УДК 517.977;519.7

ИССЛЕДОВАНИЕ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ ОДИНОЧНОГО И ДВОЙНОГО ИНТЕГРАТОРОВ ДРОБНОГО ПОРЯДКА С ПОМОЩЬЮ МЕТОДА МОМЕНТОВ

С.С. Постнов

Дана постановка задачи оптимального управления для двух динамических систем дробного порядка: одиночного и двойного интеграторов. Задача сведена к проблеме моментов. Выведены основные уравнения и формулы, позволяющие получать решение задачи. Исследованы зависимости нормы управления и минимального времени перехода в конечное состояние от показателей дифференцирования. Проведен сравнительный анализ результатов для исследуемых систем.

Ключевые слова: оптимальное управление, проблема моментов, интегратор, дробная производная Капуто.

Светлой памяти Анатолия Григорьевича Бутковского посвящается

ВВЕДЕНИЕ

Метод моментов — весьма мощный и эффективный инструмент исследования и решения задач оптимального управления системами с сосредоточенными или распределенными параметрами [1, 2]. В настоящей работе этот метод применяется для решения и исследования задачи оптимального управления динамическими системами, описываемыми с помощью линейных обыкновенных дифференциальных уравнений дробного порядка. Рассмотрение проводится для двух простых систем — одиночного и двойного интеграторов дробного порядка.

Задачи управления системами, описываемыми дифференциальными уравнениями дробного порядка, получили развитие лишь в последние годы [3—7]. При постановке и решении задачи оптимального управления динамической системой дробного порядка в опубликованных на сегодня работах применяются вариационные методы, не позволяющие, в отличие от метода моментов, явным образом учитывать ограничения на норму управления и работать с разрывными управлениями. Применение же метода моментов для исследования задачи оптимального управления динамической системой дробного порядка ранее не рассматривалось. Отметим также, что принцип максимума, аналогичный принципу максимума Л.С. Понтрягина для систем целого порядка, для систем дробного порядка на сегодня не доказан.

В настоящей работе дробная производная в определяющих уравнениях понимается в смысле Капуто [8, 9]. Для одиночного интегратора дробного порядка решение задачи оптимального управления получено в явном виде. Для двойного интегратора дробного порядка выведено базовое уравнение, позволяющее получать решение задачи для заданных значений показателей дифференцирования, правой границы временного интервала, на котором рассматривается задача, и начальных и конечных условий.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть функции $q(t)$ и $u(t)$, определены на отрезке $[0, T]$, $T > 0$. Пусть функция $u(t)$, называемая в дальнейшем управлением, принадлежат пространству $M[0, T]$ измеримых и почти всюду ограниченных на отрезке $[0, T]$ функций с нормой

$$\|u(t)\| = \operatorname*{vrai\,max}_{t \in [0, T]} |u(t)|.$$

Здесь под обозначением vrai max подразумевается существенный максимум функции $u(t)$ как нижняя грань множества чисел, таких, что множество значений аргумента $t \in [0, T]$, для которых значение функции $u(t)$ превышает упомянутые числа, имеет меру нуль [1]. Функцию $q(t)$, определяющую состояние динамической системы в момент времени $t \in [0, T]$, будем считать обладающей всеми необходимыми свойствами для существования решений рассматриваемых далее уравнений, в частности, дифференцируемой хотя бы один раз.

Дробную производную произвольного нецелого порядка $\alpha \in (0, 1)$ от функции $q(t)$ будем понимать как левостороннюю дробную производную Капуто [8, 9]:

$${}_0D_t^{\alpha} q(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t \frac{dq(\xi)}{d\xi} \frac{d\xi}{(t-\xi)^{\alpha}}.$$

Одиночным интегратором дробного порядка (или просто дробным интегратором) будем называть динамическую систему, поведение которой описывается следующим дифференциальным уравнением дробного порядка:

$${}_0D_t^{\alpha} q(t) = u(t), \tag{1}$$

где ${}_0D_t^{\alpha}$ — оператор дробного дифференцирования порядка $\alpha \in (0, 1)$. Начальное и конечное условия для системы (1) зададим в виде:

$$q(0) = q_0, \tag{2}$$

$$q(T) = b_T. \tag{3}$$

Двойным интегратором дробного порядка (или двойным дробным интегратором) будем называть динамическую систему из двух связанных дробных интеграторов, поведение которой описывается следующей системой дифференциальных уравнений дробного порядка:

$${}_0D_t^{\alpha} q_1(t) = q_2(t), \tag{4а}$$

$${}_0D_t^{\beta} q_2(t) = u(t). \tag{4б}$$

Для данной системы зададим начальные условия в виде

$$q_1(0) = q_1^0, \quad q_2(0) = q_2^0 \tag{5}$$

и конечные условия в виде

$$q_1(T) = b_1^T, \quad q_2(T) = b_2^T. \tag{6}$$

Заметим, что при $\alpha = 1$ в уравнении (1) и при $\alpha = \beta = 1$ в уравнениях (4а, б) данные уравнения переходят в уравнения для одиночного и двойного интеграторов первого порядка, подробно изученные в работе [1]. Отметим также физический смысл уравнений дробного порядка: одна из популярных интерпретаций таких уравнений заключается в том, что нецелый порядок дифференцирования приводит к появлению эффективной диссипации. Например, система (4а, б) при $\alpha = \beta = 1$ описывает движение тела в соответствии со вторым законом Ньютона в среде без диссипации, а в случае дробных показателей эта система уже описывает движение с учетом потерь, например, в вязкой среде [9].

