

ISSN 1819-3161

ПРОБЛЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ

5/2015

CONTROL  SCIENCES

Редакционный совет

Акад. РАН С.Н. Васильев, акад. РАН С.В. Емельянов, чл.-корр. РАН И.А. Каляев, акад. РАН В.А. Левин, чл.-корр. РАН Н.А. Махутов, акад. РАН Е.А. Микрин, чл.-корр. РАН П.П. Пархоменко, чл.-корр. РАН А.Ф. Резчиков, акад. РАН Е.А. Федосов

Редколлегия

Д-ра техн. наук Ф.Т. Алескеров, В.Н. Афанасьев, Н.Н. Бахтадзе, канд. техн. наук Л.П. Боровских (зам. гл. редактора), д-ра техн. наук В.Н. Бурков, В.А. Виттих, В.М. Вишневский, А.А. Дорофеюк, д-р экон. наук В.В. Клочков, д-ра техн. наук С.А. Краснова, О.П. Кузнецов, В.В. Кульба, А.П. Курдюков, д-ра физ.-мат. наук А.Г. Кушнер, А.А. Лазарев, д-ра техн. наук В.Г. Лебедев, А.С. Мандель, д-р биол. наук А.И. Михальский, чл.-корр. РАН Д.А. Новиков (гл. редактор), д-ра техн. наук Б.В. Павлов, Ф.Ф. Пащенко (зам. гл. редактора), д-р физ.-мат. наук Л.Б. Рапопорт, д-ра техн. наук Е.Я. Рубинович, В.Ю. Рутковский, д-р физ.-мат. наук М.В. Хлебников, д-р техн. наук А.Д. Цвиркун, д-р физ.-мат. наук П.Ю. Чеботарёв, д-р техн. наук И.Б. Ядыкин

Руководители региональных редакционных советов

Владивосток – д-р техн. наук О.В. Абрамов (ИАПУ ДВО РАН)
Волгоград – д-р физ.-мат. наук А.А. Воронин (ВГУ)
Воронеж – д-р техн. наук С.А. Баркалов (ВГАСУ)
Курск – д-р техн. наук С.Г. Емельянов (ЮЗГУ)
Липецк – д-р техн. наук А.К. Погодаев (ЛГТУ)
Пермь – д-р техн. наук В.Ю. Столбов (ПНИПУ)
Ростов-на-Дону – д-р техн. наук Г.А. Угольницкий (ЮФУ)
Самара – д-р техн. наук В.Г. Засканов (СГАУ)
Саратов – д-р техн. наук В.А. Твердохлебов (ИПТМУ РАН)
Уфа – д-р техн. наук Б.Г. Ильясов (УГАТУ)



CONTROL SCIENCES

**Научно-технический
журнал**

6 номеров в год

ISSN 1819-3161

Издается с 2003 года

УЧРЕДИТЕЛЬ

**Федеральное государственное
бюджетное учреждение науки
Институт проблем управления
им. В.А. Трапезникова РАН**

**Главный редактор
чл.-корр. РАН**

Д.А. Новиков

**Заместители главного
редактора**

Л.П. Боровских, Ф.Ф. Пашенко

Редактор

Т.А. Гладкова

Выпускающий редактор

Л.В. Петракова

Издатель

ООО «Сенсидат-Плюс»

Адрес редакции
117997, ГСП-7, Москва,
ул. Профсоюзная, д. 65, к. 410.
Тел./факс (495) 334-92-00
E-mail: ru@ipu.ru
Интернет: <http://pu.mtas.ru>

Оригинал-макет
и электронная версия
подготовлены
ИП Прохоров О. В.

Отпечатано в ООО «4 Принт»

Заказ № 116

Подписано в печать
29.09.2015 г.

Журнал зарегистрирован
в Министерстве Российской
Федерации по делам печати,
телерадиовещания и средств
массовых коммуникаций

Свидетельство о регистрации
ПИ № ФС 77-49203 от 30 марта 2012 г.

Журнал входит в Перечень ведущих
рецензируемых журналов и изданий,
в которых должны быть опубликованы
основные научные результаты
диссертаций на соискание ученой
степени доктора и кандидата наук

Подписные индексы:

80508 и **81708** в каталоге Роспечати;
38006 в объединенном каталоге
«Пресса России»

Цена свободная

© Федеральное государственное
бюджетное учреждение науки
Институт проблем управления
им. В.А. Трапезникова РАН

ПРОБЛЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ

5.2015

СОДЕРЖАНИЕ

Обзоры

Алескеров Ф.Т., Белоусова В.Ю., Петрущенко В.В. Модели
оболочечного анализа данных и анализа стохастической границы
в задаче оценки эффективности деятельности университетов 2

Анализ и синтез систем управления

Цыкунов А.М. Система слежения для объекта с распределенным
запаздыванием в условиях возмущений и помех 20

Краснова С.А., Уткин А.В. Сигма-функция в задачах синтеза
наблюдателей состояний и возмущений 27

Управление в социально-экономических системах

Резчиков А.Ф., Цвиркун А.Д., Кушников В.А. и др. Методы прогнозной
оценки социально-экономических показателей национальной
безопасности 37

Бреер В.В., Мирзоян Г.Л., Новиков Д.А. Инновационная олигополия
Курно 45

Маслак А.А., Моисеев С.И., Осипов С.А. Сравнительный анализ
оценок параметров модели Раша, полученных методами максимального
правдоподобия и наименьших квадратов 58

Руденко З.Г. Нелинейная задача оптимизации портфеля
взаимозависимых инвестиционных проектов 67

Шматов Г.А. Методы управления рисками размещения рекламы
в СМИ 71

Управление подвижными объектами и навигация

Андреев К.В. Оптимальные траектории беспилотного летательного
аппарата при слежении за подвижной целью с помощью антенной
решетки 76

* * *

Contents and abstracts. 84

МОДЕЛИ ОБОЛОЧЕЧНОГО АНАЛИЗА ДАННЫХ И АНАЛИЗА СТОХАСТИЧЕСКОЙ ГРАНИЦЫ В ЗАДАЧЕ ОЦЕНКИ ЭФФЕКТИВНОСТИ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ УНИВЕРСИТЕТОВ¹

Ф.Т. Алескеров, В.Ю. Белоусова, В.В. Петрущенко

Систематизированы результаты эмпирических работ по расширению понятия эффективности вузов, способам корректировки моделей оболочечного анализа данных (ОАД) для неоднородных выборок, обоснованию выбора входных и выходных параметров модели, способам повышения эффективности университетов. Особое внимание уделено согласованности результатов, полученных с помощью различных моделей.

Ключевые слова: высшее образование; оболочечный анализ данных; стохастическая граница; оценка эффективности.

ВВЕДЕНИЕ

В течение последних 10 лет принятие управленческих решений (например, по разработке и реализации программ финансирования университетов) в сфере высшего профессионального образования базируется на оценке эффективности деятельности высших учебных заведений (вузов). Так, в некоторых странах-членах ОЭСР (Великобритании, Испании, Италии, Норвегии и Новой Зеландии) разработаны системы оценки результативности научно-технической деятельности университетов, на основе которых принимается реше-

ние об объеме их финансирования из бюджетных источников [1].

Со стороны университетов также проявляется интерес к построению внутренних систем мониторинга результативности как учебно-образовательной, так и научно-исследовательской деятельности. Порой при реализации подобной системы учитываются результаты вуза в части интеграции науки и образования, коммерциализации и достижений в сфере исследований и разработок, а также кооперации с органами государственной власти и предприятиями реального и финансового секторов экономики. При расчете интегральной оценки результативности подразделений учебного заведения во внимание могут приниматься баллы, которые выставляют эксперты при проведении внешней экспертизы достигнутых результатов вуза в целом и его структурных подразделений в отдельности. Например, в Нидерландах подобный механизм используется уже более 15 лет [2]. В России, как показал опрос отечественных высших учебных заведений в 2005 г., также наблюдалось активное внедрение и развитие аналогичных систем, включая обратную связь от внешних экспертов [3].

Как для внутреннего мониторинга работы вуза, так и для оценки эффективности реализации государственных программ поддержки университетов,

¹ Статья подготовлена в результате проведения исследования в Лаборатории анализа и выбора решений и Лаборатории экономики инноваций в рамках Программы фундаментальных исследований НИУ ВШЭ с использованием средств выделенной НИУ ВШЭ субсидии на государственную поддержку ведущих университетов РФ в целях повышения их конкурентоспособности среди ведущих мировых научно-образовательных центров. Кроме того, работа выполнялась при финансовой поддержке Минобрнауки РФ в рамках договора № 13.G25.31.0033 от 07.09.2010 г., заключенного между Минобрнауки РФ и ЗАО «Авиокомп Сервисез» в целях реализации комплексного проекта «Создание высокотехнологичного производства инновационных программно-аппаратных комплексов для эффективного управления предприятиями и отраслями экономики современной России».

требуется построение итогового ранжирования последних. Это позволит проводить сравнительный анализ вузов (так называемый *benchmarking*). Для этих целей необходимо решить как минимум две задачи — выбрать критерии для сравнения университетов и установить степень важности каждого из них. Решение первой задачи всецело зависит от содержательного контекста, для решения второй могут быть использованы исследуемые ниже математические модели оценки эффективности.

Первая часть обзора посвящена описанию основных математических моделей, вторая представляет собой обзор практики реализации методов, применяемых при оценке эффективности университетов. Приложение содержит подробную информацию о моделях, используемых различными авторами.

1. ОБЗОР МОДЕЛЕЙ

1.1. Оболочечный анализ данных

Оболочечный анализ данных (ОАД) представляет собой классический метод оценки эффективности различных фирм, в том числе и вузов [4]. Пусть имеется R университетов, каждый из которых характеризуется N входными и M выходными параметрами (ресурсами и результатами, соответственно). Запишем задачу: найти

$$\max_{u_i, v_j} \left(\theta_k = \frac{\sum_{i=1}^M u_i q_{ik}}{\sum_{j=1}^N v_j x_{jk}} \right), \quad (1)$$

при ограничениях

$$\begin{cases} \frac{\sum_{i=1}^M u_i q_{il}}{\sum_{j=1}^N v_j x_{jl}} \leq 1, l = 1, \dots, R; \\ \forall i, j: u_i \geq 0, v_j \geq 0, \end{cases} \quad (2)$$

q_{il} — i -й выходной параметр k -го университета, x_{jl} — j -й входной параметр k -го университета, u_i и v_j — весовые коэффициенты.

Задача (1) может быть преобразована в задачу линейного программирования [5]: найти

$$\min_{\theta_k, \lambda} \theta_k \quad (3)$$

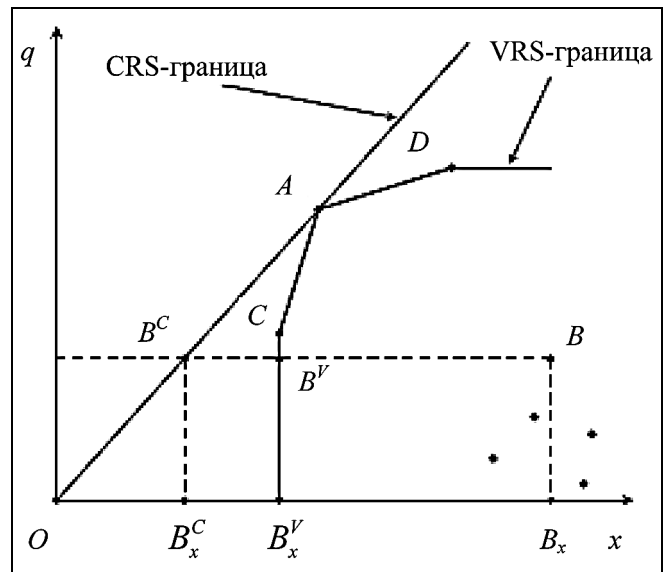


Рис. 1. Интерпретация ОАД в случае одного параметра входа и одного параметра выхода

при ограничениях

$$\begin{cases} -q_k + Q\lambda \geq 0; \\ \theta_k x_k - X\lambda \geq 0; \\ \lambda \geq 0, \end{cases} \quad (4)$$

где Q, X — матрицы выходных и входных параметров всех университетов размера $M \times R$ и $N \times R$, соответственно, q_k и x_k — векторы выходных и входных параметров k -го университета, λ — набор из R констант, а θ_k — скаляр. Оптимальное в смысле минимума (3) значение величины θ_k принадлежит отрезку $[0, 1]$ и интерпретируется как эффективность k -го университета, причем чем вуз эффективнее, тем ближе значение θ к единице.

Модель (1) работает в условиях постоянной отдачи от масштаба (*англ.* Constant Return to Scale — CRS). При отсутствии данного предположения требуется, чтобы в дополнение к ограничениям сумма компонент вектора λ равнялась единице [6] (*англ.* Variable Return to Scale — VRS). Кроме того, разработана модель, в которой предусмотрена возможность считать часть показателей, подчиняющихся переменной отдаче от масштаба, а часть — постоянной [7].

Графическая интерпретация стандартного ОАД в случае единственного ресурса и результата приведена на рис. 1.

Эффективность фирмы B в моделях CRS и VRS

равна $\frac{OB_x^C}{OB_x}$ и $\frac{OB_x^V}{OB_x}$ соответственно.

Таким образом, ОАД позволяет оценить эффект масштаба $SE = \frac{\theta_{CRS}}{\theta_{VRS}}$ (англ. Scale Economies);

здесь в числителе значение эффективности, полученное с помощью модели CRS, в знаменателе — с помощью модели VRS.

Принято говорить, что модель (3) является *ориентированной на вход*. Можно, напротив, максимизировать отношение линейной свертки входных параметров к выходным. Это приводит к модели ОАД, *ориентированной на выход*.

Иногда на компоненты вектора λ накладывают дополнительные ограничения (*ценностные суждения*), например, вида

$$c \leq \lambda \leq C. \quad (5)$$

Для выбора векторов c и C могут использоваться как экспертные оценки, так и поиск оптимальных обменных соотношений между параметрами входа и выхода [8]. К примеру, с помощью ОАД и статистических методов было построено ранжирование 21-го факультета Университета Бен-Гурион (Израиль) [9]. Авторы отмечают, что веса параметров u , v в задаче (1) для каждого университета разные, поэтому на основе модели ОАД невозможно составить ранжирование оцениваемых объектов. Для j -го факультета предполагалось

$$Z_j = V_1 x_{1j} + \dots + V_N x_{Nj},$$

$$W_j = U_1 q_{1j} + \dots + U_M q_{Mj}.$$

Далее общие для всех объектов веса V , U выбирались так, чтобы коэффициент корреляции между векторами Z , W был наибольшим. В качестве ранжирующего показателя использовалась величина $T = W/Z$. Позднее, используя идеи работы [10], авторы статьи [11] на основе ОАД построили модель, с помощью которой стало возможно определять целевые показатели ресурсов-результатов с учетом ценностных суждений. Эта методика была применена для оценки 42-х испанских университетов, для каждого университета были выделены целевые параметры с учетом экспертного мнения и без него.

1.2. Методы анализа стохастической границы (АСГ)

Идея этих методов заключается в эконометрической оценке параметров производственной функции или функции издержек (или прибыли) исследуемой организации. Если говорить о производственной функции, то в качестве зависимой переменной может выступать качество образования, которое вуз дает студенту. К примеру, в Бразилии в качестве этого индикатора использовалось различие между баллами экзамена (аналог государственных экзаменов в России) выпускника и

первокурсника [12]. В Италии за качество и количество результатов образовательной деятельности вузов отвечала численность выпускников в соответствующий учебный год [13].

Однако для вузов наиболее широкое распространение получила оценка функции издержек

$$\ln C_i = x_i^T \beta - \rho_i + \varepsilon_i, \quad (6)$$

где C_i — издержки i -го университета, x_i — набор объясняющих параметров, β — набор коэффициентов, подлежащих оценке, ε_i — компонента, отвечающая за случайное отклонение от границы эффективности, ρ_i — компонента, отвечающая за отклонение от границы эффективности по причине неэффективности учебного заведения (в зависимости от вида функции получается техническая эффективность, эффективность по издержкам (или X-эффективность) или эффективность по прибыли).

Отметим, что набор объясняющих переменных x_i , как правило, не ограничивается только ценами на входные параметры (факторы производства) и объемами (или ценами) выходных параметров (объемами производства) — для функции издержек или прибыли, или как в случае производственной функции — факторами производства. Дополнительно учитывается ряд контрольных переменных, как это было сделано, например, в работе [12]. Такими показателями могут быть демографические данные: доля студентов, работающих более 20 ч в неделю; доля светлокотных студентов; уровень образования матери студента; доля студентов женского пола; уровень отчисления студентов; средний возраст студентов. Кроме того, могут быть учтены показатели, характеризующие среду, такие как средний уровень дохода и среднее число лет обучения в школе в регионе, в котором находится университет. Дополнительно к переменным, характеризующим половую принадлежность студентов, место жительства, возраст, тип школы и уровень успеваемости, могут включаться и другие переменные, к примеру, размер университета (расчитанный исходя из численности студентов) и направления подготовки студентов [13].

Также важен выбор закона распределения для случайной ошибки и компоненты неэффективности, соответственно. К примеру, в работе [14] предполагается, что компоненты ρ_i и ε_i независимы и имеют полунормальное и нормальное распределение $N^+(0, \sigma_\rho^2)$ и $N(0, \sigma_\varepsilon^2)$. Параметры β , σ_ρ^2 , σ_ε^2 , а также ρ_i и ε_i , как правило, оцениваются с помощью метода максимального правдоподобия. Оценку можно проводить и с помощью метода



наименьших квадратов (МНК), не вводя дополнительных предположений о законах распределения компонент, отвечающих за неэффективность и случайное отклонение от границы [15]. Однако в этом случае оценки коэффициентов вектора β будут смещенными, именно поэтому широкое распространение получил первый подход. Необходимо заметить, что имеются и эмпирические подтверждения тому, что оценки эффективности могут быть весьма чувствительны к спецификации модели и выбору закона распределения для компоненты неэффективности [13].

В качестве примера, где использовался АСГ, приведем работу [16], в которой проводилась оценка эффективности 121 английского университета за период с 2000 по 2003 г. и подобно работе [17] вычислялись эффекты масштаба и диверсификации. В статье [16] выбирается подход, основанный на том, что некоторым компонентам вектора разрешается быть случайными величинами с нормальным распределением. Используются две различные версии². Результат — эффективность вузов снижается от наиболее престижного кластера к наименее престижному. Однако авторы ставят под вопрос высокую эффективность престижных университетов, так как, по их мнению, они вряд ли могут быть эффективными по издержкам. Возможная причина такого поведения модели заключается в том, что имеющиеся данные охватывают короткий период.

Другим примером применения АСГ может служить работа [18], в которой исследуется эффективность по издержкам 80-ти английских университетов за период с 1995 по 1999 г. Выбор авторов остановился на транслогарифмической форме границы эффективности. Оцениваемая модель имела вид

$$\ln C_{it} = x_{it} \cdot \beta_{it} + \rho_{it} + \varepsilon_{it}, \quad (7)$$

где C_{it} — суммарные издержки i -го университета в t -й год, x_{it} — вектор объясняющих переменных (среди которых выделяются Q — вектор выходных параметров, W — вектор издержек, связанных с персоналом, и Z — вектор качества абитуриентов. Кроме того, в этот вектор входят квадратичные члены этих объясняющих переменных, а также произведения различных объясняющих переменных. Таким образом, учитывается перекрестное влияние параметров), β_{it} — вектор оцениваемых коэффициентов, ρ_{it} и ε_{it} — техническая неэффективность и случайная компонента соответственно.

² Возникающие при этом технические тонкости описаны в тексте статьи.

Затем в этой работе поднимался вопрос, какие факторы приводят к неэффективности университетов. Использовались два основных объясняющих фактора — профессорско-преподавательский состав (ППС) и контингент студентов, причем каждый из них характеризовался отдельным набором параметров. Таким образом, сначала оценивалась модель (7), а после строилась регрессия полученных значений u_{it} на объясняющие переменные. Методика, которой пользуются авторы, впервые была изложена в работе [19].

Таким образом, поскольку эконометрическая модель АСГ предполагает наличие единственного выходного параметра (объема производства, издержек или прибыли), то это сильно ограничивает возможность ее использования при оценке эффективности многоаспектной деятельности вузов. Еще одним препятствием к ее широкому распространению служит недостаточная численность выборки. Неоднократно было показано [17, 18], насколько высока роль функциональной зависимости формы границы эффективности в определении балла эффективности университета. Так, в транслогарифмической форме учтено перекрестное влияние объясняющих переменных и нелинейность зависимости зависимой переменной от объясняющих параметров, но для ее спецификации требуется существенное число наблюдений. Тем не менее, в большинстве случаев модель АСГ используется для того, чтобы сделать качественные выводы о структуре издержек университета, а также о факторах, оказывающих на нее влияние. По этой причине в литературе чаще всего встречается непараметрический (на основе ОАД) подход к оценке деятельности университетов.

2. ОБЗОР РАБОТ

На основе проведенного сравнительного анализа эмпирических исследований по оценке эффективности вузов представляется возможным выделить шесть направлений развития методологического инструментария в этой сфере, о которых далее речь пойдет более подробно:

- расширение понятия эффективности вузов;
- корректировка моделей ОАД для неоднородных выборок;
- обоснование выбора входных и выходных параметров модели;
- проверка согласованности результатов между разными наборами входных и выходных параметров модели;
- оценка факторов роста эффективности;
- проверка согласованности результатов по моделям АСГ и ОАД.

2.1. Расширение понятия эффективности вузов

В последнее время наблюдается расширение классического понимания эффективности, которая теперь не ограничивается только технической эффективностью, эффектом масштаба, эффективностью по издержкам или прибыли. Так, в работе [20] изучается разложение стандартной эффективности в смысле ОАД (обозначена как TE) на компоненты $TE = SE \cdot CE \cdot PTE$. Здесь SE — эффект масштаба, про этот индекс упоминалось в § 1. Под CE понимается эффективность загрузки³, под которым понимается коэффициент, показывающий, насколько эффективно используются ресурсы, не возникает ли ситуаций, когда сокращение ресурса приведет к увеличению эффективности. Наконец, PTE — чистая техническая эффективность, показатель, игнорирующий эффект масштаба (см. так же работу [15]).

Авторы проанализировали изменение эффективности и ее составляющих для 45 английских университетов с 1980 по 1993 г. Среднее значение эффективности TE увеличилось на 6 процентных пунктов, в основном благодаря чистой технической эффективности PTE и эффективности загрузки CE , тогда как эффект масштаба SE сыграл меньшую роль. Кроме подсчета значений эффективности ими была вычислена совокупная производительность факторов производства (*Total Factor Productivity*, TFP). Для этого был использован так называемый индекс Мальмквиста, идея построения которого заключается в определении функции расстояния между входными и выходными параметрами заданного университета в определенный момент времени относительно фиксированной технологии производства (более подробно см. работы [15], [22]). Индекс Мальмквиста также используется для анализа университетов Великобритании [23, 24], Австралии [25], Германии [26], Италии [27].

В работе [28] на основе модели ОАД оцениваются три различных аспекта эффективности 36-ти австралийских университетов. Прежде всего, вычисляется общая эффективность (*Overall Efficiency*), в качестве входных переменных учитываются численность научных работников и численность административных сотрудников, а в качестве выходных — численность студентов, численность аспирантов и объем грантов. Кроме того, учитывается оценка качества преподавания (*Performance on delivery of educational services*), доля отчисленных студентов и студентов, работающих полный рабочий день в течение обучения, средняя успе-

ваемость студентов. В исследуемый период наблюдалось существенное сокращение объемов государственного финансирования университетов, поэтому австралийские вузы вынужденно привлекали платежеспособных студентов, эта деятельность стала третьим аспектом анализа эффективности (*Performance on fee-paying enrollments*). Для этого были использованы такие данные, как численность иностранных студентов, оплачивающих обучение, численность отечественных аспирантов, не оплачивающих обучение. Общая эффективность и качество преподавания оказались достаточно высокими, не в пример привлекательности университетов для иностранных студентов.

Наряду с этим в литературе отдельное внимание стали уделять эффекту диверсификации деятельности вузов. К примеру, вычисляются эффекты масштаба и диверсификации, проводится качественный анализ структуры издержек [17]. В этом случае эффект диверсификации заключается в том, что более эффективными вузами оказываются те, у которых присутствует больший набор специальностей и факультетов. Модель имеет вид

$$C = f(P_1, P_2, Q_1, Q_2, Q_3),$$

где C — суммарные издержки, P_1 — цена капитала (основных средств), P_2 — цена трудовых ресурсов, Q_1, Q_2, Q_3 — три выходных параметра (исследовательская активность, численность аспирантов и магистров, численность бакалавров).

Для вычисления эффекта масштаба относительно трех выходных параметров применяется нормализация вида

$$\xi = \frac{C(Q)}{\sum_{k=1}^3 Q_k C_k(Q)},$$

где $C(Q)$ — издержки от производства всех трех выходных параметров и $C_k(Q) = \frac{\partial C(Q)}{\partial Q_k}$, значения

$\xi > 1$, $\xi = 1$ и $\xi < 1$ соответствуют случаям возрастающей, постоянной и убывающей отдачи от масштаба, соответственно. Строится алгоритм вычисления эффекта масштаба для каждого входного и выходного параметра в отдельности.

Эффектом ассортимента считается величина $SC_G = [C(Q_1, 0, 0) + C(0, Q_2, 0) + C(0, 0, Q_3) - C(Q)]/C(Q)$, где $C(Q_1, 0, 0)$, $C(0, Q_2, 0)$ и $C(0, 0, Q_3)$ — издержки от производства только первого, второго и третьего выходных параметров, $C(Q)$ — суммарные издержки исследовательской деятельности, а также подготовки бакалавров и аспирантов.

³ Эффективность загрузки отдельно исследуется в работе [21], где применяются три спецификации модели ОАД к выборке, состоящей из 45 английских вуза за период 1994–2004 гг.



Было получено, что отдача от масштаба для вузов носит возрастающий характер, а эффектов диверсификации выявлено не было. Последний результат, на первый взгляд, неочевидный. Однако университет действительно может не получать выгоды от одновременного производства всех трех выходных параметров, так как они необходимы для функционирования вуза. Аналогично вычисляются эффекты масштаба и диверсификации для 121 английского университета за период 2000—2003 гг. [16].

2.2. Корректировка моделей ОАД для неоднородных выборок

Для включения информации о неоднородности вузов в модели ОАД наиболее распространен расчет баллов эффективности внутри однородных групп учреждений. Так, в статье [29], аналогично работе [30], предпринята попытка выявить структурные различия между тремя категориями британских университетов. Первая из них состояла из 47 вузов, имевших статус университета до вступления в силу закона о высшем и дальнейшем образовании 1992 г. (Further and Higher Education Act 1992). Вторая включала в себя 34 вуза, получившие статус университета после 1992 г., а третья — 28 колледжей, специализирующихся на подготовке специалистов в творческих областях деятельности. Позднее разбиение всех вузов в выборке было осуществлено уже на пять групп не только в зависимости от даты основания университета, но и от его престижности [16].

В Германии разнесение вузов на группы производилось в зависимости от направления деятельности (исследовательская и образовательная) и специализации подготовки выпускников (социальные и естественные науки) [31]. В России сравнение эффективности проводилось отдельно для 79 университетов технического профиля и 59 классических университетов [32]. Было показано, что оценки для большинства технических и классических вузов получились сопоставимыми.

Использовалась также идея разбиения выборки на части [33]. Критерием послужило отношение размера полученных грантов к численности студентов (в эквиваленте полной занятости). При оценке выборки в целом, а также двух однородных групп большинство университетов получило высокие баллы эффективности.

Реализован поэтапный расчет эффективности вузов по издержкам, а также с учетом затраченных ресурсов [34], идеи которого впервые были изложены в работе [35]. При анализе данных выяснилось, что вузы, рассматриваемые в качестве приоритетных задач научно-исследовательскую деятельность, имеют более высокие издержки, чем

те, которые сосредоточены на подготовке специалистов по прикладным областям. В связи с этим было выделено три группы университетов в зависимости от стратегии их развития: а) научной; б) сбалансированной; в) прикладной. Далее на первом шаге используемой авторами процедуры в выборку были включены только представители группы а), на втором — представители групп а) и б), на третьем — первоначальная выборка, состоящая из 45 университетов. В качестве итоговой оценки эффективности вуза, входящего в k -ю подгруппу, стал тот результат, который был ими получен на k -м шаге алгоритма. Это позволило учесть зависимость издержек университета от занимаемой им ниши на рынке научных исследований. При оценке эффективности по ресурсам использовались ценностные суждения, однако это не оказало влияния на основные выводы исследования.

Другой подход [36] к тестированию согласованности оценок эффективности в группах однородных вузов заключается в том, чтобы проверить влияние отдельных факторов на итоговые оценки эффективности как для полного и усеченного наборов параметров, так и с включением ценностных суждений аналогично работе [37]. В итоге оказалось, что для всех групп вузов характерна высокая результативность (около 90 %). Несмотря на менее высокие оценки для модели с усеченным набором данных, результаты по обеим моделям дали согласованные баллы, а именно, около половины университетов оказались эффективными. В результате основная гипотеза авторов о различии эффективности университетов, принадлежащих к различным категориям, не нашла подтверждения.

Кроме того, в последнее время применительно к учреждениям сферы высшего образования стали разрабатывать специальные модификации ОАД, позволяющие учитывать неоднородность объектов выборки в самой модели. Например, авторы работы [33] дополнительно строят типологию университетов с учетом географического расположения на базе кластерных методов (K -средних, метода ближайшего соседа). Однако было получено, что проведение оценки эффективности этих учреждений внутри кластеров дает результаты, схожие с методикой разбиения вузов на группы на основе критерия «размера полученных грантов к численности студентов». Другим примером может служить работа [38], в которой авторы, применяя метод последовательного исключения альтернатив, оценили эффективность 28 российских университетов при трех различных значениях индекса неоднородности. Было показано, что ранжирование университетов по эффективности несущественно зависит от степени неоднородности. Для иллюстрации предлагаемого метода оценки неоднород-

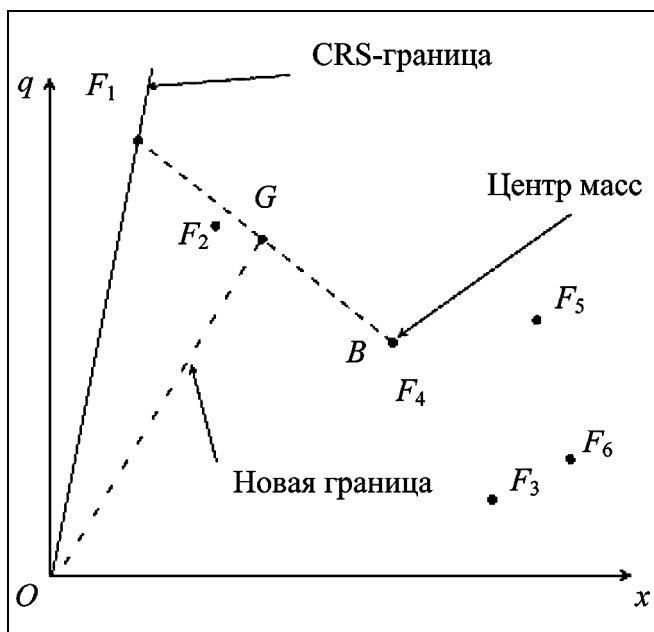


Рис. 2. Интерпретация алгоритма последовательного исключения альтернатив

ности выборки рассмотрим здесь простейший двумерный случай, когда имеется один входной и один выходной параметры (обобщение этого подхода дано в работе [38]).

Если достаточно много вузов располагается далеко от границы эффективности (см. рис. 1), то это означает, что в выборке присутствует неоднородность. Общая идея модели состоит в том, чтобы сдвинуть CRS-границу в сторону центра масс выборки, тем самым уменьшив влияние неоднородности на оценки эффективности. Рассмотрим пример. Пусть выборка состоит из шести университетов $F_1, \dots, F_6$ (рис. 2). Обозначим центр масс через B . Пусть также $\mu \in (0, 1]$ — параметр, характеризующий неоднородность выборки, где $\mu = 1$ означает наибольшую возможную неоднородность. Формируется фантомный университет $G = \mu B + (1 - \mu)F_1$, где F_1 — эффективный университет. Менее эффективные, чем G , университеты $F_3, \dots, F_6$ оцениваются относительно новой границы.

После того как $F_3, \dots, F_6$ прошли оценку относительно новой границы, они исключаются из выборки, и алгоритм запускается на оставшемся множестве альтернатив, в данном случае — для вузов F_1, F_2 . Алгоритм останавливается, когда все университеты прошли оценку, это обязательно происходит по построению.

Другой подход к оценке эффективности при неоднородности представлен в работе [37]. Ключе

вая идея состоит в том, что модель должна учитывать, что университеты имеют научную и образовательную цели. Авторы рассматривали задачу: найти

$$\max_{u_i, v_j} \left(\theta_k = \frac{\sum_{i=1}^8 u_i q_{ik}}{\sum_{j=1}^3 v_j x_{jk}} \right), \quad k = 1, \dots, R,$$

при ограничениях

$$0 \leq t_k := \frac{\sum_{i=1}^2 u_i q_{ik}}{\sum_{j=1}^2 p_j v_j x_{jk}} \leq 1, \quad k = 1, \dots, R$$

$$0 \leq r_k := \frac{\sum_{i=3}^8 u_i q_{ik}}{\sum_{j=1}^2 (1 - p_j) v_j x_{jk} + v_3 x_{3k}} \leq 1, \quad k = 1, \dots, R \quad (8)$$

$$0 \leq p_1 \leq 1; \quad 0 \leq p_2 \leq 1; \quad u_i \geq 0; \quad v_j \geq 0,$$

где R — число университетов в выборке, q_{ik} — значение i -го выходного параметра, $i = 1, \dots, 8$, для k -го университета, x_{jk} — значение j -го входного параметра, $j = 1, 2, 3$, для k -го университета, u_i, v_j — веса выходных и входных параметров, θ_k — эффективность k -го университета, p_1 и p_2 — доли общих и технических расходов, связанных соответственно с образовательной деятельностью факультета, t_k — эффективность учебно-образовательной деятельности k -го университета⁴, r_k — эффективность исследовательской деятельности k -го университета⁵.

Далее задача (8) сводилась к задаче линейного программирования, строилась система ценностных суждений, аналогичная системе (5). Таким образом, в работе [37] построена модель, позволяющая оценивать различные компоненты эффективности. Авторы применили эту модель к оценке 52 факультетов физики и химии английских университетов.

В работе [39] с помощью двух рассмотренных выше моделей исследуется эффективность 45 ту-

⁴ Здесь предполагается, что за образование отвечают первые два входных и выходных параметра, представленные в списке выше.

⁵ За исследовательскую деятельность отвечают все остальные параметры, которые не включены в показатель t_k .



рецких университетов. Следуя работе [37], автор предполагает, что университеты имеют две цели — образование и научные исследования. Применяя модель [38], автор делает вывод о существенной разнородности турецких вузов.

Наконец, в работе [40] с помощью иерархических алгоритмов в зависимости от потенциала вузов в области исследований и разработок, научной и инновационной активности выборка из 219 университетов была разбита на шесть кластеров или пять экономически обоснованных категорий: нишевые вузы (два объединенных кластера), вузы неопределенной позиции, потенциальные и реальные научно-образовательные лидеры, маркет-лидеры, вузы на хорошем счету. В свою очередь, эффективность вузов оценивалась как в однородных группах, так и с поправкой ОАД на неоднородность [38]. В отличие от работы [32] была рассмотрена более полная классификация специализаций вузов: кроме классических и технических были дополнительно исследованы педагогические, социально-экономические, архитектурные и гуманитарные вузы. На втором шаге этой процедуры оценки эффективности вузов были совмещены с типологией вузов. Наиболее высокие показатели эффективности продемонстрировали вузы, входящие в группу «маркет-лидеров». В то же время большая часть вузов характеризовалась ограниченным потенциалом для научной активности, что, безусловно, отразилось на баллах эффективности. Проведя пообъектный анализ вузов, авторы пришли к выводу, что для практической реализации ОАД в российских условиях востребована модель, которая позволяла бы устанавливать пороговые значения выходных переменных, характеризующих уровень публикационной активности отечественных вузов, так как для многих из них этот параметр служит существенным источником неэффективности.

2.3. Обоснование выбора входных и выходных параметров модели

При спецификации входных и выходных переменных моделей исследователи руководствуются, в первую очередь, доступностью данных и основами микроэкономического анализа, где впервые упоминаются факторы производства и границы производственных возможностей, многие авторы также пытаются учесть универсальность стратегических задач университетов. Отмечается, что иногда трудно определить, является ли конкретный параметр оценки ресурсом или результатом [41]. В этой работе построена модификация ОАД, которая позволяет считать переменные ресурсными и результативными в зависимости от университета. Модель применена к оценке университетов по данным из [37].

В работе [16] для оценки функции издержек выбираются: численность бакалавров, обучающихся на фундаментальном и прикладном направлениях подготовки, численность аспирантов и магистрантов, доход от научной деятельности. В работе [42] особое внимание уделяется прогнозированию численности выпускников. Так, авторы строят линейные регрессионные модели

$$y_i = a + b_1x_{1i} + b_2x_{2i} + b_3x_{3i} + b_4x_{4i} + \varepsilon_i,$$

и

$$y_i = a + b_1x_{1i} + b_2x_{2i} + b_3x_{3i} + b_4x_{4i} + b_5x_{5i} + \varepsilon_i,$$

где y_i — численность выпускников i -го университета, x_{1i} — операционные расходы, x_{2i} — численность ППС, x_{3i} — численность ненаучных работников, x_{4i} — численность студентов, x_{5i} — доход от научно-исследовательской деятельности.

С помощью МНК оцениваются коэффициенты a , b_j . Оценка эффективности i -го университета равна y_{est}/y_{act} , где y_{est} — прогнозное значение численности выпускников, а y_{act} — действительное ее значение. При анализе эконометрических моделей авторы обнаружили высокую мультиколлинеарность, для минимизации ее влияния на оценки коэффициентов модели был проведен факторный анализ.

В работе [42] также использовалась модель ОАД с двумя наборами выходных переменных, в одном случае в качестве результата рассматривалась только численность выпускников (без учета их оценок в дипломе), во втором случае к выходным параметрам добавляли доходы университета. В результате оказалось, что вторая модель дает более высокие оценки эффективности (в среднем на 15–20 %), чем первая.

Наконец, университеты ранжируются в соответствии с показателями, выбранными согласно следующим рекомендациям [43]: а) учитывать стратегические задачи университета (образование, наука или и то, и другое); б) отражать специфику вуза и быть измеримыми и стандартизуемыми; в) быть понятными, легко измеряемыми и соответствовать деятельности, для оценки которой они выбраны; г) соответствовать всем объектам, подлежащим оценке. Следуя этой концепции, авторы остановились на операционных издержках на одного выпускника, отношении численности выпускников к численности ППС, отношении численности обучающихся к численности выпускников, отношении доходов от научных исследований к численности ППС, отношении численности зачисленных студентов (включая тех, кто находится в академическом отпуске или рекомендован к отчислению) к численности выпускников.

Существует ряд работ, в которых отдельное внимание уделяется спецификации выходных параметров, чтобы кроме исследовательской активности университета учесть его репутацию (см. например, работу [44]). В частности, в ходе подготовки и верификации данных авторами было выявлено, что число публикаций по результатам научных исследований⁶ для многих университетов было равно нулю или весьма близко к этому уровню. На основании того, что репутационный индекс⁷ коррелирован (~90 %) с числом опубликованных работ, было принято решение в трех из четырех используемых моделей все же исключить из рассмотрения последний параметр. К сожалению, авторы подробно не раскрыли разделы опросной анкеты, критерии выбора респондентов, процедуры агрегирования разделов опросника для конструирования итогового репутационного индекса. Однако авторы обратили внимание на недостатки подобного инструмента оценки академической результативности университетов: «данная мера является субъективной, в связи с этим отражает предвзятость и приверженность респондентов; репутация всего университета может быть создана лишь небольшой общественно активной группой; она оценивается в большей степени по прошлым результатам, чем по текущим, таким образом она может быть неадекватным отражением текущей научно-исследовательской деятельности университета (репутация существует и после момента ее создания)» [44, с. 687].

В статье [45] была разработана и апробирована на 18-ти финских университетах модель, позволяющая соединить непараметрическую оценку ОАД с учетом важности параметров. Приведем лишь ключевую идею с помощью иллюстрации, взятой из текста статьи. Пусть выборка характеризуется двумя выходными параметрами и фиксированным уровнем ресурса. Можно видеть, что согласно ОАД эффективность университета B на рис. 3 рассчитывается как отношение длины отрезка OB к длине отрезка OB^1 . Зафиксируем функцию полезнос-

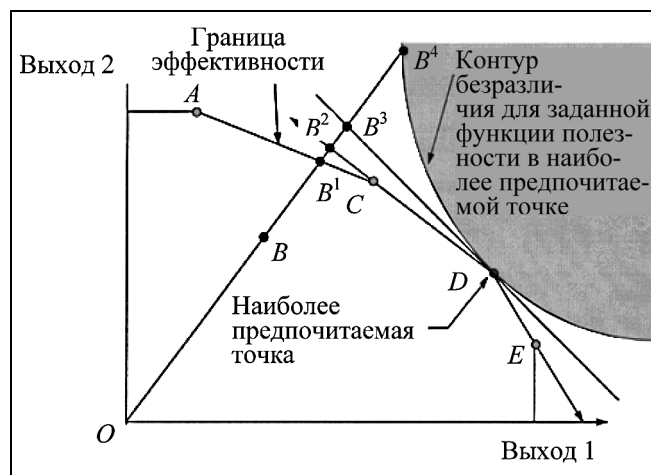


Рис. 3. Добавление предпочтений в модель ОАД

ти, тогда идеальной мерой эффективности было бы отношение OB к OB^4 . В действительности функция полезности неизвестна, поэтому авторы аппроксимируют истинное значение эффективности следующим образом. Выбирается соответствующий участок границы эффективности (в нашем случае CD) и вдоль него проводится прямая до пересечения с лучом OB . Тогда эффективность объекта B рассчитывается как отношение OB к OB^2 .

В работе [46] ОАД применяется к оценке 25 американских университетов, попавших в топ рейтинг агентства «U.S. News and World Report». Данный рейтинг основан на следующих показателях: а) репутация (по опросу рейтингового агентства); б) качество отбора студентов (определяется такими показателями, как средний балл при поступлении, средний балл в школе и т. п.); в) качество ППС (сюда входят такие параметры, как удельный вес численности ППС с ученой степенью PhD в общей численности, удельный вес численности ППС, работающего по совместительству (на неполной ставке), в общей численности); г) степень удовлетворенности студентов обучением в вузе (оценивается следующими показателями: удельный вес численности студентов, закончивших бакалавриат за 6 лет, и удельный вес численности первокурсников, не перешедших на второй курс, в общей численности); д) издержки в расчете на одного студента.

