(t)$ считаем компонентами управления. Цель управления — обеспечить сходимость к заданному закону движения при $t \to +\infty$: $x_1(t) \to x_1^p(t)$, $x_2(t) \to x_2^p(t)$, $\theta(t) \to \theta^p(t)$. Определим координаты отклонений:

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta(t) & \sin\theta(t) & 0 \\ -\sin\theta(t) & \cos\theta(t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1^p(t) - x_1(t) \\ x_2^p(t) - x_2(t) \\ \theta^p(t) - \theta(t) \end{bmatrix}.$$

Тогда задача сводится к стабилизации нулевого решения системы

$$\dot{x}(t) = \omega(t)y(t) - v(t) + v^p(t)\cos z(t),$$
$$\dot{y}(t) = -\omega(t)x(t) + v^p(t)\sin z(t),$$
$$\dot{z}(t) = \omega^p(t) - \omega(t). \tag{6}$$

Воспользовавшись функцией Ляпунова $V(x, y) = x^2/c_1 - xy + (c_1/2 + 1/c_1)y^2$ и рассуждая аналогично [18], легко показать, что в силу теоремы 2 управление вида

$$v(t) = v^p(t) + c_1\omega^p(t)x(\tau_k - r_k), \quad \omega(t) = \omega^p(t) + bz(\tau_k - r_k), \\ t \in [\tau_k, \tau_{k+1}] \tag{7}$$

решает поставленную задачу при следующих условиях:

$\int\limits_t^{t+T} (\omega^p(s))^2 ds \geqslant \mu$ для некоторых T, $\mu > 0$ и всех $t \geqslant 0$;

$0 \leqslant \omega^p(t) \leqslant \hat{\omega}$ для всех $t \geqslant 0$; $c_1 > 0$;

$r^* < \dfrac{1}{\hat{\omega}(1 + c_1)(2 + c_1)} \sqrt{\dfrac{\sqrt{c_1^2 + 4} - c_1}{\sqrt{c_1^2 + 4} + c_1}}$, $0 < br^* < \pi/2$.

При этом нулевое решение системы (6) равномерно асимптотически устойчиво.

Заметим, что если $r^* < 1/(2\hat{\omega})$, то неравенства для c_1 и b выполняются при всех $c_1 \in (0, c_0)$ и $b \in (0, \pi/(2r^*))$ для некоторого $c_0 > 0$. Таким образом, согласно полученным оценкам, r^* не может быть произвольно большим, кроме того, с ростом r^* интервал допустимых значений коэффициентов пропорциональности c_1 и b в управлении сужается. Эти оценки определяют лишь достаточные условия устойчивости, и в действительности интервалы допустимых значений для r^*, c_1 и b могут быть шире. Однако, как и в случае непрерывного управления с запаздыванием, при больших значениях r^* (так же, как и при больших c_1 и b) предложенное управление перестает быть стабилизирующим. Это подтверж-