В дальнейшем будем следовать терминологии работы [1]. Поставим следующую задачу оптимального управления. Найти управление $u(t)$, $t \in [0, T]$, такое, чтобы система (1) или (4а, б) перешла из заданного начального состояния $q(0)$ или $(q_1(0), q_2(0))$ в заданное конечное состояние $q(T)$ или $(q_1(T), q_2(T))$.

При этом рассматриваются две разновидности данной задачи с разными дополнительными требованиями:

- чтобы норма управления $\|u\|$ в пространстве $M[0, T]$ достигла минимального значения, когда значение T задано (задача А);
- чтобы время управления T было минимальным при условии $\|u\| \leqslant l$, $l > 0$, l задано (задача Б).

2. ПРИВЕДЕНИЕ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ К ПРОБЛЕМЕ МОМЕНТОВ

Рассмотрим вначале одиночный интегратор дробного порядка. Известно, что обратной операцией к дробному дифференцированию Капуто является дробное интегрирование Римана—Лиувилля [8, с. 265]. Следовательно, решение уравнения (1) можно получить, вычислив интеграл Римана—Лиувилля порядка α от обеих частей уравнения [8—10]. С учетом начального условия (2)

$$q(t) = q_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t \frac{u(\tau)d\tau}{(t-\tau)^{1-\alpha}}. \tag{7}$$

Записав формулу (7) для конечного состояния и воспользовавшись конечным условием (3), получим классическую одномерную l-проблему моментов [1]:

$$\int_0^T G_T^{\alpha}(\tau)u(\tau)d\tau = a(T), \qquad (8)$$

где

$$G_T^{\alpha}(\tau) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\frac{1}{(T-\tau)^{1-\alpha}}, \qquad (9)$$

$$a(T) = b_T - q_0. \qquad (10)$$

Отметим, что формула (10) совпадает с аналогичной формулой для момента в задаче для интегратора первого порядка [1].

В случае двойного интегратора дробного порядка, как и в случае одиночного, можно получить явное решение уравнений (4а, б) [8—10] (см. Приложение 1). Учтя начальные условия (5) и записав полученное решение для конечного состояния (6), получим классическую двумерную l-проблему моментов [1]:

$$\int_0^T G_2^{\beta}(\tau)u(\tau)d\tau = a_2(T), \qquad (11а)$$

$$\int_0^T G_1^{\alpha+\beta}(\tau)u(\tau)d\tau = a_1(T), \qquad (11б)$$

где

$$G_2^{\beta}(\tau) = \frac{1}{\Gamma(\beta)}\frac{1}{(T-\tau)^{1-\beta}}, \qquad (12а)$$

$$G_1^{\alpha+\beta}(\tau) = \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)}\frac{1}{(T-\tau)^{1-\alpha-\beta}}, \qquad (12б)$$

$$a_2(T) = b_2^T - q_2^0, \qquad (13а)$$

$$a_1(T) = b_1^T - q_1^0 - \frac{q_2^0 T^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}. \qquad (13б)$$

Формула (13а), как и формула (10), полностью аналогична формуле для соответствующего момента в задаче о двойном интеграторе первого порядка [1]. Заметим также, что и для проблемы (8), и для проблемы (11а, б) выполнены условия разрешимости проблемы моментов в пространстве $M[0, T]$ [1, 2].

3. РЕШЕНИЕ ПОЛУЧЕННОЙ ПРОБЛЕМЫ МОМЕНТОВ

Как известно [1], l-проблема моментов вида

$$\int_0^T g_i(\tau)u(\tau)d\tau = a_i(T),\ i = \overline{1, n},\ u(t) \in M[0, T] \qquad (14)$$

сводится к решению следующей задачи: найти

$$\min_{\xi_1, \ldots, \xi_n}\left(\int_0^T\left|\sum_{i=1}^n \xi_i g_i(t)\right|dt\right) = \frac{1}{\lambda_n} \qquad (15)$$

при условии

$$\sum_{i=1}^n a_i(T)\xi_i = 1. \qquad (16)$$

При этом минимальная норма управления $\|u\| = \lambda_n$.

Решение задачи А дается в виде [1]:

$$u(t) = \lambda_n \operatorname{sign}\left(\sum_{i=1}^n \xi_i^* g_i(t)\right), \quad t \in [0, T]. \qquad (17)$$

Решением задачи Б являются [1] минимальное время перехода в конечное состояние T^* и управление

$$u(t) = l\operatorname{sign}\left(\sum_{i=1}^n \xi_i^* g_i(t)\right), \quad t \in [0, T^*], \qquad (18)$$

где величины ξ_i^* находятся из решения задачи (15), (16) при $T = T^*$. Значение T^* находится как наименьшее действительное неотрицательное число, удовлетворяющее при заданном числе $l > 0$ уравнению

$$\lambda_n(T^*) = l. \qquad (19)$$

В случае одиночного интегратора имеем в формуле (14) $n = 1$ и $g_1(\tau) = G_T^{\alpha}(\tau)$. После необходимых выкладок при решении задачи (15), (16) с учетом явных выражений (9) и (10) можно найти величины ξ_1^* и λ_1 и, подставив их в формулу (17), показать, что решением задачи А будет функция

$$u(t) = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{T^{\alpha}}(b_T - q_0). \qquad (20)$$