Два параметра, отвечающие за степень удовлетворенности студентов обучением в вузе, выбираются в качестве выходных параметров для ОАД, а в качестве ресурсных переменных выступают средний балл вступительного экзамена поступивших абитуриентов, процент ППС с ученой степенью PhD, отношение численности ППС к численности студентов, издержки. Независимо от параметров

⁶ К подобным публикациям авторы отнесли работы, которые были проиндексированы в 2003–2004 гг. как в международных указателях научного цитирования (к примеру, в Science Citation Index, Social Science Citation Index, Arts and Humanities Citation Index, Index to Science and Technology, Engineering Index), так и в национальных китайских (Statistics of Chinese Technical Thesis and Quotation Data Base, Social Science Quotation Data Base of China). Число публикаций из этих баз данных было взвешено на численность ППС и аспирантов в зависимости от их области научных интересов [44, с. 687].

⁷ Репутационный индекс был рассчитан на основе опросных данных, в которых учитывались вклад университета в академическое сообщество, успеваемость студентов, результативность вузов. В качестве респондентов были выбраны ведущие ученые, научные сотрудники, эксперты в области высшего образования, ректоры университетов [44, с. 687].

оценки «U.S. News World Report» авторы также включают размер платы за обучение в качестве ресурса, мотивируя это тем, что данный параметр имеет непосредственное влияние на степень удовлетворенности студентов обучением в вузе. Существование связи между ресурсами и результатами устанавливается с помощью регрессионного анализа.

В итоге ранжирования вузов, построенных рейтинговым агентством «U.S. News World Report» и с помощью ОАД, получились существенно различными. Например, согласно рейтингу «U.S. News World Report», первые семь университетов (Harvard, Yale, Stanford, Princeton, Caltech, MIT, Duke) не оказались эффективными в смысле модели ОАД. Однако стоит отметить, что большинство университетов находились близко к границе эффективности (только у двух вузов из 25 значение эффективности оказалось ниже 90 % — 87 и 86 %).

В работе [47] оценивается эффективность 44 испанских университетов с учетом успешности внедрения университетских разработок в бизнес (knowledge transfer). В итоговой модели используются четыре ресурсных и три результативных показателя. В качестве входных параметров выбраны численность ППС, численность технических и административных работников, издержки и доходы от научных исследований. В качестве результатов — численность выпускников (образовательная составляющая), количество опубликованных работ (исследовательская составляющая), число компаний, основанных на результатах научно-исследовательской деятельности группы ученых, работающих в университете (так называемые спин-офф (spin-off) компании). Эта составляющая отвечает за успешность внедрения университетских разработок в реальный бизнес). Авторы также используют кластеризацию (алгоритм *K-means*) для проведения более подробного анализа результатов. Выборка разбивается на три кластера в пространстве 10-ти параметров, при разбиении учитывается число спин-оффов компаний.

2.4. Проверка согласованности результатов между разными наборами входных и выходных параметров модели

Следующее направление работ заключается в проверке согласованности оценки потенциала вузов на основе нескольких моделей ОАД, отличающихся набором входных и выходных параметров. Из отечественных источников выделим работу [48], в которой модель ОАД применяется к оценке 29 российских университетов. Было выявлено, что более точные и согласованные с международной практикой оценки наблюдаются, когда в модели учитываются показатели финансирования вузов. Позднее проводился сравнительный анализ

эффективности образовательной, а также одновременно по образовательной и научной, деятельности российских вузов внутри однородных групп и подчеркивалась важность проведения анализа внутри именно таких групп [32]. Выявлено, что более половины университетов в обеих группах (технических и классических) характеризуются результативностью на уровне 80 %. Отдельное внимание в отечественной литературе уделяется построению типологии университетов на основе эмпирических данных [49] и социологических опросов [3]. Среди подобных критериев были рассмотрены экономическая модель вуза, стратегия адаптации вуза к условиям внешней среды и др.

Для 109 китайских университетов была выявлена чрезвычайно высокая эффективность вузов [44] вне зависимости от выбора первых двух наборов входных и выходных показателей из используемых четырех (где средняя эффективность составила около 91 %). Третья и четвертая модели оказались чуть менее оптимистичны, среднее значение эффективности не превысило 83 %. В зависимости от модели доля эффективных университетов варьировалась от 20 до 40 %.

В ряде работ используются модели, концептуально схожие с ОАД. Рассмотрим основную идею модели, предложенной в работе [50]. Пусть, как и раньше, выборка характеризуется N ресурсами и M результатами, — ресурсы и результаты конкретного университета. Определяется допустимое множество

$$T = \{(x, q) \in \mathbb{R}_+^{N+M} \mid \text{имея } x, \text{ можно произвести } q\}.$$

Пусть дана $V: \mathbb{R}_+^M \rightarrow \mathbb{R}_+$, $q \rightarrow V(q)$ — ценностная функция результата, а $p \in \mathbb{R}_+^N$ — цены ресурсов. Эффективность каждого университета оценивается как

$$\theta = \min_{x^*, q^* \in T} \{px^* \mid V(q^*) > V(q)\} / px, \quad (9)$$

где x, q — ресурсы и результаты вуза. Рассматриваются обобщения на случай неизвестной ценностной функции V и неизвестных цен p . Оптимизационная задача (9) сводится к задаче линейного программирования.

Авторы используют три различные комбинации параметров и оценивают 79 исследовательских программ в восьми голландских университетах за период с 1996 по 2000 г. Сравниваются ранжировки, полученные с помощью оригинальной методики, а также экспертным путем в Ассоциации голландских университетов (VSNU). Анализ данных показал, что результаты схожи, но не эквивалентны (корреляции на уровне 25–64 %). Сравниваются группы исследовательских программ,

для чего авторы выделяют три признака: университет-организатор программы, год, специализация. Показано, что некоторые университеты имели стабильно более эффективные программы. В результате было выделено три специализации, являющиеся лидерами в эффективности на протяжении всего периода.

Для модели ОАД было выбрано два ресурсных и четыре результативных параметра [9]. После анализа результатов выяснилось, что один из результативных параметров (численность аспирантов) не оказывает существенного влияния на оценки, поэтому далее применялась другая модель с двумя ресурсными и тремя результативными переменными. С помощью статистических тестов показано сходство оценок, полученных с помощью ОАД и ранжировок, построенных по методу авторов. Ранжировки, полученные на основе различных наборов вход-выходных параметров, также оказались очень близки (корреляция на уровне 90 %).

2.5. Оценка факторов роста эффективности

Особое внимание некоторые исследователи уделяют выявлению факторов, которые объясняют разброс эффективности вузов. В таких работах на первом этапе оценивается эффективность вузов, на втором — исследуются факторы, определяющие уровень этой эффективности. Например, для этого применяется квантильная регрессия для оценки 73 вузов за период с 1997 по 1999 г. [31]. Авторы, следуя работе [51], квантильную регрессию представили в виде: $Y = X\beta + \varepsilon$, где Y — набор значений зависимой переменной, X — матрица объясняющих переменных, ε — случайная компонента, β — вектор оцениваемых коэффициентов.

Тогда квантильная регрессия уровня τ может быть сведена к решению задачи:

$$\min_{\beta^+, \beta^-, u^+, u^-} \{ \tau \cdot 1_n^T u^+ + (1 - \tau) 1_n^T u^- \},$$

где $\beta_j^+ = \max(\beta_j, 0)$, $\beta_j^- = -\min(\beta_j, 0)$, $u_j^+ = \max(u_j, 0)$, $u_j^- = -\min(u_j, 0)$.

Вектор Y представляет собой значения эффективности. В работе используются два значения параметра τ : 0,75 и 0,25. В первом случае находят оценки параметров β для высокоэффективных университетов, во втором — для низкоэффективных. Однако оказалось, что эти коэффициенты оказались статистически незначимыми.

Интересен и набор объясняющих эффективность параметров. Так, было построено пять различных модификаций ОАД в зависимости от направлений стратегического развития университетов (см. таблицу). Как в итоге выяснилось, немецкие вузы отличались более высокой образовательной, нежели научно-исследовательской эффективностью. Кроме того, наблюдалась небольшая положительная корреляция между модификациями, характеризующими «конкурирующие» направления развития университетов.

Позднее было выявлено [50], что размер образовательной программы вуза несущественно влияет на его эффективность по издержкам. Напротив, внешнее финансирование существенно сказывается на полученных баллах. В заключении авторы дают рекомендации по использованию полученных результатов. В свою очередь, в работе [18] показано, что чем старше ППС университета, тем меньшие издержки вуз несет.

Набор объясняющих переменных для проведения регрессии и выявления стратегических групп университетов

Стратегические переменные: направление деятельности университета (исследовательская, образовательная)	Стратегические переменные: направление подготовки выпускников (естественно-научные или гуманитарные дисциплины)
Число публикаций по естественным наукам в расчете на 100 выпускников. Число публикаций по гуманитарным наукам в расчете на 100 выпускников	Удельный вес публикаций по естественно-научным дисциплинам в общем числе. Удельный вес численности выпускников, обучавшихся естественным наукам, в общей численности выпускников
Общие для обеих моделей объясняющие переменные	
Число полученных грантов. Численность студентов. Возраст университета. Численность населения, живущего рядом с университетом. Нахождение университета на западе (фиктивная переменная*). Наличие образовательных программ медицинской специальности (фиктивная переменная). Число университетов в округе	
*При наличии признака принимает значение 1, 0 — в противном случае.	



Авторы работы [2] оценивают эффективность вузов, но уже в разрезе 169 исследовательских программ в голландских университетах, определяют, какую роль играет размер и тип финансирования, анализируют, в чем состоит ключевая причина различной степени продуктивности. Делается попытка сравнить библиометрический подход и метод внешней экспертизы (*peer review*) при оценке результатов исследовательской деятельности.

Кроме того исследовалась зависимость полученных оценок эффективности китайских университетов от факторов среды [44]. К примеру, было показано, что в рамках всех четырех моделей эффективности вуза зависит от его расположения. Напротив, тип финансирования (федеральное или региональное) не имеет существенного влияния. Позднее влияние среды на эффективность немецких вузов было изучено в работе [26], где авторы показали, что рост ВВП на 1 % обеспечивает повышение эффективности на 4 %. При этом в среднем университеты из Восточной Германии оказались менее эффективными, чем из Западной. В работе [52] для канадских университетов была восстановлена функция, объясняющая разброс оценок результативности из-за влияния переменных окружающей среды. Кроме того, авторы пробовали строить отдельную регрессию для значения эффективности. В результате учет влияния параметров окружающей среды сказался на числе эффективных университетов. В среднем эффективность по выборке составила около 90 %. Тем не менее, для конкретных университетов оценки, полученные различными методами, сильно разнились.

В дополнение к отмеченным выше факторам получено, что не существует устойчивой связи между размером университета и его эффективностью [26]. Результативными оказались как крупные, так и малые университеты. Наличие медицинских и инженерных факультетов, как оказалось, сказывается на эффективности вуза отрицательно (в среднем падение эффективности составляло около 6–7 % при открытии факультетов, указанных направлений). Отчасти этот результат авторы объяснили тем, что университеты, в состав которых входят подобные факультеты, имеют структуру управления финансами и персоналом, отличную от других вузов. С одной стороны, эти университеты обременены дополнительными расходами на содержание таких факультетов. С другой стороны, именно эти факультеты приносят более высокий доход от исследований и разработок, чем другие факультеты, особенно это характерно для медицинских факультетов.

Интересен случай Бразилии [12], где был использован широкий круг переменных, объясняющих уровень качества образования в 164 вузах (из них 88 — частные) для 2007 г. Но влияние боль-

шого числа этих факторов оказалось статистически незначимым. Примером такого фактора служит удельный вес студентов женского пола в общей численности (изначально он был включен авторами, чтобы учесть эффект от разработки и апробации курсов, в основе которых лежат предпочтения студенток). Кроме того, учитывался уровень отчисления студентов, чтобы проконтролировать неоднородность выборки между первокурсниками и студентами более старших курсов, но этот фактор также оказался статистически незначимым. Чтобы учесть разнородность среды, были использованы такие показатели, как уровень доходов, число лет обучения в школе на территории, где находится вуз, однако и эти переменные не повлияли на основные результаты модели.

В то же время было получено, что в первую очередь качество образования зависит от качества ППС. Так, невысокая численность профессоров в расчете на одного студента отрицательно влияет на качество образования. Однако, когда успеваемость студентов рассчитывалась отдельно для каждой категории студентов, было показано, что этот показатель влияет только на успеваемость первокурсников. Этот результат весьма неожиданный и, вероятно, сомнительный. Авторы объяснили его тем, что вузы привлекают сильных студентов, а впоследствии (на старших курсах) вклад профессоров в уровень знаний студентов снижается. Этот эффект может быть вызван тем, что в ППС авторы статьи учитывали только профессоров, однако не проводили анализ результативности их научно-исследовательской работы и стажа работы. Кроме того, в исследовании не учитывалась классификация наук по дисциплинарному принципу.

Аналогичный эффект был получен для педагогической составляющей образовательного процесса (требования по полному выполнению учебного плана, где указаны образовательные курсы и формы контроля, в качестве прокси-показателя для уровня используемой образовательной технологии). Кроме того, наличие развитой университетской инфраструктуры (число компьютеров в расчете на одного студента, например) повышает успеваемость студентов. Наконец, вузы с преобладающей долей частной собственности показали более высокие результаты, чем вузы в государственной собственности, при этом качество образования в вузах обоих типов собственности было достаточно низким. Это, в свою очередь, вызвало особую озабоченность авторов, поскольку в Бразилии государственные вузы полностью финансируются из государственного бюджета.

Противоположные результаты получили исследователи качества образования в итальянских университетах. На примере 59 государственных вузов они показали, что мотивация студентов к учебе и

их демографические данные определяют эффективность преподавания в вузе. Более низкая эффективность вузов наблюдалась на юге по сравнению с севером [13].

2.6. Проверка согласованности результатов по моделям АСГ и ОАД

Наконец, в ряде работ сравниваются результаты оценок, полученных с помощью АСГ и ОАД. Например, в работе [26] исследуется эффективность 72-х университетов Германии за период с 1998 по 2003 г. В первой части работы для немецких вузов вычисляется индекс Мальмквиста, во второй — применяется ОАД. Расчеты индекса Мальмквиста показали, что вузы Восточной Германии (несмотря на более низкую среднюю эффективность) продемонстрировали больший по сравнению с западными университетами рост совокупной производительности факторов производства.

Во второй части работы с помощью АСГ оценивается функция издержек университетов. Учитывается перекрестное влияние параметров, делаются выводы о структуре издержек университетов. Большое внимание уделяется учету наличия инженерных и медицинских факультетов и их влиянию на издержки университетов. Корреляция итоговых значений эффективности, полученных с помощью различных моделей, составила примерно 60 %.

В работе [52] к выборке, состоящей из 45 канадских университетов за период 1992—1993 гг., также применялись одновременно АСГ и ОАД. Отметим, что единственным входным параметром для модели ОАД (зависимой переменной для модели АСГ) были совокупные издержки. Для модели ОАД было использовано два различных набора входных и выходных параметров (некоторые выходные переменные в одной модели становились переменными среды в другой). Отдельно в работе был проведен анализ корреляционной матрицы результатов, который не выявил устойчивой корреляции между результатами, полученными с помощью различных моделей.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Проведен детальный анализ прикладных исследований по оценке эффективности университетов, а также структурных подразделений различных уровней (от факультетов до микроподразделений и исследовательских программ). Оказалось, что метод анализа стохастической границы (АСГ), как и индекс Мальмквиста, применяются весьма редко. Только немногие исследователи эконометрически оценивают границу эффективности в транслогарифмической форме, которая, к примеру, для многих учреждений банковского сектора уже стала эталонной [53]. Как правило, АСГ применяют в

целях анализа структуры издержек университетов, а также факторов, их определяющих. На основе этих данных могут приниматься решения по оптимизации расходов вуза. С помощью АСГ также вычисляются эффекты масштаба и диверсификации.

Было показано, что для оценки эффективности вузов широкое распространение получил оболочечный анализ данных (ОАД). При постановке оптимизационной задачи ОАД могут использоваться оценочные суждения о важности тех или иных входных параметров или результатов вузов (выходных параметров). Кроме того, модификации ОАД позволяют по-разному учесть неоднородность первоначальной выборки. Некоторые авторы разбивают множество университетов на группы в зависимости от их статуса или специфики научно-исследовательской деятельности. Ряд авторов принимают во внимание различия в областях наук и направлениях стратегического развития высших учебных заведений, некоторые используют информацию об условиях внешней среды и конкурентного окружения, что также является поправкой на неоднородность. В последнее время появляются работы, в которых применяется кластерный анализ для получения однородных групп вузов. Также применяется метод последовательного исключения альтернатив для учета неоднородности внутри модели ОАД. Однако до сих пор в сфере высшего образования не нашли должного отражения такие модели учета неоднородности выборки, как проективный ОАД и многозадачный ОАД, которые активно применяются для анализа других типов организаций (см., например, работу [54]).

В ряде работ было показано, что оценки эффективности существенно не зависят от метода (индексного, параметрического или непараметрического) их получения. Исключением может служить только пример Канады, где коэффициент корреляции, рассчитанный на основе баллов эффективности вузов в рамках моделей ОАД и АСГ, был невысок.

Особую озабоченность исследователей вызывают обоснование выбора входных и выходных параметров модели и приближение его к реальным условиям, в которых функционируют вузы. Здесь наблюдается разброс подходов к постановке задачи: от спецификации базовых факторов производства до включения репутационных характеристик университета. Наиболее распространено применение не менее двух различных составов этих переменных в целях проверки согласованности результатов между разными наборами входных и выходных параметров модели. Кроме того, примерно с 2004 г. стали появляться исследования, цель которых состоит в выявлении факторов, определяющих уровень эффективности вузов.



Отметим что, несмотря на стремительное развитие подходов к оценке эффективности вузов, все еще остается ряд нерешенных вопросов. Так, отсутствуют работы, в которых учитывалась бы вариативность баллов эффективности с течением времени, включались бы альтернативные издержки и степень диверсификации деятельности вузов, проводилось бы сопоставление результатов по концепциям эффективности (функция прибыли, издержек, производственная функция). К примеру, подобные проблемы уже были решены в банковской отрасли в конце 1990-х гг. [53]. Кроме того, для более корректного сравнения результатов параметрических и непараметрических методов полезно иметь в виду следующие рекомендации, опять же впервые предложенные для финансового сектора [55]:

— полученные разными методами оценки эффективности должны иметь сравнимое среднее значение, дисперсию (др. моменты распределения);

— ранжирования организаций по уровню эффективности в соответствии с разными методами должны быть примерно одинаковыми;

— методы должны одинаково определять группы учреждений, которые наиболее и наименее эффективны;

— оценки эффективности должны быть устойчивыми во времени (не должно наблюдаться значительных колебаний баллов эффективности от одного периода времени к другому, если только в эти периоды не было существенных структурных и/или методологических изменений в системе управления вузом);

— оценки эффективности должны соответствовать условиям среды (в том числе и конкурентным), в которой функционируют учреждения;

— оценки эффективности не должны входить в противоречие с результатами, полученными при использовании традиционных показателей эффективности таких, как доходность активов (ROA), соотношение доходов и расходов (income/cost ratio), если организация преследует цель — получение прибыли.

Авторы выражают благодарность профессору А.А. Дорофееву за ценные замечания и рекомендации.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Входные и выходные параметры для модели DEA

Источник	Входные параметры		Выходные параметры	
[29]	Качество обучающихся в университете студентов. Численность аспирантов. Численность ППС. Амортизация основных фондов вуза. Расходы на библиотечные нужды и компьютерное оснащение. Административные расходы вуза, за исключением амортизационных отчислений		Показатель исследовательской деятельности. Количество ученых степеней, выданных на программах послевузовской подготовки. Качество выпускников.	
[34]	Эффективность по издержкам	Эффективность по ресурсам	Эффективность по издержкам	Эффективность по ресурсам
	Совокупные издержки. Расходы на научные проекты	Численность студентов. Численность аспирантов. Численность ППС. Рейтинг качества абитуриентов. Расходы на научные проекты. Расходы на библиотечный фонд и компьютерное оснащение	Численность выпускников. Численность обладателей ученых степеней, защитившихся в данном университете Рейтинг научной и публикационной активности	Численность выпускников. Численность обладателей ученых степеней, защитившихся в данном университете. Рейтинг научной и публикационной активности
[37]	Общие издержки. Расходы на техническое оборудование. Расходы на исследования		Численность студентов бакалавриата. Численность студентов магистратуры. Численность студентов аспирантуры. Рейтинг публикационной и научной деятельности. Четыре фиктивные переменные, отражающие оценку работы департамента	

Источник	Входные параметры		Выходные параметры	
[20]	Численность работников университета. Численность студентов бакалавриата. Численность магистров и аспирантов. Совокупные расходы (включаются все издержки, кроме фонда оплаты труда работникам профессорско-преподавательского состава)		Доход от исследовательской и консультационной деятельности вуза. Число выданных дипломов: бакалавриата; дипломов магистратуры и число защищенных диссертаций на получение степени PhD	
[42]	Численность: ППС; административных работников; студентов Операционные издержки, за исключением фонда оплаты труда сотрудникам университета		Численность выпускников. Доходы от научно-исследовательской деятельности университета	
[28]	Численность: научных работников; административных сотрудников		Численность: студентов; аспирантов. Сумма средств, полученных университетом на грантовой основе на исследования. Процент отчисленных студентов. Средняя успеваемость студентов. Удельный вес студентов, работающих полный рабочий день в течение обучения, в общей численности студентов	
[33]	Численность ППС: в эквиваленте полной занятости; неакадемического персонала. Издержки университета, за исключением фонда оплаты труда. Внеоборотные активы как прокси-переменная для акционерного капитала		Численность студентов в эквиваленте полной занятости. Размер грантов, полученных университетом для проведения научных исследований	
[26]	Численность технического персонала. Численность ППС. Текущие расходы		Число грантов. Численность выпускников	
[31]	Модель по оценке общей эффективности			
	Фонд оплаты труда. Все прочие издержки.		Число публикаций по естественным наукам. Численность выпускников по естественным наукам. Число публикаций по социальным наукам; Численность выпускников по социальным наукам	
[48]	Модель А	Модель В	Модель А	Модель В
	Численность студентов (бюджетный и внебюджетный контингенты). Удельный вес штатных ППС с ученой степенью (д-р экон. наук и канд. экон. наук) в общей численности ППС. Фондовооруженность		Рейтинг качества приема (среднее значение ЕГЭ). Рейтинг научной и публикационной активности	Рейтинг качества приема (среднее значение ЕГЭ). Рейтинг научной и публикационной активности. Объем внебюджетных доходов/объем бюджетного финансирования
[32]	Модель 1	Модель 2	Модель 1	Модель 2
	Удельное бюджетное финансирование вузов. Удельный вес обладателей ученых степеней ППС в общей численности ППС. Совокупная численность ППС	Удельное бюджетное финансирование вузов. Удельный вес обладателей ученых степеней ППС в общей численности ППС. Средний балл ЕГЭ	Средний балл первокурсников, поступивших по ЕГЭ. Численность студентов, обучающихся на бюджетных и платных местах	Взвешенный удельный вес молодых ППС и научных работников в общей численности ППС и научных работников. Публикационная активность работников вуза, а именно, число научных статей в рецензируемых журналах в расчете на 100 сотрудников



Источник	Входные параметры	Выходные параметры
[39]	Инвестиционные издержки. Общие издержки	Численность бакалавров; магистров; аспирантов. Число публикаций. Число проектов
[45]	Среднемесячные издержки на проведение исследований	Качество исследовательской работы. Активность исследования. Вклад исследования. Активность в области обучения молодых специалистов. Активность в научной среде
[50]	Численность PhD студентов. Ресурсные показатели, характеризующие исследовательскую деятельность вуза	Число: PhD диссертаций; статей в зарубежных рецензируемых журналах; статей в зарубежных нерецензируемых журналах; книг в (со) авторстве; глав монографий и статей в сборниках конференций; статей в рецензируемых немецких журналах; статей в нерецензируемых немецких журналах; отчетов по проектам, выполненным на грантовой основе, и различных профессиональных отчетов
[44]	Отношение численности занятых на полную ставку профессоров к численности студентов. Удельный вес профессоров, трудящихся на позиции доцента (<i>англ.</i> associate professor) и выше, в общей численности ППС. Численность студентов, обучающихся в магистратуре или аспирантуре. Издержки на проведенные исследования. Индекс, измеряющий количество библиотечных ресурсов. Индекс, измеряющий площадь кампуса	Репутационный индекс. Число публикаций. Число публикаций в расчете на одного профессора
[21]	Численность бакалавров. Численность магистров. Затраты на ППС. Другие затраты	Доход от исследовательской деятельности. Количество дипломов бакалавра с учетом оценок. Количество магистерских дипломов
[27]	Численность: принятых абитуриентов; принятых абитуриентов с высоким проходным баллом; студентов; ППС; число мест в аудиториях, библиотеках и лабораториях	Численность: выпускников; выпускников у программ длительностью 4 и 5 лет
[23]	Численность персонала; Затраты на персонал и студенческие сервисы; Затраты на академические сервисы; Численность бакалавров и студентов, получающих первую степень; Численность магистрантов	Количество дипломов: бакалавриата; магистратуры, аспирантуры. Доходы от исследований
[24]	Операционные издержки	Численность: бакалавров медицины; бакалавров по научным специальностям; бакалавров по остальным специальностям; магистрантов и аспирантов. Доходы от исследований. Другие доходы

Источник	Входные параметры	Выходные параметры
[46]	Средний балл абитуриентов при поступлении. Процент ППС со степенью PhD. Отношение численности ППС к численности студентов. Образовательные и общие издержки в расчете на одного студента	Уровень выпуска студентов; коэффициент сохранения студентов
[25]	Численность: ППС; административных сотрудников; бакалавров; магистрантов и аспирантов. Операционные издержки	Количество дипломов: бакалаврских; магистерских; аспирантских. Государственные гранты. Гранты от бизнеса. Число публикаций
[47]	Численность: ППС; административных сотрудников. Административные издержки. Доходы от исследований	Число: выпускников; публикаций; спин-оффов (spin-off)
[9]	Операционные издержки. Зарплаты сотрудников	Размер полученных грантов. Число: публикаций; магистрантов и аспирантов; учебных часов
[11]	Отношение: численности ППС к численности студентов; численности административных сотрудников к численности студентов; издержек к численности студентов; площади университетских кампусов к численности студентов	Уровень выпуска студентов; коэффициент сохранения студентов; коэффициент прогресса студентов

ЛИТЕРАТУРА

1. *OECD*. Performance-based Funding for Public Research in Tertiary Education Institutions: Workshop Proceedings, 2010.
2. *Garcia-Valderrama T., Groot T.* Research Quality and Efficiency — an Analysis of Assessments and Management Issues in Dutch Economics and Business Research Programs // *Research Policy*. — 2006. — N 35. — P. 1362–1376.
3. *Тимова Н.Л.* Стратегии развития российских вузов: ответы на новые вызовы. — М.: МАКС Пресс, 2008.
4. *Charnes A., Cooper W., Rhodes E.* Measuring the efficiency of decision-making units // *European Journal of Operational Research*. — 1978. — N 2. — P. 429–444.
5. *Charnes A., Cooper W.* Programming with linear fractional functional Cooper // *Naval Research Logistics*. — 1962. — N 9. — P. 181–186.
6. *Banker R.D., Charnes A., Cooper W.W.* Some Models for Estimating Technical and Scale Inefficiencies in Data Envelopment Analysis // *Management Science*. — 1984. — N 30. — P. 1078–1092.
7. *Podinovski V.* Bridging the gap between the constant and variable returns-to-scale models: selective proportionality in data envelopment analysis // *Journal of the Operational Research Society*. — 2004. — N 55. — P. 265–276.
8. *Podinovski V.* The explicit role of weight bounds in models of data envelopment analysis // *Journal of the Operational Research Society*. — 2005. — N 56. — P. 1408–1418.
9. *Friedman L., Sinuany-Stern Z.* Scaling units via the canonical correlation analysis in the DEA context // *European Journal of Operational Research*. — 1997. — N 100. — P. 629–637.
10. *Aparicio J., Ruiz J., Sirvent I.* Closest targets and minimum distance to the Pareto-efficient frontier in DEA // *Journal of Productivity Analysis*. — 2007. — N 28. — P. 209–218.
11. *Ruiz J., Segura J., Sirvent I.* Benchmarking and target setting with expert preferences: An application to the evaluation of educational performance of Spanish universities // *European Journal of Operational Research*. — 2015. — N 242. — P. 594–605.
12. *Mattos E., Rocha F., Zoghbi A.* Education production efficiency: Evidence from Brazilian universities. — 2013. — N 31. — P. 94–103.
13. *Biggeri L., Laureti T., Secondi L.* Measuring the efficiency of teaching activities in Italian universities: An information theoretic approach // *Economics of Education Review*. — 2014. — N 42. P. 147–164.
14. *Aigner D., Lovell C., Schmidt P.* Formulation and estimation of stochastic frontier production functions // *Journal of Econometrics*. — 1977. — N 6. — P. 21–37.
15. *Coelli T., Rao D., O'Donnell C., Battese G.* An Introduction to Efficiency and Productivity Analysis. — N.-Y.: Springer, 2005.
16. *Johnes G., Johnes J.* Higher education institutions' costs and efficiency: taking the decomposition a further step // *Economics of Education Review*. — 2009. — N 28. — P. 107–113.
17. *Glass J., McKillop D., Hyndman N.* Efficiency in the provision of university teaching and research: An empirical analysis of UK universities // *Journal of Applied Econometrics*. — 1995. — N 10. — P. 61–72.
18. *Stevens P.* A Stochastic Frontier Analysis of English and Welsh Universities // *Education Economics*. — 2005. — N 13. — P. 355–374.



19. Battese G., Coelli T. A model for technical efficiency effects in a stochastic frontier production function for panel data // *Empirical Economics*. — 1995. — N 20. — P. 325–332.
20. Allen D., Flegg A., Field K., Thurlow T. Measuring the Efficiency and Productivity of British Universities: An Application of DEA and the Malmquist Approach / unpublished. — 2004. — 47 p.
21. Allen D.O., Flegg A.T. Does expansion cause congestion? The case of the Older British universities, 1994–2004 // *Education Economics*. — 2007. — N 15. — P. 75–102.
22. Fare R., Grosskopf S., Norris M., Zhongyang Z. Productivity growth, technical progress and efficiency change in industrialized countries // *The American Economic Review*. — 1994. — N 84. — P. 66–83.
23. Johnes J. Eddiciency and productivity change in the English higher education sector from 1996/97 to 2004/5 // *The Manchester School*. — 2008. — N 76. — P. 653–674.
24. Johnes J., Johnes G., Kortelainen M., Thanassoulis E. Costs and efficiency of higher education institutions in England: a DEA analysis // *Journal of Operational Research Society*. — 2011. — N 62. — P. 1282–1297.
25. Lee B.L., Worthington A.C. Efficiency, technology and productive change in Australian universities, 1998–2003 // *Economics of Education Review*. — 2008. — N 27. — P. 285–298.
26. Kempkes G., Pohl C. The efficiency of German universities — some evidence from nonparametric and parametric methods // *Applied Economics*. — 2010. — N 42. — P. 2063–2079.
27. Agasisti T., Dal Bianco A. Reforming the university sector: effects of teaching efficiency — evidence from Italy // *Higher Education*. — 2009. — N 57. — P. 477–498.
28. Avkiran N.K. Investigating technical and scale efficiencies of Australian Universities through data envelopment analysis // *Socio-Economic Planning Sciences*. — 2001. — N 35. — P. 57–80.
29. Johnes J. Data envelopment analysis and its application to the measurement of efficiency in higher education // *Economics of Education Review*. — 2006. — N 25. — P. 273–288.
30. Charnes A., Cooper W., Rhodes E. Evaluating Program and Managerial Efficiency: An Application of Data Envelopment Analysis to Program Follow Through // *Management Science*. — 1981. — N 27. — P. 668–697.
31. Warning S. Performance Differences in German Higher Education: Empirical Analysis of Strategic Groups, Review of Industrial Organization. — 2004. — N 24. — P. 393–408.
32. Оценка результативности университетов с помощью оболочечного анализа данных / И.В. Абанкина, Ф.Т. Алескеров, В.Ю. Белоусова и др. // *Вопросы образования*. — 2013. — № 2. — С. 5–38.
33. Abbott M., Doucouliagos C. The efficiency of Australian universities: a data envelopment analysis // *Economics of Education Review*. — 2003. — N 22. — P. 89–97.
34. Athanassopoulos A.D., Shale E. Assessing the Comparative Efficiency of Higher Education Institutions in the UK by the Means of Data Envelopment Analysis // *Education Economics*. — 1997. — N 5. — P. 117–134.
35. Banker R.D., Morey R.C. Use of Categorical Variables in Data Envelopment Analysis // *Management Science*. — 1986. — N 32. — P. 1613–1627.
36. Pastor T., Ruiz L., Sirvent I. A statistical test for nested radial DEA models // *Operations Research*. — 2002. — N 50. — P. 728–735.
37. Beasley J. Determining teaching and research efficiencies // *Journal of the Operational Research Society*. — 1995. — N 46. — P. 441–452.
38. Aleskerov F., Petrushchenko V. An Approach to DEA for Heterogeneous Samples // *Modelling, Computation and Optimization in Information Systems and Management Sciences, Advances in Intelligent Systems and Computing 360*, H.A. Le Thi, et al. (eds.). — Switzerland: Springer, 2015. — P. 15–21.
39. Cinar Y. Research and Teaching Efficiencies of Turkish Universities with Heterogeneity Considerations: Application of «Multi-Activity DEA» and «DEA by Sequential Exclusion of Alternatives' Models». — 2013. HSE WP7, 04.
40. Performance-Based Typology Of Universities: Evidence From Russia / I.V. Abankina, F.T. Aleskerov, V.Y. Belousova, et al. // Working papers by NRU Higher School of Economics. Series WP BRP «Science, Technology and Innovation». — 2015. — N WP BRP 33/STI/2015.
41. Cook W.D., Zhu D. Classifying inputs and outputs in data envelopment analysis // *European Journal of Operational Research*. — 2007. — N 180. — P. 692–699.
42. Katharakis G., Katharaki M. A comparative assessment of Greek universities' efficiency using quantitative analysis // *Intern. Journal of Educational Research*. — 2010. — N 49. — P. 115–128.
43. Hyfner K. Accountability in Higher Education. In Altbach, Philip (ed.) *International Higher Education: An Encyclopedia*. N 1. — N.Y.: Garland Publishing, 1991. — P. 47–58.
44. Johnes J., Yu L. Measuring the research performance of Chinese higher education institutions using data envelopment analysis // *China Economic Review*. — 2008. — N 19. — P. 679–696.
45. Korhonen P., Tainio R., Wallenius J. Value efficiency analysis of academic research // *European Journal of Operational Research*. — 2001. — N 130. — P. 121–132.
46. Breu T.M., Raab R.L. Efficiency and perceived quality of the nation's «top 25» national universities and national liberal arts colleges: An application of data envelopment analysis to higher education // *Socio-Economic Planning Science*. — 1994. — N 28. — P. 33–45.
47. Berbegal-Mirabent J., Lafuente E., Sole F. The pursuit of knowledge transfer activities: An efficiency analysis of Spanish universities // *Journal of Business Research*. — 2013. — N 66. — P. 2051–2059.
48. University efficiency evaluation with using its reputational component / I.V. Abankina, F.T. Aleskerov, V.Y. Belousova, et al. // *Proc. of the 4th Intern. Conf. on Applied Operational Research*. — Bangkok, 2012. — P. 244–253.
49. Экономическое положение вузов в условиях бюджетной реформы, повышения автономии и введения ЕГЭ / И.В. Абанкина, Т.В. Абанкина, Е.А. Николаенко и др. — М.: Изд. дом ГУ-ВШЭ, 2010.
50. Cherchye L., Vanden Abeele P. On research efficiency: A micro-analysis of Dutch university research in Economics and Business Management // *Research Policy*. — 2005. — N 34. — P. 495–516.
51. Koenker R. *Quantile Regression*. — Cambridge: Cambridge University Press, 2005.
52. McMillan M., Wing H.C. University Efficiency: A Comparison and Consolidation of Results from Stochastic and Non-stochastic Methods // *Education Economics*. — 2006. — N 14. — P. 1–30.
53. Berger A.N., Humphrey D.B. Efficiency of financial institutions: International survey and directions for future research // *European Journal of Operational Research*. — 1997. — N 98. — P. 175–212.
54. Петрущенко В.В. Учет неоднородности в оболочечном анализе данных // *Проблемы управления*. — 2013. — № 5. — С. 2–11.
55. Bauer P.W., Berger A.N., Ferrier G.D., Humphrey D.B. Consistency Conditions for Regulatory Analysis of Financial Institutions: A Comparison of Frontier Efficiency Methods // *Journal of Economics and Business*. — 1998. — N 50. — P. 85–114.

Статья представлена к публикации членом редколлегии А.А. Дорофеевом.

Алескеров Фуад Тагиевич — д-р техн. наук, зав. лабораторией, Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики» (НИУ ВШЭ); зав. лабораторией, Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, г. Москва, ✉ alesk@hse.ru,

Белоусова Вероника Юрьевна — канд. экон. наук, зав. отделом, НИУ ВШЭ, г. Москва, ✉ vbelusova@hse.ru,

Петрущенко Всеволод Владимирович — стажер-исследователь, НИУ ВШЭ, г. Москва, ✉ goroddt@yandex.ru.

СИСТЕМА СЛЕЖЕНИЯ ДЛЯ ОБЪЕКТА С РАСПРЕДЕЛЕННЫМ ЗАПАЗДЫВАНИЕМ В УСЛОВИЯХ ВОЗМУЩЕНИЙ И ПОМЕХ

А.М. Цыкунов

Рассмотрена задача робастного слежения за эталонным сигналом для объекта с распределенным запаздыванием, когда на него действуют ограниченные внешние возмущения, а вектор состояния измеряется с помехами. Получен алгоритм управления, позволяющий получить асимптотически точную оценку источника помех и компенсировать внешние ограниченные возмущения с требуемой точностью. Приведен числовой пример и результаты моделирования.

Ключевые слова: робастное управление, вектор состояния, возмущения, распределенное запаздывание.

ВВЕДЕНИЕ

Одна из основных проблем теории автоматического управления динамическими объектами заключается в компенсации внешних неизмеряемых возмущений и помех. В таких условиях проектируемая система управления должна обеспечивать выполнение основной цели управления, например, слежение за эталонным сигналом с требуемой точностью, что возможно осуществить, если скомпенсировать внешние возмущения и помехи. Один из основных подходов решения этой задачи состоит в применении робастных систем управления. Достаточно подробно эта проблема изложена в книге [1], где приводится классификация задач проектирования робастных систем управления и различных типов возмущений.

Существует немало подходов и методов, позволяющих сконструировать системы управления, которые компенсируют априорную неопределенность в математических моделях объектов управления и внешние ограниченные возмущения — метод инвариантных эллипсоидов [2, 3], метод матричных неравенств [4, 5], метод гарантированного управления [6], решается задача компенсации возмущения с помощью линейного динамического регулятора, для построения которого применяется

метод инвариантных эллипсоидов [7], используются специальные фильтры [8], применяется специальный вспомогательный контур [9—11], позволяющий получить оценку возмущений. Задача робастного управления объектами с запаздыванием исследована в ряде работ [12—14]. Решены задачи робастного управления для объектов с запаздыванием нейтрального типа [15—18]. Исследована компенсация возмущений и неопределенности параметров математической модели с распределенным запаздыванием исследована [19].

В настоящей статье результаты, полученные в работе [20], используются для получения оценки векторного источника помех и компенсации внешних неизмеряемых возмущений для объекта с распределенным запаздыванием.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим объект управления, математическая модель которого задана уравнением

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + D \int_{-h}^0 x(t+\theta) d\theta + Bu(t) + \Gamma f(x, t), \\ z(t) &= x(t) + N \xi(t), \quad y(t) = Cx(t), \\ x(\theta) &= \varphi(\theta), \quad \theta \in [-h, 0], \end{aligned} \quad (1)$$



где $x \in R^n$, $u(t)$ и $y(t)$ — скалярные управляющее воздействие и регулируемая переменная, которая не измеряется, $z(t)$ — измеряемый вектор, $f(x, t) \in R^v$ — внешнее, векторное возмущение, $\varphi(\theta)$ — непрерывная начальная векторная функция, $\xi \in R^r$ — вектор, который является источником помех, N — матрица интенсивности помех, h — время запаздывания, A, D, B, Γ, C и N — числовые матрицы соответствующих порядков.

Требуется получить алгоритм управления, обеспечивающий выполнение целевого условия

$$|y(t) - y_m(t)| < \delta \text{ при } t \geq T_0, \quad (2)$$

где $y_m(t)$ — сигнал, который должен отслеживаться выходом объекта управления, величина $\delta > 0$ характеризует точность слежения, T_0 — время, по истечении которого с начала функционирования системы выполняться целевое неравенство. Иными словами, выражение (2) означает, что целевое неравенство должно выполняться за конечное время, которое зависит от многих факторов: начальных условий объекта и источника помех, величины возмущений и эталонного сигнала.

Будем решать сформулированную задачу при следующих ограничениях.

Предположения

1. Пара (A, B) — управляема, а пара (A, C) — наблюдаема.

2. Уравнение (1) — минимально-фазовое, т. е. квазиполином $\text{Cadj}\Lambda(s)B$ является гурвицевым, где s — комплексная переменная в преобразовании Лапласа, $\Lambda(s) = (I_n s - A - D\sigma(s))$, I_n — единичная матрица порядка $n \times n$, $\text{adj}\Lambda(s)$ — присоединенная матрица (транспонированная матрица алгебраических дополнений матрицы $\Lambda(s)$),

$$\sigma(s) = \int_{-h}^0 e^{s\theta} d\theta = \frac{1 - e^{-hs}}{s}.$$

3. Ранг матрицы Γ плюс размерность вектора-источника помех не должны превышать размерности вектора x , $\text{rank}\Gamma + r \leq n$. Без потери общности будем считать что $\text{rank}\Gamma + r = n$, $\text{rank}N = r$.

4. Компоненты векторной функции $f(x, t)$ — гладкие ограниченные функции по переменной t , и удовлетворяющие глобальным условиям Липшица по переменным x .

5. Функция $y_m(t)$ является гладкой.

6. Матрицы A, B, D, N и C известны.

7. Компоненты векторной функции $\xi(t)$ — ограниченные функции.

Ясно, что для выполнения целевого условия (2) с требуемым значением величины δ необходимо

скомпенсировать влияние возмущений и помех на регулируемую переменную. Однако вектор измеряемых переменных $z(t)$ несет информацию о возмущениях и помехах. Поэтому первый этап решения сформулированной задачи состоит в выделении сигнала, который бы нес информацию только о помехах, или только о возмущениях.

2. МЕТОД РЕШЕНИЯ

Метод решения сформулированной задачи состоит из двух этапов:

— конструирование системы, позволяющей оценить сигналы помех и скомпенсировать их влияние на вектор $x(t)$;

— проектирование системы, позволяющей компенсировать влияние возмущений на точность слежения.

Сформируем новый вектор измерения

$$\bar{z}(t) = z(t) + N\varphi(t). \quad (3)$$

Здесь $\varphi(t)$ — управляющий сигнал, предназначенный для компенсации влияния помех.

Выберем в матрице N r строк таких, что составленная из них матрица будет невырожденной. Без потери общности, будем считать, что это первые r строк.

Преобразуем уравнение (1), положив $x = T\bar{x}$.