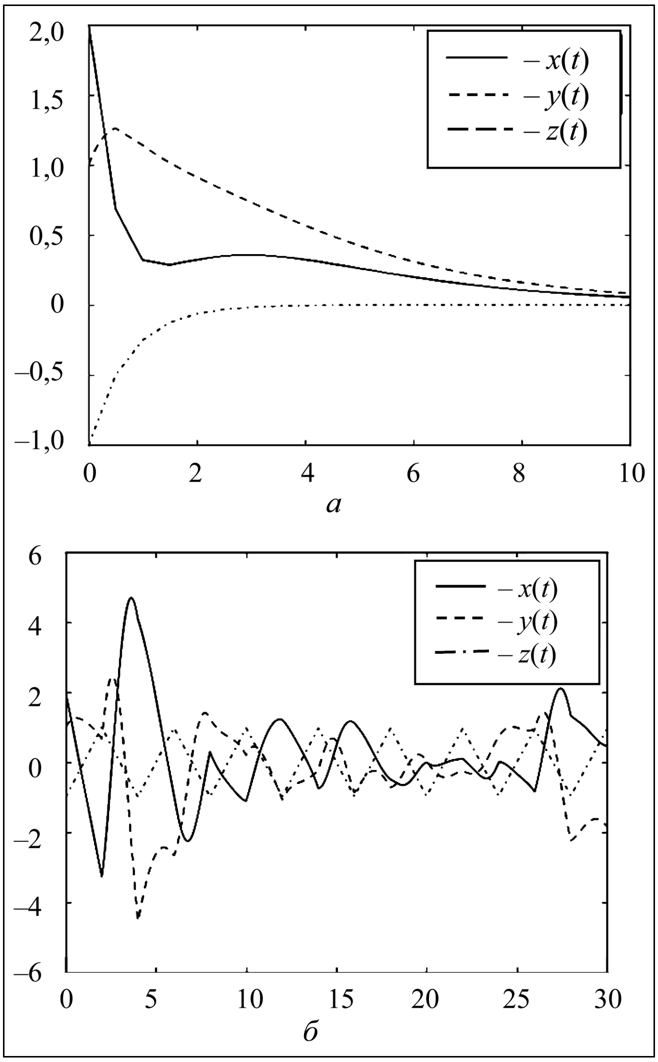

Рис. 1. Численное решение системы (6) при $v^p(t)$ = sin*t*, $\omega^p(t)$ = = 0,5, c_1 = 2, *b* = 1, с начальной точкой (2, 1, −1):
а — при управлении (7) с $\tau_k = 0{,}5k$, $r_k = 0$; *б* — при управлении (7) с $\tau_k = 2k$, $r_k = 0$

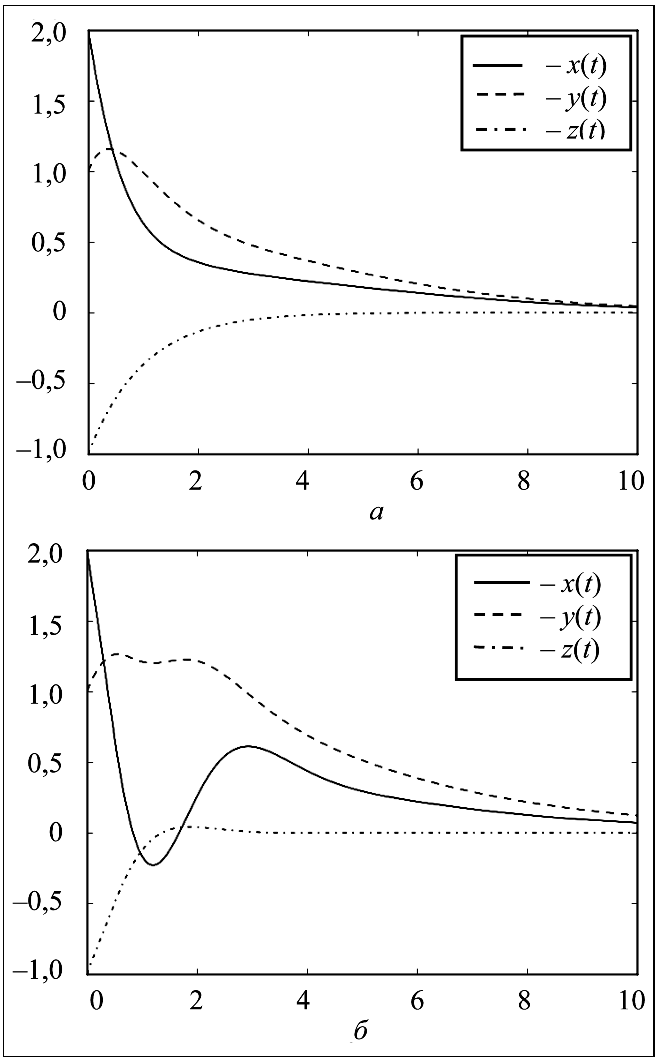

Рис. 2. Численное решение системы (6):
а — при непрерывном управлении $v(t) = v^p(t) + c_1\omega^p(t)x(t)$, $\omega(t) = \omega^p(t) + bz(t)$; *б* — при непрерывном управлении с запаздыванием $v(t) = v^p(t) + c_1\omega^p(t)x(t - 0{,}5)$, $\omega(t) = \omega^p(t) + bz(t - 0{,}5)$ (остальные значения параметров такие же, как и на рис. 1)

дается численными экспериментами (рис. 1). Отметим, наконец, что аналогичное непрерывное управление $v(t) = v^p(t) + c_1\omega^p(t)x(t - r(t))$, $\omega(t) = \omega^p(t) + bz(t - r(t))$ также является стабилизирующим при любом непрерывном запаздывании $0 \leqslant r(t) \leqslant r^*$ (в том числе нулевом; рис. 2).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Получены достаточные условия равномерной асимптотической устойчивости для нелинейной непрерывной системы с кусочно-постоянным управляющим воздействием, значения которого вычисляются на основе дискретной информации о состоянии системы.

Часто для исследуемой системы бывает известен непрерывный стабилизирующий закон управления с обратной связью. Однако стабилизирующие свойства управления вида (2) и соответствующего непрерывного управления $u(t) = k(x(t))$ не следуют друг из друга даже при малом значении r^* (см. работу [10]). В связи с этим актуальны ответы на следующие вопросы. Будет ли управление вида (2) стабилизирующим, при условии, что стабилизирующим является управление $u(t) = k(x(t))$? Если ответ на первый вопрос положительный, то какое максимальное значение может принимать величина r^* без нарушения стабилизирующих свойств управления?