Решение задачи Б, полученное на основании формул (18) и (19), для одиночного интегратора дробного порядка запишется как

$$T^* = (\Gamma(\alpha+1)|b_T - q_0|/l)^{1/\alpha}, \qquad (21)$$

$$u(t) = l\operatorname{sign}(b_T - q_0), \quad t \in [0, T^*]. \qquad (22)$$

В случае двойного интегратора в формуле (14) имеем $n = 2$, $g_1(\tau) = G_1^{\alpha+\beta}(\tau)$, $g_2(\tau) = G_2^{\beta}(\tau)$. Выразив ξ_1 через ξ_2 из формулы (16) и подставив их в формулу (15), а также используя формулы (12а, б), можно записать выражение, стоящее под модулем в формуле (15), в виде:

$$f(t, \xi_2) = \frac{1}{a_1(T)} \frac{(T-t)^{\alpha+\beta-1}}{\Gamma(\alpha+\beta)} + \\ + \left(\frac{(T-t)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} - \frac{a_2(T)}{a_1(T)} \frac{(T-t)^{\alpha+\beta-1}}{\Gamma(\alpha+\beta)}\right)\xi_2. \quad (23)$$

Здесь возможны два случая: функция (23) меняет или не меняет знак на отрезке $[0, T]$. В первом случае нужно найти точку пересечения ее графика с осью времени и учесть изменение знака в этой точке при взятии интеграла в формуле (15). Точка пересечения определяется формулой:

$$t' = T - \left[\frac{a_1\xi_2\Gamma(\alpha+\beta)}{(a_2\xi_2 - 1)\Gamma(\beta)}\right]^{1/\alpha}. \quad (24)$$

Можно показать (см. Приложение 2), что задача (15), (16) сводится к поиску минимума по ξ_2 функции

$$F(\xi_2) = \frac{2\alpha}{(\alpha+\beta)\Gamma(\beta+1)} \left[\frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\beta)}\right]^{\beta/\alpha} \times \\ \times \left(\frac{a_2(T)\xi_2 - 1}{q_1(T)}\right)^{-\beta/\alpha} \xi_2^{1+\beta/\alpha} + \\ + \frac{T^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} \frac{a_2(T)\xi_2 - 1}{a_1(T)} - \frac{T^{\beta}}{\Gamma(\beta+1)}\xi_2. \quad (25)$$

Минимум в данном случае может быть найден из решения уравнения

$$F'(\xi_2) = 0, \quad (26)$$

допускающего, вообще говоря, неединственное решение. Поиск минимального значения в данном случае будет зависеть от конкретных значений показателей дифференцирования α и β, определяющих степень результирующего уравнения. Найденное таким образом минимальное значение ξ_2^* в соответствии с формулой (17) определит решение задачи А. При решении задачи Б найденное из формулы (15) значение λ_2 необходимо подставить в уравнение (19), решение которого даст величину T^*, а соответствующее управление определится по формуле (18).

Если функция (23) не меняет знака на отрезке $[0, T]$, то выкладки существенно упрощаются, и решения задач А и Б могут быть получены явно. Решение задачи А в соответствии с формулой (17) определяется выражением

$$u(t) = \frac{a_1(T)\Gamma(\alpha+\beta+1)}{T^{\alpha+\beta}}.$$

Решение задачи Б, в свою очередь, исходя из формул (18) и (19), дается следующими выражениями:

$$T^* = (|a_1(T)|\Gamma(\alpha+\beta+1)/l)^{1/(\alpha+\beta)},$$

$$u(t) = l\,\mathrm{sign}[a_1(T^*)], \quad t \in [0, T^*].$$

4. АНАЛИЗ ПОЛУЧЕННЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

Продемонстрируем, что во всех случаях полученные формулы для решений задач А и Б переходят в их аналоги, полученные для одиночного и двойного интегратора первого порядка, если положить соответствующие показатели дифференцирования равными 1. Действительно, как известно [1], решение задачи А для одиночного интегратора первого порядка дается формулой

$$u^1(t) = (b - q_0)/T, \quad (27)$$

а решение задачи Б — формулами

$$T_1^* = |b_T - q_0|/l, \quad (28)$$

$$u^1(t) = l\,\mathrm{sign}(b_T - q_0), \quad t \in [0, T_1^*]. \quad (29)$$

Сравнение формул (20) и (27), (21) и (28), (22) и (29) показывает, что при $\alpha = 1$ они идентичны. Интересно отметить, что формулы (22) и (29) одинаковы по форме и отличаются лишь областью определения; т. е. для одиночного дробного интегратора зависимость от порядка дифференцирования явно не присутствует в формуле для оптимального по быстродействию управления.

Для двойного интегратора первого порядка при произвольных начальных и конечных условиях решение задач А и Б приводит к квадратному уравнению относительно ξ_2 [1], в которое переходит уравнение (26) при $\alpha = \beta = 1$.

Решение задачи А для двойного интегратора первого порядка при $q_2^0 = b_2^T = 0$ дается формулой [1]:

$$u^2(t) = \frac{4(b_1^T - q_1^0)}{T^2}\,\mathrm{sign}\left(\frac{T/2 - t}{b_1^T - q_1^0}\right). \quad (30)$$

Для дробного двойного интегратора решение задачи А при $q_2^0 = b_2^T = 0$, как можно показать на

основе решения уравнения (26), записывается в виде:

$$u(t) = -\gamma \frac{a_1(T)}{T^{\alpha+\beta}} \operatorname{sign}\left(\frac{(T-t)^{\alpha} - 2^{-\alpha/\beta} T^{\alpha}}{a_1(T)}\right), \quad t \in [0,\ T], \tag{31}$$

где $\gamma = 2^{\alpha/\beta}\Gamma(\alpha + \beta + 1)/(2^{\alpha/\beta} - 1)$. Видно, что при $\alpha = \beta = 1$ формула (31) сводится к формуле (30).