Берем матрицу T так, чтобы матрица $T^{-1}\Gamma$ имела нулевые первые r строк. Такая матрица всегда существует, так как $\text{rank}\Gamma = n - r$. Далее,

$$\begin{aligned} \dot{\bar{x}}(t) = & T^{-1}AT\bar{x}(t) + T^{-1}DT \int_{-h}^0 \bar{x}(t + \theta)d\theta + \\ & + T^{-1}Bu(t) + T^{-1}\Gamma f(x, t), \end{aligned} \quad (4)$$

$$\text{где } T^{-1}AT = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, \quad T^{-1}DT = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{21} & D_{22} \end{bmatrix},$$

$$T^{-1}B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}, \quad T^{-1}\Gamma = \begin{bmatrix} 0_{r \times r} \\ \Gamma_2 \end{bmatrix}, \quad 0_{r \times r} — \text{нулевая матрица}$$

порядка $n \times n$. Запишем уравнение (4) в виде системы векторных уравнений

$$\dot{\bar{x}}_1(t) = A_{11}\bar{x}_1(t) + A_{12}\bar{x}_2 + D_{11} \int_{-h}^0 \bar{x}(t + \theta)d\theta + B_1 u(t),$$

$$\begin{aligned} \dot{\bar{x}}_2(t) = & A_{21}\bar{x}_1(t) + A_{22}\bar{x}_2 + D_{21} \int_{-h}^0 \bar{x}(t + \theta)d\theta + \\ & + B_2 u(t) + \Gamma_2 f(x, t). \end{aligned} \quad (5)$$

Здесь $D_1 = [D_{11} \ D_{12}]$, $D_2 = [D_{21} \ D_{22}]$, $\bar{x}_1(t) \in R^r$, $\bar{x}_2(t) \in R^{n-r}$.

Введем новый вектор измерения

$$\eta(t) = T^{-1}z(t) = T^{-1}(x(t) + N\xi(t)) = \bar{x} + T^{-1}N\xi(t) = \bar{x} \bar{N}\xi(t), \quad \bar{N} = T^{-1}N.$$

Запишем это матричное равенство в виде двух равенств:

$$\begin{aligned} \eta_1(t) &= L_1\eta(t) = \bar{x}_1 + N_1\xi(t), \\ \eta_2(t) &= L_2\eta(t) = \bar{x}_2 + N_2\xi(t), \end{aligned} \quad (6)$$

где $\eta_1(t) \in R^r$, $\eta_2(t) \in R^{n-r}$, $\eta^T(t) = [\eta_1^T(t), \eta_2^T(t)]$, $L_1 = [I_r \ 0_{(n-r) \times (n-r)}]$, $\bar{N}^T = [N_1^T, N_2^T]$, $L_2 = [0_{r \times r} \ I_{(n-r)}]$.

Принимая во внимание равенства (6), преобразуем первое из уравнений (5):

$$\begin{aligned} \dot{\eta}_1(t) &= A_{11}\eta_1(t) + A_{12}\eta_2 + D_1 \int_{-h}^0 \eta(t+\theta)d\theta + \\ &+ B_1u(t) + N_1\dot{\xi}(t) - A_{11}N_1\xi(t) - A_{12}N_2\xi - \\ &- D_1\bar{N} \int_{-h}^0 \xi(t+\theta)d\theta. \end{aligned} \quad (7)$$

Введем вспомогательный контур, динамические процессы в котором описываются уравнением

$$\begin{aligned} \dot{\eta}_b(t) &= A_{11}\eta_b(t) + A_{12}\eta_2 + D_1 \int_{-h}^0 \eta(t+\theta)d\theta + \\ &+ B_1u(t). \end{aligned} \quad (8)$$

Составим уравнение для вектора рассогласования $\varsigma(t) = \eta_1(t) + \eta_b(t)$, вычитая уравнение (8) из уравнения (7):

$$\begin{aligned} \dot{\varsigma}(t) &= A_{11}\varsigma(t) + N_1\dot{\xi}(t) - A_1\bar{N}\xi(t) - \\ &- D_1\bar{N} \int_{-h}^0 \xi(t+\theta)d\theta. \end{aligned} \quad (9)$$

Отсюда получаем уравнение для оценки вектора, который является источником помех:

$$\begin{aligned} \dot{\bar{\xi}}(t) &= N_1^{-1} \left(+A_1\bar{N}\dot{\xi}(t) + D_1\bar{N} \int_{-h}^0 \bar{\xi}(t+\theta)d\theta \right) + \\ &+ N_1^{-1} (\dot{\varsigma}(t) - A_{11}\varsigma(t)), \\ \bar{\xi}(\theta) &= 0, \theta \in [-h, 0]. \end{aligned} \quad (10)$$

Для работоспособности полученного алгоритма необходимо, чтобы матрица A_{11} была гурвицевой, а уравнение

$$\dot{\bar{\xi}}(t) = N_1^{-1} \left(+A_1\bar{N}\bar{\xi}(t) + D_1\bar{N} \int_{-h}^0 \bar{\xi}(t+\theta)d\theta \right) \quad (11)$$

асимптотически устойчивым.

Покажем, что в этом случае получается асимптотически устойчивая оценка вектора $\xi(t)$.

Применим преобразование Лапласа к уравнениям (9) и (10):

$$\begin{aligned} (I_r s - A_{11})\varsigma(s) &= \left(N_1 s - A_1\bar{N} - D_1\bar{N} \frac{1-e^{-hs}}{s} \right) \xi(s) + \\ &+ \varsigma(0) - \xi(0), \\ \left(I_r s - N_1^{-1} \left(+A_1\bar{N} + D_1\bar{N} \frac{1-e^{-hs}}{s} \right) \right) \bar{\xi}(s) &= \\ = N_1^{-1} ((I_r s - A_{11})\varsigma(s) - \varsigma(0)). \end{aligned}$$

Подставив первое уравнение во второе, получим

$$\begin{aligned} \left(I_r s - N_1^{-1} \left(+A_1\bar{N} + D_1\bar{N} \frac{1-e^{-hs}}{s} \right) \right) \bar{\xi}(s) &= \\ = \left(\left(I_r s - N_1^{-1} A_1\bar{N} - N_1^{-1} D_1\bar{N} \frac{1-e^{-hs}}{s} \right) \xi(s) + \right. \\ &+ \varsigma(s) - \varsigma(0) - \xi(0) \left. \right). \end{aligned}$$

Разрешим уравнение относительно оценки $\bar{\xi}(s)$:

$$\begin{aligned} \bar{\xi}(s) &= \xi(s) - \\ &- \left(I_r s - N_1^{-1} \left(+A_1\bar{N} + D_1\bar{N} \frac{1-e^{-hs}}{s} \right) \right)^{-1} \xi(0). \end{aligned}$$

Так как уравнение (11) асимптотически устойчиво, то квазиполином $\det(I_r s - N_1^{-1}(-A_1\bar{N} - D_1\bar{N} \times (1 - e^{-hs})/s))$ является гурвицевым. Тогда оригинал изображения $\chi(t) = L^{-1}(I_r s - N_1^{-1}(-A_1\bar{N} - D_1\bar{N} \times (1 - e^{-hs})/s))^{-1}\xi(0)$ мажорируется затухающими экспонентами. Следовательно, $\lim_{t \rightarrow \infty} \chi(t) = 0$, 0 ,

$\lim_{t \rightarrow \infty} \bar{\xi}(t) = \xi(t)$. Таким образом, $\bar{\xi}(t) = \xi(t) - \chi(t)$. Тогда, положив в формуле (3) $\phi(t) = -\bar{\xi}(t)$, получим

$$\begin{aligned} \bar{z}(t) &= z(t) + N\phi(t) = x(t) + N\xi(t) - N\bar{\xi}(t) = \\ &= x(t) + \chi(t). \end{aligned} \quad (12)$$



В результате получили асимптотически точную оценку вектора $x(t)$.

Отметим, что после того, как отфильтрован сигнал помехи, можно воспользоваться любым известным алгоритмом, который позволяет компенсировать влияние возмущений на регулируемую величину.

В данном случае рассматривается один из возможных алгоритмов. Сформируем оценку регулируемой переменной, принимая во внимание формулу (12):

$$\hat{y}(t) = C\bar{z}(t) = Cx(t) + C\chi(t) = y(t) + C\chi(t).$$

Для проектирования системы слежения имеем математическую модель

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + D \int_{-h}^0 x(t+\theta) d\theta + Bu(t) + \Gamma f(x, t), \\ \hat{y}(t) &= y(t) + C\chi(t), \quad x(\theta) = \varphi(\theta), \\ \theta &\in [-h, 0]. \end{aligned} \quad (13)$$

Применим преобразование Лапласа к уравнению (13) и преобразуем полученное матричное уравнение в скалярное относительно переменной $\hat{y}(s)$:

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^n Q_{n-i}(s) \sigma^i(s) \hat{y}(s) &= \sum_{j=0}^m R_{m-j}(s) \sigma^j(s) u(s) + \\ &+ \sum_{k=1}^v \sum_{g=0}^{n-1} M_{k(m-1-g)}(s) \sigma^g(s) f_k(s) + \\ &+ \sum_{i=0}^n Q_{n-i}(s) \sigma^i(s) C\chi(s) + K(s), \end{aligned} \quad (14)$$

где $\sum_{i=0}^n Q_{n-i}(s) \sigma^i(s) = \det \Lambda(s)$, $\sum_{j=0}^m R_{m-j}(s) \sigma^j(s) =$

$$= \text{Cadj} \Lambda(s) \Gamma_k, \quad \sum_{g=0}^{n-1} M_{k(m-1-g)}(s) \sigma^g(s) = \text{Cadj} \Lambda(s) \Gamma_k,$$

Γ_k — k -й столбец матрицы Γ , $K(s)$ — преобразование Лапласа начальных условий, индексы многочленов указывают на их порядок. Порядки полиномов $M_k(s)$ взяты максимально возможными. Их порядок зависит от структуры матрицы Γ .

Применим алгоритм деления Евклида к полиному $Q_n(s)$:

$$\begin{aligned} Q_n(s) &= Q_\gamma(s) \bar{R}_m(s) + \Delta Q_{m-1}(s), \\ \bar{R}_m(s) &= R_m(s)/r_{m0}, \quad \gamma = n - m. \end{aligned}$$

Здесь r_{m0} — коэффициент при старшем члене полинома $R_m(s)$. Разложим полином $Q_\gamma(s)$ на две составляющие $Q_\gamma(s) = Q_{\gamma0}(s) + \Delta Q_{\gamma-1}(s)$, $Q_{\gamma0}(s)$ — гурвицев полином. Тогда получим $Q_n(s) = Q_{\gamma0}(s) \bar{R}_m(s) + \Delta Q_{\gamma-1}(s) \bar{R}_m(s) + \Delta Q_{m-1}(s)$. Подставив этот полином в уравнение (14) и разделив левые и правые части уравнения на $\bar{R}_m(s)$, получим $Q_{\gamma0}(s) \hat{y}(s) = r_{m0} u(s) + \psi_1(s)$. Выполнив обратное преобразование Лапласа, получим

$$Q_{\gamma0}(P) \hat{y}(t) = r_{m0} u(t) + \psi_1(t),$$

где $P = 1/dt$ — оператор дифференцирования, $\psi_1(t)$ — оригинал изображения $\psi_1(s)$,

$$\begin{aligned} \psi_1(s) &= \frac{1}{\bar{R}_m(s)} \left[\sum_{i=1}^n Q_{n-i}(s) \sigma^i(s) \hat{y}(s) = \right. \\ &= \sum_{j=1}^m R_{m-j}(s) \sigma^j(s) u(s) + \\ &+ \sum_{k=1}^v \sum_{g=0}^{n-1} M_{k(m-1-g)}(s) \sigma^g(s) f_k(s) + \\ &\left. + \sum_{i=0}^n Q_{n-i}(s) \sigma^i(s) C\chi(s) + K(s) \right]. \end{aligned}$$

Составим уравнение для ошибки $\bar{e}(t) = \hat{y}(t) - y_m(t)$:

$$Q_{\gamma0}(P) \bar{e}(t) = r_{m0} u(t) + \psi_1(t) + Q_{\gamma0}(P) y_m(t).$$

Введем новое управляющее воздействие $u(t) = \alpha \vartheta(t)$, $\alpha > 0$. В результате получим

$$Q_{\gamma0}(P) \bar{e}(t) = \alpha \vartheta(t) + \psi(t),$$

где $\psi(t) = (r_{m0} - 1) \alpha \vartheta(t) + Q_{\gamma0}(P) y_m(t) + \psi_1(t)$.

Доказано [21], что алгоритм управления

$$((\mu P + 1)^\gamma - 1) \vartheta(t) = Q_{\gamma0}(P) \bar{e}(t)$$

обеспечивает выполнение целевого условия $|\bar{e}(t)| < \delta_1$ за конечное время работы системы, если число $\mu > 0$ выбрать достаточно малым. Другими словами, числа μ и α являются параметрами алгоритма, выбор которых обеспечивает выполнение целевого условия за конечное время.

Принимая во внимание равенство $\bar{e}(t) = e(t) + C\chi(t)$, можно сделать вывод. Если выбрать величину δ_1 меньше числа δ , то учитывая условие $\lim_{t \rightarrow \infty} \xi(t) = 0$, получим $\lim_{t \rightarrow \infty} \bar{e}(t) = e(t)$. Следовательно

но, существует момент времени T_0 , по истечении которого будет выполнено целевое условие (2). Таким образом, получили систему управления, математическая модель которой имеет вид:

$$\bar{z}(t) = z(t) + N\phi(t), \quad \eta(t) = T^{-1}z(t), \quad \eta_1(t) = L_1\eta(t),$$

$$\dot{\eta}_b(t) = A_{11}\eta_b(t) + A_{12}\eta_2 + D_1 \int_{-h}^0 \eta(t+\theta)d\theta + B_1 u(t),$$

$$\varsigma(t) = \eta_1(t) - \eta_b(t),$$

$$\dot{\bar{\xi}}(t) = N_1^{-1} (+A_1 \bar{N} \bar{\xi}(t) + D_1 \bar{N} \int_{-h}^0 \bar{\xi}(t+\theta)d\theta +$$

$$+ N_1^{-1} (\dot{\varsigma}(t) - A_{11}\varsigma(t)),$$

$$\bar{\xi}(\theta) = 0, \quad \theta \in [-h, 0], \quad \phi(t) = -\bar{\xi}(t), \quad \hat{y}(t) = C\bar{z}(t),$$

$$\bar{e}(t) = \hat{y}(t) - y_m(t),$$

$$u(t) = \alpha \vartheta(t), \quad ((\mu P + 1)^\gamma - 1)\vartheta(t) = Q_{\theta 0}(P)\bar{e}(t).$$

3. ПРИМЕР

Рассмотрим объект управления, математическая модель которого задана уравнением

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -3 & 1 & -2 & -1 \\ -2 & -2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -4 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & -4 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \int_{-2}^0 x(t+\theta)d\theta +$$

$$+ \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ -5 \\ -4 \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} f(x, t),$$

$$z(t) = x(t) + \begin{bmatrix} 0,5 & 0,2 \\ 0,5 & 0 \\ 0,3 & 0,4 \\ 0 & 0,4 \end{bmatrix} \xi(t),$$

$$y(t) = [1 \ 0 \ 0 \ 0]x(t), \quad x(\theta) = \phi(\theta), \quad \theta \in [-h, 0].$$

Ранг матрица Γ равный двум, $\xi \in R^2$, $f \in R^4$, $\phi(\theta)$ — ограниченная начальная векторная функция. Предположение 3 выполнено.

Возьмем матрицу преобразований

$$T = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad T^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Тогда уравнение (4) будет иметь вид:

$$\dot{\bar{x}}(t) = \begin{bmatrix} -10 & 4 & -7 & 4 \\ -9 & 2 & -10 & 6 \\ 3 & -2 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & -3 \end{bmatrix} \bar{x}(t) + \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 7 & -6 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ -4 & 3 & -3 & 0 \end{bmatrix} \int_{-2}^0 \bar{x}(t+\theta)d\theta +$$

$$+ \begin{bmatrix} 4 \\ -4 \\ -12 \\ -7 \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} f(x, t),$$

$$\eta(t) = \bar{x}(t) + \begin{bmatrix} 0,5 & -0,2 \\ 0,3 & 0,2 \\ -0,2 & 0,8 \\ 0 & 0,6 \end{bmatrix} \xi(t).$$

Первое уравнение из системы (5) примет вид:

$$\dot{\bar{x}}_1(t) = \begin{bmatrix} -10 & 4 \\ -9 & 2 \end{bmatrix} \bar{x}_1(t) + \begin{bmatrix} -7 & 4 \\ -10 & 6 \end{bmatrix} \bar{x}_2 +$$

$$+ \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 7 & -6 & 3 & 1 \end{bmatrix} \int_{-2}^0 \bar{x}(t+\theta)d\theta + \begin{bmatrix} 4 \\ -4 \end{bmatrix} u(t).$$

Уравнение (7) запишется как

$$\dot{\eta}_1(t) = \begin{bmatrix} -10 & 4 \\ -9 & 2 \end{bmatrix} \eta_1(t) + \begin{bmatrix} -7 & 4 \\ -10 & 6 \end{bmatrix} \eta_2 +$$

$$+ \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 7 & -6 & 3 & 1 \end{bmatrix} \int_{-2}^0 \eta(t+\theta)d\theta + \begin{bmatrix} 4 \\ -4 \end{bmatrix} u(t) +$$

$$\begin{bmatrix} 0,5 & -0,2 \\ 0,3 & 0,2 \end{bmatrix} \xi(t) - \begin{bmatrix} -2,4 & -0,4 \\ -1,9 & -2,2 \end{bmatrix} \xi(t) -$$

$$- \begin{bmatrix} -0,3 & 0,8 \\ 1,1 & 0,4 \end{bmatrix} \int_{-2}^0 \xi(t+\theta)d\theta.$$

Математическую модель вспомогательного контура зададим в виде

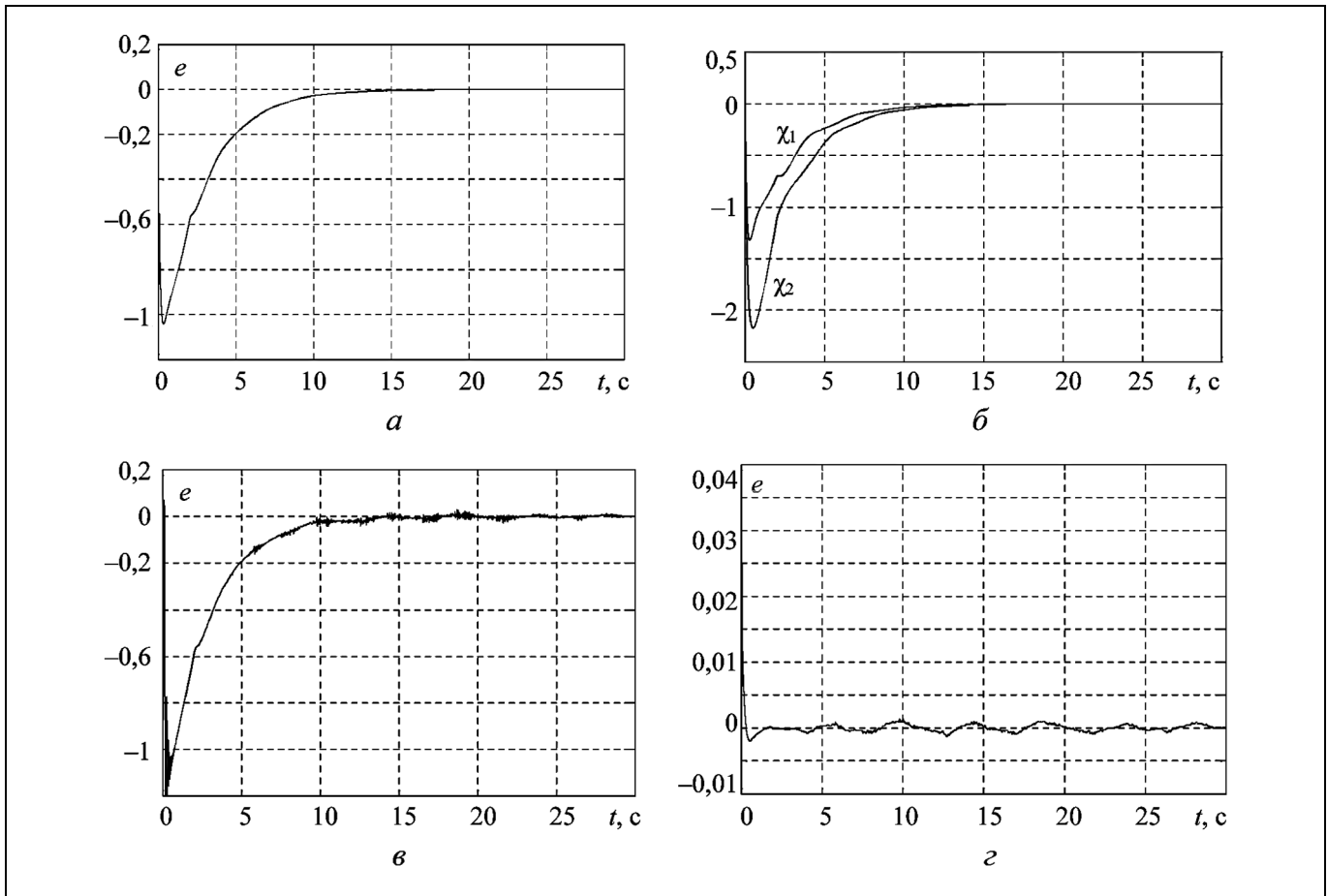
$$\dot{\eta}_b(t) = \begin{bmatrix} -10 & 4 \\ -9 & 2 \end{bmatrix} \eta_b(t) + \begin{bmatrix} -7 & 4 \\ -10 & 6 \end{bmatrix} \eta_2 +$$

$$+ \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 7 & -6 & 3 & 1 \end{bmatrix} \int_{-2}^0 \eta(t+\theta)d\theta + \begin{bmatrix} 4 \\ -4 \end{bmatrix} u(t).$$

Тогда получим уравнение для вектора рассогласования $\varsigma(t) = \eta_1(t) - \eta_b(t)$

$$\dot{\varsigma}(t) = \begin{bmatrix} -10 & 4 \\ -9 & 2 \end{bmatrix} \varsigma(t) + \begin{bmatrix} 0,5 & -0,2 \\ 0,3 & 0,2 \end{bmatrix} \xi(t) -$$

$$- \begin{bmatrix} -2,4 & -0,4 \\ -1,9 & -2,2 \end{bmatrix} \xi(t) - \begin{bmatrix} -0,3 & 0,8 \\ 1,1 & 0,4 \end{bmatrix} \int_{-2}^0 \xi(t+\theta)d\theta,$$



Переходные процессы по ошибкам слежения и оценивания помех: a и b — начальная функция $\varphi(\theta) = [1 \ 1 \ 1 \ 1]^T$, $\theta \in [-2, 0]$, $\mu = 0,01$, погрешность слежения после 18 с не превышает значения 0,002; оценка помех асимптотически устойчива; $в$ — $\mu = 0,1$, погрешность слежения 0,03; значения μ не влияют на переходные процессы по ошибкам оценивания $\chi_i(t)$; $г$ — начальные условия нулевые, $\mu = 0,01$, погрешность слежения 0,002

откуда получаем уравнение для оценки источника помех

$$\dot{\xi}(t) = \begin{bmatrix} -5,37 & -3,25 \\ -1,4375 & -6,125 \end{bmatrix} \bar{\xi}(t) - \begin{bmatrix} 1 & 1,5 \\ 4 & -0,25 \end{bmatrix} \int_{-2}^0 \bar{\xi}(t+\theta) d\theta + \\ + \begin{bmatrix} 23,75 & -7,5 \\ 9,375 & 1,25 \end{bmatrix} \zeta(t) + \begin{bmatrix} 1,25 & 1,25 \\ -1,875 & 3,125 \end{bmatrix} \dot{\zeta}(t).$$

Формируем оценки вектора $x(t)$ $\bar{z}(t) = z(t) - N\bar{\xi}(t) = x(t) + \chi(t)$ и регулируемой переменной $\hat{y}(t) = \bar{z}(t) = Lx(t) + L\chi(t)$.

Передаточная функция по управлению имеет вид:

$$W(s, \sigma(s)) = [17s^2 + 100s + 69 + (137 + 30s - 7s^2)\sigma(s) + (42 - 20s)\sigma^2(s) + 4\sigma^3(s)]/G(s, \sigma(s)),$$

$$G(s, \sigma(s)) = s^4 + 13s^3 + 57s^2 + 88s + 14 + (6s^3 + 56s^2 + 236s + 79)\sigma(s) + (13s^2 + 77s + 81)\sigma^2(s) + (10s + 30)\sigma^3(s) + 4\sigma^4(s).$$

Относительная степень равна двум, математическая модель минимально-фазовая. Поэтому берем алгоритм управления

$$u(t) = \rho(\vartheta(t)), \quad \vartheta(t) = 5v(t),$$

$$(\mu^2 P^2 + \mu P)v(t) = (P^2 + 7P + 12)\bar{e}(t),$$

где $\rho(\vartheta(t))$ — нелинейность с насыщением, равным 30, которая введена для учета ограничений на управляющее воздействие.

На рисунке приведены переходные процессы по ошибке слежения $e(t) = y(t) - y_m(t)$ и ошибкам оценивания источника помех $\chi_i(t) = \bar{\xi}_i(t) - \xi_i(t)$, $i = 1, 2$, $\xi_1(t) = \sin 3t + \pi(t)$, $\xi_2(t) = \sin 7t + \pi(t)$, где $\pi(t)$ — нормированный белый шум,

$$f_i(x, t) = \sin t + \sin x_i + \ln(1 + x_i^2), \quad i = 1, 4,$$

$$y_m(t) = 3\sin 1,3t + 3\sin 0,7t.$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Решена задача слежения для объекта, математическая модель которого задана уравнением с распределенным запаздыванием. На объект действуют неизмеряемые возмущения, а в каналах измерения присутствуют помехи. Для решения задачи применен подход, предложенный в работе [20], который позволяет получить асимптотически точные оценки вектора — источника помех. Естественно, что на математическую модель объекта управления накладываются ограничения, перечисленные в предположениях. Кроме того, требуется, чтобы уравнения (9) и (10), были асимптотически устойчивыми при отсутствии внешних сигналов. Результаты моделирования показывают, что предложенный алгоритм управления позволяет получить качественные переходные процессы. Точность регулирования зависит от параметров μ и α .

К недостаткам следует отнести необходимость подбора параметров μ и α на этапе проектирования.

ЛИТЕРАТУРА

1. Поляк Б.Т., Шербаков П.С. Робастная устойчивость и управление. — М.: Наука, 2002.
2. Назин С.А., Поляк Б.Т., Топунов М.В. Подавление ограниченных внешних возмущений с помощью метода инвариантных эллипсоидов // Автоматика и телемеханика. — 2007. — № 3. — С. 106—125.
3. Поляк Б.Т., Топунов М.В. Подавление ограниченных внешних возмущений: управление по выходу // Автоматика и телемеханика. — 2008. — № 5. — С. 72—90.
4. Баландин Д.В., Коган М.М. Синтез законов управления на основе матричных неравенств. — М.: Наука, 2007.
5. Баландин Д.В., Коган М.М. Синтез субоптимального регулятора по выходу для гашения ограниченных возмущений // Автоматика и телемеханика. — 2011. — № 4. — С. 3—10.
6. Афанасьев В.Н. Концепция гарантированного управления в задачах управления неопределенными объектами // Известия РАН. Теория и системы управления. — 2010. — № 1. — С. 24—31.
7. Хлебников М.В. Подавление ограниченных внешних возмущений: линейный динамический регулятор по выходу // Автоматика и телемеханика. — 2011. — № 4. — С. 72—82.
8. Никифоров В.О. Нелинейная система управления с компенсацией внешних детерминированных возмущений // Известия РАН. Теория и системы управления. — 1997. — № 4. — С. 69—73.
9. Цыкунов А.М. Алгоритмы робастного управления с компенсацией ограниченных возмущений // Автоматика и телемеханика. — 2007. — № 7. — С. 103—115.
10. Фуртат И.Б., Цыкунов А.М. Робастное управление нестационарными нелинейными структурно неопределенными объектами // Проблемы управления. — 2008. — № 5. — С. 2—7.
11. Цыкунов А.М. Робастное управление линейным объектом по косвенным измерениям // Проблемы управления. — 2009. — № 3. — С. 13—22.
12. Park P. A delay-dependent stability for systems uncertain time-invariant delays // IEEE Trans. on Automat. Control. — 1999. — Vol. 44. — P. 876—887.
13. Zhang W., Allgöwer F., Liu T. Controller parameterization for SISO and MIMO plants with delay // Journal of Process Control. — 2006. — Vol. 16, N 10. — P. 794—802.
14. Gao H., Chen T., Lam J. A new delay system approach to network based control // Automatica. — 2008. — Vol. 44, N 1. — P. 38—52.
15. Han Q.L. Robust stability of uncertain delay-differential systems of neutral type // Automatica. — 2002. — Vol. 38, N 4. — P. 719—723.
16. Ivanescu D., Niculescu S.I., Dugard L., Dion J.M., Verriest E.I. On delay dependent stability of neutral systems // Automatica. — 2003. — Vol. 39, N 2. — P. 255—261.
17. Mishiels W., Engelbarghs K., Roose D., Dochain D. Sensitivity to infinitesimal delays in neutral equations SIAM // J. Control Optim. — 2002. — Vol. 40, N 4. — P. 1134—1158.
18. Li X.G., Zhu X.J., Cela A., Reama A. Stability analysis of neutral systems with mixed delays // Automatica. — 2008. — Vol. 44, N 11. — P. 2698—2772.
19. Цыкунов А.М. Робастное управление объектом с распределенным запаздыванием // Проблемы управления. — 2013. — № 3. — С. 2—8.
20. Цыкунов А.М. Робастное управление с компенсацией ограниченных возмущений и помех // Изв. РАН. Теория и системы управления. — 2014. — № 3. — С. 19—26.
21. Цыкунов А.М. Алгоритм робастного управления линейными динамическими объектами по выходу // Мехатроника, автоматизация, управление. — 2008. — № 8. — С. 7—12.

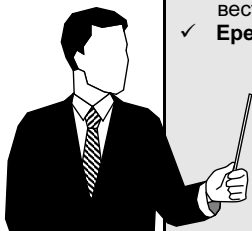
Статья представлена к публикации членом редколлегии В.Н. Афанасьевым.

Цыкунов Александр Михайлович — д-р техн. наук, зав. кафедрой, Астраханский государственный технический университет, ✉ tsygunov_al@mail.ru.

Содержание сборника «Управление большими системами», 2015, вып. 56

- ✓ Белов М.В. Системно-инженерные и экономические аспекты управления жизненным циклом
- ✓ Иванов Н.Н. Стохастические сетевые графики с переменной структурой
- ✓ Легович Ю.С., Максимов Д.Ю. Выбор исполнителя в группе интеллектуальных агентов
- ✓ Зоркальцев В.И., Киселева М.А. Взаимодействующие олигопольные и олигопсонные рынки Курно
- ✓ Марвин С.В. Альтернативная дробная модификация индекса Хирша, учитывающая количество авторов цитируемых статей
- ✓ Паламарчук Е.С. Оптимальное управление в задаче портфельного трекинга с учетом временных предпочтений инвестора
- ✓ Еременко Ю.И., Полещенко Д.А., Глушенко А.И. О применении нейросетевого оптимизатора параметров пирегулятора для управления нагревательными печами в различных режимах работы
- ✓ Пантелеев А.В., Летова Т.А., Помазуева Е.А. Параметрический синтез оптимального в среднем дробного ПИД-регулятора в задаче управления полетом
- ✓ Каравай М.Ф., Подлазов В.С. Системная сеть с малым диаметром из малопортовых маршрутизаторов
- ✓ Стецюра Г.Г. Средства для расширения функций коммутируемых непосредственных оптических связей в цифровых системах

Тексты статей доступны на сайте <http://ubs.mtas.ru/>





СИГМА-ФУНКЦИЯ В ЗАДАЧАХ СИНТЕЗА НАБЛЮДАТЕЛЕЙ СОСТОЯНИЙ И ВОЗМУЩЕНИЙ¹

С.А. Краснова, А.В. Уткин

Для нелинейных систем, функционирующих в условиях неопределенности, на основе принципа разделения движений разработаны методы синтеза наблюдателя состояний с нелинейными корректирующими воздействиями в виде сигма-функций. Показано, что для систем, представимых в регулярной форме относительно внешних возмущений, данный подход позволяет получить текущие оценки неизмеряемых переменных состояния и внешних возмущений без расширения динамического порядка наблюдателя за счет модели, имитирующей действие внешних возмущений. Разработанные алгоритмы применены в системе управления асинхронным электроприводом с неполным комплектом измерительных устройств.

Ключевые слова: нелинейная система, наблюдатель состояний и возмущений, сигма-функция, асинхронный электропривод.

ВВЕДЕНИЕ

Рассматриваются нелинейные системы управления с функциональными неопределенностями математической модели объекта управления и при действии внешних возмущений, принадлежащих пространству управления. В таких системах инвариантность переменных вектора состояний по отношению к неопределенностям может быть обеспечена или с помощью разрывных управлений и организации скользящего режима [1], или с помощью непрерывного комбинированного управления с составляющей, компенсирующей действие возмущений при наличии их оценок. Практически значимый метод оценивания возмущений, не требующий составления их динамической модели, заключается в применении наблюдателей состояний с разрывными корректирующими воздействиями, функционирующих в скользящем режиме [2–4]. В § 1 продемонстрирована процедура синтеза такого наблюдателя, реализующая принцип разделения общего движения на разнотемповые составляющие при последовательном возникновении скользящих режимов на пересечении поверхностей в виртуальном пространстве ошибок наблюдения. Показано, что при выполнении определен-

ных условий данный наблюдатель позволяет получить текущие оценки и неизмеряемых переменных состояния, и возмущающих воздействий. Однако для обеспечения высокого качества оценивания требуется организовать скользящий режим, близкий к идеальному, при котором изображающая точка системы, записанной относительно ошибок наблюдения, движется по многообразию скольжения, совершая колебания с бесконечно большой частотой и бесконечно малой амплитудой. При большой, но конечной частоте переключений возникает реальный скользящий режим [5], в котором возможны хаотичные высокочастотные колебания изображающей точки в ненулевом пограничном слое многообразия скольжения, что приводит к неудовлетворительному качеству оценивания при использовании бортовых компьютеров с маломощным процессором. Этот факт стимулирует разработку альтернативных методов синтеза наблюдателя состояний и возмущений с непрерывными корректирующими воздействиями.

В § 2 представлен основной результат — методы синтеза наблюдателя состояний и возмущений с нелинейными непрерывными корректирующими воздействиями в виде сигма-функций. Показано, что такой наблюдатель, размерность которого равна размерности модели объекта управления, сохраняет преимущества наблюдателя на скользящих режимах в допредельной ситуации и, в то же время, обеспечивает лучшее качество (гладкость)

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 15-08-01543а и 14-01-31190 mol_a).

оцениваемых сигналов в условиях ограниченности вычислительных ресурсов. Формализована процедура настройки параметров сигмоидальных корректирующих воздействий на основе неравенств, обеспечивающих за заданное время заданную точность оценивания неизмеряемых переменных состояния и имеющих неопределенностей. В § 3 в качестве приложения рассмотрена задача наблюдения неизмеряемых переменных состояния и внешнего возмущения в асинхронном электроприводе, приведены результаты моделирования.

1. ПРИНЦИП РАЗДЕЛЕНИЯ ДВИЖЕНИЙ В ЗАДАЧЕ НАБЛЮДЕНИЯ

Рассматривается математическая модель нелинейного объекта управления вида

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = f(x, t) + b(x_1)u, \quad (1)$$

где $x = \text{col}(x_1, x_2) \in X \subset R^2$ — вектор состояний; $x_1(t) \in R$ — выходная (измеряемая) переменная; фазовая переменная $x_2(t)$ не измеряется, но предполагаются известными либо область ее изменения в процессе управления $|x_2(t)| \leq X_2$, либо область допустимых начальных условий $|x_2(0)| \leq X_2$; $u \in R$ — управляющее воздействие, $b(x_1)$ — известная функция, $b(x_1) \neq 0 \forall x_1(t), t \geq 0$. Неизвестная функция $f(x(t), t)$, которая включает в себя функциональные и параметрические неопределенности модели объекта управления, а также внешние возмущения, полагается ограниченной вместе со своей полной производной:

$$|f(x(t), t)| \leq F, \quad |\dot{f}(x(t), t)| \leq F_1 \forall x(t) \in X, t \geq 0, \quad (2)$$

где F и F_1 — известные положительные константы; динамическая модель неопределенностей не вводится. Требование гладкости на $f(t)$ и $\dot{f}(t)$ не накладывается, достаточно, чтобы данные функции были кусочно-непрерывными и имели в каждой точке, включая точки разрыва, конечные правую и левую производные.

Моделью (1), имеющей регулярную каноническую форму, описывается представительный класс динамических объектов управления, например, механические и теплообменные системы. Модели ряда других объектов могут быть представлены в виде (1) с помощью диффеоморфной замены локальных переменных. Мы намеренно приняли за основу построений систему второго порядка, чтобы максимально детализировать основную идею разработанного метода. Без ограничения общнос-

ти нижеследующие построения распространяются на объекты управления более высокого порядка, математические модели которых представимы в регулярном каноническом виде.

В данной работе цель и закон управления не детализируются: проблема автоматического управления системой (1) в различных постановках решалась множество раз в рамках различных подходов. Ориентируясь на базовый закон комбинированного управления (по состоянию и по возмущению) ставится задача оценивания неизмеряемых сигналов $x_2(t), f(t)$.

Эта проблема может быть решена с помощью наблюдателя с разрывными корректирующими воздействиями, функционирующего в скользящем режиме, который строится на основе системы (1) в виде

$$\dot{z}_1 = z_2 + v_1, \quad \dot{z}_2 = b(x_1)u + v_2, \quad (3)$$

где $z = \text{col}(z_1, z_2) \in R^2$ — вектор состояний, $v = \text{col}(v_1, v_2) \in R^2$ — вектор разрывных корректирующих воздействий наблюдателя. Задача наблюдения сводится к задаче стабилизации системы, записанной относительно ошибок наблюдения $\varepsilon = x - z = \text{col}(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \in R^2$ в силу модели (1), (2) в виде

$$\dot{\varepsilon}_1 = \varepsilon_2 - v_1, \quad \dot{\varepsilon}_2 = f(t) - v_2. \quad (4)$$

Согласно каскадному методу синтеза наблюдателей состояний на скользящих режимах [4], в первом уравнении системы (4) формируется разрывное корректирующее воздействие от известных переменных $v_1 = M_1 \text{sign} \varepsilon_1$, которое при выполнении достаточных условий

$$\varepsilon_1 \dot{\varepsilon}_1 < 0 \Rightarrow M_1 > M_1^* = |\varepsilon_1(0)|/t_1 + \Phi_2,$$

$$|\varepsilon_2(t)| \leq \Phi_2 \quad \forall t \geq 0 \quad (5)$$

обеспечит за конечное время $t_1 \geq 0$ возникновение скользящего режима на прямой $\varepsilon_1 = 0$ в двумерном пространстве ошибок наблюдения. Заметим, что при установке начального условия $z_1(0) = x_1(0) \Rightarrow \varepsilon_1(0) = 0$ скользящий режим возникает практически сразу и $t_1 \approx 0$.

При $t > t_1$ динамический порядок системы (4) понижается, и из уравнения статики $\dot{\varepsilon}_1 = \varepsilon_2 - v_{1eq} = 0$ имеем эквивалентное корректирующее воздействие $v_{1eq}(t) = \varepsilon_2(t)$. Этот сигнал может быть получен с выхода фильтра первого порядка с малой посто-



янной времени $\mu_1 \dot{\tau}_1 = -\tau_1 + v_1$, $\lim_{\mu_1 \rightarrow +0} \tau_1(t) = v_{1eq}(t)$ [1]. Тогда во втором уравнении системы (4) можно сформировать разрывное корректирующее воздействие $v_2 = M_2 \text{sign} \tau_1$, что обеспечивает $v_2 = M_2 \text{sign} \varepsilon_2$ вне малой окрестности $\varepsilon_2 = 0$. Амплитуда разрывного воздействия выбирается на основе достаточных условий

$$\varepsilon_2 \dot{\varepsilon}_2 < 0 \Rightarrow M_2 > |\varepsilon_2(t_1)|/(t_2 - t_1) + F. \quad (6)$$

Пренебрегая быстро затухающими собственными движениями фильтра, можно считать, что за теоретически конечное время $t_2 > t_1$ на пересечении $\{\varepsilon_1 = 0 \cap \varepsilon_2 = 0\}$ возникает скользящий режим. При $t > t_2$ из уравнения статики $\dot{\varepsilon}_2 = f(t) - v_{2eq} = 0$ имеем эквивалентное корректирующее воздействие $v_{2eq}(t) = f(t)$. Этот сигнал, который является оценкой неизвестной функции, также может быть получен с выхода фильтра первого порядка:

$$\mu_2 \dot{\tau}_2 = -\tau_2 + v_2, \quad \lim_{\mu_2 \rightarrow +0} \tau_2(t) = v_{2eq}(t) = f(t).$$

Тот факт, что, начиная с момента времени t_1 , переменная $\varepsilon_2(t)$ начинает монотонно стремиться к нулю, позволяет оценить область ее изменения следующим образом:

$$|\varepsilon_2(t)| \leq |\varepsilon_2(t_1)| < X_2 + (F + M_2)t_1 = \Phi_2 \quad \forall t \geq 0. \quad (7)$$

С учетом оценки (7) выбирается амплитуда разрывного корректирующего воздействия v_1 (5).

Для стабилизации системы (4) за заданное время $t_2 = T$ с учетом условий (6) и оценки (7) имеем следующее неравенство для выбора амплитуды разрывного корректирующего воздействия v_2 :

$$M_2 > |\varepsilon_2(t_1)|/(t_2 - t_1) + F \Rightarrow M_2 > M_2^* = (X_2 + Ft_2)/(t_2 - 2t_1), \quad 0 \leq t_1 < t_2/2. \quad (8)$$

Главное преимущество наблюдателя на скользящих режимах — оценивание за конечное время и неизмеряемой переменной $x_2(t) = z_2(t)$, и возмущения $\tau_2(t) \approx f(t) \quad \forall t > T$ без ввода его динамической модели. Данный наблюдатель является робастным, так как амплитуды разрывных корректирующих воздействий выбираются на основе неравенств, не требующих детализированной математической модели объекта управления. С другой стороны, динамический порядок наблюдателя (3) увеличивается в два раза из-за ввода фильтров, которые вносят дополнительные малые динамики. Кроме того, микропроцессорная реализация раз-

рывных управлений с большой, но конечной частотой переключений может привести к неудовлетворительному качеству оцениваемых сигналов, так как на полезный сигнал накладывается паразитный высокочастотный сигнал с малой амплитудой.