Ответы на эти вопросы в общем случае нетривиальны. Если же для обоснования стабилизирующих свойств управления используется функция Ляпунова, то получающиеся условия устойчивости, как правило, накладывают на размер запаздывания $r(t)$ ограничение вида $0 \leqslant r(t) \leqslant R^*$, где $R^* > 0$ — величина, зависящая от параметров системы. Тем самым одновременно обосновываются стабилизирующие свойства управления вида (2) при $0 \leqslant r_*(t) \leqslant R^*$ и непрерывного управления вида $u(t) = k(x(t))$, а также «запаздывающего» управления $u(t) = k(x(t - r(t)))$ при $0 \leqslant r(t) \leqslant R^*$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Naghshtabrizi P.*, *Hespanha J.P.* Stability of networks control systems with variable sampling and delay // Proc. of the 44th Annual Allerton Conf. on Communications, Control and Computing. — 2006.
2. *Поляков К.Ю.* Цифровая стабилизация непрерывных объектов с множественными запаздываниями // Изв. РАН. Теория и системы управления. — 2006. — № 1. — С. 26—33.
3. *Розенвассер Е.Н.* Линейная теория цифрового управления в непрерывном времени. — М.: Наука, 1994.
4. *Куо Б.* Теория и проектирование цифровых систем управления. — М.: Машиностроение, 1986.
5. *Monako S.*, *Normand-Cyrot D.* Issues on nonlinear digital control // European Journal of Control. — 2001. — N 1. — P. 160—177.
6. *Козлова О.Р.*, *Козлов Р.И.* Исследование устойчивости нелинейных непрерывно-дискретных моделей экономической динамики методом ВФЛ. I, II // Изв. РАН. Теория и системы управления. — 2009. — № 2. — С. 104—113; № 3. — С. 41—50.
7. *Поляков К.Ю.*, *Рыбинский В.О.* Оптимальный выбор периода квантования для цифровой системы управления судном // Материалы VII конф. молодых ученых «Навигация и управление движением», Санкт-Петербург, 2006 / ГНЦ «Электроприбор». — СПб., 2006. — С. 106—113.
8. *Akhmet M.*, *Arugaslan D.* Lyapunov-Razumikhin method for differential equations with piecewise constant argument // Discrete and continuous dynamical systems. — 2009. — Vol. 25, N 2. — P. 457—466.
9. *Wu Y.-Y.*, *Wu Y.-Q.* Stability analysis for recurrent neural networks with time-varying delay // Int. J. Automatic and Computing. — 2009. — Vol. 6, N 3. — P. 223—227.
10. *Karafyllis I.*, *Kravaris C.* Global stability results for system under sampled-data control // Proc. of the European Control Conference. — 2007. — P. 5761—5768.
11. *Artstein Z.* Topological dynamics of ordinary differential equations // J. Differ. Equations. — 1977. — Vol. 23. — P. 216—223.
12. *Хейл Дж.* Теория функционально-дифференциальных уравнений. — М.: Мир, 1984.
13. *Седова Н.О.* К вопросу о принципе сведения для нелинейных систем с запаздыванием // Автоматика и телемеханика. — 2011. — № 9. — С. 74—86.
14. *Седова Н.О.* Вырожденные функции в исследовании асимптотической устойчивости решений функционально-дифференциальных уравнений // Математические заметки. — 2005. — Т. 78, № 3. — С. 468—472.
15. *Разумихин Б.С.* Устойчивость эредитарных систем. — М.: Наука, 1988.
16. *Sontag E.D.* Nonlinear analysis, differential equations and control (Montreal, QC, 1998) // Vol. 528 of NATO Sci. Ser. C Math. Phys. Sci. — Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1999. — P. 551—598.
17. *Asymptotic* controllability implies feedback stabilization / F.H. Clarke, Yu.S. Ledyaev, E.D. Sontag, A.I. Subbotin // IEEE Trans. Autom. Control. — 1992. — Vol. 42. — P. 1394— 1407.
18. *Седова Н.О.* Глобальная асимптотическая устойчивость и стабилизация в нелинейной каскадной системе с запаздыванием // Изв. вузов. Математика. — 2008. — № 11. — С. 68—79.

Статья представлена к публикации членом редколлегии В.Ю. Рутковским.

Седова Наталья Олеговна — д-р физ.-мат. наук, профессор, Ульяновский государственный университет,
✉ nata-sedova@yandex.ru.

Содержание сборника "Управление большими системами", вып. 34

http://ubs.mtas.ru/