При рассмотрении задачи Б дополнительно предположим $q_1^0 > 0$, $b_1^T = 0$ для упрощения явных формул. Для двойного интегратора первого порядка решение задачи Б дается формулами:

$$T_2^* = 2\sqrt{q_1^0/l}, \tag{32}$$

$$u^2(t) = l \operatorname{sign}\left(\frac{t}{q_1^0} - \frac{1}{\sqrt{l q_1^0}}\right), \quad t \in [0,\ T_2^*]. \tag{33}$$

Аналогичные формулы для двойного дробного интегратора имеют вид

$$T^* = \left(\gamma \frac{q_1^0}{l}\right)^{\frac{1}{\alpha+\beta}}, \tag{34}$$

$$u(t) = l \operatorname{sign}\left[\frac{2^{-\alpha/\beta}(T^*)^{\alpha} - (T^* - t)^{\alpha}}{q_1^0}\right], \quad t \in [0,\ T^*]. \tag{35}$$

В случае задачи Б также несложно убедиться, что при $\alpha = \beta = 1$ формула (34) переходит в формулу (32), а формула (35) приводится к формуле (33). Также заметим, что в общем случае задачи А и Б могут не иметь решений: условие $\lambda_2 > 0$ может не выполняться и соответствующее уравнение для T^* (следующее из уравнения (19)) может не иметь действительного неотрицательного корня.

Таким образом, все полученные для одиночного и двойного дробных интеграторов формулы переходят в свои «целочисленные» аналоги при задании показателей дифференцирования, равными единице.

Заметим также, что система уравнений (4а, б) при $\beta \to 0$ сводится к одному уравнению (1). Можно показать, что в этом случае имеет место и переход формул, полученных для двух связанных интеграторов, в формулы, полученные для одного интегратора. Действительно, выполнив предельный переход при $\beta \to 0$ в формуле (31), можно убедиться, что она сводится к формуле (20). Аналогично, формулы (34) и (35) в пределе при $\beta \to 0$ сводятся к формулам (21) и (22) соответственно.

5. РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТОВ

Рассмотрим задачу перевода системы в нулевое конечное состояние. Основное внимание уделим зависимости базовых величин от порядка дифференцирования. Для двойного дробного интегратора рассмотрим случаи различных начальных условий. Расчеты и визуализация результатов осуществлялись средствами пакета MatLab 7.9.

Зависимость нормы управления в задаче А для одиночного дробного интегратора (см. формулу (20)) от порядка дифференцирования приведена на рис. 1 при различных значениях q_0. Здесь и далее (если не оговорено иное) правая граница временного интервала в задаче А задается равной $T = 100$, а ограничение на норму управления в задаче Б — в виде $l = 1$. Видно, что приведенные на рис. 1 зависимости имеют монотонно-убывающий характер, а при фиксированном α минимальная норма управления растет с ростом q_0 (и, соответственно, с ростом момента $a(T)$).

На рис. 2 представлена зависимость нормы управления в задаче А, определяемой формулой (20), от величины T для одиночного дробного интегратора. Видно, что качественно эта зависимость соответствует случаю интегратора первого порядка (эта зависимость также приведена на графике — кривая для $\alpha = 1$): с ростом интервала наблюдения норма управления уменьшается. При фиксированном T в области $T < 1$ с ростом показателя дифференцирования норма управления растет. В области значений $T > 1$ наблюдается обратная тенденция.

На рис. 3 представлена зависимость наименьшего времени перехода в конечное состояние T^*

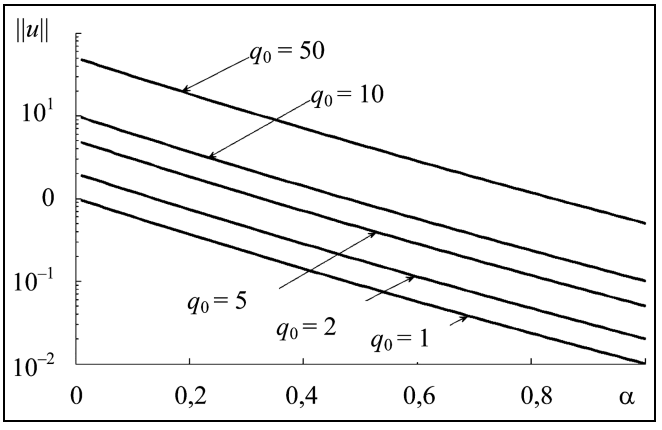

Рис. 1. Зависимость нормы управления от порядка дробного дифференцирования для одиночного дробного интегратора (по оси ординат — логарифмическая шкала)