Гладкость оцениваемых сигналов обеспечивают наблюдатели с непрерывными корректирующими воздействиями. Известный способ стабилизации систем с неопределенностью — применение глубоких обратных связей. Так, выбор в системе (4) линейных корректирующих воздействий $v_1 = k_1 \varepsilon_1$, $v_2 = k_2 \varepsilon_1$ с большими коэффициентами $k_1 \gg k_2 \gg 0$ обеспечит стабилизацию ошибок наблюдения с заданной точностью $\|\varepsilon(t)\| \leq \bar{\delta} \quad \forall t > T$, если возмущающее воздействие не затухает со временем. Для многомерных канонических систем с неопределенностью в последнем уравнении известны параметрические схемы настройки больших коэффициентов наблюдателя [4, 6, 7]. Основным недостатком таких наблюдателей: большие коэффициенты усиления, значения которых обратно пропорциональны степеням задаваемой области сходимости $k_2(1/\bar{\delta}), k_1(1/\bar{\delta}^2)$, приводят к избыточному потреблению ресурсов управления на начальной стадии, что требует искусственного ограничения управляющего сигнала. Кроме того, для получения оценок имеющихся неопределенностей потребуется ввести дифференциальное уравнение, характеризующее их динамику [7].

Наша цель заключается в том, чтобы, во-первых, не расширять порядок наблюдателя для получения оценок возмущающих воздействий, во-вторых, не прибегать к искусственному ограничению управляющего воздействия и, в-третьих, избежать возможного всплеска в начале переходного процесса в замкнутой системе с наблюдателем. Этой цели отвечает выбор корректирующих воздействий наблюдателя из класса так называемых *S*-образных непрерывных функций с насыщением (sat-функция, сигма-функция, арктангенс, гиперболический тангенс и др.) [8, 9]. В следующем параграфе представлен основной результат: показано, что с помощью наблюдателя с непрерывными ограниченными корректирующими воздействиями в виде сигма-функций, размерность которого равна размерности объекта управления (1), можно получить оценки не только неизмеряемой переменной состояния, но и ограниченного возмущения. Принцип разделения движений в таком наблюдателе реализуется в допредельной ситуации, что приведет к решению задачи оценивания с некоторой, наперед заданной точностью, которая обеспечива-

ется за заданное время выбором параметров корректирующих воздействий. Показано, что в таких наблюдателях, в отличие от наблюдателя с глубокими обратными связями, имеется возможность учитывать имеющиеся ограничения на ресурсы управления на стадии синтеза и избежать существенного «всплеска» на начальном этапе процесса управления.

2. СИНТЕЗ НАБЛЮДАТЕЛЕЙ СОСТОЯНИЙ И ВОЗМУЩЕНИЙ С СИГМОИДАЛЬНЫМИ КОРРЕКТИРУЮЩИМИ ВОЗДЕЙСТВИЯМИ

Рассмотрим нелинейную гладкую ограниченную сигма-функцию $\sigma(kx) = 2/(1 + e^{-kx}) - 1$, $k = \text{const} > 0$, которая является допредельной реализацией функции знака $y = \text{sign} x$ в следующем смысле: $\sigma(-kx) = -\sigma(kx)$, $\sigma(kx) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} kx/2$, $\sigma(kx) \underset{k \rightarrow +\infty}{\sim} \text{sign} x$. Первая производная сигма-функции — положительная ограниченная функция, вторая производная — ограниченная нечетная функция:

$$\begin{aligned}\sigma'(kx) &= k(1 - \sigma^2(kx))/2, \\ \sigma''(kx) &= -k\sigma'(kx)\sigma(kx).\end{aligned}\quad (9)$$

Для сигма-функции и ее первой производной в указанных интервалах справедливы оценки:

$$\begin{aligned}\sigma(k\delta) &< |\sigma(kx)| < 1, \quad \forall |x| > \delta > 0; \\ \sigma(k\delta)|x|/\delta &\leq |\sigma(kx)| \leq \sigma(k\delta), \\ 0 < \sigma'(k\delta) &\leq \sigma'(kx) \leq \sigma'(0) = k/2 \quad \forall |x| \leq \delta.\end{aligned}\quad (10)$$

Отсюда следует, что при $|x| > \delta$ сигма-функция близка к постоянной функции, а при $|x| \leq \delta$ — к линейной. В качестве границы указанного разделения сигма-функции при $x \geq 0$ рекомендуется принять точку из интервала $k\delta = c \in [1, 3; 3]$, где $\pm 1,3$ — абсциссы точек перегиба первой производной $\sigma'''(\pm 1,3) = 0$ (при этом $\sigma(\pm 1,3) \approx \pm 0,57$, $\sigma'(\pm 1,3) \approx 0,34k$); ± 3 — абсциссы вершин сигма-функции, в которых ее кривизна достигает максимума, при этом $\sigma(\pm 3) \approx \pm 0,9$, $\sigma'(\pm 0,9) \approx 0,095k$ [8].

Для дальнейших построений введем сигма-функцию с переменным ограниченным сдвигом $|\varphi(t)| \leq \Delta \quad \forall t \geq 0$:

$$\begin{aligned}\bar{\sigma}(kx) &= \sigma(k(x - \varphi(t))), \\ \sigma(k(x - \Delta)) &\leq \bar{\sigma}(kx) \leq \sigma(k(x + \Delta)), \\ \bar{\sigma}'(kx) &= k(1 - \bar{\sigma}^2(kx))/2.\end{aligned}$$

Для функций $\bar{\sigma}(kx)$ и $\bar{\sigma}'(kx)$ в указанных интервалах справедливы оценки:

$$\begin{aligned}\sigma(k\delta) &< |\bar{\sigma}(kx)| < 1 \quad \forall |x| > \Delta + \delta, \\ \text{sign} \bar{\sigma}(kx) &= \text{sign} x \quad \forall |x| > \Delta, \\ \sigma(k\delta)(|x| - \Delta)/\delta &\leq |\bar{\sigma}(kx)| \leq \sigma(k(2\Delta + \delta)) \quad (11) \\ \forall x: \Delta &\leq |x| \leq \Delta + \delta; \\ 0 < \sigma'(k(2\Delta + \delta)) &\leq \bar{\sigma}'(kx) \leq k/2 \quad \forall |x| \leq \Delta + \delta.\end{aligned}$$

Используем в наблюдателе (3) сигмоидальные корректирующие воздействия вида

$$v_1 = M_1 \sigma(k_1 \varepsilon_1), \quad v_2 = M_2 \sigma(k_2 v_1), \quad (12)$$

где $M_i, k_i > 0, i = 1, 2$. Идея заключается в том, чтобы в системе (4), (12) обеспечить за заданное время стабилизацию с заданной точностью не только ошибок наблюдения, но и их производных $\dot{\varepsilon}_{1,2} \approx 0$. Тогда неизмеряемые сигналы могут быть непосредственно получены из уравнений статики без расширения пространства состояний: $v_1 \approx \varepsilon_2(t)$, $v_2(t) \approx f(t)$.

Предварительно рассмотрим ситуацию, когда для целей управления требуется получить оценки только неизмеряемой переменной состояния $x_2(t)$ системы (1).

Лемма. Если в системе (4), (12) условия (2) выполнены, то для любых сколь угодно малых $\bar{\delta}, T > 0$ и любых конечных начальных условий $\varepsilon_1(0), |\varepsilon_2(0)| \leq X_2$ найдутся такие положительные константы $k_i^* > 0, M_i^* > 0, i = 1, 2$, что для всех $k_i > k_i^*, M_i > M_i^*$ будут выполнены неравенства

$$|\varepsilon_1(t)| \leq \bar{\delta}, \quad |\varepsilon_2(t)| \leq \bar{\delta} \quad \forall t > T. \quad (13)$$

Конструктивное доказательство. Каждое корректирующее воздействие (12) имеет по два параметра. Амплитуды $M_i > 0, i = 1, 2$, выбираются так же, как и амплитуды разрывных корректирующих воздействий с тем, чтобы обеспечить попадание ошибок наблюдения в некоторую окрестность нуля за заданное время. Большие коэффициенты $k_i > 0, i = 1, 2$, выбираются так, чтобы обеспечить заданную точность стабилизации (13).

Рассмотрим первое уравнение системы (4), (12): $\dot{\varepsilon}_1 = \varepsilon_2 - v_1 \Rightarrow v_1 = \varepsilon_2 - \dot{\varepsilon}_1$, тогда $v_2 = M_2 \sigma(k_2 v_1) = M_2 \bar{\sigma}(k_2 \varepsilon_2)$, где роль сдвига выполняет первая производная первой ошибки наблюдения $\varphi(t) = \dot{\varepsilon}_1(t)$ и, согласно оценкам (11), $\text{sign} v_2 = \text{sign} \varepsilon_2$, если $|\varepsilon_2| > |\dot{\varepsilon}_1|$.



Для регуляризации процедуры синтеза введем параметрическую связь

$$0 < c_i = k_i \delta_i, \quad c_i \in [1, 3; 3], \quad i = 1, 2, \quad (14)$$

и выделим интервалы времени $0 \leq t_1 < t_2 \leq T$ для сходимости переменных $\varepsilon_{1,2}(t)$, $\dot{\varepsilon}_1(t)$ в указанные окрестности нуля:

$$|\varepsilon_1(t)| \leq \delta_1 \leq \bar{\delta} \quad \forall t \geq t_1, \quad |\varepsilon_2(t)| \leq |\dot{\varepsilon}_1(t)| + \delta_2, \quad (15)$$

$$|\dot{\varepsilon}_1(t)| \leq \Delta \quad \forall t \geq t_2, \quad 0 < \Delta + \delta_2 \leq \bar{\delta}, \quad (16)$$

при этом $|\varepsilon_2(t)| \leq |\varepsilon_2(t_1)| < \Phi_2$ (7), $|\dot{\varepsilon}_1(t)| \leq |\dot{\varepsilon}_1(t_1)| \leq \Phi_2 + M_1$.

Для анализа устойчивости введем для системы (4), (12) квадратичную форму $V_0 = \frac{1}{2}(\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2)$. С учетом выражений (7), (10), (11), (14) для ее производной

$$\dot{V}_0 = \varepsilon_1(\varepsilon_2 - v_1) + \varepsilon_2(f - v_2) \quad (17)$$

справедлива оценка: $\dot{V}_0 \leq |\varepsilon_1|(\Phi_2 - M_1\sigma(c_1)) + |\varepsilon_2|(F - M_2\sigma(c_2))$. Неравенство $\dot{V}_0 < 0$ выполняется при $M_1\sigma(c_1) > \Phi_2$, $M_2\sigma(c_2) > F$ вне окрестности $|\varepsilon_1| \leq c_1/k_1 = \delta_1$, $|\varepsilon_2| \leq |\dot{\varepsilon}_1| + \delta_2$, $\delta_2 = c_2/k_2$. Неравенства для выбора амплитуд $M_{1,2}$, при которых условия (15) обеспечиваются за заданное время, аналогичны неравенствам (5) и (8), а именно:

$$M_2 > M_2^* = \frac{X_2 + Ft_2}{(t_2 - t_1)\sigma(c_2) - t_1}, \quad 0 \leq t_1 < \frac{t_2\sigma(c_2)}{1 + \sigma(c_2)},$$

$$M_1 > M_1^* = (|\varepsilon_1(0)|/t_1 + \Phi_2)/\sigma(c_1). \quad (18)$$

Для целей анализа введем вспомогательное уравнение, которое характеризует динамику производной $\dot{\varepsilon}_1(t)$:

$$\ddot{\varepsilon}_1 = -M_1\sigma'(k_1\varepsilon_1)\dot{\varepsilon}_1 + f(t) - v_2. \quad (19)$$

Для обеспечения выполнения неравенств (16) оценим решение уравнения (19) на интервале $[t_1; t_2]$:

$$|\dot{\varepsilon}_1(t)| \leq (\Phi_2 + M_1)e^{-k_1 a_1(t_2 - t_1)} + (F + M_2)/(k_1 a_1) \leq \bar{\delta} - \delta_2,$$

где $a_1 = M_1(1 - \sigma^2(c_1))/2 > 0$, тогда $\forall \alpha: 0 < \alpha < \bar{\delta} - \delta_2$ имеем

$$k_1 > k_1^* = \max \left\{ \frac{\ln((\Phi_2 + M_1)/\alpha)}{a_1(t_2 - t_1)}; \frac{F + M_2}{a_1(\bar{\delta} - \delta_2 - \alpha)} \right\}.$$

Выбор больших коэффициентов на основе неравенств

$$k_1 > \max\{k_1^*; c_1/\delta_1\}, \quad k_2 > k_2^* = c_2/\delta_2. \quad (20)$$

в зависимости от принятых значений $c_i \in [1, 3; 3]$, $i = 1, 2$, δ_2 , α обеспечивает заданную точность стабилизации ошибок наблюдения за заданное время (13). Лемма доказана. ♦

Если задача оценивания неизвестной функции $f(t)$ не ставится, то для оценивания фазовой пере-

менной $x_2(t)$ можно применить укороченный наблюдатель $\dot{z}_1 = v_1$, $v_1 = M_1\sigma(k_1\varepsilon_1)$. Тогда уравнение относительно ошибки наблюдения $\varepsilon_1 = x_1 - z_1$ примет вид $\dot{\varepsilon}_1 = x_2 - v_1$, и после стабилизации производной ошибки наблюдения $\dot{\varepsilon}_1 \approx 0$ можно будет непосредственно получить оценку неизмеряемого сигнала: $v_1(t) \approx x_2(t)$. Для настройки параметров сигмоидального корректирующего воздействия v_1 воспользуемся полученными выше результатами.

Из леммы вытекают два следствия.

Следствие 1. Если в системе (1) выполняются условия (2), $|x_2(t)| \leq X_2$, а также $|b(x(t))u(t)| \leq \bar{U} \quad \forall t \geq 0$, то тогда при оценивании $x_2(t)$ с помощью укороченного наблюдателя неравенство $|x_2(t) - v_1(t)| \leq \bar{\delta} \quad \forall t > T$ будет обеспечено для любых $\bar{\delta}$, $T > 0$, если

$$M_1 > M_1^* = (|\varepsilon_1(0)|/t_1 + X_2)/\sigma(c_1), \quad 0 \leq t_1 < T,$$

$$k_1 > k_1^* = \max \left\{ \frac{\ln((X_2 + M_1)/\alpha)}{a_1(T - t_1)}; \frac{F + \bar{U}}{a_1(\bar{\delta} - \alpha)}; \frac{c_1}{\bar{\delta}} \right\},$$

где $a_1 = M_1(1 - \sigma^2(c_1))/2 > 0$, $c_1 \in [1, 3; 3]$, $0 < \alpha < \bar{\delta}$.

Следствие 2. Если в системе (1) внешнее возмущение отсутствует, $b(x_1, x_2)$ и $f(x_1, x_2)$ — известные функции, удовлетворяющие условию Липшица, $|u(t)| \geq U \quad \forall t \geq 0$, тогда с помощью наблюдателя $\dot{z}_1 = z_2 + v_1$, $\dot{z}_2 = f(z_1, z_2) + b(z_1, z_2)u + v_2$ можно обеспечить асимптотическую стабилизацию ошибок наблюдения $\lim_{t \rightarrow +\infty} \varepsilon_{1,2}(t) = 0 \Rightarrow \lim_{t \rightarrow +\infty} z_{1,2}(t) = x_{1,2}(t)$ с помощью сигмоидальных корректирующих воздействий (12) с параметрами

$$M_2 > \frac{N_2(X_2(1 + N_2t_1) + N_1|\varepsilon_1(0)|t_1)}{\sigma(c_2) - N_2t_1},$$

$$M_1 > \frac{|\varepsilon_1(0)| + t_1\bar{\Phi}_2}{t_1\sigma(c_1)}, \quad 0 \leq t_1 < \frac{\sigma(c_2)}{N_2},$$

$$k_2 > \frac{c_2(N_2 + \frac{1}{4}N_1^2 + \frac{1}{4}N_2^2)}{M_2\sigma(c_2)},$$

$$k_1 > \frac{2(b_2 + b_2^2 + \frac{1}{4}N_1^2 + \frac{1}{4}N_2^2)}{M_1(1 - \sigma^2(c_1))}, \quad b_2 = \frac{M_2k_2\sigma(c_2)}{c_2},$$

$$\bar{\Phi}_2 = X_2(1 + N_2t_1) + N_1|\varepsilon_1(0)|t_1 + M_2t_1,$$

$$c_{1,2} \in [1, 3; 3],$$

$$|f(x) + b(x)u - f(z) + b(z)u| \leq N_1|\varepsilon_1| + N_2|\varepsilon_2|,$$

где N_1 и N_2 — известные константы.

Замечание. Неравенства (18) и (20) нацелены на выбор минимально допустимых амплитуд $M_{1,2}$ при $k_i \sim c_i/\delta_i$ (14), что при достаточно малых δ_i может привести к плохо обусловленным вычислениям. Если принять $\bar{c}_i = k_i l_i \delta_i$, $\bar{c}_i \in [1,3; 3]$, $i = 1, 2$, где $l_i > 1$ — коэффициенты пропорциональности произведения $M_i k_i$, то можно понизить допустимые значения k_i благодаря увеличению амплитуд M_i . Тогда неравенства (15) и (16) представимы в виде

$$|\varepsilon_1(t)| \leq l_1 \delta_1 \quad \forall t \leq t_{11}, \quad |\varepsilon_2(t)| \leq |\dot{\varepsilon}_1(t)| + l_2 \delta_2 \quad \forall t \geq t_{12},$$

$$0 \leq t_{11} < t_1 < t_{12} < t_2 \leq T.$$

В областях $\delta_1 < |\varepsilon_1| \leq l_1 \delta_1$, $|\dot{\varepsilon}_1| + \delta_2 < |\varepsilon_2| \leq |\dot{\varepsilon}_1| + l_2 \delta_2$ для производной квадратичной формы (17) с учетом оценок (10) и (11) справедлива оценка

$$\dot{V}_0 \leq |\varepsilon_1|(\Phi_2 - b_1 |\varepsilon_1|) + |\varepsilon_2|(F - b_2 (|\varepsilon_2| - |\dot{\varepsilon}_1|)),$$

где $b_i = M_i \sigma(c_i)/(l_i \delta_i) > 0$. Неравенство $\dot{V}_0 < 0$ выполняется при $M_2 > Fl_2/\sigma(\bar{c}_2)$, $M_1 > \Phi_2 l_1/\sigma(\bar{c}_1)$. Соответственно, требования (13) выполняются при условиях:

$$M_2 > M_2^* = \max \left\{ \frac{X_2 + Ft_{12}}{(t_{12} - t_1)\sigma(\bar{c}_2) - t_1}; \frac{Fl_2 \delta_2}{\sigma(\bar{c}_2)(\delta_2 - \alpha_2)} \right\},$$

$$M_1 > M_1^* = \max \left\{ \frac{|\varepsilon_1(0)| + \Phi_2 t_{11}}{\sigma(c_1)t_{11}}; \frac{\Phi_2 l_1 \delta_1}{\sigma(c_1)(\delta_1 - \alpha_1)} \right\}, \quad (21)$$

где $l_i > 1$ выбираются желаемым образом, α_i : $0 < \alpha_i < \delta_i$, $i = 1, 2$, выбираются так, чтобы обеспечить $\alpha_2 \geq \Phi_2 \exp(-b_2(t_2 - t_{12}))$, $\alpha_1 \geq l_1 \delta_1 \exp(-b_1(t_1 - t_{11}))$, а неравенства для выбора больших коэффициентов примут вид

$$k_1 > \max\{k_1^*; \bar{c}_1/(l_1 \delta_1)\}, \quad k_2 > k_2^* = \bar{c}_2/(l_2 \delta_2). \quad (22)$$

Теперь рассмотрим общий случай, когда с помощью наблюдателя (3), размерность которого равна размерности объекта управления (1), решается проблема оценивания не только неизмеряемой переменной состояния $x_2(t)$, но и имеющих неопределенностей $f(t)$.

Теорема. Если в системе (4), (12) выполнены условия (2), то для любого, достаточно малого $\bar{\delta} > 0$ и любых конечных начальных условий $\varepsilon_1(0)$, $|\varepsilon_2(0)| \leq X_2$ найдутся такие положительные константы $k_i^* > 0$,

$M_i^* > 0$, что при $k_i > k_i^*$, $M_i > M_i^*$ обеспечивается заданная точность оценивания $x_2(t)$, $f(t)$, а именно:

$$|\varepsilon_{1,2}(t)| \leq \bar{\delta} \Rightarrow |x_2(t) - z_2(t)| \leq \bar{\delta},$$

$$|\dot{\varepsilon}_2(t)| \leq \bar{\delta} \Rightarrow |f(t) - v_2(t)| \leq \bar{\delta}. \quad (23)$$

Конструктивное доказательство. Как показано в доказательстве леммы, условия (15) будут обеспечены при выборе амплитуд M_i (18) и $k_i > c_i/\delta_i$ (14), $i = 1, 2$. Требования (23) будут выполнены, если обеспечить выполнение условий (16) и $|f(t) - v_2(t)| \leq |\dot{\varepsilon}_2| \leq \bar{\delta}$. С учетом формул (9) и $v_1 = \varepsilon_2 - \dot{\varepsilon}_1$ для целей анализа введем вспомогательные дифференциальные уравнения относительно производных $\dot{\varepsilon}_1(t)$, $\ddot{\varepsilon}_1(t)$ и $\dot{\varepsilon}_2(t)$, а именно уравнение (19) и уравнения

$$\ddot{\varepsilon}_1 = -M_1 \sigma'(k_1 \varepsilon_1)(\ddot{\varepsilon}_1 - k_1 \sigma(k_1 \varepsilon_1) \dot{\varepsilon}_1^2 + M_2 \sigma'(k_2 v_1) \dot{\varepsilon}_1) + \dot{f},$$

$$\ddot{\varepsilon}_2 = -M_2 \sigma'(k_2 (\varepsilon_2 - \dot{\varepsilon}_1))(\ddot{\varepsilon}_2 - \ddot{\varepsilon}_1) + \dot{f}. \quad (24)$$

Для анализа устойчивости виртуальной системы (19), (24) введем квадратичную форму $V_1 = \frac{1}{2}(\dot{\varepsilon}_1^2 + \ddot{\varepsilon}_1^2 + \dot{\varepsilon}_2^2)$. С учетом условий (2), (10) и (11) для производной квадратичной формы справедлива оценка

$$\dot{V}_1 \leq |\dot{\varepsilon}_1|(F + M_2 - k_1 a_1 |\dot{\varepsilon}_1|) + |\ddot{\varepsilon}_1|(F_1 - k_1 a_1 (|\ddot{\varepsilon}_1| - k_1 \sigma(c_1) \dot{\varepsilon}_1^2 - 0,5 M_2 k_2 |\dot{\varepsilon}_1|)) + |\dot{\varepsilon}_2|(F_1 + k_2 a_2 (|\dot{\varepsilon}_2| - |\dot{\varepsilon}_1|)),$$

где $a_1 = 0,5 M_1 (1 - \sigma^2(c_1)) > 0$, $a_2 = 0,5 M_2 (1 - \sigma^2(c_3)) > 0$, $c_3 = k_2(\delta + 2\Delta) = c_2 + 2k_2 \Delta$. Неравенство $\dot{V}_1 < 0$ выполняется вне указанных окрестностей при выполнении условий

$$|\dot{\varepsilon}_2| \leq \delta_2 + |\dot{\varepsilon}_1| \leq \bar{\delta} \quad \text{при} \quad k_2 > k_2^* = \max\{c_2/\delta_2; F_1/(a_2 \delta_2)\},$$

$$|\ddot{\varepsilon}_1| \leq F_1/k_1 a_1 + k_1 \sigma(c_1) \dot{\varepsilon}_1^2 + 0,5 M_2 k_2 |\dot{\varepsilon}_1| \leq \bar{\delta} - \delta_2,$$

$$k_2 \Delta < 2(\bar{\delta} - \delta_2)/M_2,$$

$$|\dot{\varepsilon}_1| \leq (F + M_2)/(k_1 a_1) = \Delta \ll \bar{\delta} - \delta_2,$$

$$k_1 > k_1^* =$$

$$= \max \left\{ \frac{\sigma(c_1)(F + M_2)^2 + a_1(F_1 + 0,5 M_2 k_2(F + M_2))}{a_1^2(\bar{\delta} - \delta_2)}; \frac{c_1}{\bar{\delta}} \right\},$$

на основе которых выбираются большие коэффициенты $k_{1,2}$, обеспечивающие заданную точность оценивания (23). Теорема доказана. ♦

Полученные результаты свидетельствуют о принципиальной возможности оценивания имеющихся неопределенностей с помощью наблюдателя состояний. Еще раз подчеркнем, что разработанный подход не требует расширения простран-



тва состояний из-за учета динамической модели возмущения. Для простоты изложения при доказательстве не учитывались собственные затухающие движения вспомогательных переменных $\dot{\varepsilon}_1(t)$, $\ddot{\varepsilon}_1(t)$ и $\ddot{\varepsilon}_2(t)$. При необходимости можно ввести их в рассмотрение, что позволит обеспечить неравенства (23) за заданное время.

Полученные с помощью наблюдателя оценки $z_2(t) \approx x_2(t)$, $v_2(t) \approx f(t)$ используются для синтеза комбинированного управления с заданной целью управления системой (1).

3. СИНТЕЗ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ АСИНХРОННЫМ ЭЛЕКТРОПРИВОДОМ ПРИ НЕПОЛНЫХ ИЗМЕРЕНИЯХ

3.1. Описание модели объекта управления. Базовый закон управления

В качестве иллюстрации разработанных алгоритмов рассмотрим задачу управления асинхронным электроприводом, функционирующим в условиях неопределенности и при неполных измерениях. Динамическая модель асинхронного электропривода описывается в неподвижной системе координат (α, β) в векторном виде системой нелинейных дифференциальных уравнений шестого порядка [10]

$$\dot{x}_1 = d_1(d_2 P(x_3)x_2 - d_3 x_1 + u), \quad \dot{x}_2 = -P(x_3)x_2 + d_4 x_1, \\ \dot{x}_3 = \frac{1}{J}(d_2 x_2^T S^T x_1 - x_4), \quad \dot{x}_4 = f(t), \quad (25)$$

где $x_1 = \text{col}(x_{1\alpha}, x_{1\beta})$ — компоненты тока статора, $x_2 = \text{col}(x_{2\alpha}, x_{2\beta})$ — компоненты потокосцепления ротора, $x_3 \in R$ — скорость вращения вала двигателя, $x_4 \in R$ — момент нагрузки на валу, $u = \text{col}(u_\alpha, u_\beta)$ — напряжение питания статора (управляющие воздействия);

$$P(x_3) = \begin{pmatrix} d_3 & x_3 \\ -x_3 & d_3 \end{pmatrix} > 0, \quad S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$P(x_3)x_2 = P(0)x_2 + x_3 S^T x_2, \quad x_2^T S^T x_1 = x_1^T S x_2,$$

$$d_1 = L_r / (L_s L_r - L_h^2), \quad d_2 = L_h / L_r, \quad d_3 = R_r / L_r,$$

$$d_4 = R_r d_2, \quad d_5 = d_2 d_4 + R_s,$$

где $d_i > 0$, $i = \overline{1, 5}$; R_s, R_r, L_s, L_r, L_h — приведенные активные и индуктивные сопротивления статора, ротора и взаимной индукции. Прямым измерениям подлежат скорость вращения вала двигателя $x_3(t)$ и токи статора $x_1(t)$; $f(t)$ полагается неизвестным ограниченным внешним воздействием с ограничен-

ной производной $|f(t)| \leq F$, $|\dot{f}(t)| \leq F_1$, $\|x_2(t)\| \leq X_2$, $|x_4(t)| \leq X_4 \quad \forall t \geq 0$, $F, \dot{F}, X_2, X_4$ — известные константы.

Ставится задача слежения за заданной скоростью вращения вала двигателя $x_{3d}(t)$ с обеспечением заданного потокосцепления в предположении, что аналитический вид задающих воздействий как функций времени и их производных первого и второго порядка известен.

В математической модели (25) имеется три управляемых и две управляющих переменных. Для того чтобы согласовать число управляемых и управляющих переменных, в работе [11] предложено свести задачу слежения за заданным потокосцеплением к задаче слежения за заданным квадратом вектора потокосцепления, который обозначим $|x_{2d}(t)| := x_{2d}^T x_{2d} \in R$. В силу модели (25) дифференциальное уравнение относительно управляемой переменной $|x_2| := x_2^T x_2 \in R$ примет вид $\frac{1}{2}|\dot{x}_2| = x_2^T (-P(x_3)x_2 + d_4 x_1) = -d_3|x_2| + d_4 x_2^T x_1$.

Базовый (т. е. в предположении, что все сигналы известны) закон управления, обеспечивающий асимптотическую стабилизацию ошибок слежения $e_3 = x_3 - x_{3d}$, $e_2 = |x_2| - |x_{2d}|$, сформируем согласно работам [11, 12] по иерархическому принципу. Вектор тока $x_1 \in R^2$ будем полагать фиктивным управлением, на компоненты которого наложим локальные связи: $d_2 x_2^T S^T x_{1d} = x_4 - p_3 e_3 + J \dot{x}_{3d}$, $d_4 x_2^T x_{1d} = -p_2 e_2 + d_3 |x_{2d}| + \frac{1}{2}|\dot{x}_{2d}|$. Совместное решение этих уравнений дает выражение для расчета фиктивного управления

$$x_{1d} = \frac{1}{|x_2|} \begin{pmatrix} -x_{2\beta} & x_{2\alpha} \\ x_{2\alpha} & x_{2\beta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{d_2}(x_4 - p_3 e_3 + J \dot{x}_{3d}) \\ \frac{1}{d_4}(-p_2 e_2 + d_3 |x_{2d}| + \frac{1}{2}|\dot{x}_{2d}|) \end{pmatrix}. \quad (26)$$

С учетом невязки между реальным и выбранным значениями фиктивного управления $e_1 = x_1 - x_{1d} \in R^2$ имеем систему относительно ошибок с замкнутыми локальными связями:

$$\dot{e}_1 = d_1(d_2 P(x_3)x_2 - d_5(e_1 + x_{1d}) + u) - \dot{x}_{1d},$$

$$\dot{e}_2 = 2(d_4 x_2^T e_1 - (d_3 + p_2)e_2),$$

$$\dot{e}_3 = \frac{1}{J}(d_2 x_2^T S^T e_1 - p_3 e_3),$$

где желаемые темпы сходимости ошибок слежения обеспечиваются выбором коэффициентов обратной связи $p_{2,3} > 0$ при условии стабилизации невязки e_1 , что, в свою очередь, обеспечивается истинным управлением. Электроприводы, как правило, управляются с помощью инверторов напряжения, работающих в ключевом режиме, поэтому целесообразно использовать базовый закон разрывного управления

$$u = -U \operatorname{sign} e_1, \quad \operatorname{sign} e_1 = \operatorname{col}(\operatorname{sign} e_{1\alpha}, \operatorname{sign} e_{1\beta}). \quad (27)$$

Выбор амплитуды разрывного управления на основе достаточных условий $e_1^T \dot{e}_1 < 0 \Rightarrow U > \|d_2 P(x_3)x_2 - d_5 x_{1d} - \dot{x}_{1d}/d_1\|$ обеспечит возникновение скользящего режима на многообразии $e_1 = 0$ за конечное время $t_d > 0$ [1], что и решает поставленную проблему слежения:

$$e_1(t) \underset{t > t_d}{=} 0 \Rightarrow e_{2,3}(t) \underset{t_d < t \rightarrow \infty}{\rightarrow} 0. \quad (28)$$

3.2. Синтез наблюдателя состояний и возмущений

Для реализации базового закона управления (27) по измерениям $x_3(t)$ и $x_1(t)$ требуется получить текущие оценки компонент вектора потокосцепления $x_2(t)$ и момента нагрузки $x_4(t)$ с помощью наблюдателя, построенного на основе системы (25) в виде

$$\dot{z}_1 = d_1(d_2 P(x_3)z_2 - d_5 x_1 + u) + v_1,$$

$$\dot{z}_2 = -P(x_3)z_2 + d_4 x_1 + v_2,$$

$$\dot{z}_3 = \frac{1}{J}(d_2 z_2^T S^T x_1 - z_4) + v_3, \quad \dot{z}_4 = v_4, \quad (29)$$

где $z_1, z_2 \in R^2$, $z_3, z_4 \in R$ — переменные состояния, $v_1, v_2 \in R^2$, $v_3, v_4 \in R$ — корректирующие воздействия наблюдателя. С учетом выражений (25) и (29) составим уравнения относительно ошибок наблюдения $\varepsilon_i = x_i - z_i$, $i = \overline{1, 4}$:

$$1) \quad \dot{\varepsilon}_1 = d_1 d_2 P(x_3) \varepsilon_2 - v_1, \quad \dot{\varepsilon}_2 = -P(x_3) \varepsilon_2 - v_2;$$

$$2) \quad \dot{\varepsilon}_3 = \frac{1}{J}(d_2 \varepsilon_2^T S^T x_1 - \varepsilon_4) - v_3, \quad \dot{\varepsilon}_4 = f(t) - v_4. \quad (30)$$

Система (30) состоит из двух связанных подсистем вида (4). В первой подсистеме собственные движения переменных $\varepsilon_2(t)$ устойчивы, внешнее возмущение действует только на вторую подсистему. Используем в данном наблюдателе сигмоидальные корректирующие воздействия вида (12).

С учетом непосредственно измеряемых сигналов $x_{1,3}(t)$ имеем:

$$v_1 = M_1 \sigma(k_1 \varepsilon_1), \quad v_2 = M_2 \sigma(k_2 v_1 / (d_1 d_2)),$$

$$\sigma = \operatorname{col}(\sigma_1, \sigma_2);$$

$$v_3 = M_3 \sigma(k_3 \varepsilon_3), \quad v_4 = -M_4 \sigma(k_4 J v_3). \quad (31)$$

Согласно следствию 2 и теореме (см. § 2) соответственно в первой подсистеме системы (30), (31) можно обеспечить асимптотическую стабилизацию ошибок наблюдения $\lim_{t \rightarrow +\infty} \varepsilon_{1,2}(t) = 0$, а во вто-

рой — заданную точность оценивания $|\varepsilon_{3,4}(t)| \leq \bar{\delta} \quad \forall t > T$ с помощью выбора параметров корректирующих воздействий (31). С учетом обозначений

$$\forall c_i = [1, 3; 3], \quad i = \overline{1, 4};$$

$$\|\varepsilon_2(t)\| \leq X_2 + \|z_2(0)\| + M_2/d_3 = \Phi_2,$$

$$|\varepsilon_4(t)| \leq 2X_4 + |z_4(0)| + M_4 t_3 = \Phi_4 \quad \forall t \geq 0,$$

$d_3 \leq \|P(x_3)\| \leq \bar{P} = d_3 + X_3$, $X_i = |x_i(0)| + |x_{id}|$, $i = 1, 3$ аналогично неравенствам (18) имеем следующие неравенства для выбора амплитуд M_i , $i = \overline{1, 4}$, сигмоидальных корректирующих воздействий:

$$M_2 > \frac{(X_2 + \|z_2(0)\|)e^{-d_3 t_1}}{\sigma(c_2)(t_2 - t_1) - 1/d_3},$$

$$M_1 > \frac{|\varepsilon_1(0)|/t_1 + d_1 d_2 \bar{P} \Phi_2}{\sigma(c_1)},$$

$$M_4 > \frac{2X_4 + |z_4(0)|}{\sigma(c_4)(t_4 - t_3) - t_3}, \quad t_4 > \max\left\{t_3 + \frac{t_3}{\sigma(c_4)}, t_2\right\},$$

$$t_{1,3} \geq 0,$$

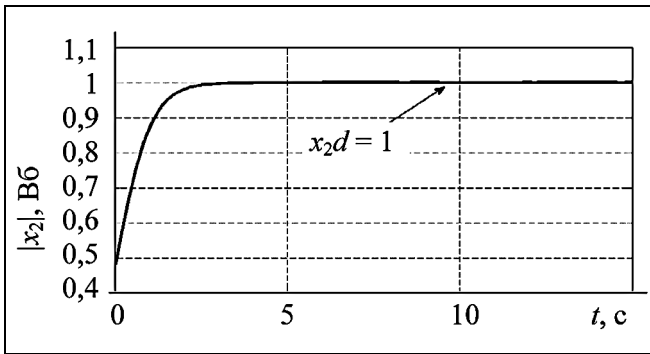
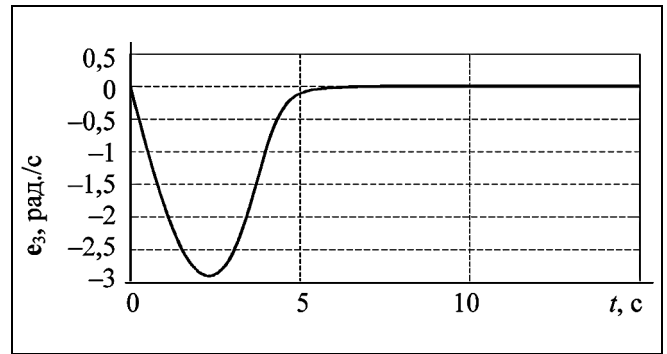
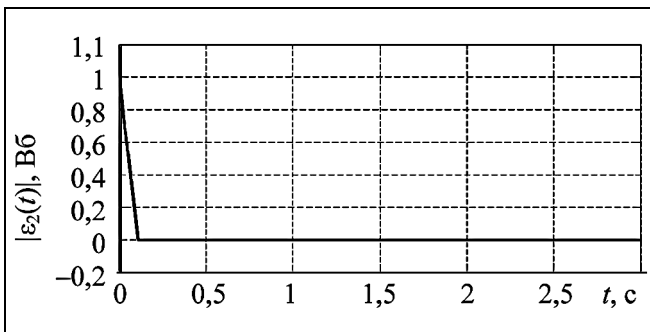
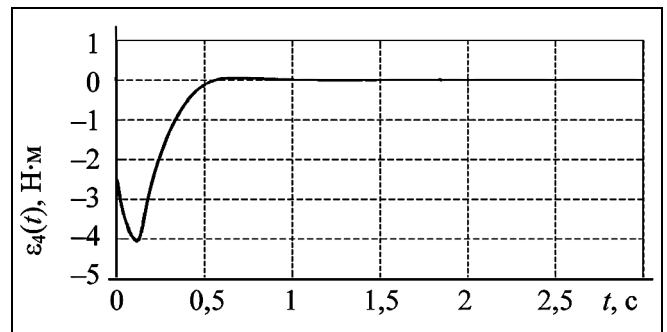
$$M_3 > \frac{|\varepsilon_3(0)|/t_3 + (d_2 \Phi_2 X_1 + \Phi_4)/J}{\sigma(c_3)}, \quad t_2 > t_1 + \frac{1}{d_3 \sigma(c_2)},$$

обеспечивающие сходимость ошибок наблюдения $\varepsilon_i(t)$ в указанные окрестности нуля за заданное время:

$$\|\varepsilon_1(t)\| \leq \frac{c_1}{k_1} \quad \forall t \geq t_1, \quad \|\varepsilon_2\| \leq \frac{c_2}{k_2 d_3} + \frac{\|\dot{\varepsilon}_1(t)\|}{d_1 d_2 d_3} \quad \forall t \geq t_2;$$

$$|\varepsilon_3(t)| \leq \frac{c_3}{k_3} \quad \forall t \geq t_3,$$

$$|\varepsilon_4| \leq \frac{c_4}{k_4} + d_2 \|\varepsilon_2\| X_1 + J |\dot{\varepsilon}_3(t)| \quad \forall t \geq t_4.$$


 Рис. 1. График регулируемой переменной $|x_2(t)|$

 Рис. 2. График ошибки слежения $e_3(t)$

 Рис. 3. График ошибки наблюдения $|e_2(t)|$

 Рис. 4. График ошибки наблюдения $e_4(t)$

Неравенство $|e_4(t)| \leq \bar{\delta}$ может быть обеспечено за заданное время $T \geq t_4$ выбором больших коэффициентов k_i , аналогичным выбором на основе неравенств (20), а именно,

$$k_1 \geq \max \left\{ \frac{\ln((d_1 d_2 \bar{P} \Phi_2 + M_1)/\alpha_1)}{a_1(t_4 - t_1)}; \frac{\Phi_1}{a_1(\Delta_1 - \alpha_1)} \right\},$$

$$k_2 \geq \frac{c_2(\ln(\Phi_2/\delta_2) - (t_4 - t_2)d_3)}{(T - t_2)M_2\sigma(c_2)d_3}, \quad k_4 \geq \frac{c_4}{\delta_4};$$

$$k_3 \geq \max \left\{ \frac{\ln\left(\frac{1}{J}(d_2\Phi_2X_1 + \Phi_4) + M_3\right)/\alpha_3}{a_3(t_4 - t_3)}; \frac{\Phi_3}{a_3(\Delta_3 - \alpha_3)}; \frac{c_3}{\bar{\delta}} \right\},$$

где $a_i = M_i(1 - \sigma^2(c_i))/2 > 0$, $\forall \alpha_i: 0 < \alpha_i < \Delta_i$, $i = 1, 3$; $\forall \bar{\delta}_2, \delta_2, \delta_4 > 0$: $\Delta_3 \leq (\bar{\delta} - \delta_4 - \delta_2\bar{\delta}_2X_1)/J$, $\Delta_1 \leq d_1d_2d_3(\bar{\delta}_2 - \delta_2)$, $\Phi_1 = d_1d_2\left(\frac{1}{J}(d_2X_2X_1 + X_4 + J\bar{P}^2)\Phi_2 +$

$+ \bar{P}M_2$), $\Phi_3 = (d_2((\bar{P}\Phi_2 + M_2)X_1 + 2d_1U\Phi_2) + F + M_4)/J$.

Полученные оценки используются для вычисления $\bar{x}_{1d}(z_2, z_4, x_3)$ (26). Базовый закон управления (27) реализуется в виде $u = -U_0 \text{sign}(x_1 - \bar{x}_{1d})$ и обеспечивает выполнение поставленной задачи (28) при $\forall t > t_d > t_4$ с точностью, меньшей, чем $\bar{\delta}$.

Моделирование проводилось в среде Matlab-Simulink при параметрах модели объекта управления: $J = 0,06$, кг·м², $R_s = 0,2596$, $R_r = 0,1484$, Ом, $L_s = 0,0863$, Гн, $L_r = 0,0871$, Гн, $L_h = 0,0846$, Гн, $f(t) = 5\sin t$, $U = 100$, В, $p_2 = 1$, $p_3 = 10$.

Для решения задачи наблюдения с заданной точностью $\bar{\delta} = 0,05$ за заданное время $T = 2$ с помощью наблюдателя (29) на основе полученных выше неравенств и с учетом условий (21) и (22) приняты следующие параметры сигмоидальных корректирующих воздействий (31): $M_1 = M_3 = 300$, $M_2 = 10$, $M_4 = 45$, $k_i = 20$, $i = \overline{1,4}$.

На рис. 1 показан график регулируемой переменной $|x_2(t)|$, обрабатывающей заданный сигнал $|x_{2d}| = 1$; на рис. 2 — график ошибки слежения $e_3(t) = x_3(t) - x_{3d}(t)$, где $x_{3d}(t) = \sin t$ — заданный сигнал. На рис. 3 и 4 представлены графики ошибок наблюдения $|\varepsilon_2(t)| = \varepsilon_2^T(t)\varepsilon_2(t)$ и $\varepsilon_4(t)$. Результаты моделирования подтверждают эффективность разработанных методов оценивания.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Для нелинейных систем, представимых в регулярной канонической форме с учетом возмущений, разработаны процедуры синтеза сигмоидальных корректирующих воздействий наблюдателя состояний и возмущений, размерность которого равна размерности модели объекта управления. Данные наблюдатели в допределительной ситуации сохраняют преимущества наблюдателей с разрывными корректирующими воздействиями, функционирующих в скользящем режиме: выбор параметров корректирующих воздействий осуществляется на основе неравенств; задача синтеза декомпозируется на элементарные подзадачи; имеется возможность получить оценки неизвестных правых частей дифференциальных уравнений без детализации их динамической модели. В отличие от наблюдателей на скользящих режимах данные наблюдатели позволяют решить задачу оценивания с некоторой, наперед заданной точностью, но в условиях ограниченности вычислительных ресурсов и при шумах в измерениях обеспечивают лучшее качество оцениваемых сигналов. В отличие от наблюдателей с глубокими обратными связями не требуют увеличения динамического порядка и позволяют учитывать имеющиеся ограничения на ресурсы управления на стадии синтеза.

ЛИТЕРАТУРА

1. Уткин В.И. Скользящие режимы в задачах оптимизации и управления. — М.: Наука, 1981. — 368 с.
2. Краснова С.А., Кузнецов С.И. Оценивание на скользящих режимах неконтролируемых возмущений в нелинейных системах // Автоматика и телемеханика. — 2005. — № 10. — С. 54—69.
3. Ахобадзе А.Г., Краснова С.А. Решение задачи слежения в условиях неопределенности на основе совместной блочно-канонической формы управляемости и наблюдаемости // Управление большими системами. — 2009. — Вып. 24. — С. 34—80.
4. Краснова С.А., Уткин В.А. Каскадный синтез наблюдателей состояния динамических систем. — М.: Наука, 2006. — 272 с.
5. Емельянов С.В., Коровин С.К. Новые типы обратной связи. — М.: Наука, 1997. — 352 с.
6. Коровин С.К., Фомичев В.В. Наблюдатели состояния для линейных систем с неопределенностью. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007. — 224 с.
7. Atassi A.N., Khalil H.R. A separation principle for the stabilization of a class of nonlinear systems // IEEE Trans. on Automatic Control. — 1999. — Vol. 44, N 9. — P. 1672—1687.
8. Краснова С.А., Мысик Н.С. Каскадный синтез наблюдателя состояния с нелинейными корректирующими воздействиями // Автоматика и телемеханика. — 2014. — № 2. — С. 106—128.
9. Бабин В.А., Дик В.В., Краснова С.А. Допределительные реализации разрывных корректирующих воздействий наблюдателя, функционирующего в скользящем режиме // Тр. XII Всерос. совещания по проблемам управления ВСПУ—2014 / ИПУ РАН. — М., 2014. — С. 374—390.
10. Чиликин М.Г., Ключев В.И., Сандлер А.С. Теория автоматизированного электропривода. — М.: Энергия, 1979. — 616 с.
11. Уткин В.А. Задачи управления асинхронным электроприводом // Автоматика и телемеханика. — 1993. — № 12. — С. 53—65.
12. Utkin V.A., Krasnova S.A., Utkin A.V. State observer in control systems of induction motor drives // Prep. of the 2013 IFAC Conf. on Manufacturing Modeling, Management and Control (MIM'2013). Saint Petersburg, Russia. June 19—21 2013. — P. 1204—1209.

Статья представлена к публикации членом редколлегии М.В. Хлебниковым.

Краснова Светлана Анатольевна — д-р техн. наук, гл. науч. сотрудник, ✉ krasnova@ipu.ru,

Уткин Антон Викторович — канд. техн. наук, ст. науч. сотрудник, ✉ utkin-av@rambler.ru,

Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, г. Москва.

Новая книга

Орлов А.И. Полвека в мире формул: Комментарии к списку научных и методических трудов. 2-е изд., испр. и доп. — М.: Институт высоких статистических технологий и эконометрики МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2014. — 493 с.

Даны тематические комментарии к «Общему списку трудов А.И. Орлова». По каждому из 20 направлений работ приведена хронологическая сводка публикаций вместе с описанием оснований для проведения исследований. Рассмотрены все публикации А.И. Орлова в 1970—2013 гг. (более 850). Для облегчения восприятия информации описаны основные этапы профессионального пути автора.

Для научных работников, преподавателей, аспирантов, студентов, работников различных отраслей народного хозяйства, для всех, кто захочет узнать о публикациях профессора А.И. Орлова по той или иной тематике, о значении той или иной публикации, о соотношениях публикаций между собой, о логике развития исследований, о нерешенных проблемах в тех или иных направлениях исследований.

Основные публикации А.И. Орлова последних пятнадцати лет представлены на сайтах <http://orlovs.pp.ru> и <http://ibm.bmstu.ru/nil/biblio.html>.

МЕТОДЫ ПРОГНОЗНОЙ ОЦЕНКИ СОЦИАЛЬНО-ЭКОНОМИЧЕСКИХ ПОКАЗАТЕЛЕЙ НАЦИОНАЛЬНОЙ БЕЗОПАСНОСТИ

А.Ф. Резчиков, А.Д. Цвиркун, В.А. Кушников, Н.В. Яндыбаева, В.А. Иващенко

Разработан комплекс математических моделей системной динамики для прогнозирования основных показателей социально-экономического развития России, оказывающих влияние на уровень национальной безопасности страны. В основу построения комплекса математических моделей положен граф причинно-следственных связей между исследуемыми показателями, на основе которого построена система нелинейных дифференциальных уравнений, позволяющая анализировать состояние национальной безопасности России. С помощью предложенного комплекса моделей выполнен анализ влияния курса рубля к евро на социально-экономические показатели национальной безопасности России.

Ключевые слова: математическая модель, системная динамика, социально-экономическое развитие, показатели национальной безопасности.

ВВЕДЕНИЕ

Обеспечение национальной безопасности представляет собой одну из наиболее острых проблем на современном этапе развития России. Сложность данной проблемы обуславливает необходимость разработки методов ее решения на основе формализованных методов современного математического аппарата и новых информационных технологий.

Решению вопросов обеспечения национальной безопасности России с привлечением математического аппарата посвящены работы таких известных ученых, как В.М. Матросов, В.А. Коптюг, С.Н. Васильев, А.Д. Гвишиани [1, 2] и др. Однако предложенные ими подходы, основанные на применении отдельных математических моделей и алгоритмов, не позволяют системно оценить влияние рисков развития отечественной и мировой экономики на уровень национальной безопасности страны.

Одной из важнейших составляющих интегральной оценки уровня национальной безопасности РФ является ее социально-экономическая состав-

ляющая, поэтому целесообразна разработка результативных методов ее прогнозной оценки.

Основным документом, определяющим главные направления в сфере обеспечения государственной и общественной безопасности России на долгосрочную перспективу, служит Указ Президента РФ от 12 мая 2009 г. № 537 «О Стратегии национальной безопасности Российской Федерации до 2020 года» [3], в соответствии с которыми характеристиками состояния национальной безопасности России являются:

- уровень безработицы (доля от экономически активного населения);
- децильный коэффициент (соотношение доходов 10 % наиболее и 10 % наименее обеспеченного населения);
- уровень роста потребительских цен;
- уровень государственного внешнего и внутреннего долга в процентном отношении от ВВП;
- уровень обеспеченности ресурсами здравоохранения, культуры, образования и науки в процентном отношении от ВВП;
- уровень ежегодного обновления вооружения, военной и специальной техники;

— уровень обеспеченности военными и инженерно-техническими кадрами.

Указанные характеристики приняты в качестве социально-экономических показателей национальной безопасности РФ. Для всех этих показателей могут быть получены количественные оценки. В качестве источников необходимой для этого информации служат документы и соответствующие специалисты, выступающие в качестве экспертов. Данный перечень показателей в дальнейшем может уточняться и расширяться с учетом специфики решаемых задач, например, с учетом новой редакции Военной доктрины Российской Федерации [4].

Цель представленных в статье исследований заключается в построении на основе концепции системной динамики единого комплекса взаимосвязанных математических моделей для анализа и прогнозирования социально-экономических показателей национальной безопасности России.

1. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ДЛЯ ПРОГНОЗНОЙ ОЦЕНКИ СОЦИАЛЬНО-ЭКОНОМИЧЕСКИХ ПОКАЗАТЕЛЕЙ НАЦИОНАЛЬНОЙ БЕЗОПАСНОСТИ РОССИИ

Разработанный комплекс математических моделей содержит взаимосвязанную совокупность системно-динамических и регрессионных моделей для прогнозирования социально-экономических показателей национальной безопасности России.

Модели системной динамики позволяют получить отсутствующую в настоящее время комплексную оценку степени влияния причинно-следственных связей на социально-экономические показатели национальной безопасности России [1, 5–7]. Такая оценка в отличие от существующих позволяет получить наиболее полную и объективную характеристику национальной безопасности страны.

Математическую основу методов системной динамики составляют дифференциальные модели, включающие в себя уравнения:

— состояний системы

$$\frac{d\bar{X}(t)}{dt} = F(\bar{X}(t), \bar{U}(t)), \quad (1)$$

где $\bar{X}(t) = (X_1(t), \dots, X_n(t))$ — вектор состояний системы, $\bar{U}(t) = (U_1(t), \dots, U_m(t))$ — вектор входных воздействий, t — текущее время;

— выходов системы

$$\bar{Y}(t) = H(\bar{X}(t), \bar{U}(t)),$$

где $\bar{Y}(t) = (Y_1(t), \dots, Y_p(t))$ — вектор выходов системы.

При составлении дифференциальных моделей выбираются переменные состояний системы и устанавливаются связи между ними с помощью функций в правых частях уравнений (1).

Фазовое пространство переменных состояний системы определено ограничениями

$$X_i^{\min} \leq X_i \leq X_i^{\max}; \quad X_i \in [0, 1]; \quad i = \overline{1, n},$$

где $X_i^{\min}$ и $X_i^{\max}$ — нормированные минимальные и максимальные значения, которые могут принимать переменные состояния системы.

В соответствии с документом [3] выбраны переменные, служащие социально-экономическими показателями национальной безопасности России: X_1 — уровень безработицы; X_2 — децильный коэффициент; X_3 — уровень роста потребительских цен; X_4 — уровень государственного внешнего долга; X_5 — уровень государственного внутреннего долга; X_6 — уровень обеспеченности ресурсами здравоохранения; X_7 — уровень обеспеченности ресурсами культуры; X_8 — уровень обеспеченности ресурсами образования и науки; X_9 — уровень ежегодного обновления вооружения, военной и спецтехники; X_{10} — уровень обеспеченности военными кадрами; X_{11} — уровень обеспеченности инженерно-техническими кадрами.

Для иллюстрации процедуры построения модели системной динамики на рис. 1 приведен граф для переменной X_1 , на котором показаны влияющие на темпы ее изменения факторы и взаимосвязи между ними.

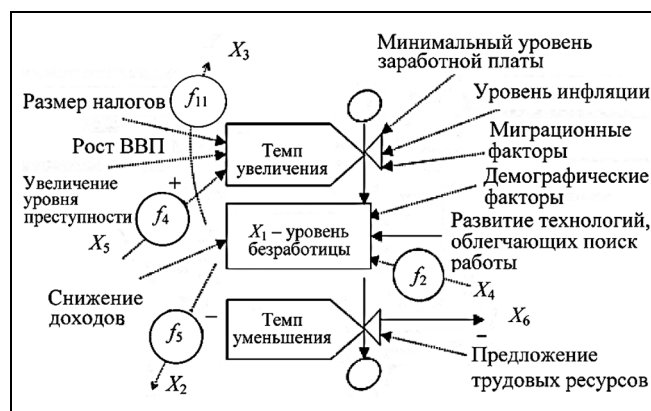
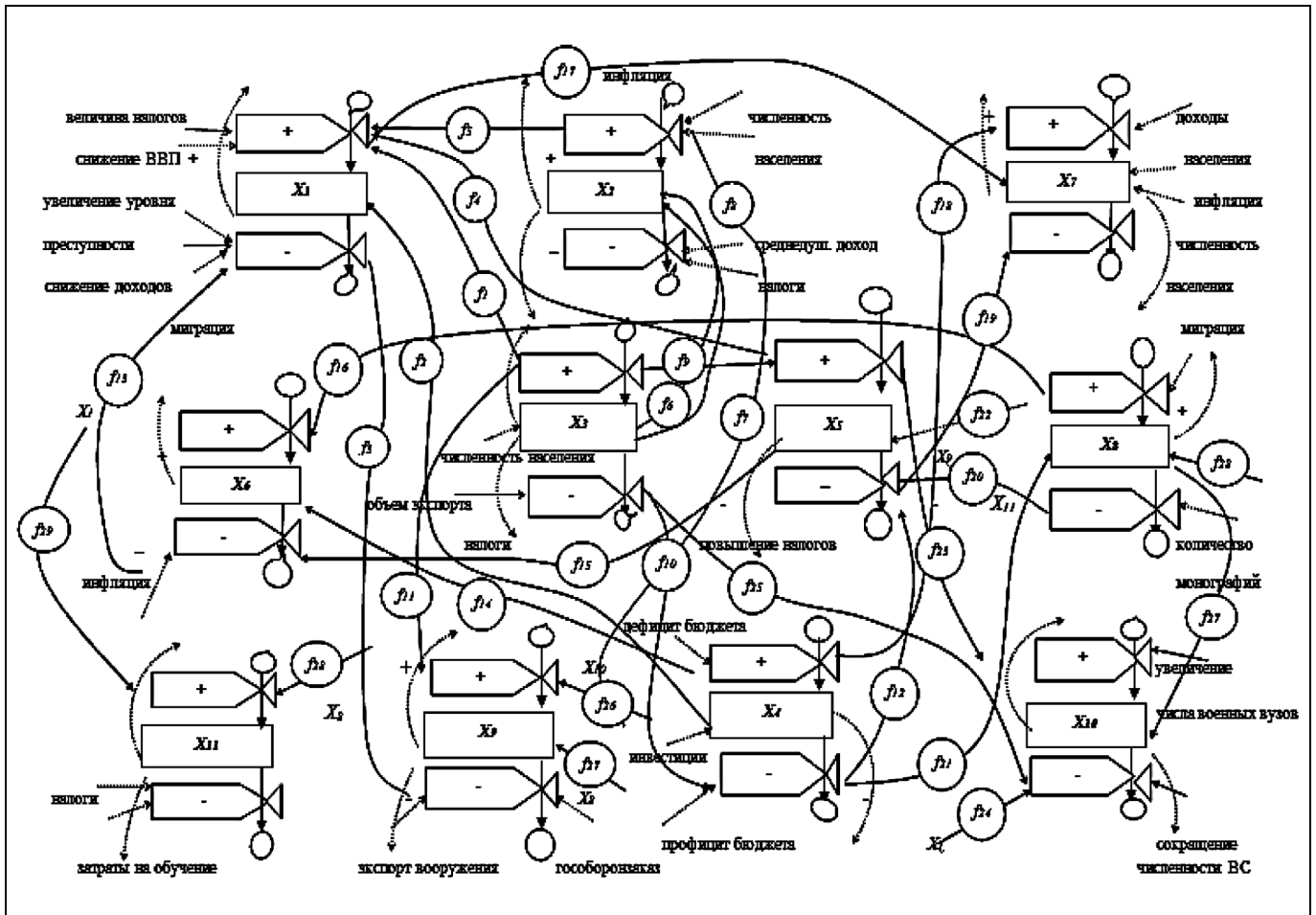


Рис. 1. Граф взаимосвязей факторов, влияющих на темпы изменения переменной X_1

Рис. 2. Орграф взаимосвязей системных переменных X_i

Дифференциальное уравнение для переменной X_1 имеет вид

$$\frac{dX_1(t)}{dt} = X_1(t) \left(\frac{(I + Sc_- + D)}{X_1(t)} f_1(X_3) f_2(X_4) f_5(X_2) - \frac{(W + T + V)}{X_1(t)} f_4(X_5) \right) = (I + Sc_- + D) \times f_1(X_3) f_2(X_4) f_5(X_2) - (W + T + V) f_4(X_5), \quad (2)$$

где $X_1(t)$ — текущее значение уровня безработицы; Sc_- — минимальный уровень заработной платы, руб.; I — уровень инфляции, %; D — численность рабочей силы, чел.; W — предложение трудовых ресурсов, чел.; V — валовой внутренний продукт, млрд. руб.; T — налоги, руб.; $f_1(X_3)$ — функциональная зависимость уровня безработицы от уровня роста цен; $f_2(X_4)$ — функциональная зависимость уровня безработицы от уровня внешнего долга

страны; $f_3(X_2)$ — функциональная зависимость уровня безработицы от децильного коэффициента; $f_4(X_5)$ — функциональная зависимость уровня безработицы от уровня внутреннего долга.

Функциональные зависимости в разработанной модели используются для адаптации математического обеспечения к исследуемому объекту и представлены в виде полиномов

$$f_1(X_3) = 0,91 X_1^2 + 0,022 X_1 + 0,27;$$

$$f_2(X_4) = 1,3 X_4^3 - 2,1 X_4^2 + 2,3 X_4 - 0,1;$$

$$f_3(X_2) = 0,71 X_2^2 + 0,39 X_2 + 0,17;$$

$$f_4(X_5) = 0,6 X_5^3 - 1,1 X_5^2 + 1,6 X_5 + 0,043.$$

Аналогично уравнению (2) составляются уравнения для других переменных и определяется вид полиномов для них.

На рис. 2 приведен оргграф, отражающий взаимосвязи между переменными X_1 — X_{11} . Построенная математическая модель имеет вид:

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{dX_1(t)}{dt} &= (I + Sc_- + D)f_1(X_3)f_2(X_4)f_5(X_5) - \\ &\quad - (W + T + V)f_4(X_5), \\ \frac{dX_2(t)}{dt} &= (Bis + I + P + V)f_6(X_3)f_7(X_4)f_8(X_5) - (T + Pm), \\ \frac{dX_3(t)}{dt} &= (I + P + D)f_{11}(x_9) - \\ &\quad - (T + V + Ex + Im)f_9(X_5)f_{10}(X_4), \\ \frac{dX_4(t)}{dt} &= (Bg + In + V) - (Bd + T)f_{12}(X_5), \\ \frac{dX_5(t)}{dt} &= (Bd + I + T + In) - (De + V), \\ \frac{dX_6(t)}{dt} &= (V + I)f_{16}(X_8) - \\ &\quad - (Sc_- + T + P)f_{14}(X_4)f_{15}(X_5)f_{13}(X_6), \\ \frac{dX_7(t)}{dt} &= (V + D + Sc_-) - \\ &\quad - (Sc_- + T + P)f_{17}(X_1)f_{18}(X_4)f_{19}(X_5), \\ \frac{dX_8(t)}{dt} &= (V + H + Mn + Tch + Sr + Fs + Ai) - \\ &\quad - (D + M + P + I + Sc_-)f_{20}(X_5)f_{21}(X_4), \\ \frac{dX_9(t)}{dt} &= (So + V + Fn + K + Me) - \\ &\quad - (I + Q)f_{22}(X_8)f_3(X_1)f_{11}(X_3), \\ \frac{dX_{10}(t)}{dt} &= (So + V + E + K)f_{26}(X_9)f_{27}(X_8) - \\ &\quad - (U + Q + Pr)f_{24}(X_1)f_{23}(X_5)f_{25}(X_4), \\ \frac{dX_{11}(t)}{dt} &= (Scl + E + T + F)f_{28}(X_1) - (U - Q). \end{aligned} \right. \quad (3)$$

Исходными данными для модели (3), выступающими в качестве составляющих вектора входов системы $\bar{U}(t) = (U_1(t), \dots, U_m(t))$, служат: P — численность населения, чел.; E — уровень заработной платы, руб.; Bis — число частных предпринимателей, чел.; Pm — среднедушевой доход населения, руб.; Im — объем импорта, руб.; Ex — объем экспорта, руб.; Bd — дефицит госбюджета, руб.; Bg — профицит бюджета, руб.; In — инвестиции, руб.; Sc — доходы населения, руб.; H — число высших учебных заведений, шт.; M — миграция кадров, чел.; Mn — число выпущенных монографий, шт.; Tch — численность профессорско-преподаватель-

ского состава с учеными степенями/званиями, чел.; Sr — среднегодовой объем научных исследований, руб.; Fs — объем финансирования научных исследований, руб.; Ai — число аспирантов, защитившихся в течение года после окончания аспирантуры, чел.; So — объем гособоронзаказа, руб.; Fn — обновление основных фондов предприятий ОПК, %; K — численность солдат-контрактников, чел.; Me — экспорт вооружения, руб.; Q — затраты на обучение и переподготовку кадров, руб.; U — уровень безработицы, %; Pr — уровень потребительских цен, руб.; Scl — число учебных заведений, шт.; F — объем финансирования, руб.; De — денежная эмиссия, руб.

Для проверки адекватности полученной математической модели используются уравнения регрессии, построенные по имеющимся статистическим данным [8, 9].

Разработанные математические модели могут быть включены в состав информационных систем, используемых в процессе подготовки, принятия или оценки эффективности реализации управленческих решений, затрагивающих вопросы национальной безопасности страны. Помимо этого они могут найти применение в соответствующих системах поддержки и принятия решений для анализа влияния различных угроз на процессы социально-экономического развития России, а также в тренажерных и обучающих системах, используемых при подготовке управленческого персонала, решения которого непосредственно влияют на рассмотренные социально-экономические показатели национальной безопасности России.

Алгоритм работы разработанного математического обеспечения в составе информационных систем в общем случае заключается в следующем.

Шаг 1. Выбор интервала моделирования изменения переменных X_1 — X_{11} .

Шаг 2. Ввод входных данных, необходимых для определения значений переменных X_1 — X_{11} по модели (3).

Шаг 3. Оценка достоверности входных данных.

Шаг 4. Если входные данные достоверны, то перейти к шагу 5, в противном случае, скорректировав недостоверные данные, вернуться к шагу 2.

Шаг 5. Определение значений переменных X_1 — X_{11} по модели (3).

Шаг 6. Сравнение достоверности результатов, полученных по модели, с известными результатами.

Шаг 7. Если полученные результаты достоверны, то перейти к шагу 8, в противном случае, скорректировав входные данные или математическую модель, вернуться к шагу 2.



Шаг 8. Выдача лицу, принимающему решения, сообщения о значениях переменных X_1 – X_{11} на выбранном интервале моделирования, а также о точности выполненных расчетов.

2. АНАЛИЗ ВЛИЯНИЯ КУРСА РУБЛЯ К ЕВРО НА СОЦИАЛЬНО-ЭКОНОМИЧЕСКИЕ ПОКАЗАТЕЛИ НАЦИОНАЛЬНОЙ БЕЗОПАСНОСТИ РОССИИ

На рис. 3 приведены графики, характеризующие динамику социально-экономических показателей X_1 – X_{11} национальной безопасности России на интервалах 10 и 25 лет. Значения показателей X_1 – X_{11} нормированы относительно их значений за 2000 г. В качестве начальных условий приняты значения этих показателей за 2013 г., которые соответственно равны: 0,52; 1,17; 1,05; 4,61; 7,54; 6,78; 1,76; 19,4; 1,33; 0,83; 0,75. Видно, что на интервале 10 лет показатели X_1 – X_{11} увеличиваются. Наиболее существенно возрастают показатели X_8 — уровня обеспеченности ресурсами образования и науки и X_6 — уровня обеспеченности ресурсами здравоохранения. На интервале 25 лет возрастают показатели X_5 — внутреннего долга страны и X_8 — обеспеченности ресурсами образования и науки и значительно уменьшаются показатели X_6 — уровня обеспеченности ресурсами здравоохранения и X_{11} — уровня обеспеченности инженерно-техническими кадрами.

Проведенные исследования предложенных моделей показали, что классическая оценка их устойчивости затруднительна в силу существенной нелинейности дифференциальных уравнений [10]. Поэтому такую оценку целесообразно выполнять путем моделирования изменения показателей X_1 – X_{11} при различных возмущающих воздействиях, содержащихся в математической модели (3).

С помощью рассмотренных математических моделей получены оценки влияния различных рисков развития отечественной и мировой экономики на основные показатели национальной безопасности России. Далее в качестве примера приводится оценка влияния на исследуемые показатели падения курса рубля к евро.

Объем денежной массы в стране DM , млрд. руб., значение которого учитывается при расчете уровня инфляции, оказывает влияние на значения показателей X_1 и X_5 . От размеров федеральных, региональных и местных налогов T , млрд. руб., зависят значения показателей X_1 – X_3 , X_5 , X_6 и X_{11} . Размер ВВП страны V , млрд. руб., оказывает непосредственное влияние на значения показателей X_1 , X_3 – X_{10} . Значение среднедушевого дохода Pm , руб./мес., влияет на значение децильного коэффи-

циента X_2 . Размер номинальной средней заработной платы E , руб./мес., входит в состав показателей X_2 , X_7 , X_{10} и X_{11} .

Для перечисленных факторов DM , T , V , X_4 , X_5 , Pm и E строятся уравнения регрессии и определяется уровень изменения значений переменных. В качестве начальных условий приняты нормированные значения факторов в 2013 г., приведенные в табл. 1.

На рис. 4 приведена схема причинно-следственных связей, на которой пунктирными стрелками показано, какие переменные и за счет чего изменяют свои значения при падении курса рубля к евро.

В табл. 2 приведены изменения значений факторов, влияющих на показатели при падении курса рубля к евро (Δ курс). Значения показателей нормированы относительно их значений в 2000 г. Все используемые в расчетах данные находятся в открытом доступе в сети Интернет.

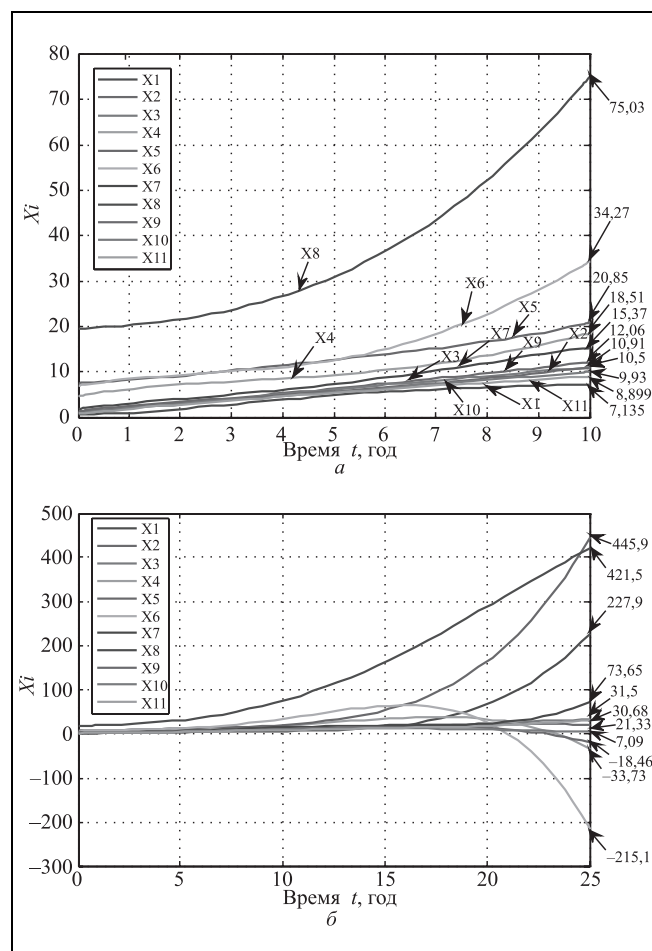


Рис. 3. Расчетные значения показателей национальной безопасности: а — на интервале 10 лет; б — на интервале 25 лет

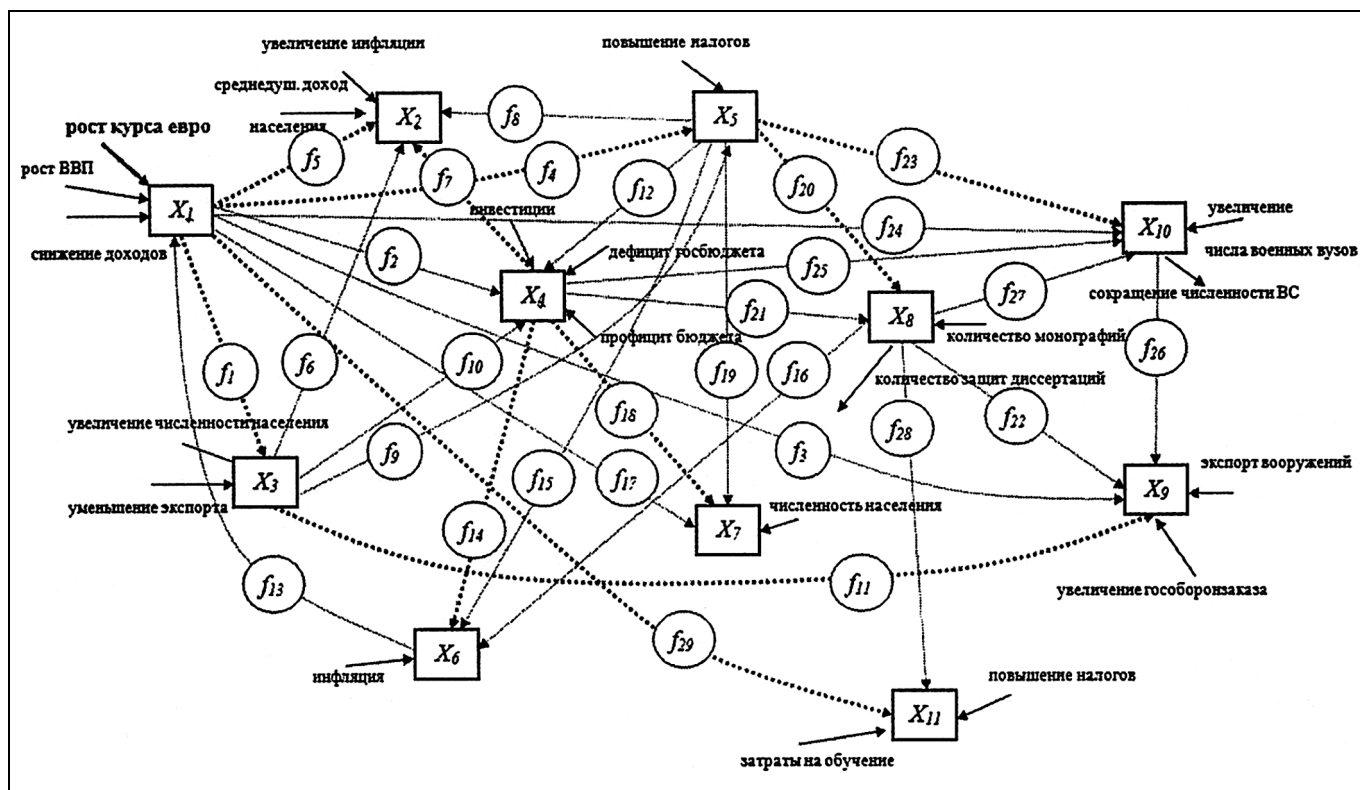


Рис. 4. Схема, отражающая влияние падения курса рубля к евро на системные переменные

Таблица 1

Значения факторов, влияющих на показатели национальной безопасности России

Фактор	DM	T	V	X_4	X_5	Pm	E
Значение показателя	38,35	6,63	9,14	7,54	4,61	11,24	13,48

Таблица 2

Изменения значений факторов, влияющих на показатели национальной безопасности России, при падении курса рубля к евро

Δ курс, %	Факторы						
	DM	T	V	X_4	X_5	Pm	E
1	361,6	135,7	100,2	22,3	46,1	144,4	166,4
2	370	130,3	96,2	23,3	46,2	138,6	159,9
3	374,4	125,3	92,4	24,1	47,1	133,1	153,4
4	375,8	120,4	86,4	25	48,2	127,7	147,3
5	380,1	115,5	87,2	25,3	48,6	122,6	141,3
6	382,4	110,9	87	25,9	49,1	117,5	135,5
7	383,7	106,5	81,5	26,2	50,2	112,6	129,7
8	396,2	102,1	78,2	27,3	51,3	108,3	125
9	400,1	97,7	74,9	28,1	53,4	103	119
10	420,3	94	68,7	28,9	54,1	99	114

На рис. 5 отражена динамика факторов, влияющих на показатели национальной безопасности России в зависимости от падения курса рубля к евро.

Далее проанализируем изменение переменных при различных вариантах падения курса рубля к евро.

Рассмотрим показатель X_1 , значение которого при падении курса руб./евро на 1 % вычисляется на основе полученного из математической модели (3) соотношения

$$\frac{dX_1(t)}{dt} = (I + Sc_- + D)f_1(X_3)f_2(X_4)f_5(X_2) - (W + T + V)f_4(X_5) = ((0,22 + 39,4 + 1,04) \times 0,9 \cdot 0,8 \cdot 0,41 - (1,58 + 34,82 + 9,12) \cdot 0,22) \cong 1,99.$$

При расчетах изменяются значения факторов, входящих в состав переменной, на величины T и V , приведенные в табл. 2.

Аналогично вычисляется показатель X_1 при падении курса рубля к евро на 2 %:

$$\frac{dX_1(t)}{dt} = (I + Sc_- + D)f_1(X_3)f_2(X_4)f_5(X_2) - (W + T + V)f_4(X_5) = ((0,223 + 39,4 + 1,04) \times 0,9 \cdot 0,8 \cdot 0,41 - (1,58 + 32,1 + 9,11) \cdot 0,22) \cong 2,61.$$

Значения показателя X_1 — уровня безработицы при различных вариантах падения курса рубля — приведены в табл. 3.

Далее выполним прогнозирование значения показателя X_1 на интервале $[0; 25]$ лет при падении курса рубля к евро на 5 % (рис. 6, а). Как видно, в этом случае имеет место значительное увеличение значения данного показателя с 2,86 до 187,9.

Подобная тенденция наблюдается и при падении курса рубля на 10 %, при котором значение показателя X_1 возрастает до отметки 231,4 (рис. 6, б).

Данная ситуация в экономике страны свидетельствует о негативных последствиях падения курса рубля в перспективе, приводящего к увеличению численности безработных, повышению уровня инфляции, спаду производства и, как следствие, к значительному снижению качества жизни граждан.

Аналогично осуществляется прогнозирование показателей X_2 — X_{11} на заданных временных интервалах.

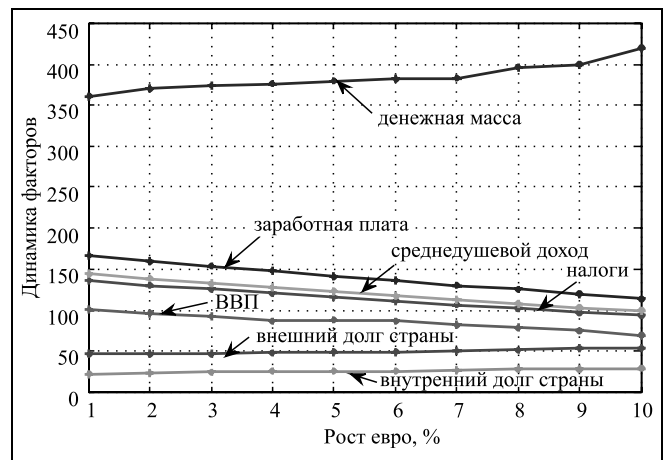


Рис. 5. Изменение факторов, влияющих на показатели национальной безопасности России при падении курса рубля к евро

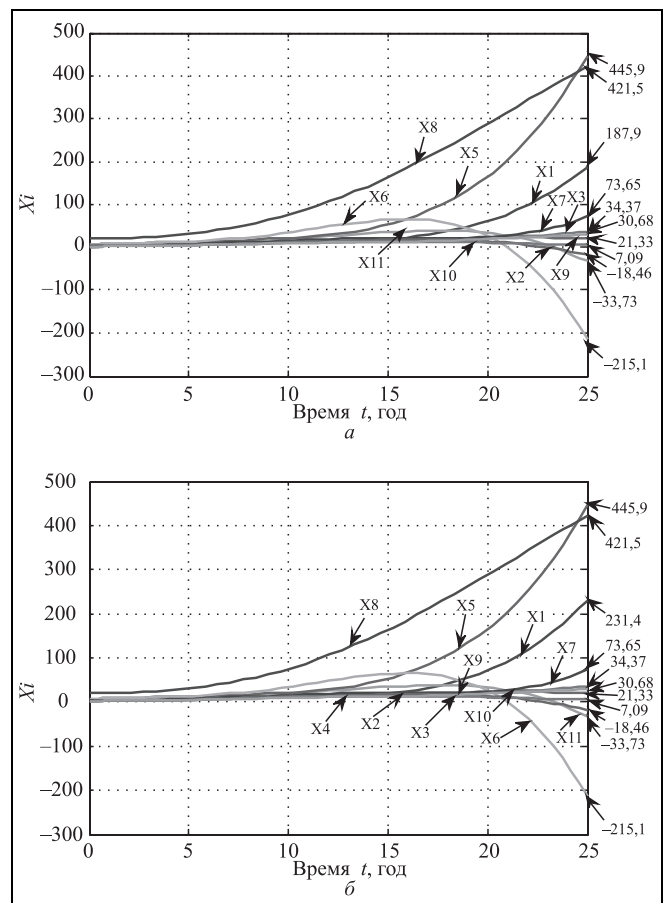


Рис. 6. Изменение значений показателей национальной безопасности России при падении курса рубля к евро: а — на 5 %; б — на 10 %

Изменение показателя X_1 при падении курса руб./евро

Таблица 3

ΔX_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	1,99	2,61	3,01	3,12	3,3	3,5	3,63	3,72	3,84	4,01

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предложен подход к анализу и прогнозной оценке социально-экономических показателей национальной безопасности России, особенность которого заключается в использовании новых модельных решений, основанных на математическом аппарате системной динамики, позволяющей прогнозировать характеристики сложных динамических систем с учетом большого числа нелинейных обратных связей.

Показана возможность применения данного подхода для анализа влияния различных потенциальных угроз на процессы социально-экономического развития страны в целях выработки и реализации эффективных управленческих решений по нормализации экономической ситуации.

В качестве модельного примера приведен анализ влияния падения курса рубля к евро на основные показатели национальной безопасности России.

ЛИТЕРАТУРА

1. Матросов В.М., Матросова Н.И. Методология комплексных исследований безопасности и перехода России к устойчивому развитию с использованием математических моделей и новых информационных технологий. — М.: Академия: МГУК, 1999. — С. 341.
2. Подходы к разработке национальной стратегии устойчивого развития России / В.А. Коптюг, В.М. Матросов, В.К. Левашов и др. — М.: Академия, 2001. — С. 409.
3. Стратегия национальной безопасности РФ до 2020 г. (утв. Указом Президента РФ от 12 мая 2009 г. № 537) // URL: <http://www.scrf.gov.ru> (дата обращения 27.08.2015).
4. Российская газета. Федеральный выпуск. № 6570 (298) от 30 дек. 2014 г.
5. Форрестер Дж. Динамика развития города. — М.: Прогресс, 1974. — 281 с.
6. Человек. Машина. Среда / А.Ф. Резчиков, В.А. Твердохлебов, В.А. Иващенко и др. / Под. ред. А.Ф. Резчикова. — Саратов: ООО «Изд. центр «Наука», 2013. — 195 с.
7. Яндыбаева Н.В., Кушников В.А. Математическая модель для прогнозирования показателей аккредитации вуза // Управление большими системами. — М.: ИПУ РАН. — 2013. — Вып. 41. — С. 314–343.
8. Яндыбаева Н.В., Кушников В.А. Математическая модель для прогнозирования показателей экономической безопасности Российской Федерации // Вестник Астраханского гос. техн. ун-та / Сер. Управление, вычислительная техника и информатика. — 2014. — № 3. — С. 93–101.
9. Kushnikov V.A., Rezchikov A.F., Tsvirkun A.D. Control in main-computer systems with computer-aided goal correction // Automation and Remote Control. — 1998. — Vol. 59, N 7. — Part 2. — P. 1040–1046.
10. Анализ критических ситуаций, вызванных неблагоприятным стечением обстоятельств / В.В. Ключев, А.Ф. Резчиков, В.А. Кушников и др. // Контроль. Диагностика. — 2014. — № 7. — С. 12–16.

Статья представлена к публикации членом редколлегии В.В. Кульбой.

Резчиков Александр Федорович — д-р техн. наук, чл.-корр. РАН, директор, Институт проблем точной механики и управления РАН, г. Саратов, iptmuran@san.ru,

Цвиркун Анатолий Данилович — д-р техн. наук, зав. лабораторией, Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, г. Москва, tsvirkun@ipu.ru,

Кушников Вадим Алексеевич — д-р техн. наук, вед. науч. сотрудник, Институт проблем точной механики и управления РАН, г. Саратов, kushnikoff@yandex.ru,

Яндыбаева Наталья Валентиновна — канд. техн. наук, доцент, Балаковский филиал Российской академии народного хозяйства и государственной службы, nat07@inbox.ru,

Иващенко Владимир Андреевич — д-р техн. наук, вед. науч. сотрудник, Институт проблем точной механики и управления РАН, г. Саратов, iptmuran@san.ru.

Новая книга

Авторский коллектив:

академики РАН С.Н. Васильев, А.А. Макаров, В.Л. Макаров; члены-корр. РАН Н.А. Махутов, Д.А. Новиков; д-ра наук В.К. Акинфиев, А.Р. Бахтизин, В.В. Баранов, В.Н. Бурков, В.Г. Варнавский, Ф.В. Веселов, М.В. Губко, А.А. Дорофеюк, Ф.И. Ерешко, В.В. Кульба, В.Н. Лифшиц, А.Г. Полетыкин, С.С. Сулакшин, А.Д. Цвиркун, И.Б. Ядыкин; кандидаты наук А.Л. Арутюнов, Ю.А. Дорофеюк, В.А. Иванов

Управление развитием крупномасштабных систем (Современные проблемы. Вып. 2) / Под ред. А.Д. Цвиркуна. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2015. — 473 с. — ISBN 978-5-94052-239-3.

Продолжено представление материалов участников международных конференций по управлению развитием крупномасштабных систем MLSD, посвященных различным аспектам развития теории и практики управления крупномасштабными системами. Рассмотрен комплекс проблем управления развитием крупномасштабных систем.

Крупномасштабные системы — это класс сложных (больших) систем, характеризующихся комплексным (межотраслевым, межрегиональным) взаимодействием элементов, распределенных на значительной территории, требующих для своего развития существенных затрат ресурсов и времени. Рассмотрены основные подходы и методы проектирования крупномасштабных систем с учетом динамики их развития и функционирования. Представлены методология планирования при построении систем принятия решений и инвестиционные модели развития систем. Большое внимание уделено развитию транспортно-промышленного комплекса страны, единой энергетической системы, задачам рационального природопользования и инновационного развития нефтегазовых регионов, задачам управления безопасностью и безопасного управления крупномасштабными объектами и системами, модернизации крупных инфраструктурных систем, задачам создания и использования компьютерных информационных технологий и систем мониторинга для управления.

Для научных работников и специалистов в области управления крупномасштабными системами.

Рецензенты:

д-р техн. наук, проф. Ф.Ф. Пашенко,
д-р техн. наук, проф. А.В. Щепкин



ИННОВАЦИОННАЯ ОЛИГОПОЛИЯ КУРНО

В.В. Бреер, Г.Л. Мирзоян, Д.А. Новиков

Рассмотрена теоретико-игровая модель «инновационной олигополии Курно», в рамках которой исследуются эффекты конкуренции производителей на рынке инновационного продукта, ограниченности емкости этого рынка и существования оптимального числа действующих на нем агентов, комплементарности инновационных технологий, конформного поведения агентов. Получены условия реализации базового сценария динамики эндогенного возникновения и взаимодействия инноваторов и имитаторов.