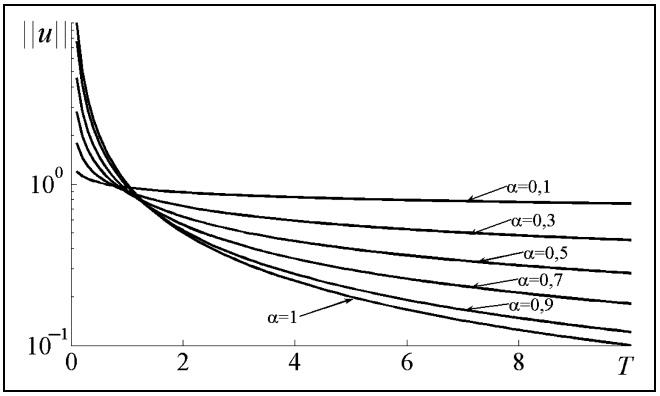

Рис. 2. Зависимость нормы управления от правой границы временного интервала для дробного интегратора при различных значениях показателя дифференцирования (по оси ординат — логарифмическая шкала)

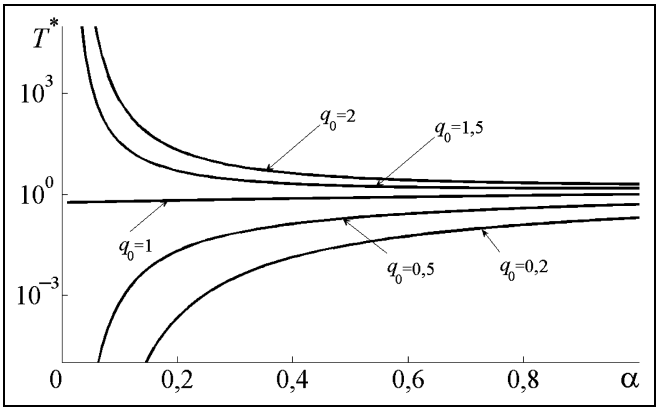

Рис. 3. Зависимость минимального времени перехода в конечное состояние от порядка дифференцирования для дробного интегратора (по оси ординат — логарифмическая шкала)

от показателя дифференцирования при различных значениях q_0. Видно, что при $|a(T)| = |b_T - q_0| = 1$ зависимость имеет слабовозрастающий характер. При $|b_T - q_0| < 1$ возрастающий характер зависимости выражен заметно сильнее, так как в этом случае, согласно формуле (21), в формуле появляется степенная функция $|b_T - q_0|^{1/\alpha}$. Аналогично, при $|b_T - q_0| > 1$ в формуле (21) степенная функция вида $|b_T - q_0|^{1/\alpha}$ обусловливает выраженный быстроспадающий характер.

Рассмотрим теперь задачу перевода в нулевое конечное состояние для двойного интегратора при $q_1^0 \neq 0$ и $q_2^0 = 0$. В этом случае зависимость от порядка дифференцирования присутствует только в функциях $G_1^{\alpha+\beta}(t)$ и $G_2^{\beta}(t)$, а выражения для моментов совпадают со случаем двойного интегратора целого порядка. Решение уравнения (26) при этом сильно упрощается и последующие вычисления по формулам (25), (15), (16) и (19) приводят к явным аналитическим зависимостям. В этом случае можно получить также простую явную формулу для точки изменения знака функции (24):

$$t' = T(1 - 2^{-1/\beta}). \qquad (36)$$

Анализ формулы (36) показывает, что положение данной точки (момента переключения) определяется только показателем дифференцирования второго интегратора в системе (4а, б). Причем это положение оказывается локализованным на отрезке $[T/2, T]$, смещаясь слева направо при уменьшении показателя дифференцирования β. При $\beta = 1$ имеем $t' = T/2$ $\forall\alpha \in [0, 1]$, как и для случая двойного интегратора первого порядка [1].

На рис. 4 приведены трехмерные графики зависимости нормы управления от показателей дифференцирования α и β в случае задачи А (формула (31)) при $t = T$, $q_1^0 = 1$. Видно, что данная зависимость имеет немонотонный характер и характеризуется определенным диапазоном значений показателей интегрирования, в котором норма управления достигает максимального значения. На рис. 5 приведены сечения трехмерных графиков, изображенных на рис. 4: зависимости нормы управления от показателя дифференцирования α при различных фиксированных значениях показателя дифференцирования β. Видно, что при малых показателях β данные зависимости являются немонотонными и имеют максимум в области малых α. В области $\beta > 0{,}3$ поведение этих зависимостей становится монотонным и, аналогично случаю простого интегратора, наблюдается уменьшение модуля управления при росте показателя дифференцирования α. Бóльшим значениям показателя

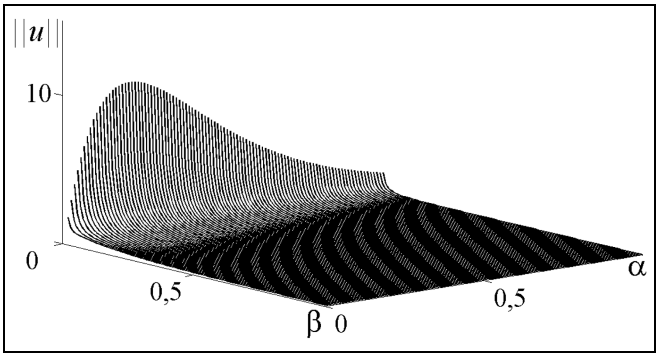

Рис. 4. Зависимость нормы управления от показателей дифференцирования для двойного дробного интегратора в случае задачи А