Ключевые слова: олигополия Курно, конкуренция на инновационном рынке, инноваторы и имитаторы, конформное коллективное поведение.

ВВЕДЕНИЕ

Инновационные продукты и/или услуги, как результат инновационной деятельности организаций (фирм), играют важную роль в развитии экономики (являются одним из основополагающих факторов экономического роста). Однако организации, внедряющие и выпускающие инновационный продукт, используют его и для своих собственных целей — в условиях рыночной экономики движущей силой конкуренции служит стимул к нововведениям, ведь на основе нововведений удастся создавать и/или осваивать новые рынки.

Существует ряд характерных для инновационной деятельности эффектов, привлекающих внимание многих исследователей:

- диффузия инноваций, отражающая динамический процесс принятия и использования новшеств, в частности с учетом конформного поведения [1] агентов и распространения информации (см. обзор соответствующих моделей в работе [2]);

- конкуренция на рынке инноваций, ограниченная емкость рынка, наличие барьеров вхождения на рынок, комплементарность инновационных технологий и др. [3–7];

- необходимость наличия специфической информационной инфраструктуры [5, 8];

- специфические требования к инвестиционной политике [5, 9 и др.], включая управление инвестициями в исследования и разработки [3, 10], и связанной с ней политике управления интеллектуальной собственностью [11, 12 и др.];

- распределение «ролей» участников инновационного процесса [5, 13 и др.], существование двух типовых «ролей» — инноваторы (обладающие уникальным инновационным продуктом (далее

«продукт») и желающие внедрить его на рынок) и имитаторы, которые вслед за инноватором осваивают и производят инновационный продукт.

Одним из адекватных инструментов математического моделирования перечисленных эффектов служит аппарат теории игр, позволяющий описывать и исследовать ситуации совместного принятия решений несколькими рациональными экономическими агентами. Хрестоматийной экономико-математической «игровой» моделью (история которой насчитывает уже более полутора веков) является олигополия Курно (см. ее современное описание, например, в книге [14]).

В настоящей работе рассматривается модифицированная теоретико-игровая модель олигополии Курно, в которой, помимо классической зависимости рыночной цены от суммарного предложения, удастся в явном виде отразить комплементарность инновационных технологий и постоянные издержки производителей инновационной продукции. Помимо этого, анализ предложенной модели свидетельствует, что она позволяет описывать и исследовать многие другие из перечисленных эффектов, характерных для инновационной деятельности. Например, обычно в экономико-математическом моделировании разделение агентов на инноваторов и имитаторов вводится экзогенно (либо из-за различных способностей к научению [14, 15], либо благодаря возможности инноваторов принимать решения раньше имитаторов — в последнем случае принимается концепция равновесия Штакельберга [16, 17]), в то время как в настоящей работе априорного разделения агентов на инноваторов и имитаторов не производится, а оно возникает эндогенно из-за различия тех или иных существенных параметров агентов.

Структура изложения материала следующая: в § 1 описывается общая модель, которая в § 2 исследуется аналитически для частного случая однородных агентов. В § 3 на ее основе аналитически и имитационно исследуются модели порогового поведения агентов; в § 4 и 5 — различные сценарии взаимодействия инноваторов и имитаторов.

1. ОБЩАЯ МОДЕЛЬ

Пусть имеется множество $N = \{1, \dots, n\}$ агентов (производителей продукции на некотором рынке). Для простоты пока не будем разделять агентов на инноваторов и имитаторов. Обозначим через $x_i^k \geq 0$ действие i -го агента (объем произведенной им продукции) в момент времени $k = 0, 1, \dots$. Положим $x_i^0 = 0, i \in N$. Обозначим через $x^k = (x_1^k, \dots, x_n^k)$ вектор действий всех агентов в момент времени k , $x_{-i} = (x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n)$ — обстановка для i -го агента, через $\Sigma^k = \sum_{i \in N} x_i^k$ — суммарный объем производства.

Предположим, что i -й агент характеризуется своим типом $r_i > 0$ (эффективностью применяемых им технологий), постоянными издержками $c_i \geq 0$ (возникающими в случае, если агент принимает решение применить новую технологию) и имеет целевую функцию (все слагаемые которой измеряются в денежном выражении)

$$f_i(x^k) = (D - \alpha \Sigma^k) x_i^k - \frac{(x_i^k)^2}{2(r_i + \beta \sum_{j \neq i} r_j I(x_j^k))} - c_i I(x_i^k), \quad (1)$$

где $D > 0, \alpha \geq 0$ и $\beta \geq 0$ — константы; $I(x_i^k) =$

$$= \begin{cases} 1, & x_i^k > 0, \\ 0, & x_i^k = 0 \end{cases} \quad \text{— функция-индикатор; } (D - \alpha \Sigma^k) \text{ —}$$

цена за рассматриваемый продукт/услугу, которая зависит от количества агентов на рынке и от общего объема продукции, произведенного ими; $(D - \alpha \Sigma^k) x_i^k$ — выручка от реализации i -м агентом произведенной им продукции в объеме x_i^k ;

$$\frac{(x_i^k)^2}{2(r_i + \beta \sum_{j \neq i} r_j I(x_j^k))} \text{ — квадратичные производствен-}$$

ные затраты типа Кобба — Дугласа i -го агента, зависящие и от эффективности технологий других агентов. Система, в которой агент имеет функцию

затрат типа Кобба — Дугласа, является классическим примером модели, ставшей чрезвычайно популярной в экономико-математическом моделировании [14, 18]. В настоящей работе приняты квадратичные производственные затраты i -го агента, зависящие от двух факторов: действий агентов (параметр x) и эффективности применяемых технологий (параметр r).

Из структуры целевой функции (1) видно, что она учитывает как снижение затрат конкретного агента с ростом числа других агентов на рынке (знаменатель во втором слагаемом), так и зависимость его «прибыли» от постоянных издержек (третье слагаемое). Эти зависимости, совместно с убыванием рыночной цены с ростом суммарного объема производства (первый сомножитель в первом слагаемом), позволяют предположить (формальный анализ проводится далее), что существуют как оптимальные объемы производства агентов, так и их оптимальный состав — набор агентов, при которых их выигрыши (средние, максимальные, суммарные и др. — в зависимости от рассматриваемой задачи) максимальны.

Предположим, что рациональность поведения агента заключается в стремлении к максимизации целевой функции (1) выбором своего действия, т. е. его наилучшим ответом на обстановку x_{-i} будет (в предположении единственности максимума по x_i функции (1))

$$BR_i(x_{-i}) = \arg \max_{z \geq 0} f_i(z, x_{-i}). \quad (2)$$

Примем следующий вариант описания динамики выбираемых агентами действий:

$$x_i^k = BR_i(x_{-i}^{k-1}), \quad i \in N, \quad (3)$$

где $k = 1, 2, \dots$ — номер периода времени.

2. ОДНОРОДНЫЕ АГЕНТЫ

Пока (если не оговорено особо) будем считать, что все агенты принимают решение в один момент времени (статическая модель), $x_i \geq 0$ — действие i -го агента.

Предположим, что все агенты одинаковые, т. е. выпускают одинаковый объем продукции ($x_i = x$), имеют одинаковую эффективность применения технологий ($r_i = r$) и одинаковые постоянные затраты ($c_i = c$). Тогда целевую функцию (1) можно представить в виде:

$$f(x) = (D - \alpha nx)x - \frac{x^2}{2(r + \beta(n-1)rI(x))} - cI(x). \quad (4)$$

Рассмотрим игру агентов в нормальной форме, когда они однократно, независимо и одновременно

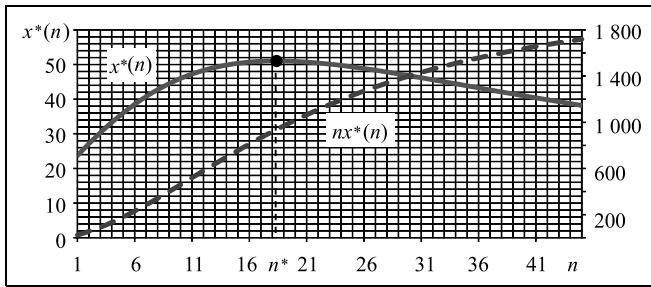


Рис. 1. График функции (5)

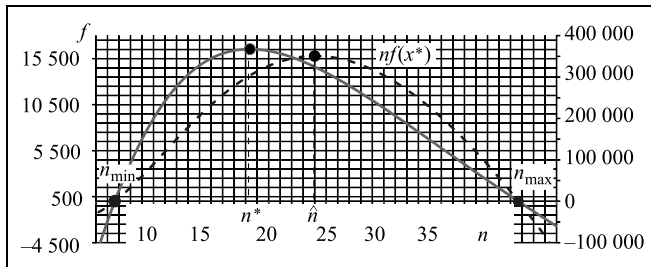


Рис. 2. График функции (6)

но выбирают свои действия. Продифференцируем функцию (4) по x (считая пока, что $x > 0$), приравняем производную к нулю и выразим оптимальное значение действия агента:

$$x^* = D \frac{1}{2} \left(\alpha n + \frac{1}{2r(1 + \beta(n-1))} \right)^{-1}. \quad (5)$$

Согласно выражению (5), с увеличением эффективности применения агентом технологии (ростом значения параметра r) его действие (объем произведенной продукции) увеличивается. С ростом значения параметра α действие (5) уменьшается, с ростом значения параметра β (который содержательно можно интерпретировать как *эффективность трансфера технологий*) — увеличивается, а от значения постоянных издержек c оптимальное действие агента (5) явным образом не зависит.

Пример 1. В качестве иллюстрации приведем график функции (5) при значениях параметров модели: $D = 3000$, $\alpha = 0,7$, $r = 0,008$, $\beta = 0,16$ — см. непрерывную кривую на рис. 1.

Штриховой линией на рис. 1 обозначен график функции, отражающей валовый объем (откладываемый по вспомогательной оси) выпущенной всеми агентами продукции, функционирующими на рынке ($nx^*(n)$). ♦

Подставим выражение (5) в целевую функцию (4):

$$f(x^*) = \frac{1}{4} D^2 \left(\alpha n + \frac{1}{2r(1 + \beta(n-1))} \right)^{-1} - c. \quad (6)$$

Отсюда следует, что повышение эффективности применения агентом технологии (рост параметра r) ведет к росту его «прибыли» (6). С ростом значения параметра α функция (6) убывает. С ростом значения параметра β функция (6) возрастает. Увеличение же постоянных издержек организации (параметр c), естественно, снижает прибыль.

Пример 2. В качестве иллюстрации в условиях примера 1 (выбрав $c = 60\,000$) приведем график функции (6) — см. непрерывную кривую на рис. 2.

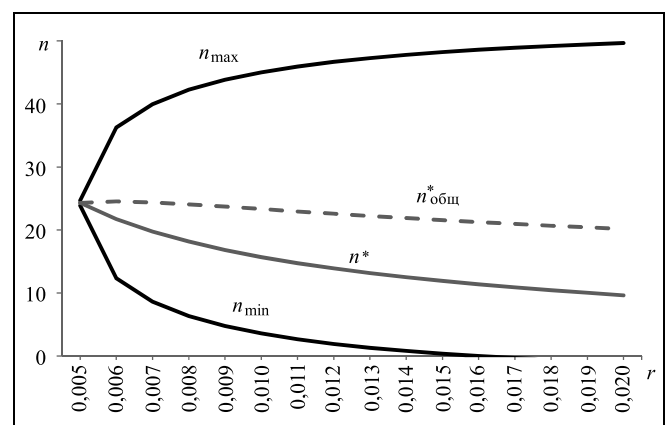
На рис. 2 штриховой линией изображен график функции, описывающей валовый доход (откладываемый по вспомогательной оси) всех агентов, производящих рассматриваемый продукт на рынке. Таким образом, количество агентов n^* , присутствующих на рынке и оптимальное с точки зрения одного агента, в общем случае отличается от количества агентов $\hat{n}$, оптимального с точки зрения их совокупного дохода. ♦

Найдем (с точностью до округления к «ближайшему» целому числу) диапазон значений параметра $n \in [n_{\min}, n_{\max}]$, при которых целевая функция (6) неотрицательна ($f(x^*) \geq 0$).

$$n_{\min, \max} = \frac{D^2}{8\alpha c} - \frac{1-\beta}{2\beta} \mp \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{1-\beta}{\beta} - \frac{D^2}{4\alpha c} \right)^2 - \frac{2}{r\alpha\beta} + \frac{D^2(1-\beta)}{\alpha c\beta}}. \quad (7)$$

Пример 3. Исследуем в условиях примера 2 зависимость (7) от значений параметров r и c — см. соответственно рис. 3 и рис. 4.

Диапазон $[n_{\min}, n_{\max}]$ может интерпретироваться как «емкость рынка». Отметим, что обычно под емкостью рынка понимают ограничение сверху на число его участников или на объем производимой ими продукции. В рассматриваемой в настоящей работе модели, благодаря учету трансфера технологий, рациональный объем рынка ограничен не только сверху, но и снизу. ♦

Рис. 3. График зависимостей значений $n_{\min}$, $n_{\max}$, n^* и $n_{\text{общ}}^*$ от параметра r

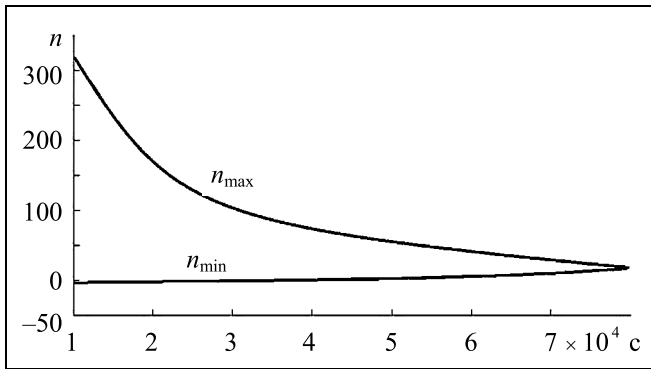


Рис. 4. График зависимостей значений $n_{\min}$ и $n_{\max}$ от параметра c

Итак, в смысле неотрицательности выигрышей однородных агентов, комбинация параметров модели (α , β , r , c , D) должна удовлетворять условиям:

$$\begin{cases} \left(\frac{1-\beta}{\beta} - \frac{D^2}{4\alpha c} \right)^2 - \frac{2}{r\alpha\beta} + \frac{D^2(1-\beta)}{\alpha c\beta} > 0, \\ \frac{D^2}{8\alpha c} - \frac{1-\beta}{2\beta} \mp \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{1-\beta}{\beta} - \frac{D^2}{4\alpha c} \right)^2 - \frac{2}{r\alpha\beta} + \frac{D^2(1-\beta)}{\alpha c\beta}} > 0. \end{cases} \quad (8)$$

При $n \in [n_{\min}, n_{\max}]$ целевая функция (6) неотрицательна ($f(x^*) \geq 0$), т. е. в ситуациях, когда однородных агентов слишком мало или слишком много, они не могут в рамках рассматриваемой модели обеспечить свою безубыточность.

Вернемся к рассмотрению функции (6). Найдем в рамках непрерывного приближения оптимальное значение параметра n^* , при котором целевая функция (6) достигает своего максимума (на рис. 3 в рамках примера 3 также представлена зависимость значения n^* от параметра r):

$$n^* = \frac{1}{\beta} \left(\sqrt{\frac{\beta}{2r\alpha}} - 1 \right) + 1.$$

Отсюда следует, что повышение эффективности применения агентом технологии (параметр r) ведет к сокращению оптимального числа агентов на рынке. С ростом значения параметра α это число уменьшается, а с ростом значения параметра β сначала возрастает, а затем убывает (имеет максимум).

Значение параметра n^* оптимально в смысле выигрыша одного агента. На рис. 3 в рамках примера 3 (см. штриховую линию) также представлена зависимость значения $n_{\text{общ}}^*$ (оптимального с точки зрения «общества в целом» — совокупного выигрыша всех действующих агентов, $nf(x^*)$) от параметра r . Можно заметить, что $n_{\text{общ}}^* \geq n^*$. Данную ситуацию можно интерпретировать, например, сле-

дующим образом: каждому агенту (в частности) выгодно, чтобы на рынке было меньше конкурентов, но для общества в целом, наоборот, чем больше конкурирующих компаний на рынке, тем ниже цена. Выше, переходя от выражения (4) к выражению (5), предполагалось, что все агенты выберут одинаковые действия. В Приложении доказывалось, что это предположение справедливо, т. е. равновесия игры однородных агентов могут быть только симметричными.

3. ДИНАМИКА ПОРОГОВОГО ПОВЕДЕНИЯ АГЕНТОВ

Рассмотрим модель динамики поведения агентов. Если в начальный момент времени они выбрали нулевые действия, то в соответствии с процедурой (3) на первом шаге они выберут действия

$$x_i^1 = \begin{cases} \frac{Dr_i}{2\alpha r_i + 1}, & \text{если } c \leq \frac{D^2 r_i}{2(2\alpha r_i + 1)}, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Аналитическое описание динамики на последующих шагах затруднительно, хотя численно может быть реализовано для каждой конкретной комбинации параметров модели. В целях получения аналитических результатов, рассмотрим частный случай, когда агенты выбирают либо нулевые действия, либо единичные: $x_i \in \{0, 1\}$, т. е. либо выпускать продукт ($x_i = 1$ — данный случай содержательно можно интерпретировать как полную загрузку производственных мощностей), либо не выпускать продукт ($x_i = 0$).

Пример 4. Пусть $r_i = 1/2$, $c_i = c$, $i \in N$, $D = 1$. Обозначим через $\sum_{j \neq i}^k x_j^k$, тогда легко найти наилучший ответ i -го агента:

$$x_i^k = \begin{cases} 1, & \text{если } \sum_{j \neq i}^k \in \left[\sum_{i=1}^{\min} (c); \sum_{i=1}^{\max} (c) \right] \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases} \quad (9)$$

где

$$\sum_{i=1}^{\min, \max} (c) = \frac{-(\alpha(\beta+1) + \beta(c-1)) \pm \sqrt{W(c)}}{2\alpha\beta}, \quad (10)$$

$$W(c) = (\alpha - \beta)(\alpha - \beta + 2\alpha\beta) + 2\alpha\beta c(\beta - 1 - 2\alpha) + \beta^2(\alpha^2 + c^2 - 2c) \quad (11)$$

$$\text{или } W(c) = \alpha^2(1 - \beta)^2 + \beta^2[(c - 1)^2 + \alpha(\alpha + 2c - 2)] - 2\alpha\beta(c + 1).$$

Выражение (9) можно интерпретировать как модель так называемого *порогового коллективного поведения* [1, 19, 20], при котором агент выбирает ненулевое действие, если его обстановка лежит в заданном диапазоне. Ниж-

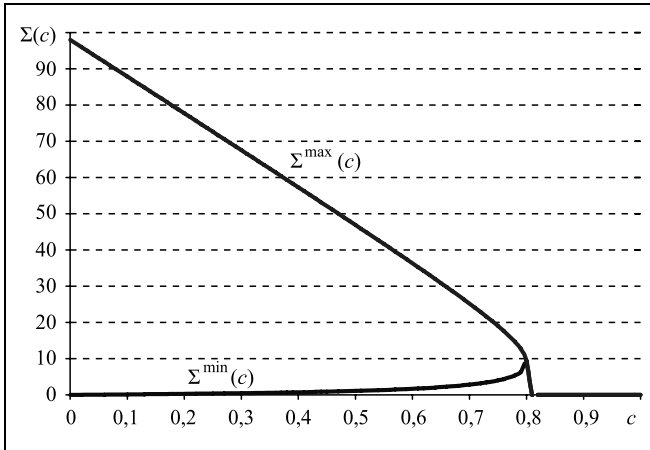


Рис. 5. Значения порогов конформности и антиконформности в примере 4

ная граница этого диапазона называется порогом *конформности*, верхняя — *порогом антиконформности*.

На рис. 5 изображены зависимости (10) — пороги конформности и антиконформности, для которых выражение (11) неотрицательно при $\alpha = 0,01$, $\beta = 1$, $c \in [0; \approx 0,8]$. ♦

К модели порогового поведения можно прийти и более простым способом. Пусть агенты выбирают либо нулевые действия, либо единичные: $x_i \in \{0; 1\}$.

Так как $I(x_i^k) = \begin{cases} 1, & x_i^k = 1; \\ 0, & x_i^k = 0 \end{cases}$, то $I(x_i^k) = x_i^k$. Обозначим через y^k ожидаемую долю агентов, действующих (выбирающих ненулевые действия) на k -м шаге: $y^k = \frac{1}{n} \sum_{i \in N} x_i^k$, $y_{-i}^k = \frac{1}{n-1} \sum_{j \neq i} x_j^k$. Пусть целевая функция агента имеет вид (сравните с функцией (1)):

$$f_i(y^k, x_i^k) = \left[D - \alpha y^k - \frac{1}{2(r_i + \beta \sum_{j \neq i} r_j x_j^k)} - c_i \right] x_i^k. \quad (12)$$

Положим $r_i = 1/2$ (эти величины можно интерпретировать как удельные переменные издержки агентов), $D = 1$. Из выражений (2), (3) и (12) следует, что

$$x_i^k = \begin{cases} 1, & \text{если } (1 - \alpha(y_{-i}^{k-1} + 1)) - \frac{1}{1 + \beta y_{-i}^{k-1}} \geq c_i, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases} \quad (13)$$

Предположим, что агенты различаются только значениями постоянных издержек, и априорным общим знанием [21] среди них является функция $F(\cdot)$ распределения постоянных издержек c . Из

выражения (13) следует, что при большом числе агентов динамика доли действующих агентов описывается следующим образом [19] (начальное значение y^0 будем считать заданным):

$$y^k = F\left(1 - \alpha y^{k-1} - \frac{1}{1 + \beta y^{k-1}}\right), \quad k = 1, 2, \dots \quad (14)$$

Выражение (14) описывает так называемую *многопороговую модель* динамики коллективного поведения.

Пример 5. Пусть $\alpha = 1,5$, $\beta = 33$, $y^0 = 0,1$, $F(z) = z$. Соответствующие графики функции (14) приведены на рис. 6 и 7. ♦

В заключение настоящего параграфа рассмотрим случай, когда неопределенными являются два параметра — и постоянные затраты, и эффективности агентов. Пусть r и c — независимые случайные величины, описываемые абсолютно непрерывным распределением $F_{c,r}(u, v)$. Соответствующие плотности будем обозначать символом p , т. е. $p_{c,r}(u, v) = p_c(u) p_r(v)$. Тогда, в соответствии с об-

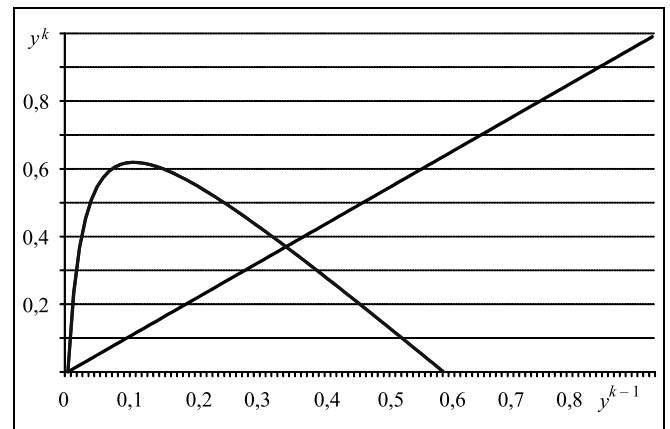


Рис. 6. График функции (14) в примере 5

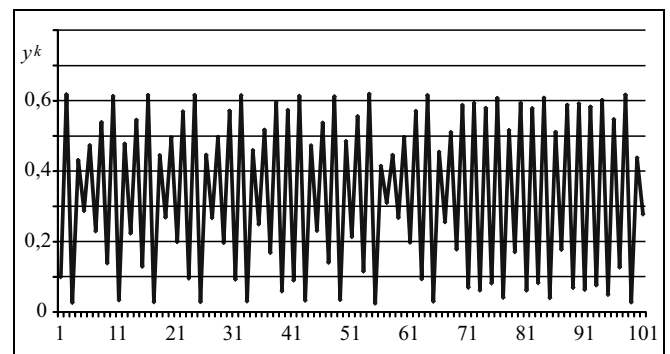


Рис. 7. Динамика доли действующих агентов в примере 5 (по горизонтали — такты времени)

шими моделями бинарного выбора, описанными в [19], доля y^k агентов, действующих на k -м шаге,

$$y^k = \int_{\left\{ (u, v) \mid D - \alpha y^{k-1} - \frac{1}{2v(1 + \beta y^{k-1})} \geq u \right\}} p_{c,r}(u, v) dudv =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} p_r(v) dv \int_{-\infty}^{\infty} p_c(u) du =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} F_c \left(D - \alpha y^{k-1} - \frac{1}{2v(1 + \beta y^{k-1})} \right) p_r(v) dv. \quad (15)$$

Пример 6. Пусть $F_c(u)$ — равномерное распределение на интервале $[0; 1]$, $F_r(v)$ — равномерное распределение на интервале $[1; R]$. Тогда из выражения (15) следует, что (сравните с формулой (14)):

$$y^k = \int_1^R \left(D - \alpha y^{k-1} - \frac{1}{2v(1 + \beta y^{k-1})} \right) dv =$$

$$= D - \alpha y^{k-1} - \frac{\ln(R)}{2(1 + \beta y^{k-1})}. \quad \blacklozenge$$

4. ОДИН ИННОВАТОР И НЕСКОЛЬКО ОДНОРОДНЫХ ИМИТАТОРОВ

В § 2 рассмотрен случай однородных агентов, когда на рынке функционируют n одинаковых агентов, т. е. $x_i = x$, $r_i = r$ и $c_i = c$. Предположим теперь, что на рынке могут функционировать два типа агентов: один *инноватор* с характеристиками X , R , C и однородные *имитаторы* с характеристиками x , r , c .

Рассмотрим следующий *базовый сценарий* коллективного поведения агентов: *инноватор* «входит» на рынок с инновационным продуктом/услугой в условиях, когда рассматриваемый продукт на данном рынке никто еще не производил. Когда *имитаторы* узнают о новом продукте, они «включаются» в игру и тоже начинают выпускать данный продукт. Как только инноватору становится известно о появлении на рынке имитаторов, он принимает решение покинуть рынок. В рамках рассматриваемого сценария предполагается, что инноватору «неинтересно» функционировать на рынке после того, как появились имитаторы (например, после окончания срока действия патента инноватора). Далее поведение имитаторов на рынке сводится к рассмотренному в § 2 случаю однородных агентов. Перейдем к описанию соответствующей формальной модели.

Предположим, что рациональность поведения любого агента (как инноватора, так и имитатора) заключается в стремлении к максимизации своей

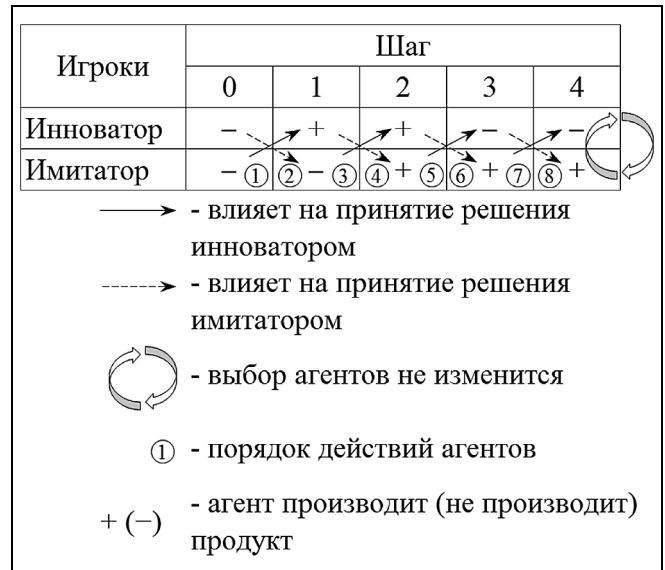


Рис. 8. Базовый сценарий: последовательность и результаты принятия решений инноватором и имитаторами

целевой функции выбором своего действия, которое будет наилучшим ответом на действие других игроков на предыдущем шаге (см. выражение (2)). Общая исследовательская схема, применяемая в настоящем параграфе, заключается в следующем:

— записываем целевую функцию агента с учетом действий остальных агентов на предыдущем шаге;

— дифференцируем ее по выбираемому агентом объему производства x (X) и приравниваем к нулю;

— из полученного выражения находим оптимальное значение действия (наилучшего ответа) агента x^* (X^*);

— исследуем целевую функцию с учетом оптимального значения действия агента.

Итак, пусть в нулевой момент времени на рассматриваемом рынке продукт еще не производится. Данная ситуация соответствует *шагу 0*, представленной на рис. 8 схемы.

Исследуем выбор агентами своих действий на последующих шагах.

Действие 1. Инноватор принимает решение войти на рынок и начать производство, так как ему выгодно внесение на рынок нового продукта/услуги. Запишем целевую функцию инноватора:

$$f_{innov,1}(X_1) = (D - \alpha X_1)X_1 - \frac{X_1^2}{2R} - C, \quad (16)$$

где X_1 — действие инноватора в первый момент времени, R — эффективность применяемых инноватором технологий, C — постоянные издержки инноватора.



Дифференцируем целевую функцию (16) по выбираемому инноватором объему производства X_1 , приравниваем производную к нулю и выражаем оптимальное значение действия инноватора:

$$X_1^* = D(2\alpha + R^{-1})^{-1}. \quad (17)$$

Подставим выражение (17) в целевую функцию инноватора (16):

$$f_{innov, 1}(X_1^*) = \frac{1}{2} D^2(2\alpha + R^{-1})^{-1} - C. \quad (18)$$

Из условия неотрицательности выражения (18) получаем, что комбинация параметров модели (α , R , C , D) должна удовлетворять условию:

$$\frac{1}{2} D^2(2\alpha + R^{-1})^{-1} - C \geq 0.$$

Действие 2. Имитатор ищет свой наилучший ответ на действие инноватора и других агентов-имитаторов на предыдущем (нулевом) шаге (когда никто из агентов не производит продукт):

$$\begin{aligned} f_{imit, 1}(x_1) &= (D - \alpha x_1)x_1 - \frac{x_1^2}{2r} - c, \\ x_1^* &= D(2\alpha + r^{-1})^{-1}, \\ f_{imit, 1}(x_1^*) &= \frac{1}{2} D^2(2\alpha + r^{-1})^{-1} - c. \end{aligned} \quad (19)$$

Для того чтобы имитатор принял решение пока не выходить на рынок (в соответствии с базовым сценарием), значение выражения (19) должно быть отрицательным. Получаем, что комбинация параметров модели (α , r , c , D) должна удовлетворять условию: $\frac{1}{2} D^2(2\alpha + r^{-1})^{-1} - c < 0$.

Действие 3. Инноватор продолжает производить продукцию, так как на предыдущем шаге имитаторы еще не начали функционировать на рынке (целевая функция и оптимальное действие инноватора не изменились по сравнению с действием 1).

Действие 4. Имитатор уже узнал о новом продукте (инноватор на предыдущем шаге начал производить продукт, и эта информация известна имитатору). Тогда:

$$\begin{aligned} f_{imit, 2}(x_2, X_1^*) &= \\ &= (D - \alpha(x_2 + X_1^*))x_2 - \frac{x_2^2}{2(r + \beta R)} - c, \end{aligned} \quad (20)$$

$$x_2^* = \frac{D - \alpha X_1^*}{2\alpha + (r + \beta R)^{-1}}, \quad (21)$$

подставим формулу (17) в выражение (21):

$$x_2^*(X_1^*) = D \frac{1 - \alpha(2\alpha + R^{-1})^{-1}}{2\alpha + (r + \beta R)^{-1}}. \quad (22)$$

Подставим формулы (17) и (22) в выражение (20):

$$\begin{aligned} f_{imit, 2}(x_2^*(X_1^*), X_1^*) &= \\ &= \frac{D^2(\alpha + R^{-1})^2}{2(2\alpha + (r + \beta R)^{-1})(2\alpha + R^{-1})^2} - c. \end{aligned}$$

Итак, комбинация параметров модели (α , R , c , D , r , β) должна удовлетворять условию:

$$\frac{D^2(\alpha + R^{-1})^2}{2(2\alpha + (r + \beta R)^{-1})(2\alpha + R^{-1})^2} - c \geq 0.$$

Действие 5. Инноватор примет решение уйти с рынка, так как имитаторы уже начали выпуск данного продукта (инноватор видит результаты предыдущего шага):

$$\begin{aligned} f_{innov, 2}(X_2, x_2^*(X_1^*)) &= \\ &= (D - \alpha(n x_2^*(X_1^*) + X_2))X_2 - \frac{X_2^2}{2(R + \beta nr)} - C, \end{aligned} \quad (23)$$

$$X_2^* = \frac{D - \alpha n x_2^*(X_1^*)}{2\alpha + (R + \beta nr)^{-1}}, \quad (24)$$

подставим выражение (22) в формулу (24):

$$\begin{aligned} X_2^*(x_2^*(X_1^*)) &= D(2\alpha + (R + \beta nr)^{-1})^{-1} \times \\ &\times \left(1 - \frac{\alpha n(r + \beta R)(\alpha + R^{-1})}{(2\alpha + R^{-1})(2\alpha(r + \beta R) + 1)} \right). \end{aligned} \quad (25)$$

Подставим выражения (22) и (25) в формулу (23):

$$\begin{aligned} f_{innov, 2}(X_2^*(x_2^*(X_1^*)), x_2^*(X_1^*)) &= \\ &= \frac{D^2}{2(2\alpha + (R + \beta nr)^{-1})} \times \\ &\times \left(1 - \frac{\alpha n(r + \beta R)(\alpha + R^{-1})}{(2\alpha + R^{-1})(2\alpha(r + \beta R) + 1)} \right)^2 - C. \end{aligned}$$

Итак, комбинация параметров модели (α , R , C , D , r , β) должна удовлетворять условию:

$$\begin{aligned} &\frac{D^2}{2(2\alpha + (R + \beta nr)^{-1})} \times \\ &\times \left(1 - \frac{\alpha n(r + \beta R)(\alpha + R^{-1})}{(2\alpha + R^{-1})(2\alpha(r + \beta R) + 1)} \right)^2 - C < 0. \end{aligned}$$

Действие 6. Имитатор, исходя из результатов предыдущего шага (имитатор пока не знает, что инноватор покинул рынок, и видит, что другие имитаторы выпускают данный продукт), продолжает выпуск продукта:

$$f_{imit, 3}(x_3, X_1^*) = (D - \alpha(nx_3 + X_1^*))x_3 - \frac{x_3^2}{2(r + \beta(R + (n-1)r))} - c, \quad (26)$$

$$x_3^* = \frac{D - \alpha X_1^*}{2\alpha n + (r + \beta(R + (n-1)r))^{-1}}, \quad (27)$$

подставим выражение (17) в формулу (27):

$$x_3^*(X_1^*) = D \frac{1 - \alpha(2\alpha + R^{-1})^{-1}}{2\alpha n + (r + \beta(R + (n-1)r))^{-1}}, \quad (28)$$

а выражения (17) и (28) — в формулу (26):

$$f_{imit, 3}(x_3^*(X_1^*), X_1^*) = \frac{D^2(\alpha + R^{-1})^2}{2(2\alpha n + (r + \beta(R + (n-1)r))^{-1})(2\alpha + R^{-1})^2} - c.$$

Итак, комбинация параметров модели (α , R , c , D , r , β) должна удовлетворять условию:

$$\frac{D^2(\alpha + R^{-1})^2}{2(2\alpha n + (r + \beta(R + (n-1)r))^{-1})(2\alpha + R^{-1})^2} - c \geq 0.$$

Таблица 1

Интерпретация ограничений на параметры модели (что произойдет при нарушении ограничений)

Шаг	Ограничения	Интерпретация
1	$f_I < 0$	Инноватору не выгодно входить на рынок
1	$f_{II} \geq 0$	Имитатор войдет на рынок раньше инноватора
2	$f_{III} < 0$	Имитатор не войдет на рынок, на котором работает один инноватор
3	$f_{IV} \geq 0$	Инноватор не покинет рынок, на котором работают имитаторы
3	$f_V < 0$	Имитатор покинет рынок, на котором работает инноватор
4	$f_{VI} < 0$	Имитатор покинет рынок, на котором работают другие имитаторы
—	$f_{VII} \leq 0$	При всех значениях параметра n целевая функция (6) будет отрицательна
—	$f_{VIII} \leq 0$	Значение $n_{\min}$ (см. выражение (7)) будет отрицательным
—	$f_{IX} \leq 0$	Значение $n_{\max}$ (см. выражение (7)) будет отрицательным

Действие 7. Инноватор ушел с рынка и не намерен возвращаться (целевая функция и оптимальное действие инноватора не изменились по сравнению с действием 5).

Действие 8. Только имитаторы остаются на рынке и продолжают выпускать продукт (см. «случай однородных агентов» в § 2 — выражения (4) — (6)).

Таким образом, систему ограничений на параметры модели (с учетом выражения (8)), при которых реализуется базовый сценарий коллективного поведения (см. рис. 8), можно записать в виде

$$\left\{ \begin{aligned} f_I &= \frac{1}{2}D^2(2\alpha + R^{-1})^{-1} - C \geq 0, \\ f_{II} &= \frac{1}{2}D^2(2\alpha + r^{-1})^{-1} - c < 0, \\ f_{III} &= \frac{D^2(\alpha + R^{-1})^2}{2(2\alpha + (r + \beta R)^{-1})(2\alpha + R^{-1})^2} - c \geq 0, \\ f_{IV} &= \frac{D^2}{2(2\alpha + (R + \beta nr)^{-1})} \times \\ &\times \left(1 - \frac{\alpha n(r + \beta R)(\alpha + R^{-1})}{(2\alpha + R^{-1})(2\alpha(r + \beta R) + 1)} \right)^2 - C < 0, \\ f_V &= \frac{D^2(\alpha + R^{-1})^2}{2(2\alpha n + (r + \beta(R + (n-1)r))^{-1})(2\alpha + R^{-1})^2} - c \geq 0, \\ f_{VI} &= \frac{1}{4}D^2 \left(\alpha n + \frac{1}{2r(1 + \beta(n-1))} \right)^{-1} - c \geq 0, \\ f_{VII} &= \left(\frac{1-\beta}{\beta} - \frac{D^2}{4\alpha c} \right)^2 - \frac{2}{r\alpha\beta} + \frac{D^2(1-\beta)}{\alpha c\beta} > 0, \\ f_{VIII} &= \frac{D^2}{8\alpha c} - \frac{1-\beta}{2\beta} - \\ &- \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{1-\beta}{\beta} - \frac{D^2}{4\alpha c} \right)^2 - \frac{2}{r\alpha\beta} + \frac{D^2(1-\beta)}{\alpha c\beta}} > 0, \\ f_{IX} &= \frac{D^2}{8\alpha c} - \frac{1-\beta}{2\beta} + \\ &+ \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{1-\beta}{\beta} - \frac{D^2}{4\alpha c} \right)^2 - \frac{2}{r\alpha\beta} + \frac{D^2(1-\beta)}{\alpha c\beta}} > 0. \end{aligned} \right. \quad (29)$$

Приведем (табл. 1) содержательные интерпретации нарушения системы неравенств (29) (ограничений на параметры модели).

Систему ограничений (29) на параметры модели, в рамках которых реализуется базовый сценарий, можно анализировать как в аспекте задач параметрического управления, так и в аспекте содержательных интерпретаций соответствующих ограничений. Приведем пример такого анализа,

свидетельствующего, что существенными (в частности, для отнесения агента к инноваторам или имитаторам) являются значения параметров r и c .

Пример 7. В качестве иллюстрации представим комбинации значений R и r , удовлетворяющие системе неравенств (29) — см. затененную область на рис. 9 — при значениях параметров (см. также примеры 1–3): $D = 2\,500$; $\alpha = 0,7$; $\beta = 0,16$; $C = 300\,000$; $c = 60\,000$; $n = 18$.

Проанализируем отмеченные на рис. 9 точки. Точка A_1 не удовлетворяет системе неравенств (29): не выполняется неравенство f_V . В данной точке значение параметра R значительно (более чем в 40 раз) выше значения параметра r . Данную ситуацию можно интерпретировать следующим образом: из-за существенной разницы эффективности имитатор будет не в состоянии перенять опыт инноватора и начать производить новый продукт. Комбинация значений параметров R и r в точке B_1 удовлетворяет системе неравенств. В точке E_1 не выполняются неравенства $f_V \div f_{IX}$, т. е. имитатор покинет рынок на шаге 3 (значение параметра r слишком низкое, поэтому производственные затраты для имитатора будут высокими); также при всех значениях параметра n целевая функция (6) будет отрицательна. В точке F_1 не выполняется неравенство f_{II} : имитатор войдет на рынок раньше инноватора (значения параметров R и r примерно равны). В точке G_1 не выполняется неравенство f_I : инноватору не выгодно входить на рынок (значение параметра R слишком низкое, поэтому производственные затраты для инноватора будут высокими).

По аналогии рассмотрим прочие комбинации значений c , C , r и R , а также комбинацию отношений C/c и R/r , удовлетворяющих системе неравенств (29) — см. рис. 10–13. На данных рисунках в точках $B_1 \div B_5$ комбинации значений рассматриваемых параметров, удовлетворяющие заданной системе неравенств, совпадают.