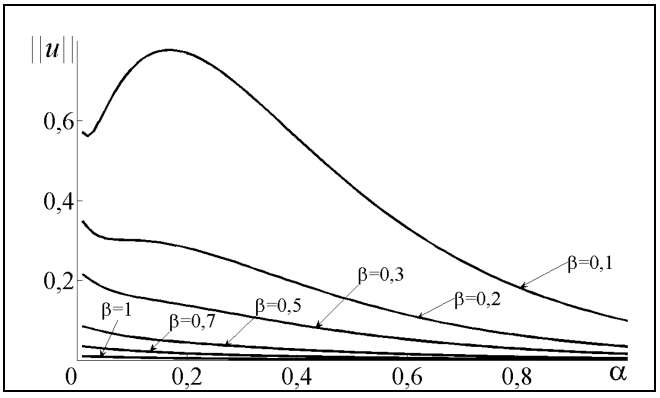

Рис. 5. Зависимости нормы управления от показателя дифференцирования α при различных фиксированных значениях показателя дифференцирования β для двойного дробного интегратора в случае задачи А

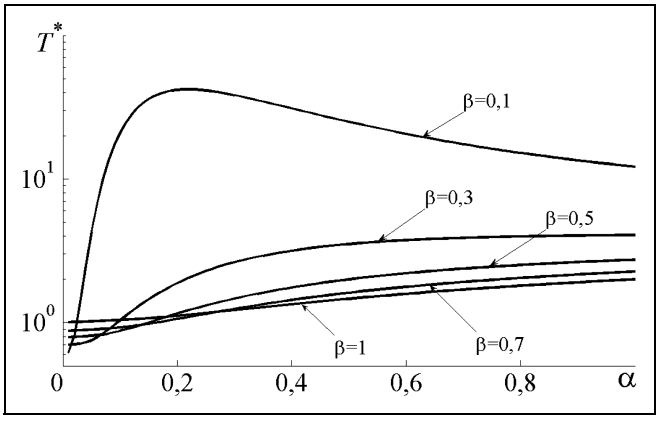

Рис. 6. Зависимость минимального времени перехода в конечное состояние для двойного дробного интегратора Капуто при различных значениях показателей дифференцирования (по оси ординат — логарифмическая шкала)

дифференцирования β соответствуют меньшие значения нормы управления.

Отметим, что значения модуля управления неинвариантны относительно перестановки $\alpha \leftrightarrow \beta$, т. е. двойной интегратор неинвариантен к перестановке переменных $q_1 \leftrightarrow q_2$. Это вполне понятно из анализа формулы (31), дающей различные уравнения для поиска экстремума модуля управления по α и β.

Зависимость нормы управления от T при фиксированных показателях дифференцирования α и β аналогична зависимости, приведенной ранее для простого интегратора (см. рис. 2) и здесь не приводится.

На рис. 6 показаны зависимости минимального времени перехода в конечное состояние для нескольких значений показателя дифференцирования β в зависимости от показателя дифференцирования α. Здесь полагалось $q_1^0 = 1$. Видно, что приведенные зависимости имеют слабо выраженный минимум в области малых α. При малых α и β, как и на рис. 5, зависимость имеет максимум. Кроме того, в области $\alpha < 0{,}2$ при фиксированном α минимальное время перехода T^* растет с увеличением β, а в области $\alpha > 0{,}2$ наблюдается обратная тенденция.

Рассмотрим также задачу о переводе в нулевое конечное состояние для двойного интегратора при $q_1^0 = 0$ и $q_2^0 \neq 0$. Данный случай отличается от предыдущего, главным образом, тем, что в выражении (13б) для момента $a_1(T)$, сохраняется зависимость от порядка дифференцирования α. При этом уравнение (26) в случае $\alpha = \beta$ сводится к квадратному и, следовательно, дает возможность нахождения явного аналитического решения задачи оптимального управления. Найдя величину ξ_2^* и подставив ее в выражение (25) и уравнение (15), получим:

$$\lambda_2 = \frac{q_2^0}{D(\alpha)\,T^{\alpha}}, \tag{37}$$

где $D(\alpha) = A(\alpha)\left[\frac{A(\alpha)-1}{A(\alpha)\Gamma(\alpha+1)}\left(\frac{A(\alpha)-1}{A(\alpha)}\frac{\Gamma(2\alpha)}{\Gamma(\alpha)}-1\right) + \right.$

$\left. + \frac{\Gamma(\alpha)}{2\Gamma(2\alpha)}\right]$, $A(\alpha) = \left[\frac{2\Gamma^2(2\alpha)}{(\Gamma(2\alpha)-\alpha\Gamma^2(\alpha))^2+\Gamma^2(2\alpha)}\right]^{1/2}$.

Решением задачи А будет функция

$$u(t) = \frac{q_2^0}{D(\alpha)\,T^{\alpha}} \times$$

$$\times\ \mathrm{sign}\left[\frac{1}{q_2^0}\left(\frac{A(\alpha)-1}{\Gamma(\alpha)} - A(\alpha)\frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(2\alpha)}\left(1-\frac{t}{T}\right)^{\alpha}\right)\right],$$

$$t \in [0,\ T]. \tag{38}$$

В случае задачи Б при заданном $l > 0$ минимальное время перехода в конечное состояние на основании формул (19) и (37) определяется формулой:

$$T^* = (q_2^0/lD(\alpha))^{1/\alpha}. \tag{39}$$

Соответствующее управление

$$u(t) = l\,\mathrm{sign}\left[\frac{1}{q_2^0}\left(\frac{A(\alpha)-1}{\Gamma(\alpha)} - A(\alpha)\frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(2\alpha)}\left(1-\frac{t}{T^*}\right)^{\alpha}\right)\right],$$

$$t \in [0,\ T^*]. \tag{40}$$

Характер зависимостей нормы управления (38) в задаче А от порядка дифференцирования и правой границы временного интервала, а также зависимости наименьшего времени перехода (39) от порядка дифференцирования качественно совпадает с поведением аналогичных зависимостей для одиночного интегратора (см. рис. 1—3). Это подтверждает и сравнение формул (38)—(40) с формулами (20)—(22) соответственно.

Точка пересечения функции (23) с осью абсцисс, согласно формуле (24), определяется выражением:

$$t' = T\left[1 - \left(\frac{\Gamma(2\alpha)}{\alpha\Gamma^2(\alpha)}\frac{A(\alpha)-1}{A(\alpha)}\right)^{1/\alpha}\right]. \qquad (41)$$

Численные расчеты по формуле (41) показывают, что в данном случае эта точка находится на интервале $t' \in [0{,}7T,\ T]$, т. е., по сравнению с формулой (36), в данном случае левая граница области значений величины t' сдвигается вправо.

Аналогичным образом аналитические решения могут быть получены для случаев $\alpha/\beta = 2^{\pm 1}$ и $\alpha/\beta = 3^{\pm 1}$, приводящих к уравнениям 3-й и 4-й степени соответственно.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе задача оптимального управления одиночным и двойным дробным интегратором сведена к l-проблеме моментов. В общем виде получены явные аналитические формулы или базовые уравнения, позволяющие находить оптимальное (в смысле минимума нормы управления или времени перехода в конечное состояние) управление и минимальное время перехода в конечное состояние при заданном ограничении на норму управления. Показано, что все полученные формулы переходят в свои аналоги для одиночного и двойного интеграторов первого порядка, если положить соответствующие показатели дифференцирования равными единице. Также показано, что формулы, полученные для двойного дробного интегратора, сводятся к формулам для одиночного дробного интегратора при $\beta \to 0$. Приведены результаты расчетов для ряда случаев, демонстрирующие характер зависимости основных величин от показателей дифференцирования и правой границы временнóго отрезка, на котором рассматривается задача.

Полученные в данной работе результаты могут найти применение в задачах управления системами нецелого порядка. В отличие от опубликованных ранее результатов, полученных в рамках вариационного подхода, полученные результаты могут быть применимы при ограничениях на норму управления и разрывных управлениях. В качестве конкретных физических систем, для которых может быть реализовано данное управление, можно указать механические системы с вязким трением и наследственными эффектами, микроструктурированные и плазмоподобные (в том числе, электрохимические) среды различной природы. Одна из интересных аппаратных реализаций подобных систем — суперконденсатор или конденсатор с фрактальным характером структуры электродов. Благодаря такой структуре эффективная площадь и, следовательно, емкость суперконденсатора достигает огромных значений. В настоящее время подобные устройства пытаются использовать для создания блоков питания для различных систем, в том числе транспортных средств (электромобилей и др.).

Полученные результаты могут также оказаться полезными при построении алгоритмов настройки контроллеров нецелого порядка, применяемых сегодня, например, для управления системами электропитания и кондиционирования.

Автор выражает свою искреннюю благодарность В.А. Кубышкину за плодотворное обсуждение материала данной работы и полезные советы и замечания. Идея рассмотрения динамических систем дробного порядка с управлением и применения для их описания метода моментов была предложена автору А.Г. Бутковским.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Взяв интеграл Римана—Лиувилля соответствующего порядка от правой и левой частей уравнений (4а, б), будем иметь:

$$q_1(t) - q_1(0) = {}_0I_t^{\alpha}\, q_2(t),$$

$$q_2(t) - q_2(0) = {}_0I_t^{\beta}\, u(t).$$

Для получения окончательного явного решения системы (4а, б) выразим $q_2(t)$ из второго равенства и подставим это выражение в первое из полученных равенств. Далее воспользуемся полугрупповым свойством интеграла Римана—Лиувилля:

$${}_0I_t^{\alpha}\,({}_0I_t^{\beta}\, u(t)) = {}_0I_t^{\alpha+\beta}\, u(t).$$

В итоге, с учетом начальных условий (5), получим:

$$q_1(t) = q_1^0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)}\int_0^t \frac{u(\tau)d\tau}{(t-\tau)^{1-\alpha-\beta}},$$

$$q_2(t) = q_2^0 + \frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_0^t \frac{u(\tau)d\tau}{(t-\tau)^{1-\beta}}.$$

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Вычислим интеграл, входящий в формулу (15) для двойного интегратора в случае, когда подынтегральная функция $f(t, \xi_2)$ меняет знак на отрезке интегрирования. Выражение (23) для подынтегральной функции с учетом формулы (24) можно записать в виде:

$$f(t, \xi_2) = \frac{(T-t)^{\alpha+\beta-1}}{\Gamma(\beta)}[(T-t)^{-\alpha} - (T-t')^{-\alpha}]\xi_2.$$