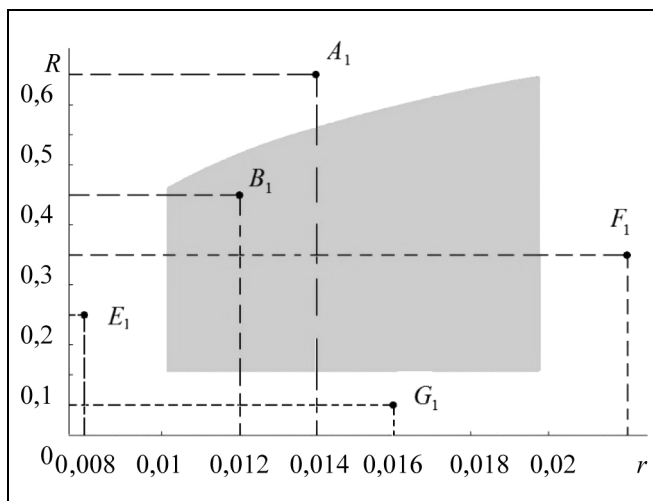


Рис. 9. Комбинации значений параметров R и r , удовлетворяющие системе неравенств (29)

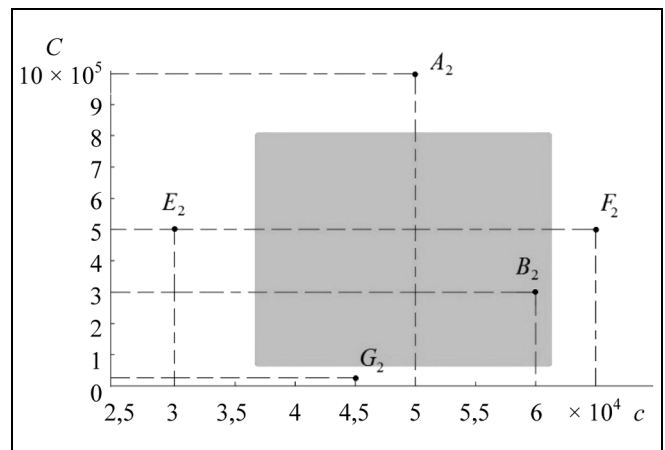


Рис. 10. Комбинации значений параметров C и c (при $R = 0,4$; $r = 0,012$), удовлетворяющие системе неравенств (29)

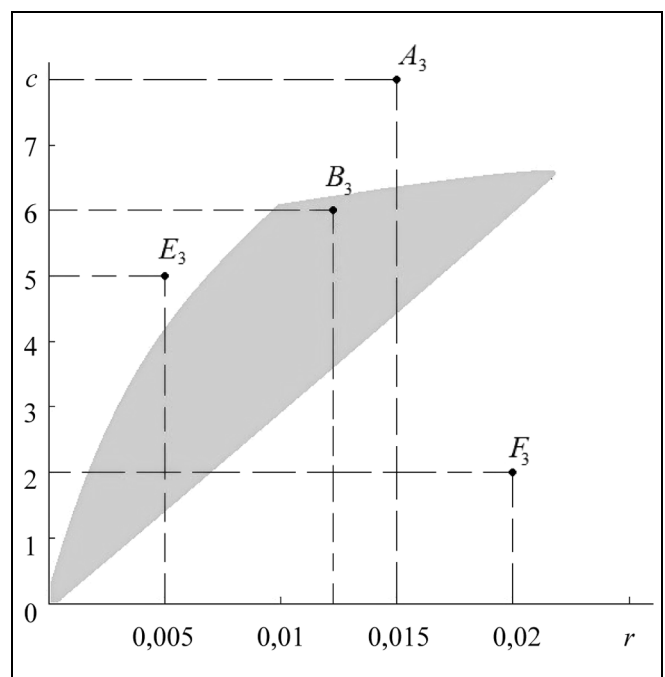


Рис. 11. Комбинации значений параметров c и r , удовлетворяющие системе неравенств (29)

На рис. 12 представлен частный случай, когда значения параметров $c = 60\,000$, $r = 0,012$ фиксированы, т. е. осуществлялся подбор значений параметров C и R , удовлетворяющих системе неравенств (29), при прочих заданных значениях параметров моделей. На рис. 13 представлен более общий случай — когда ищутся комбинации значений всех четырех параметров: c , C , r и R , удовлетворяющих системе неравенств (29) (значения рассматриваемых параметров в точках H , K и Z на рис. 12 и 13 совпадают).

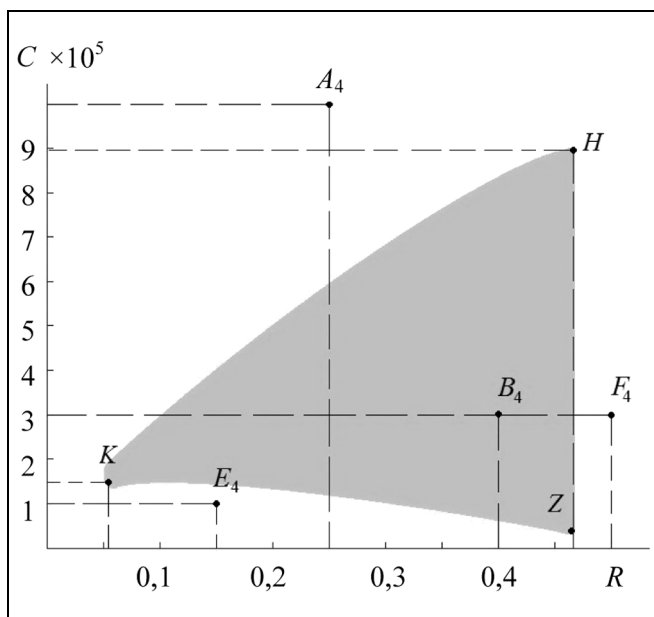


Рис. 12. Комбинации значений параметров C и R , удовлетворяющие системе неравенств (29)

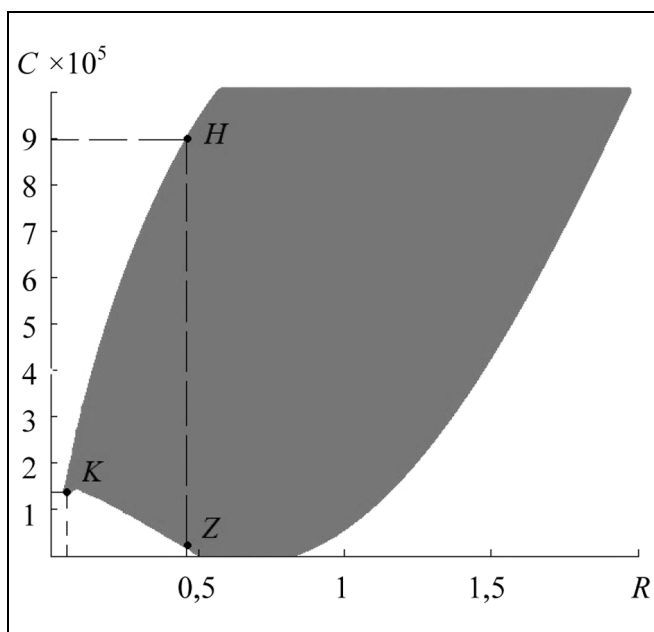


Рис. 13. Комбинации значений параметров C и R , удовлетворяющие системе неравенств (29); значения параметров c и r не фиксированы

Полученные результаты анализа представлены в сводной табл. 2. ♦

Итак, из рассмотренного примера 7 можно сделать вывод, что существуют такие комбинации параметров: c , C , r и R , которые удовлетворяют сис-

теме неравенств (29). Отметим, что базовый сценарий реализуется при выполнении условий:

— значение параметра R должно быть выше значения параметра r (иначе эффективность инноватора будет ниже или равна эффективности имитатора);

— если значение параметра R будет во много раз превышать значение параметра r , то, возможно, из-за существенной разницы эффективностей имитатор будет не в состоянии перенять опыт инноватора и начать производить новый продукт;

— если значения параметров R и r будут слишком низкими, то производственные затраты для инноватора и имитатора будут высокими, и агенты понесут убытки;

— если постоянные затраты агентов (значения параметров C и c) будут слишком высокими, то инноватор и имитаторы понесут убытки;

— постоянные затраты инноватора выше постоянных затрат имитаторов ($C > c$ — инноватор первый осваивает рынок и несет основной груз затрат на «исследования и разработки»).

Для простоты рассматривалась модель коллективного поведения агентов, в которой на рынок «входит» с инновационным продуктом/услугой один инноватор. Полностью по аналогии можно описать случай, когда имеется не один, а несколько инноваторов.

Таблица 2

Неравенства из системы (29),
которые нарушаются в характерных точках, см. рис. 9—13

Параметры	Точки	Неравенства, которые нарушаются
(R, r)	A_1	f_V
	E_1	$f_V \div f_{IX}$
	F_1	f_{II}
	G_1	f_I
(C, c)	A_2	f_I
	E_2	f_{II}, f_{VIII}
	F_2	f_V
	G_2	f_{IV}
(c, r)	A_3	$f_V \div f_{IX}$
	E_3	$f_{VI} \div f_{IX}$
	F_3	f_{II}, f_{VIII}
(C, R)	A_4	f_I
	E_4	f_{IV}
	F_4	f_V

5. ДИНАМИКА ПОРОГОВОГО ПОВЕДЕНИЯ АГЕНТОВ: ИННОВАТОРЫ И ИМИТАТОРЫ

В рамках модели «инновационной олигополии Курно» в § 2 рассмотрена динамика порогового поведения агентов, различающихся своими постоянными издержками. Однако это поведение (см. рис. 6 и 7) отличается от поведения, соответствующего описанному в § 4 базовому сценарию (см. рис. 8). Модифицируем модель порогового поведения агентов таким образом, чтобы она давала ту же качественную картину динамики доли действующих агентов, что и в рамках базового сценария.

Пусть $x_i \in \{0; 1\}$ и имеются две группы агентов — L и J — «инноваторы» (с эффективностями ρr и затратами ρc , где $\rho \geq 1$) и «имитаторы» (с эффективностями r и затратами c), причем первые составляют долю $\gamma \in [0; 1]$ от всех агентов ($L \cup J = N$, $L \cap J = \emptyset$, $\gamma = |L|/(|L| + |J|)$). Обозначим через y^k (z^k) ожидаемую долю инноваторов (имитаторов), действующих (выбирающих ненулевые действия) на k -м шаге.

В введенных обозначениях долю $u^k \in [0; 1]$ агентов, действующих в k -й момент времени, можно записать как

$$u^k = \gamma y^k + (1 - \gamma) z^k. \quad (30)$$

Положим $r_i = 1/2$, $D = 1$. Пусть целевая функция агента-инноватора имеет вид (сравните с выражениями (1) и (12)):

$$f_i(y^k, z^k, x_i^k) = (1 - \alpha_L(\gamma y^k + (1 - \gamma)z^k))x_i^k - \frac{(x_i^k)^2}{\rho} - \rho c_i x_i^k, \quad i \in L, \quad (31)$$

а целевая функция агента-имитатора имеет вид (сравните с выражениями (1) и (12)):

$$f_i(y^k, z^k, x_i^k) = (1 - \alpha_J(\gamma y^k + (1 - \gamma)z^k))x_i^k - \frac{(x_i^k)^2}{1 + \beta[\gamma \rho y^k + (1 - \gamma)z^k]} - c_i x_i^k, \quad i \in J. \quad (32)$$

Содержательно, инноваторы и имитаторы различаются значениями констант α_L и α_J (эластичностями цены по «объему производства»), эффективностями и постоянными издержками, а также тем, что переменные издержки инноваторов не зависят от действий других агентов, а переменные издержки имитаторов уменьшаются (благодаря «пе-

редаче технологий» или «эффекту масштаба» и др. — см. выше) с ростом числа действующих агентов.

Из выражений (2), (3) и (31), (32) следует, что

$$x_i^k = \begin{cases} 1, & \text{если } (1 - \alpha_L(\gamma y^k + (1 - \gamma)z^k)) - 1/\rho \geq \rho c_i, \\ i \in L, \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases} \quad (33)$$

$$x_i^k = \begin{cases} 1, & \text{если } (1 - \alpha_J(\gamma y^k + (1 - \gamma)z^k)) - \\ - \frac{1}{1 + \beta[\gamma \rho y^k + (1 - \gamma)z^k]} \geq c_i, & i \in J. \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases} \quad (34)$$

Предположим, как и ранее, что агенты различаются только значениями постоянных издержек, имеющих функцию распределения $F(\cdot)$. Из выражений (33) и (34) следует, что при большом числе агентов динамика доли действующих агентов описывается следующим образом [2]:

$$y^k = F\left(\frac{1}{\rho}\left(1 - \alpha(\gamma y^{k-1} + (1 - \gamma)z^{k-1}) - \frac{1}{\rho}\right)\right), \quad k = 1, 2, \dots, \quad (35)$$

$$z^k = F\left(1 - \alpha(\gamma y^{k-1} + (1 - \gamma)z^{k-1}) - \frac{1}{1 + \beta[\gamma \rho y^{k-1} + (1 - \gamma)z^{k-1}]}\right), \quad k = 1, 2, \dots \quad (36)$$

Проанализируем грубые (не учитывающие «равновесные» доли действующих агентов различных типов) условия реализации базового сценария при $c \in [c_{\min}; c_{\max}]$:

— в начальный момент времени один инноватор принимает решение войти на «пустой» рынок и начать производство, так как ему выгодно внесение на рынок нового продукта/услуги:

$$1 - 1/\rho \geq \rho c_{\min}; \quad (37)$$

— имитатору (одному) в отсутствие инноваторов не выгодно входить на рынок: $c_{\min} \geq 0$ (что в рамках рассматриваемых моделей выполнено всегда);

— имитаторам (всем вместе) выгодно работать на рынке одновременно с инноваторами:

$$1 - \alpha_J - \frac{1}{1 + \beta(\gamma \rho + 1 - \gamma)} \geq c_{\min}; \quad (38)$$

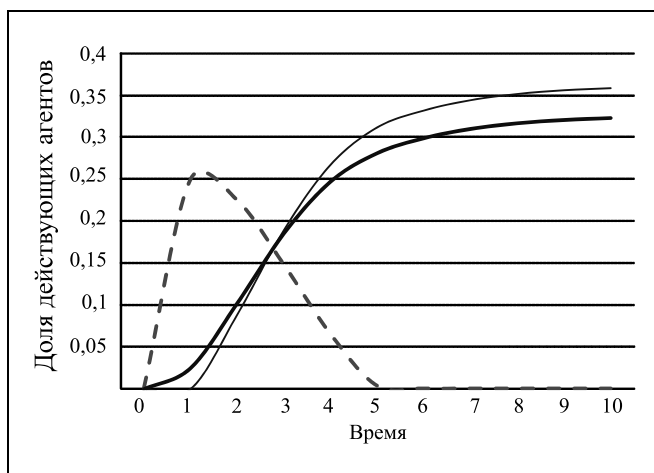


Рис. 14. Динамика доли действующих агентов в рамках базового сценария: --- — инноваторы; — — имитаторы; — все агенты

— инноваторам не выгодно работать одновременно с имитаторами:

$$1 - \alpha_L - 1/\rho < \rho c_{\max}; \quad (39)$$

— в итоге на рынке остаются только имитаторы, и им выгодно работать в отсутствии инноваторов:

$$1 - \alpha_J(1 - \gamma) - \frac{1}{1 + \beta(1 - \gamma)} \geq c_{\min}. \quad (40)$$

Итак, комбинация параметров модели, удовлетворяющая системе ограничений (37)–(40), позволяет получить ту же качественную картину динамики доли действующих агентов, что и в рамках базового сценария.

Пример 8. Пусть $\alpha_L = 2$, $\alpha_J = 0,1$, $\beta = 2$, $\gamma = 0,1$, $\rho = 2$, $c_{\min} = 0$, $c_{\max} = 1$, $F(x) = x$, $y^0 = 0$, $z^0 = 0$. При данных значениях параметров модели (отметим, что эти значения удовлетворяют ограничениям (37)–(40)) система (35), (36) демонстрирует поведение, соответствующее базовому сценарию (рис. 14) — сначала агенты бездействуют, затем начинают действовать инноваторы, потом — имитаторы, затем инноваторы уходят с рынка и на нем остаются одни имитаторы.

Динамика доли действующих агентов (см. жирную кривую на рис. 14) имеет традиционный логистический вид, являясь при этом «суперпозицией» (см. выражение (30)) доли действующих инноваторов (штриховая кривая на рис. 14) и доли действующих имитаторов (непрерывная кривая на рис. 14).

В рассмотренном примере доля инноваторов составляет 10 %. При существенном ее изменении (как увеличении, так и уменьшении) характер динамики качест-

венно изменяется. Поэтому можно выдвинуть гипотезу о том, что для каждой популяции агентов существует соответствующая «оптимальная» доля инноваторов. ♦

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассмотрение предложенной модели «инновационной олигополии Курно» (как в рамках теоретико-игровой постановки, так и в аспекте динамики коллективного поведения агентов) позволило учесть ряд эффектов:

— конкуренцию на рынке инновационного продукта;

— ограниченность емкости рынка и существование оптимального числа действующих на нем агентов;

— комплементарность инновационных технологий;

— конформное поведение агентов и др.,

а также получить условия реализации базового сценария динамики взаимодействия инноваторов и имитаторов (с учетом возможностей их входа на рынок и ухода с него).

Перспективными направлениями будущих исследований представляются постановка и решение соответствующих задач управления [18] — управления инновациями [5] (например, выбор управляемых параметров модели, приводящих к реализации базового сценария, и/или к максимизации удельной прибыли инноваторов, и/или к снижению равновесной цены и т. п.), а также обобщение предложенных моделей на случаи: общего вида функции переменных издержек типа Кобба — Дугласа, нетривиальной взаимной информированности агентов [21] и динамики спроса на инновационную продукцию со стороны ее потребителей.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство симметричности равновесия в модели, рассмотренной в § 2. В силу монотонности функций затрат, единственной альтернативой выбору действия (5) для агента является нулевой объем производства. Предположим, что m агентов из n , функционирующих на рынке, предпочли не производить рассматриваемую продукцию (обозначим их «коалицию» нижним индексом « L »). Соответственно, целевая функция таких агентов тождественно равна нулю (см. выражение (1)). Исследуем, как наличие таких агентов повлияет на целевую функцию и действие остальных (работающих агентов из



множества $N \setminus L$ участников рынка ($x_l > 0$). Запишем целевую функцию

$$f_l(x_l) = (D - \alpha(n - m)x_l)x_l - \frac{x_l^2}{2r(1 + \beta(n - m - 1))} - c, \\ l \in N \setminus L. \quad (П1)$$

Продифференцируем вогнутую функцию (П1) по x_l , приравняв производную нулю и выразим оптимальное значение x_l^* :

$$x_l^* = D \left(2\alpha(n - m) + \frac{1}{r(1 + \beta(n - m - 1))} \right)^{-1}. \quad (П2)$$

Найдем значение целевой функции j -го агента ($j \in L$), если он выберет ненулевое действие ($x_j > 0$), причем все остальные агенты своих действий не меняют:

$$f_j(x_j, x_l^*) = (D - \alpha((n - m)x_l^* + x_j))x_j - \\ - \frac{x_j^2}{2r(1 + \beta(n - m))} - c. \quad (П3)$$

Подставим оптимальное значение (П2) в выражение (П3):

$$f_j(x_j, x_l^*) = \frac{1 + r\alpha(n - m)(1 + \beta(n - m - 1))}{1 + 2r\alpha(n - m)(1 + \beta(n - m - 1))} Dx_j - \\ - \frac{1 + 2r\alpha(1 + \beta(n - m))}{2r(1 + \beta(n - m))} x_j^2 - c. \quad (П4)$$

Продифференцируем функцию (П4) по x_j , приравняв производную нулю и выразим оптимальное значение действия агента (x_j^*):

$$x_j^* = D \times \\ \times \frac{r(1 + \beta(n - m))(1 + r\alpha(n - m)(1 + \beta(n - m - 1)))}{(1 + 2r\alpha(1 + \beta(n - m)))(1 + 2r\alpha(n - m)(1 + \beta(n - m - 1)))}. \quad (П5)$$

Правая часть выражения (П5) неотрицательна, так как $m < n$; $r, D, \alpha, \beta \geq 0$, а если все эти параметры положительны, то строго положительна. Таким образом, j -му агенту будет выгодно выбрать ненулевое действие, следовательно, выбор частью однородных агентов нулевых действий не является равновесием их игры.

ЛИТЕРАТУРА

- Бреер В.В. Модели конформного поведения // Проблемы управления. — 2014. — № 1. — С. 2—13; № 2. — С. 2—17.
- Губанов Д.А., Новиков Д.А., Чхартшвили А.Г. Социальные сети: модели информационного влияния, управления и противоборства. — М.: Физматлит, 2010. — 228 с.
- Гриценко Д.В. Динамическая эффективность равновесий Курно и Бертрона в дифференцированной олигополии в условиях конкуренции в области инновационных разработок // Экономические науки. — 2009. — № 54. — С. 312—316.
- Затонский А.В., Контева А.В. Теоретико-игровое моделирование прибыли предприятий олигополистической отрасли с учетом их производственных мощностей // Научный журнал НИУ ИТМО. Сер. «Экономика и экологический менеджмент». — 2014. — № 4. — С. 147—155.
- Новиков Д.А., Иващенко А.А. Модели и методы организационного управления инновационным развитием фирмы. — М.: Ленанд, 2006. — 332 с.
- Belleflamme P., Vergari C. Incentives to Innovate in Oligopolies // The Manchester School. — 2011. — Vol. 79, N 1. — P. 6—28.
- Norðdick P., Persson L., Teg G. Acquisitions, Entry and Innovation in Network Industries / IFN Working Paper No. 867. — Stockholm: Research Institute of Industrial Economics, 2011. — 38 p.
- Губанов Д.А., Коргин Н.А., Новиков Д.А., Райков А.Н. Сетевая экспертиза. — М.: Эгвес, 2011. — 166 с.
- Иващенко А.А., Нижегородцев Р.М., Новиков Д.А. Инновационная и инвестиционная политика: модель смены технологий // Проблемы управления. — 2005. — № 5. — С. 55—57.
- Bischi G., Lamantia F. A Dynamic Model of Oligopoly with R&D Externalities Along Networks. Part I. // Mathematics and Computers in Simulation. — 2012. — N 84. — P. 51—65.
- Jansen J. On Competition and the Strategic Management of Intellectual Property in Oligopoly / Discussion Paper No. 339. — Berlin: Max Planck Institute, 2010. — 42 p.
- Kamien M. Patent Licensing / Handbook of Game Theory. — N.-Y.: Elsevier, 1992. — Vol. 1. — P. 332—354.
- Braginsky S., Gabdrakhmanov S., Ohyama A. A Theory of Competitive Industry Dynamics with Innovation and Imitation // Review of Economic Dynamics. — 2007. — N 10. — P. 729—760.
- Mas-Collel A., Whinston M.D., Green J.R. Microeconomic theory. — N.-Y.: Oxford Univ. Press, 1995. — 981 p.
- Новиков Д.А. Модели обучения в процессе работы // Управление большими системами. — 2007. — Вып. 19. — С. 5—22.
- Schipper B. Imitators and optimizers in Cournot oligopoly // Journal of Economic Dynamics and Control. — 2002. — N 12. — P. 1981—1990.
- Tramontana F., Gardini L., Puu T. Mathematical Properties of a Combined Cournot-Stackelberg Model / WP-EMS Working Papers Series in Economics, Mathematics and Statistics. — 2010. — N 7. — 26 p.
- Novikov D. Theory of Control in Organizations. — N.-Y.: Nova Science Publishers, 2013. — 341 p.
- Бреер В.В. Теоретико-игровые и стохастические модели коллективного бинарного выбора // Управление большими системами. — 2015 (в печати).
- Бреер В.В. Теоретико-игровые модели конформного поведения // Автоматика и телемеханика. — 2012. — № 10. — С. 111—126.
- Novikov D., Chkhartishvili A. Reflexion and Control: Mathematical Models. — Leiden: CRC Press, 2014. — 298 p.

Статья представлена членом редакционной коллегии
Ф.Т. Алескеровым.

Бреер Владимир Валентинович — канд. техн. наук, бизнес-аналитик, ЗАО «Авиахэлп Групп», г. Москва, breer@live.ru,

Мирзоян Гагик Леонович — канд. техн. наук, ст. экономист, Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, г. Москва, mirzoyangl@yandex.ru,

Новиков Дмитрий Александрович — чл.-корр. РАН, зам. директора, Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, г. Москва, novikov@ipu.ru.

СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ОЦЕНОК ПАРАМЕТРОВ МОДЕЛИ РАША, ПОЛУЧЕННЫХ МЕТОДАМИ МАКСИМАЛЬНОГО ПРАВДОПОДОБИЯ И НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ

А.А. Маслак, С.И. Моисеев, С.А. Осипов

В имитационном эксперименте получены и исследованы статистические характеристики оценок параметров модели Раша, полученных методом максимального правдоподобия и методом наименьших квадратов. Проведен сравнительный анализ этих двух наборов оценок, который показал, что оценки параметров модели на основе метода наименьших квадратов ближе к сгенерированным данным. Рассмотрена специфика оценок, получаемых этими методами. Определено влияние пропусков данных на точность вычисления параметров дихотомической модели Раша.

Ключевые слова: латентная переменная, измерение, модель Раша, точность оценок, метод максимального правдоподобия, метод наименьших квадратов.

ВВЕДЕНИЕ

Специфика управления в социальных системах обусловлена тем, что многие переменные являются латентными (скрытыми). Примерами латентных переменных служат уровень жизни населения, качество образования, личностные качества и многие другие.

Непосредственно измерить латентную переменную нельзя, латентная переменная проявляется через так называемые индикаторные переменные. Например, латентная переменная «уровень жизни населения» согласно информации, ежегодно публикуемой Росстатом, характеризуется 36-ю разнородными индикаторными переменными, которые измеряются в рублях, процентах, квадратных метрах, килограммах и других единицах. Этот набор индикаторных переменных является операциональным определением латентной переменной. Примерами индикаторных переменных служат средняя зарплата в регионе, процент безработицы, площадь жилищ, потребление мяса, яиц, приходящихся в среднем на одного жителя и др. Фактически латентная переменная «уровень жизни населения» представляет собой системный показатель, который необходим для сравнения и мониторинга регионов, а также и формирования

оптимальной политики управления социальной сферой в целом.

В рамках теории измерения латентных переменных на основе операционального определения осуществляется оценивание латентной переменной на интервальной шкале. Эта теория приобретает все большую популярность при исследовании социальных и экономических систем. Ядро теории измерения латентных переменных составляет семейство моделей Раша, в которых индикаторные переменные измеряются на шкале Лайкерта [1–4].

Однако многие латентные переменные определяются через непрерывные количественные индикаторные переменные [5, 6]. Примером служит рассмотренная выше латентная переменная «уровень жизни населения». Для того, чтобы воспользоваться теорией измерения латентных переменных, обычно применяется категоризация индикаторных переменных [6–8]. Однако при категоризации (сегментировании области значения переменных) часть информации теряется, что отмечено в работах [9–11]. Показано, что точность измерения латентной переменной существенно зависит от способа дискретизации количественной индикаторной переменной, в том числе от числа категорий [12–14]. В известных работах точность оценок рассматривается только в случае использо-



вания категоризованных индикаторных переменных [2, 15–18]. Поэтому представляет интерес исследование непосредственного использования непрерывных количественных индикаторных переменных в моделях Раша. Одним из методов, позволяющих выполнить такое исследование, является метод наименьших квадратов (МНК), который в настоящей работе выбран благодаря доступности соответствующего программного обеспечения.

1. ЦЕЛЬ ИССЛЕДОВАНИЯ

В большинстве пакетов для вычисления параметров модели Раша (CONQUEST, FACETS, JMETRIK, MINISTEP, PARSCALE, QUEST, RUMM, WINMIRA, WINSTEPS и др.) применяются разновидности метода максимального правдоподобия (ММП) и парных сравнений [6]. Наиболее известны диалоговые системы RUMM и WINSTEPS в различных модификациях [6]. Отличительная особенность этих пакетов заключается в том, что в случае адекватности данных модели измерения, сумма значений индикаторных переменных (тестовый балл) является достаточной статистикой. Это означает, что испытуемые, набравшие один и тот же тестовый балл (независимо от того, на какие задания они ответили правильно) получают одну и ту же оценку на шкале латентной переменной. Это принципиально важно для получения оценок параметров модели на линейной шкале.

В данной работе показано, что МНК позволяет описать результаты тестирования с большей точностью, чем ММП. Однако принципиальный недостаток МНК заключается в том, что испытуемые с одним и тем же тестовым баллом могут получить различные оценки уровня их подготовленности. Это означает, что при использовании МНК тестовый балл не является достаточной статистикой, что противоречит основам теории измерения латентных переменных.

Цель данной работы заключается в сравнительном анализе оценок параметров модели Раша, полученных методом максимального правдоподобия и методом наименьших квадратов. Для ее достижения необходимо решить следующие задачи:

- определить, в какой степени оценки, получаемые МНК, нарушают принцип достаточности тестового балла (испытуемые, имеющие один и тот же тестовый балл, должны иметь одну и ту же оценку на шкале латентной переменной);
- выполнить сравнительный анализ точности вычисления параметров модели Раша двумя методами;

— оценить влияние пропусков данных на точность вычисления параметров модели Раша двумя методами.

В качестве модели исследования выбрана дихотомическая модель Раша для измерения латентных переменных [3]. Акцент на точности измерения латентной переменной объясняется практической важностью результатов измерения [16–18].

В основе модели Раша лежит логистическая функция, позволяющая найти вероятность правильного ответа i -го испытуемого с уровнем подготовленности β_i на j -е задание с трудностью δ_j

$$p_{ij} = \frac{e^{\beta_i - \delta_j}}{1 + e^{\beta_i - \delta_j}}. \quad (1)$$

В классической дихотомической модели Раша элементы x_{ij} матрицы данных принимают значения:

$x_{ij} = 1$, если i -й испытуемый правильно выполнил j -е задание;

$x_{ij} = 0$, если i -й испытуемый неправильно выполнил j -е задание.

Если i -й испытуемый не решал j -е задание, то значение индикаторной переменной «равно» пробелу.

2. ДАННЫЕ

Исследование проводилось на основе имитационного эксперимента, поскольку модель измерения нелинейная, и аналитические методы исследования неэффективны [6, 14]. Для решения поставленных задач использовалась следующая схема. Уровень подготовленности испытуемых (объекты) и трудность тестовых заданий (индикаторы) варьируется в одном и том же диапазоне от $-4,0$ до $+4,0$ логит. Число тестовых заданий выбрано равным 30, равномерно распределенных в диапазоне от $-4,0$ до $+4,0$ логит. Подготовленность испытуемых варьировалась на 20 уровнях в двукратной повторности (всего 40 уровней), равномерно распределенных в том же диапазоне. Двукратное повторение уровней подготовленности необходимо для оценки точности их измерения.

Данные эксперимента были сгенерированы в соответствии с дихотомической моделью Раша, т. е. данные априорно соответствовали модели измерения [6, 14].

Доля пропусков (пропущенных данных в матрице) была выбрана равной 10 %. Координаты элементов с пропущенными данными выбирались в матрице случайным образом.

Матрица сгенерированных данных без пропусков представлена в табл. 1.

Таблица 1

Матрица сгенерированных данных на основе дихотомической модели Раша

Данные	-4,00	-3,72	-3,45	-3,17	-2,90	-2,62	-2,35	-2,07	-1,79	-1,52	-1,24	-0,97	-0,69	-0,41	-0,14	0,14	0,41	0,69	0,97	1,24	1,52	1,79	2,07	2,35	2,62	2,90	3,17	3,45	3,72	4,00
-4,00	0	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-4,00	0	0	1	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-3,58	1	1	0	0	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-3,58	1	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-3,16	1	1	0	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-3,16	1	1	1	1	1	1	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-2,74	1	1	1	1	1	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-2,74	1	1	0	1	0	1	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-2,32	1	1	1	1	1	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-2,32	1	1	1	0	0	0	1	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-1,90	1	0	1	1	1	0	1	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
-1,90	1	1	0	1	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-1,47	1	1	1	1	1	1	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-1,47	1	1	1	1	1	0	1	1	1	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-1,05	1	1	1	1	1	1	1	0	1	0	0	0	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-1,05	1	1	1	1	0	1	0	1	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-0,63	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-0,63	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-0,21	1	1	1	1	1	0	1	1	1	0	0	1	1	0	1	1	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
-0,21	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	0	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0,21	1	1	1	0	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
0,21	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
0,63	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	0	1	1	1	1	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
0,63	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	1	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0
1,05	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1,05	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	0	1	1	1	0	0	0	1	0	1	0	1	0	0	0	0	0
1,47	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	0	1	0	1	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0
1,47	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0
1,90	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0
1,90	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
2,32	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	1	1	1	1
2,32	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	0	0	0	1	1	1	1	0	1	0	0	0
2,74	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0
2,74	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	1
3,16	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	0
3,16	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	0	1	1	1	0
3,58	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	1	0
3,58	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0
4,00	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	0	1	0	0	1
4,00	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0

3. МЕТОД

Решение сформулированных в § 1 задач осуществлялось в рамках теории измерения латентных переменных. Для получения оценок латентной переменной использовалась диалоговая система ИЛП (измерение латентных переменных), разработанная в лаборатории объективных измерений Кубанского государственного университета [19, 20]. В этой системе оценки вычисляются на основе метода максимального правдоподобия. Оценки методом МНК получены в среде MS Excel [10, 11].

3.1. Оценка латентных переменных методом максимального правдоподобия

Для вычисления оценок параметров модели Раша наиболее часто применяют метод максимального правдоподобия, предложенный Р. Фишером. Этот метод реализован в диалоговой системе ИЛП.

Вероятностная модель выполнения M заданий для i -го испытуемого представляется в виде функции правдоподобия дискретной случайной величины $\tilde{x}_i = \{x_{i1}, x_{i2}, x_{i3}, \dots, x_{iM}\}$

$$L_i\{\tilde{x}_i | \beta_i\} = \prod_{j=1}^M P_{ij}^{x_{ij}} Q_{ij}^{1-x_{ij}}, \quad (2)$$

где P_{ij} — вероятность правильного выполнения i -м испытуемым j -го задания; Q_{ij} — вероятность неправильного выполнения i -м испытуемым j -го задания теста (2).

Все задания теста локально независимые, т. е. при данном уровне знаний ответ на каждое задание теста не зависит от результатов выполнения остальных его заданий. Значение β_i , при котором функция правдоподобия достигает максимума, принимают в качестве объективной оценки β_i и называют оценкой наибольшего правдоподобия. Так как функции L_i и $\ln L_i$ достигают максимума при одном и том же значении β_i , то удобно ввести в рассмотрение логарифмическую функцию правдоподобия

$$\ln L_i\{\tilde{x}_i | \beta_i\} = \sum_{j=1}^M \{x_{ij} \ln P_{ij} + (1 - x_{ij}) \ln Q_{ij}\}.$$

Аналогичная функция

$$\ln L_j\{\tilde{x}_j | \delta_j\} = \sum_{i=1}^N \{x_{ij} \ln P_{ij} + (1 - x_{ij}) \ln Q_{ij}\}$$

составляется для вычисления оценок наибольшего правдоподобия параметра δ_j , $j = 1, 2, \dots, M$.

Система уравнений для определения оценок уровня знаний в группе из N испытуемых и уровня трудности M заданий теста имеет вид:

$$\begin{cases} \frac{\partial \ln L_i\{\tilde{x}_i | \beta_i\}}{\partial \beta_i} = 0, \\ \frac{\partial \ln L_j\{\tilde{x}_j | \delta_j\}}{\partial \delta_j} = 0, \end{cases}$$

где $i = 1, 2, \dots, N, j = 1, 2, \dots, M$.

3.2. Оценка латентных переменных методом наименьших квадратов

При использовании МНК параметры β_i и δ_j модели измерения латентных переменных выбираются так, чтобы сумма квадратов отклонений вероятностей, полученных на основе модели Раша (1), от эмпирических данных x_{ij} была минимальной.

Таким образом, задача оценивания параметров модели сводится к минимизации суммы квадратов отклонений:

$$\begin{aligned} S(\beta_i, \delta_j) &= \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M (p_{ij} - x_{ij})^2 = \\ &= \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M \left(\frac{e^{\beta_i - \delta_j}}{1 + e^{\beta_i - \delta_j}} - x_{ij} \right)^2 \rightarrow \min. \end{aligned}$$

Основное преимущество МНК состоит в том, что вместо дихотомических данных x_{ij} можно использовать нечеткое множество x_{ij} , значения элементов которого варьируются непрерывно от 0 до 1. Это позволит применять модель для измерения латентных переменных, индикаторные переменные которых оцениваются на непрерывных количественных шкалах.

Еще одно немаловажное преимущество этой модели заключается в том, что предлагаемый метод оценивания параметров модели значительно расширяет инструментальные возможности для получения оценок латентной переменной. Так, при применении метода максимального правдоподобия необходимо специализированное программное обеспечение (ИЛП, RUMM, WINSTEP), которого нет в свободном доступе [21, 22]. Применение же МНК представляет собой классическую задачу нелинейного программирования. Эту задачу можно решить в среде MS Excel, более доступной, чем специализированное программное обеспечение.

4. РЕЗУЛЬТАТЫ ИССЛЕДОВАНИЯ

Оценки латентной переменной, полученные с помощью ММП и МНК, приведены в табл. 2, где β_i^* — уровень подготовленности i -го испытуемого, который использовался при генерировании мат-

рицы результатов тестирования; $\hat{\beta}_i$ — оценка уровня подготовленности i -го испытуемого; Δ_i — абсолютное отклонение оценки уровня подготовленности от истинного значения, используемого при генерировании; SE — среднеквадратическая ошибка вычисления оценки уровня подготовленности испытуемого.

Таблица 2

Оценки латентной переменной методами МП и МНК без пропусков и с пропусками данных

№ п/п	β_i^*	Тестовый балл	ММП (без пропусков)			МНК (без пропусков)			ММП (с пропусками)			МНК (с пропусками)		
			$\hat{\beta}_i$	Δ_i	SE	$\hat{\beta}_i$	Δ_i	SE	$\hat{\beta}_i$	Δ_i	SE	$\hat{\beta}_i$	Δ_i	SE
1	-4,00	4	-3,77	0,23	0,70	-3,64	0,36	0,68	-4,02	0,02	0,74	-2,35	1,65	0,59
2	-4,00	3	-4,27	0,27	0,76	-3,80	0,20	0,69	-4,55	0,55	0,79	-2,61	1,39	0,60
3	-3,58	5	-3,31	0,27	0,67	-2,92	0,66	0,63	-3,43	0,15	0,70	-2,22	1,36	0,58
4	-3,58	3	-4,27	0,69	0,76	-3,67	0,09	0,68	-5,08	1,50	0,84	-2,86	0,71	0,62
5	-3,16	5	-3,31	0,16	0,67	-2,87	0,29	0,63	-4,08	0,92	0,75	-2,61	0,55	0,60
6	-3,16	8	-2,13	1,03	0,60	-1,98	1,18	0,58	-1,87	1,29	0,61	-0,80	2,36	0,53
7	-2,74	7	-2,50	0,24	0,62	-2,26	0,48	0,60	-2,39	0,35	0,64	-1,70	1,03	0,56
8	-2,74	6	-2,89	0,16	0,64	-2,46	0,27	0,61	-3,37	0,63	0,70	-2,09	0,65	0,57
9	-2,32	8	-2,13	0,18	0,60	-2,16	0,16	0,59	-2,13	0,19	0,62	-1,45	0,87	0,55
10	-2,32	6	-2,89	0,58	0,64	-2,54	0,22	0,61	-3,02	0,70	0,68	-2,22	0,10	0,58
11	-1,90	8	-2,13	0,24	0,60	-2,18	0,29	0,59	-1,79	0,11	0,60	-1,32	0,58	0,54
12	-1,90	5	-3,31	1,42	0,67	-3,12	1,23	0,64	-3,50	1,60	0,71	-2,09	0,20	0,57
13	-1,47	9	-1,78	0,31	0,59	-1,99	0,51	0,59	-2,13	0,66	0,62	-1,32	0,16	0,54
14	-1,47	10	-1,45	0,03	0,58	-1,19	0,28	0,55	-1,09	0,39	0,57	-0,80	0,67	0,53
15	-1,05	11	-1,13	0,07	0,56	-0,99	0,06	0,55	-1,12	0,07	0,57	-0,80	0,25	0,53
16	-1,05	8	-2,13	1,08	0,60	-1,77	0,71	0,58	-2,42	1,37	0,64	-1,83	0,78	0,56
17	-0,63	15	0,07	0,70	0,54	0,07	0,70	0,53	0,10	0,73	0,55	0,10	0,74	0,52
18	-0,63	14	-0,22	0,41	0,54	-0,09	0,54	0,53	0,36	0,99	0,55	0,49	1,12	0,53
19	-0,21	14	-0,22	0,01	0,54	-0,30	0,09	0,53	-0,19	0,02	0,55	0,10	0,31	0,52
20	-0,21	16	0,36	0,57	0,54	0,37	0,58	0,53	0,17	0,38	0,55	-0,03	0,19	0,52
21	0,21	17	0,65	0,43	0,54	0,98	0,77	0,53	0,82	0,61	0,55	0,49	0,28	0,53
22	0,21	19	1,23	1,02	0,55	1,02	0,81	0,53	1,28	1,06	0,56	0,75	0,54	0,53
23	0,63	18	0,94	0,30	0,54	1,00	0,37	0,53	0,95	0,32	0,55	0,75	0,12	0,53
24	0,63	18	0,94	0,30	0,54	1,03	0,39	0,53	1,19	0,56	0,56	0,88	0,25	0,54
25	1,05	19	1,23	0,18	0,55	1,22	0,16	0,54	1,16	0,11	0,56	0,62	0,43	0,53
26	1,05	18	0,94	0,12	0,54	1,02	0,03	0,53	1,48	0,43	0,56	0,75	0,30	0,53
27	1,47	19	1,23	0,24	0,55	1,13	0,35	0,53	1,65	0,18	0,57	1,14	0,34	0,54
28	1,47	20	1,53	0,06	0,56	1,36	0,12	0,54	1,63	0,15	0,57	1,52	0,05	0,55
29	1,90	20	1,53	0,36	0,56	1,37	0,52	0,54	1,57	0,33	0,57	1,14	0,76	0,54
30	1,90	20	1,53	0,36	0,56	1,27	0,63	0,54	1,61	0,28	0,57	1,26	0,63	0,54
31	2,32	26	3,69	1,37	0,68	4,09	1,78	0,73	3,16	0,84	0,64	2,43	0,11	0,58
32	2,32	22	2,17	0,15	0,58	2,13	0,18	0,56	2,49	0,17	0,61	1,91	0,41	0,56
33	2,74	25	3,26	0,53	0,65	2,84	0,11	0,60	3,41	0,67	0,66	2,43	0,31	0,58
34	2,74	25	3,26	0,53	0,65	3,17	0,43	0,62	3,85	1,11	0,69	2,55	0,18	0,59
35	3,16	28	4,69	1,53	0,84	4,09	0,94	0,73	4,63	1,48	0,78	3,07	0,09	0,62
36	3,16	26	3,69	0,53	0,68	3,76	0,61	0,68	3,53	0,38	0,67	2,43	0,73	0,58
37	3,58	27	4,15	0,57	0,74	3,55	0,03	0,66	4,38	0,80	0,75	3,07	0,51	0,62
38	3,58	26	3,69	0,11	0,68	3,15	0,43	0,62	3,88	0,30	0,70	2,81	0,77	0,60
39	4,00	26	3,69	0,32	0,68	3,14	0,86	0,62	3,88	0,12	0,70	2,68	1,32	0,60
40	4,00	28	4,69	0,69	0,84	4,03	0,03	0,72	4,90	0,90	0,82	2,94	1,06	0,61



Таблица 3

Коэффициенты корреляции тестового балла с оценками ММП и МНК без пропусков и с пропусками данных

	Тестовый балл	ММП (без пропусков)	ММП (с пропусками)	МНК (без пропусков)	МНК (с пропусками)
Тестовый балл	1,000	0,998	0,989	0,996	0,994
ММП (без пропусков)	0,998	1,000	0,995	0,996	0,992
ММП (с пропусками)	0,989	0,995	1,000	0,989	0,994
МНК (без пропусков)	0,996	0,996	0,989	1,000	0,987
МНК (с пропусками)	0,994	0,992	0,994	0,987	1,000

4.1. Практическая оценка достаточности тестового балла по МНК

Достаточность тестового балла с практической точки зрения определяется на основе корреляции тестового балла с оценками латентной переменной. Результаты корреляционного анализа приведены в табл. 3.

Коэффициенты корреляции показывают, что все виды оценок уровня подготовленности (ММП и МНК, без пропусков и при наличии пропусков) достаточно хорошо коррелируют с тестовым баллом. Таким образом, полученные результаты свидетельствуют о том, что для получения оценок латентной переменной можно применять МНК. Однако необходимо рассмотреть и точность получаемых оценок.

4.2. Сравнение абсолютной погрешности вычисления оценок латентной переменной, полученных по ММП и МНК

Абсолютная погрешность вычисления оценок латентной переменной для i -го испытуемого определяется на основе их близости к соответствующим значениям в имитационном эксперименте:

$\Delta_i = |\hat{\beta}_i - \beta_i^*|$, $\hat{\beta}_i$ — оценка латентной переменной для i -го испытуемого; β_i^* — истинное значение латентной переменной для i -го испытуемого, которое использовалось для генерирования матрицы тестирования.