Отсюда видно, что при $\xi_2 > 0$: $f(t, \xi_2) > 0$ при $t > t'$ и $f(t, \xi_2) < 0$ при $t < t'$. Тогда

$$\int_0^T |\xi_1 G_1^{\alpha+\beta}(t) + \xi_2 G_2^{\beta}(t)|dt =$$

$$= -\int_0^{t'} f(t, \xi_2)dt + \int_{t'}^{T} f(t, \xi_2)dt =$$

$$= \frac{1}{a_1(T)} \frac{2(T-t')^{\alpha+\beta} - T^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} +$$

$$+ \left(\frac{2(T-t')^{\beta} - T^{\beta}}{\Gamma(\beta+1)} - \frac{a_2(T)}{a_1(T)} \frac{2(T-t')^{\alpha+\beta} - T^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha+\beta+1)}\right)\xi_2.$$

В случае $\xi_2 < 0$ аналогичное вычисление дает тот же конечный результат. Подставив сюда выражение для t' из формулы (24), получим формулу (25). Задача (15) сведется к следующему виду:

$$\min_{\xi_1, \xi_2}\left(\int_0^T \left|\xi_1 G_1^{\alpha+\beta}(t) + \xi_2 G_2^{\beta}(t)\right| dt\right) = \min_{\xi_2} F(\xi_2) = \frac{1}{\lambda_2},$$

где $F(\xi_2)$ определяется формулой (25).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бутковский А.Г.* Методы управления системами с распределенными параметрами. — М.: Наука, 1975. — 568 с.
2. *Красовский Н.Н.* Теория управления движением. — М.: Наука, 1968. — 476 с.
3. *Fractional-order* Systems and Controls: Fundamentals and Applications / C.A. Monje, et al. — London: Springer-Verlag, 2010. — 429 p.
4. *Fractional* Order Systems. Modelling and Control Applications / R. Caponetto, et al. — Singapore: World Scientific, 2010. — 195 p.
5. *Agrawal O.P.* A General Formulation and Solution Scheme for Fractional Optimal Control Problems // Nonlin. Dyn. — 2004. — Vol. 38. — P. 323—337.
6. *Agrawal O.P.* A Formulation and Numerical Scheme for Fractional Optimal Control Problems // J. Vibr. Control. — 2008. — Vol. 14, N 9—10. — P. 1291—1299.
7. *Frederico G.S.F., Torres D.F.M.* Fractional Optimal Control in the Sense of Caputo and the Fractional Noether's Theorem // Int. Math. Forum. — 2008. — Vol. 3, N 10. — P. 479—493.
8. *Тарасов В.Е.* Модели теоретической физики с интегро-дифференцированием дробного порядка. — Ижевск: РХД, 2011. — 568 с.
9. *Учайкин В.В.* Метод дробных производных. — Ульяновск: Артишок, 2008. — 512 с.
10. *Podlubny I.* Fractional Differential Equations. — San Diego: Academic Press, 1999. — 341 p.

Статья представлена к публикации членом редколлегии В.Ю. Рутковским.

Постнов Сергей Сергеевич — аспирант,
Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН,
г. Москва, ✉ postnov.sergey@inbox.ru.

Содержание сборника "Управление большими системами", 2012, вып. 38

- ***Кульба В.В., Косяченко С.А., Шелков А.Б.*** Методология исследования проблем обеспечения безопасности на железнодорожном транспорте
- ***Матюхин В.Г.*** Концептуальное моделирование процессов управления на железнодорожном транспорте
- ***Ахметзянов А.В., Бахтадзе Н.Н., Власов С.А.*** и др. Поддержка принятия управленческих решений на основе интеллектуальной обработки и анализа данных мониторинга деятельности компании ОАО «РЖД»
- ***Дорофеюк А.А., Дорофеюк Ю.А., Мандель А.С.*** и др. Современные требования к безопасности железнодорожного транспорта и методы интеллектуального анализа в задаче построения экспертно-аналитической модели для прогнозирования состояния железнодорожных путей и полосы отвода
- ***Каркищенко А.Н., Гречухин И.А.*** Статистическое распознавание лиц по геометрии характерных точек для систем транспортной безопасности
- ***Павлов В.Л., Уманский В.И.*** Разработка системы поддержки принятия решений по оценке показателей пропускной способности участков железных дорог
- ***Ханычев В.В., Милованов М.А.*** Разработка системы интеллектуального мониторинга и контроля обстановки в целях обеспечения безопасности объектов железнодорожной инфраструктуры со стороны прилегающей водной акватории
- ***Явна В.А., Каспржицкий А.С., Кругликов А.А.*** и др. Этапы проектирования интеллектуальной системы мониторинга объектов транспортной инфраструктуры
- ***Амбарцумян А.А., Браништов С.А.*** Моделирование движения поездов на пассажирской станции
- ***Кибзун А.И., Наумов А.В., Иванов С.В.*** Двухуровневая задача оптимизации деятельности железнодорожного транспортного узла
- ***Лазарев А.А., Мусатова Е.Г.*** Целочисленные постановки задачи формирования железнодорожных составов и расписания их движения
- ***Каплунов С.М., Вальес Н.Г., Фурсов В.Ю.*** и др. Диагностика состояния конструкций и сооружений инфраструктуры РЖД с учетом интенсивных аэродинамических нагрузок от скоростных составов
- ***Карабутов А.А., Жаринов А.Н., Ивочкин А.Ю.*** и др. Лазерно-ультразвуковая диагностика продольных напряжений рельсовых плетей
- ***Колесников В.И., Мясникова Н.А., Жукова Ю.В.*** и др. Методы диагностики состояния многослойного антифрикционного наномодифицированного покрытия на боковой поверхности головки рельса