Для определения близости оценок параметров модели, полученных обоими методами, к истинным значениям проведен трехфакторный дисперсионный анализ (табл. 4). Анализировалось влияние факторов:

- фактор A — метод вычисления оценок, варьируется на двух уровнях (ММП и МНК);
- фактор B — варьируется на двух уровнях — отсутствие или наличие (10 %) пропусков в матрице данных;
- фактор C — число уровней, на которых варьируется латентная переменная (в данном эксперименте 20).

Проинтерпретируем результаты, приведенные в табл. 4.

Фактор A незначим — в среднем по всем уровням остальных факторов нет статистически значимого различия по абсолютной ошибке вычисления оценок латентной переменной между обоими методами; эмпирический уровень значимости $p = 0,780$, что значительно превышает номинальный уровень значимости, равный 0,05. Средние значения абсолютных ошибок по обоим методам приведены в табл. 5.

Таблица 4

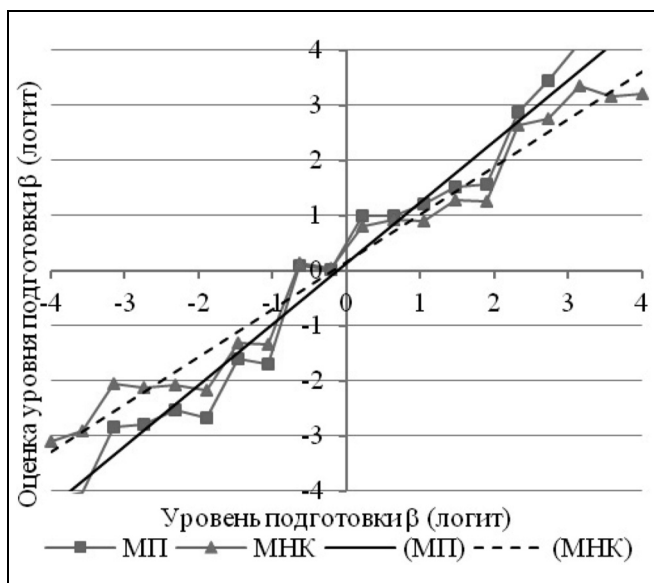
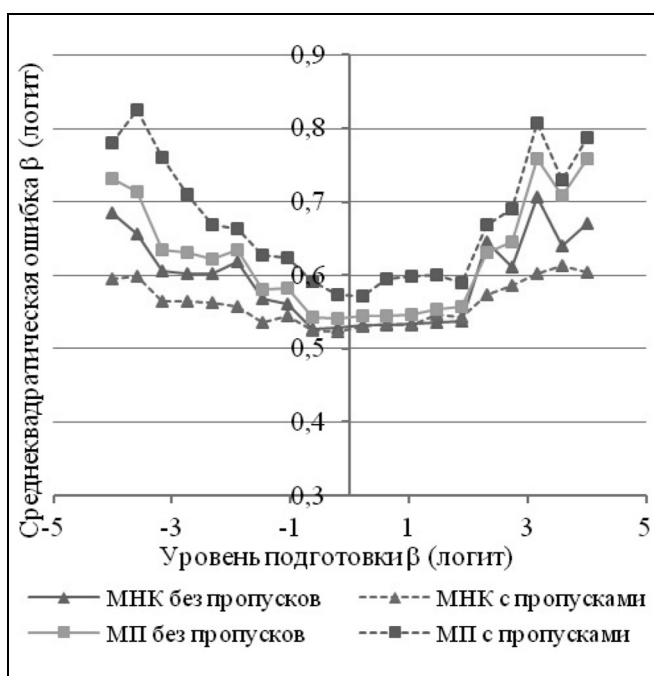
Результаты дисперсионного анализа абсолютной погрешности оценок уровня подготовленности испытуемых

Источник дисперсии	Сумма квадратов	Степени свободы	Средний квадрат	F-статистика	p
A	0,023	1	0,023	0,079	0,780
B	0,025	1	0,025	0,086	0,771
C	938,880	19	49,415	167,319	Менее 0,001
AB	0,003	1	0,003	0,011	0,918
AC	14,862	19	0,782	2,649	0,001
BC	3,304	19	0,174	0,589	0,904
ABC	5,689	19	0,299	1,014	0,455
Ошибка	23,627	80	0,295	—	—
Всего	986,413	159	—	—	—

Таблица 5

Абсолютные ошибки измерений

Метод измерения	Среднее значение	Объем выборки	Стандартная ошибка	95%-й доверительный интервал	
				Нижняя граница	Верхняя граница
ММП	0,140	80	0,066	0,010	0,269
МНК	0,164	80	0,066	0,034	0,293


Рис. 1. Эффект взаимодействия факторов A и C

Рис. 2. Среднеквадратическая ошибка измерения (SE) уровня подготовленности испытуемых в зависимости от метода получения оценок параметров модели Раша и наличия пропусков

Фактор B незначим, это свидетельствует о том, что в среднем по всем уровням остальных факторов наличие пропусков, в объеме 10 % от общего числа данных, статистически значимо не влияет на точность вычисления оценок ($p = 0,771$). Абсолют-

ные ошибки измерения в зависимости от наличия пропусков в среднем для уровней всех остальных факторов приведены в табл. 6.

Фактор C значим ($p < 0,001$). Это означает, что абсолютная ошибка измерения латентной переменной в среднем для всех уровней факторов A и B зависит от местоположения латентной переменной. Поскольку есть значимые взаимодействия факторов, информации о значимости факторов A и C недостаточно. Необходимо рассмотреть взаимодействие факторов.

Из всех взаимодействий значимо только взаимодействие факторов A и C (на очень высоком уровне значимости $p < 0,001$). Это означает, что абсолютная ошибка измерения латентной переменной зависит как от ее местоположения на шкале, так и от применяемого метода. Этот эффект иллюстрируется на рис. 1, где по оси абсцисс отложены моделируемые значения уровня подготовленности испытуемых, а по оси ординат полученные оценки этих уровней. Для большей наглядности на этом рисунке представлены оценки точности вычисления латентной переменной не только в зависимости от ее местоположения на шкале, но и от метода вычисления оценок и наличия пропусков данных. Как видно из рис. 1, по краям шкалы отклонения оценок от истинных (моделируемых) значений больше, чем в середине шкалы. Кроме того, отклонения оценок, полученных по ММП и МНК различны, об этом и свидетельствует взаимодействие факторов.

Поскольку фактор A является незначимым, то различием в разности оценок по ММП и МНК можно пренебречь.

Важно сравнение рассматриваемых методов по точности вычисления самих оценок уровня подготовленности испытуемых.

Таблица 6

Абсолютные ошибки измерений в зависимости от наличия пропусков

Наличие/отсутствие пропусков	Среднее значение	Объем выборки	Стандартная ошибка	95%-й доверительный интервал	
				Нижняя граница	Верхняя граница
Без пропусков	0,139	80	0,061	0,018	0,260
С пропусками	0,164	80	0,061	0,043	0,285



4.3. Сравнение оценок латентной переменной по точности их вычисления

Точность вычисления оценок важна при практическом применении результатов измерения. Точность оценок латентной переменной для дихотомической модели Раша вычисляется как

$$SE_i = 1 / \sqrt{\sum_{j=1}^M P_{ij}(1 - P_{ij})},$$

где P_{ij} — вероятность правильного выполнения i -м испытуемым j -го задания.

В целях наглядности на рис. 2 представлены оценки точности вычисления уровня подготовленности испытуемых по обоим методам при наличии и отсутствии пропусков.

Для анализа точности вычисления оценок (SE) обоими методами проведен дисперсионный анализ на основе полной модели трехфакторного эксперимента (табл. 7). Анализируется влияние тех же факторов, что и в предыдущем случае, однако здесь фактор A значимый ($p < 0,001$). Это означает, что точность вычисления оценок зависит от метода (табл. 8). Как и следовало ожидать, в среднем по уровням всех остальных факторов точность вычисления оценок по МНК меньше, чем по ММП.

Фактор C также значимый ($p < 0,001$). Это хорошо видно на рис. 2, где среднеквадратическая ошибка оценки существенно зависит от значения латентной переменной. Среднеквадратическая ошибка наименьшая в середине интервала варьирования и увеличивается по мере удаления от него.

Таблица 7

Результаты дисперсионного анализа точности вычисления оценок уровня подготовленности испытуемых

Источник дисперсии	Сумма квадратов	Степени свободы	Средний квадрат	F-статистика	p
A	0,195	1	0,195	102,834	Менее 0,001
B	0,003	1	0,003	1,458	0,231
C	0,557	19	0,029	15,482	Менее 0,001
AB	0,069	1	0,069	36,434	Менее 0,001
AC	0,055	19	0,003	1,539	0,094
BC	0,015	19	0,001	0,412	0,984
ABC	0,020	19	0,001	0,559	0,924
Ошибка	0,152	80	0,002	—	—
Всего	1,066	159	—	—	—

Таблица 8

Абсолютные ошибки измерений

Метод измерения	Среднее значение	Объем выборки	Стандартная ошибка	95%-й доверительный интервал	
				Нижняя граница	Верхняя граница
ММП	0,648	80	0,005	0,639	0,658
МНК	0,578	80	0,005	0,569	0,588

Таблица 9

Абсолютные ошибки измерений в зависимости от наличия пропусков

Наличие/отсутствие пропусков	Среднее значение	Объем выборки	Стандартная ошибка	95%-й доверительный интервал	
				Нижняя граница	Верхняя граница
Без пропусков	0,609	80	0,005	0,600	0,619
С пропусками	0,617	80	0,005	0,608	0,627

Фактор B незначимый ($p < 0,231$), но для наглядности в табл. 9 приведены среднеквадратические ошибки без пропусков и при наличии пропусков данных в среднем для всех уровней остальных факторов. Видно, что при наличии пропусков среднеквадратическая ошибка (SE) несколько больше.

Представляет интерес эффект значимого взаимодействия факторов A и B , т. е. зависимости среднеквадратической ошибки (SE) от метода вычисления оценок и наличия пропущенных данных ($p < 0,001$). Он объясняется тем, что среднеквадратическая ошибка вычисления оценок по МНК всегда меньше, чем по ММП. Это вызвано тем, что при использовании МНК нет ограничения на то, что испытуемые с одинаковым тестовым баллом должны получить одинаковые оценки. Поэтому оценки получаются более точными.

5. ОБСУЖДЕНИЕ ПОЛУЧЕННЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

Проведенное исследование показывает, что для вычисления оценок параметров дихотомической модели Раша можно применять МНК. Для выбранной схемы эксперимента различие между оценками, полученными двумя методами (ММП и МНК) практически несущественно.

Дальнейшее исследование применимости МНК целесообразно вести по двум направлениям:

— определить границы применимости МНК в зависимости от числа испытуемых, числа индикаторов (тестовых заданий), объема пропущенных данных и ограничений на оценки МНК;

— второе, наверное, наиболее важное направление, это сравнение оценок, полученных по ММП и МНК, для политомических данных. Это позволит определить возможность получения достаточно точных оценок параметров модели Раша для непрерывных количественных индикаторов.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В рамках имитационного моделирования сгенерирована матрица данных на основе дихотомической модели Раша, по которым вычислены параметры модели Раша методом максимального правдоподобия и методом наименьших квадратов.

Рассмотрена специфика оценок, получаемых этими методами. Как и следовало ожидать, оценки параметров модели на основе МНК ближе к сгенерированным данным, поскольку нет ограничения на то, что оценки испытуемых должны быть одни и те же в случае одинакового тестового балла.

Определено влияние пропуска данных в сгенерированных данных на точность вычисления оценок параметров модели Раша.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Rasch Models. Foundations, Recent Developments and Applications* / Eds. G.H. Fischer, I.W. Molenaar. — N.-Y.: Springer, 1997.
2. *Wilson M. Constructing measures: an item response modeling approach*. — Mahwah, New Jersey: Lawrence Erlbaum associates, 2005. — 228 p.
3. *Летова Л.В., Маслак А.А., Осипов С.А.* Семейство моделей Раша для объективного измерения латентных переменных // Информатизация образования и науки. — 2013. — № 4. — С. 131–141.
4. *Маслак А.А., Поздняков С.А.* Модель Раша для проверки качества метода измерения толерантности // Социология: методология, методы, математическое моделирование. — 2008. — Т. 26. — С. 87–104.
5. *Маслак А.А., Поздняков С.А.* Методика измерения и мониторинга уровня жизни населения в субъектах Южного федерального округа Российской Федерации // Вестник Воронежского гос. техн. ун-та. — 2008. — Т. 4. — № 10. — С. 159–171.
6. *Маслак А.А.* Измерение латентных переменных в социальных системах. — Славянск-на-Кубани: Изд. центр КубГУ, 2012. — 432 с.
7. *Maslak A.A., Anisimova T.S., Osipov S.A., Karabatsos G.* Measuring and Comparing Higher Education Quality Between Countries Worldwide // *Journal of Applied Measurement*. — 2005. — Vol. 6, N 4. — P. 432–442.
8. *Маслак А.А., Поздняков С.А., Данилов А.А.* Измерение уровня развития инфраструктуры сферы образования в субъектах РФ // Высшее образование в России. — 2008. — № 2. — С. 102–108.
9. *Linacre J.M.* Understanding Rasch measurement: estimation methods for Rasch Measures // *Journal of Outcome Measurement*. — 1999 N 3. — P. 381–405.
10. *Баркалов С.А., Моисеев С.И., Кочерга Н.С., Соловьева Е.В.* Математические модели подготовки и проверки качества освоения компетенций в образовательном процессе // Открытое образование. — 2014. — № 2. — С. 9–16.
11. *Баркалов С.А., Моисеев С.И., Соловьева Е.В.* Применение метода наименьших квадратов при оценке латентных переменных методом Раша // Научный вестник Воронежского ГАСУ / Сер. Управление строительством. — 2014. — № 1 (6). — С. 98–100.
12. *Данилов А.А., Маслак А.А.* Исследование точности измерения латентной переменной в зависимости от числа градаций индикаторных переменных // Вестник Воронежского гос. техн. ун-та. — 2009. — Т. 5, № 11. — С. 106–114.
13. *Maslak A.A., Osipov S.A., Goncharova T.N.* Investigation of measurement precision of latent variables in education // *Образование и наука*. — 2014. — № 7 (116). — С. 36–47.
14. *Летова Л.В.* Точность измерения латентных переменных // Дистанционное и виртуальное обучение. — 2013. — № 12. — С. 75–88.
15. *Chen S., Hsiao C., Wang L.* Measurement Errors and Censored Structural Latent Variables Models // *Econometric Theory*. — 2012. — N 28 (03). — P. 696–703.
16. *Елисеев И.Н.* Исследование погрешности расчета трудности заданий теста на основе моделирования дихотомической матрицы ответов // Педагогическая информатика. — 2011. — № 4. — С. 92–101.
17. *Ефремов Н.Ф.* Формирование и оценивание компетенций в образовании: монография. — Ростов-на-Дону: Аркол, 2010. — 386 с.
18. *Звонников В.И., Чельшкова М.Б.* Современные средства оценивания результатов обучения: учебное пособие. — М.: Изд. центр «Академия», 2007. — 223 с.
19. *Осипов С.А.* Вычисление оценок модели Раша методом наибольшего правдоподобия // Оценка эффективности образовательных инноваций и технологий: Тезисы докладов и выступлений Третьей Всерос. науч.-практ. конф. (27–28 июня 2001 г). Славянск-на-Кубани, 2001. — С. 26–30.
20. *Маслак А.А., Осипов С.А.* Измерение латентных переменных / Свидетельство о гос. регистрации программ для ЭВМ № 2013618487. Дата гос. регистрации в Реестре программ для ЭВМ 10 сентября 2013 г.
21. *Getting Started RUMM 2010.* Rasch Unidimensional Measurement Models. — Perth: RUMM Laboratory Ltd, 2001. — 87 p.
22. *Smith R.M.* Rasch Measurement Models: Interpreting WINSTEPS/BIGSTEPS and Facets Output. — Gainesville, Florida: JAM Press, 1999. — 68 p.

Статья представлена к публикации членом редколлегии А.С. Манделем.

Маслак Анатолий Андреевич — д-р техн. наук, зав. лабораторией, филиал Кубанского гос. ун-та, г. Славянск-на-Кубани,
✉ anatoliy_maslak@mail.ru,

Моисеев Сергей Игоревич — канд. физ.-мат. наук, доцент, Институт менеджмента, маркетинга и финансов, г. Воронеж,
✉ mail@moiseevs.ru,

Осипов Сергей Александрович — канд. техн. наук, доцент, филиал Кубанского гос. ун-та, г. Славянск-на-Кубани,
✉ slnosa@mail.ru.



НЕЛИНЕЙНАЯ ЗАДАЧА ОПТИМИЗАЦИИ ПОРТФЕЛЯ ВЗАИМОЗАВИСИМЫХ ИНВЕСТИЦИОННЫХ ПРОЕКТОВ

З.Г. Руденко

Рассмотрена задача формирования оптимального портфеля инвестиционных проектов, взаимозависимых по эффекту. Предложен алгоритм нахождения оптимального решения задачи, основанный на применении метода сетевого программирования. На примере рассмотрена работа предложенного алгоритма.

Ключевые слова: математическое программирование, управление портфелем проектов, взаимозависимые проекты.

ВВЕДЕНИЕ

Одна из задач процесса стратегического планирования заключается в разработке инвестиционной стратегии, определяющей долгосрочные инвестиционные цели деятельности предприятия и механизмы реализации целей с учетом возможных изменений внешней и внутренней среды. Инвестиционная стратегия устанавливает приоритеты направлений и формы инвестиционной деятельности, характер формирования инвестиционных ресурсов и последовательность этапов реализации долгосрочных инвестиционных целей, границы возможной инвестиционной активности организации и формализованную систему критериев, по которым осуществляются планирование, реализация и оценка инвестиционной деятельности [1]. Эффективная реализация инвестиционной стратегии — один из ключевых факторов успешного развития предприятия, который в долгосрочной перспективе обеспечивает достижение поставленных стратегических целей. Инструментом реализации инвестиционной стратегии служит формирование инвестиционной программы, которая состоит из совокупности проектов, обладающих определенными характеристиками: описание объектов инвестирования, объемы требуемого финансирования и необходимых ресурсов, предполагаемые результаты реализации. В силу существования бюджетных и ресурсных ограничений появляется необходимость решать задачу предварительного выбора проектов в целях формирования оптимальной инвестиционной программы. Дополнительная сложность данной задачи заключается в том, что на практике инвестиционные проекты не являются независимыми, а оказывают влияние друг на друга. В зависимости от характеристик проектов и оказываемого влияния могут быть выделены следующие типы взаимозависимости.

Зависимость по эффекту наблюдается при увеличении или уменьшении итогового результата реализации нескольких проектов относительно суммы эффектов каждого проекта в отдельности. В целях иллюстрации рассмотрим два проекта по выпуску нового товара на рынок. Если товары комплементарные, то объем общих продаж превысит сумму индивидуальных продаж каждого товара. Обратная ситуация наблюдается у взаимозаменяемых товаров, одновременный выпуск которых уменьшает суммарный объем индивидуальных продаж.

Зависимость по ресурсам существует у проектов, одновременная реализация которых может уменьшить размер требуемых ресурсов. Примером служит исследовательские проекты, выполняемые на одном лабораторном оборудовании, расходы на приобретение которого могут быть разделены между проектами.

Технологическая зависимость наблюдается при необходимости одновременного выполнения нескольких проектов или взаимного исключения проектов по технологическим требованиям. Одним из случаев технологической зависимости являются рекомендательные зависимости, при нарушении которых могут изменяться первоначальные характеристики проектов (продолжительность работ, затраты, эффект).

Задача формирования портфеля взаимозависимых проектов рассмотрена рядом зарубежных авторов. В работе [2] проанализирована взаимозависимость между ИТ-проектами и разработана модель оптимизации распределения ресурсов между зависимыми проектами в рамках разработки ИТ системы. Авторами работы [3] рассмотрена задача управления исследовательскими проектами в процессе трансформации научной идеи в конечный продукт и изложен подход к описанию зависимости по ресурсам, технологической зависимости и

влияния фактора бизнес-среды, отражающего воздействие изменения рыночных условий на распределение ресурсов между проектами. Подход основан на применении метода тест-кейсов в совокупности с метрикой DEA, оценивающей показатели выполнения проекта. В работе [4] исследован процесс отбора проектов при создании самолета. В целях описания взаимозависимостей между проектами введена квадратичная матрица зависимостей, элементы которой отражают доход проекта, зависящий от реализации другого проекта.

В российской литературе вопросы взаимного влияния проектов также нашли отражение в ряде публикаций. В работах [5, 6] анализируются задачи календарного планирования проекта, учитывающие порядок выполнения работ проекта. Модель взаимодействия между инновационными проектами, основанная на учете экономических связей между проектами через зависимость от общих ресурсов, рассмотрена в публикации [7]. Задача оптимизации портфеля проектов, взаимозависимых по эффекту, и задача оптимизации проектов с рекомендательными зависимостями — ограничения на порядок выполнения проектов, исследовались в работе [8].

В общем виде оптимизация портфеля взаимозависимых проектов представляет собой задачу невыпуклого квадратичного программирования, которая относится к классу NP-трудных [9]. Существующие подходы к решению задач квадратичной оптимизации могут быть разделены на две группы: основанные на модификации алгоритмов решения задач выпуклой оптимизации и первоначально разработанные для решения дискретных задач оптимизации. К первой группе относятся метод выделения активных ограничений [10] и метод поиска внутренней точки [11]. Оба метода являются итерационными и состоят в построении последовательности точек $x_{k+1} = x_k + q_k p_k$, которая сходится к решению исходной задачи. Основным недостатком данных методов заключается в том, что их применение гарантирует нахождение лишь локального оптимума. Для поиска глобального оптимального решения применяются подходы второй группы, которые заключаются в построении оценки сверху для исходной задачи и ее применении в адаптированных к непрерывному случаю методах дискретной оптимизации: метод ветвей и границ, метод отсечений. Среди существующих подходов к получению оценки сверху могут быть выделены линейаризация целевой функции [12], лагранжева [13] и полуопределенная релаксация [14]. Трудности в применении данных подходов заключаются в значительном увеличении числа переменных в случае линейаризации и необходимости привлече-

ния трудоемких методов недифференцируемой оптимизации в случае двух остальных подходов.

В настоящей статье предложен алгоритм нахождения оценки сверху для квадратичной оптимизационной задачи, основанный на применении метода сетевого программирования [15]. Данный метод первоначально разрабатывался для решения дискретных задач оптимизации. Показана возможность его применения для решения непрерывной оптимизационной задачи и получено достаточное условие существования оптимального решения оценочной задачи.

1. ЗАДАЧА ФОРМИРОВАНИЯ ПОРТФЕЛЯ ВЗАИМОЗАВИСИМЫХ ПРОЕКТОВ

Рассмотрим n инвестиционных проектов (выпуск новых продуктов). Предположим, что параметры в задаче нормализованы. Обозначим x_i — объем финансирования i -го проекта. Заданы ограничения:

- максимальный объем финансирования i -го проекта, определяемый возможностями производства и рыночным спросом;
- размер постоянных затрат на разработку и освоение i -го проекта;
- суммарный объем финансирования не превышает значения C .

Эффект (доход) от реализации i -го проекта равен $b_i x_i$, где b_i — рентабельность i -го проекта.

Для описания взаимосвязей между проектами введем $n \times n$ матрицу взаимозависимости $[a_{ij}]$. Значение элемента $a_{ij} \geq 0$ показывает дополнительный эффект, который получает проект i от успешной реализации проекта j . Если $a_{ij} = 0$, то эффект от реализации проекта i не зависит от проекта j . Диагональные элементы матрицы a_{ii} равны 0. Таким образом, суммарный эффект для i -го проекта равен $\sum_{j \in A} a_{ij} x_j$, где A — множество проектов, принятых к реализации.

Задача формирования инвестиционного портфеля взаимозависимых проектов может быть записана в виде:

$$\sum_{i,j=1}^n \left(a_{ij} x_i x_j + \sum_{i=1}^n b_i x_i \right) \xrightarrow{\{x_i\}, i=\overline{1,n}} \max, \quad (1)$$

$$\sum_{i=1}^n c_i x_i \leq C, \quad (2)$$

$$0 \leq x_i \leq 1, \quad i = \overline{1,n}, \quad (3)$$

где c_i — коэффициенты, полученные в результате нормализации величин x_i , $i = \overline{1,n}$.



Для применения метода сетевого программирования представим элементы a_{ij} в виде суммы u_{ij} и v_{ij} :

$$a_{ij} = u_{ij} + v_{ij}; \quad i, j = \overline{1, n}. \quad (4)$$

Если выполняется условие (3), то относительно параметров u_{ij} и v_{ij} справедливо неравенство:

$$a_{ij}x_i x_j \leq u_{ij}x_i + v_{ij}x_j; \quad i, j = \overline{1, n}, \quad (5)$$

которое следует из того, что

$$u_{ij}x_i x_j \leq u_{ij}x_i, \quad v_{ij}x_i x_j \leq v_{ij}x_j \quad \text{при } 0 \leq x_i \leq 1, \quad i, j = \overline{1, n}.$$

Учитывая соотношение (5), запишем задачу линейного программирования, решение которой является оценкой сверху для исходной задачи:

$$\max_{\{x_i\}} \sum_{i=1}^n x_i \left[\sum_{j=1}^n (u_{ij} + v_{ji}) + b_i \right], \quad (6)$$

$$\sum_{i=1}^n c_i x_i \leq C, \quad (7)$$

$$0 \leq x_i \leq 1, \quad i = \overline{1, n}. \quad (8)$$

Для нахождения точного оптимального решения задачи (6)–(8) может быть применен «жадный алгоритм», заключающийся в выборе проектов с максимальным отношением эффекта к затратам [5]. Для этого упорядочим x_i по убыванию данного отношения (относительного эффекта):

$$\frac{1}{c_i} \sum_{j=1}^n [(u_{ij} + v_{ji}) + b_i]. \quad (9)$$

Пусть первые k значений x_i , удовлетворяющие неравенству (7), равны 1, а остальные $n - k$ значений — 0 (формально k -е значение может получиться меньше 1, но поскольку решается задача получения оценки сверху, то оно округляется до 1). Тогда в оптимальном решении значение целевой функции (6) является оценкой сверху для исходной задачи (1)–(3) и равно

$$\sum_{i=1}^k \left[\sum_{j=1}^n (u_{ij} + v_{ji}) + b_i \right]. \quad (10)$$

Поставим задачу выбора параметров u_{ij} и v_{ij} , минимизируют полученную оценку:

$$\sum_{i=1}^k \left[\sum_{j=1}^n (u_{ij} + v_{ji}) + b_i \right] \xrightarrow{\{u_{ij}, v_{ij}\}, i = \overline{1, n}} \min, \quad (11)$$

$$a_{ij} = u_{ij} + v_{ij}, \quad i, j = \overline{1, n}. \quad (12)$$

Задача (10) — (12) является обобщенной двойственной для исходной задачи, и в работе [15] показано, что она выпуклая. Определим достаточное

условие существования оптимального решения данной задачи.

Утверждение. Если существуют значения u_{ij} и v_{ij} , $i, j = \overline{1, n}$, удовлетворяющие условию (12), при которых выполняются соотношения

$$\frac{1}{c_i} \left[\sum_{j=1}^n (u_{ij} + v_{ji}) + b_i \right] = \frac{1}{c_j} \left[\sum_{i=1}^n (u_{ji} + v_{ij}) + b_j \right], \quad i, j = \overline{1, n}, \quad (13)$$

то данные значения являются оптимальным решением задачи (10)–(12).

Доказательство. Введем обозначение:

$$\sum_{j=1}^n (u_{ij} + v_{ji}) + b_i = s_i.$$

Предположим, что в оптимальном решении задачи (6)–(8) существует проект, относительный эффект которого на δ превосходит эффект p от каждого из остальных $n - 1$ проектов. По результатам упорядочения по отношению (9) данный проект перейдет на первую позицию, и в этом случае значение функции (10) равно

$$\sum_{i=1}^k s_i = \delta c_1 + pC. \quad (14)$$

Пусть рассматриваемый проект взаимосвязан с $m - 1$ проектами портфеля. Поскольку у всех проектов, за исключением первого, одинаковый относительный эффект p , то не нарушая общности предположим, что данные $m - 1$ проектов занимают позиции со второй по m . Уменьшим на небольшую величину относительный эффект $(p + \delta)$ первого проекта путем изменения s_i так, чтобы эффект первого проекта не снизился ниже p :

$$\frac{s_1 - \Delta_1}{c_1} = r_1, \quad \frac{s_i + \Delta_i}{c_i} = r_p, \quad i = \overline{2, m},$$

$$\Delta_1 - \sum_{i=2}^m \Delta_i = 0, \quad (15)$$

где r_i — относительный эффект, полученный после изменения s_i , $i = \overline{1, m}$.

Снова упорядочим проекты по убыванию отношения (9), при этом рассматриваемые m проектов останутся на первых m позициях. Если $m > k$, то значение функции (10) в силу соотношения (15) уменьшится по сравнению с величиной (14), что противоречит предположению об оптимальности исходного решения:

$$\sum_{i=1}^k s_i = \delta c_1 - \Delta_1 + \sum_{j=2}^k \Sigma \Delta_j + pC < \delta c_1 + pC.$$

При $m \leq k$ повторим описанный выше подход к перераспределению относительного эффекта, но уже с другим проектом. Перераспределение эффекта можно проводить до тех пор, пока не выполнится условие (13). ♦

Решение задачи (6)–(8) может служить в качестве оценки сверху для подмножества решений при применении метода ветвей и границ. При нахождении решения задачи (6)–(8), в котором значе-

Оптимальные решения

x_1	x_2	x_3	$f(x)$	$f_0(x)$
1	1	0	14	14
1	0	1	14	12
0	1	1	14	10

ния целевой функции оценочной и исходной задач совпадают, полученное решение является оптимальным решением задачи (1)–(3). Далее покажем на примере работу предложенного алгоритма.

2. ПРИМЕР

Рассмотрим задачу оптимизации:

$$(7x_1 + 3x_1x_2 + x_1x_3 + 4x_2 + 2x_2x_3 + 4x_3) \xrightarrow{\{x_i\}, i=1,3} \max, \quad (16)$$

$$x_1 + x_2 + x_3 \leq 2, \quad (17)$$

$$0 \leq x_{1,2,3} \leq 1. \quad (18)$$

Представим коэффициенты целевой функции в виде (4):

$$u_{12} + v_{12} = 3; \quad u_{13} + v_{13} = 1; \quad u_{23} + v_{23} = 2. \quad (19)$$

Приравняем коэффициенты согласно условию (13):

$$7 + u_{12} + u_{13} = 4 + v_{12} + u_{23} = 4 + v_{13} + v_{23}. \quad (20)$$

После подстановки условий (19) в выражение (20) получим:

$$u_{12} = 0, \quad v_{12} = 2, \quad u_{13} = 0, \quad v_{13} = 1, \quad u_{23} = 0, \quad v_{23} = 2.$$

Задача получения оценки сверху (6)–(8) для исходной задачи:

$$(7x_1 + 7x_2 + 7x_3) \xrightarrow{\{x_i\}, i=1,3} \max, \quad (21)$$

$$x_1 + x_2 + x_3 \leq 1, \quad 0 \leq x_{1,2,3} \leq 1. \quad (22)$$

Оптимальные решения задачи (21), (22) приведены в таблице, где $f(x)$ — значение целевой функции задачи (21), (22) в оптимальном решении, $f_0(x)$ — значение целевой функции исходной задачи (16)–(18).

Поскольку для $\{x_1 = 1; x_2 = 1; x_3 = 0\}$ значение $f(x)$ совпадает с $f_0(x)$, то данное решение является оптимальным решением исходной задачи (16)–(18).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предложен алгоритм решения задачи оптимизации портфеля инвестиционных проектов с учетом их взаимного влияния на итоговый эффект, получаемый от реализации сформированного портфеля проектов. Алгоритм основан на применении метода сетевого программирования к решению задачи квадратичной оптимизации. В качестве пер-

спективных направлений дальнейших исследований представляются:

— разработка алгоритма решения обобщенной двойственной задачи;

— применение сетевых методов для решения задачи формирования оптимального портфеля проектов с учетом наличия нескольких типов взаимозависимостей.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Лахметкина Н.И.* Инвестиционная стратегия предприятия: учеб. пособие. — 7-е изд., стер. — М.: КНОРУС, 2014. — 232 с.
2. *Santhanam R., Kyriasis G.J.* A decision model for interdependent information system project selection // *European Journal of Operational Research*. — 1996. — Vol. 89. — P. 380–399.
3. *Verma D., Sinha K.K.* Toward a theory of project interdependencies in high tech R & D environments // *Journal of Operations Management*. — 2002. — Vol. 20. — P. 451–468.
4. *Dickinson M.W., Thornton A.C., Graves S.* Technology Portfolio Management: Optimizing Interdependent Projects over Multiple Time Periods // *IEEE Trans. on Engineering Management*. — 2001. — Vol. 48, N 4. — P. 518–527.
5. *Математические основы управления проектами: учеб. пособие / С.А. Баркалов, В.И. Воропаев, Г.И. Секлетова и др.* — М.: Высшая школа, 2005. — 423 с.
6. *Прикладные задачи управления строительными проектами / В.И. Алферов, С.А. Баркалов, В.Н. Бурков и др.* — Воронеж: Центрально-Черноземное кн. изд-во, 2008. — 765 с.
7. *Шомова Е.Н.* Модель формирования оптимального портфеля взаимозависимых инновационных проектов // *Управление проектами и программами*. — 2011. — № 4.
8. *Недовесов М.В., Руденко З.Г.* Формирование оптимального портфеля взаимозависимых проектов и его оптимизация по времени // *Проблемы управления*. — 2012. — № 4. — С. 26–31.
9. *Pardalos P.M., Vavasis S.A.* Quadratic programming with one negative eigenvalue is NP-hard // *Journal of Global Optimization*. — 1991. — Vol. 1, iss. 1. — P. 15–22.
10. *Wong E.* Active-Set Methods for Quadratic Programming / *Phd thesis*, University of California, San Diego, 2011.
11. *Absil P.A., Tits A.L.* Newton-KKT interior-point methods for indefinite quadratic programming // *Computational Optimization and Applications*. — 2007. — Vol. 36, iss. 1. — P. 5–41.
12. *Vandenbussche D., Nemhauser G.L.* A branch-and-cut algorithm for nonconvex quadratic programs with box constraints // *Math. Program.* — 2005. — Vol. 102, iss. 3. — P. 559–575.
13. *Шор Н.З., Стеценко С.И.* Квадратичные экстремальные задачи и недифференцируемая оптимизация // Киев: Наукова думка, 1989. — 209 с.
14. *Burer S., Vandenbussche D.* A finite branch-and-bound algorithm for nonconvex quadratic programming via semidefinite relaxations // *Math. Program.* — 2008. — Vol. 113, iss. 2. — P. 259–282.
15. *Буркова И.В.* Метод сетевого программирования в задачах нелинейной оптимизации // *Автоматика и телемеханика*. — 2009. — № 10. — С. 15–21.

Статья представлена к публикации членом редколлегии В.Н. Бурковым.

Руденко Зоя Геннадьевна — аспирант, Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, г. Москва, ✉ zoya.rudenko@gmail.com.



МЕТОДЫ УПРАВЛЕНИЯ РИСКАМИ РАЗМЕЩЕНИЯ РЕКЛАМЫ В СМИ

Г.А. Шматов

Изложены методы количественной оценки рисков размещения рекламы в СМИ. Показано, что применение теории медиапланирования позволяет разработать методику вычисления рисков размещения рекламы, связанных с недостижением необходимой для решения рекламных задач интенсивности рекламного воздействия.

Ключевые слова: реклама, риск, медиапланирование, оптимизация, эффективность.

ВВЕДЕНИЕ

Понятие риска широко употребляется для решения задач управления, обеспечения безопасности и стабильности в экономике, политике и других областях человеческой деятельности, подробнее см. работы [1—5] и ссылки в них. Оно трактуется весьма широко — как *вероятность* появления неблагоприятного исхода, как *невозможность* контролировать значимые обстоятельства, как понятие, противоположное понятию *надежности* и *безопасности* и т. п. Поскольку понятие риска весьма многогранное, существует множество методов классификации, учета, оценки и вычисления рисков, основанных на методах теории вероятностей, теории игр, теории катастроф, а также на экспертных оценках. Большой интерес представляет задача разработки *количественных* методов оценки рисков, так как владение этими методами позволяет не только *предсказывать* риски в той или иной области деятельности, но и решать задачи *управления* и *оптимизации* рисков.

В настоящей работе изложены методы количественной оценки рисков неэффективного размещения рекламы, базирующиеся на аналитическом аппарате теории медиапланирования. Применение этих методов в процессе размещения рекламы помогает принимать решения в условиях неопределенности на основе количественных вероятностных оценок. Методы теории медиапланирования, развитые в работах [6—8], позволяют *количественно* и объективно оценивать риски размещения рекламы в СМИ. Риск размещения рекламы определяется как вероятность того, что необходимая для решения рекламной задачи интенсивность рекламного

воздействия на целевую аудиторию не достигается. Объективность оценки риска обусловлена тем обстоятельством, что риск определяется как вероятность осуществления неблагоприятного исхода размещения рекламы, которая может быть *вычислена* в зависимости от параметров размещения — числа размещений, параметров медиа, интенсивности планируемой рекламы и др. В этой связи разработка методов теории медиапланирования, с помощью которых можно решать задачи управления рисками размещения рекламы в СМИ, представляется актуальной.

1. КОЛИЧЕСТВЕННОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ РИСКА РАЗМЕЩЕНИЯ РЕКЛАМЫ

Определение риска как вероятности неблагоприятного результата размещения рекламы основывается на понятии *эффективного охвата* аудитории. Определение этого понятия и методика его вычисления с помощью методов теории медиапланирования приведены в работах [6—8]. Эффективный охват $G_{эф}$ аудитории — это, с одной стороны, *доля* аудитории, получившей эффективное число контактов $f_{эф}$, с другой стороны, *вероятность* того, что представитель целевой аудитории получит эффективное число контактов $f_{эф}$.

Эффективное число (частота) контактов $f_{эф}$ задает уровень *интенсивности* рекламного воздействия, необходимый для достижения поставленной *цели* рекламы. Отметим, что в теории медиапланирования термины «частота контактов» и «число контактов» употребляются как синонимы. Количественно эффективная частота $f_{эф}$ равна числу рекламных контактов, приходящихся в среднем

на представителя целевой аудитории, достаточно-го для того чтобы цель рекламы (например, запо-минание рекламного сообщения) была достигнута. Значение эффективной частоты $f_{эф}$ зависит от ря-да факторов: цели рекламы, особенностей целевой аудитории и СМИ, в которых размещается рекла-ма, параметров рекламных сообщений (длитель-ности рекламных теле- и радиороликов, размера полосы рекламного объявления в прессе) и других факторов. Эффективная частота $f_{эф}$ находится сле-дующими способами: с помощью исследований, на основе опыта размещения рекламы, а также по специально разработанным методикам, например, методикам Остроу, Росситера — Перси (подробнее см. в работе [8]).

Риск ρ неэффективного размещения рекламы определим как вероятность того, что случайно выбранный представитель целевой аудитории не получит запланированное рекламодателем эффек-тивное число контактов $f_{эф}$ с рекламой. Тогда, ис-пользуя вероятностное определение эффективно-го охвата аудитории и определение риска, приве-денные выше, риск можно вычислить как

$$\rho = 1 - G_{эф}, \quad (1)$$

где $G_{эф}$ — эффективный охват аудитории.

В общем случае эффективный охват $G_{эф}$ можно вычислить, зная спектр охвата $g(f)$ и функцию эф-фективности контактов $E(f)$ по формуле

$$G_{эф} = \sum_{f=1}^{f_{\max}} E(f)g(f). \quad (2)$$

Здесь $E(f)$ — функция эффективности, описы-вающая изменение эффективности рекламных кон-тактов в окрестности эффективной частоты $f_{эф}$, $g(f)$ — функция спектра охвата, $f_{\max}$ — максима-льно возможное число рекламных контактов.

Согласно данным исследований эффектив-ности рекламы (см., например, книгу [9, с. 325]) функцию эффективности контактов $E(f)$ можно описать следующими моделями:

— функция $E(f)$ возрастает с увеличением час-тоты f так, что скорость ее роста монотонно убы-вает;

— функция $E(f)$ возрастает с увеличением час-тоты в узком частотном интервале эффективности Δf вблизи эффективной частоты $f_{эф}$ так, что ско-рость ее роста сначала возрастает, а затем убывает (в этом случае говорят, что функция $E(f)$ имеет так называемый S-образный вид); параметры функ-ции эффективности $f_{эф}$ и Δf определяются экспе-

риментально, исходя из реакции целевой аудито-рии на рекламное воздействие.

Спектр охвата $g(f)$, как и охват аудитории, мож-но определить двумя эквивалентными способами. С одной стороны, $g(f)$ — это распределение охвата аудитории по числу контактов f , с другой стороны $g(f)$ — вероятность того, что представитель целе-вой аудитории получит ровно f контактов с рек-ламой. Спектр охвата $g(f)$ вычисляется на основе бинарной модели аудитории по методике, изло-женной в работах [6—8]. Эта методика позволяет вычислять моно- и мультимедийные спектры, а также моделировать эффекты синергии мультиме-дийных контактов.

Спектр охвата $g(f)$ является функцией парамет-ров СМИ, в которых размещается реклама (рей-тинг, предельный охват, доля постоянной аудито-рии и вероятность контактов постоянной ауди-тории с медиа), числа размещений рекламы m_j в каждом СМИ, j — номер СМИ, $j = 1, 2, \dots, L$; L — число СМИ, в которых размещается реклама.

Далее изложены два способа вычисления рис-ков, основанные на аналитических оценках и чис-ленном моделировании.

2. АНАЛИТИЧЕСКАЯ ОЦЕНКА РИСКОВ РАЗМЕЩЕНИЯ РЕКЛАМЫ

На примере размещения рекламы в двух медиа покажем возможность аналитической минимиза-ции рисков размещения рекламы. Сформулируем условия задачи. Пусть имеются два медиа (СМИ) с параметрами: рейтинги каждого СМИ — R_1 и R_2 , предельные охваты — G_1^∞ и G_2^∞ , стоимости разме-щения рекламы в каждом СМИ — v_1 и v_2 .

Задача минимизации риска состоит в нахожде-нии оптимальных чисел размещений рекламы в первом m_1 и втором m_2 СМИ, которые обеспечи-вают наименьший риск ρ неэффективного разме-щения рекламы при заданном рекламном бюджете $V = \text{const}$.

При вычислении риска будем полагать, что эф-фективная частота $f_{эф} = 1$. Тогда $E(f) = 1$, и из вы-ражений (1) и (2), а также формулы (3.12) из ра-боты [8] следует, что

$$\rho = 1 - \sum_{f=1}^{f_{\max}} E(f)g(f) = 1 - \sum_{f=1}^{f_{\max}} g(f) = 1 - G(m_1, m_2),$$

где $G(m_1, m_2)$ — охват аудитории или вероятность того, что представитель целевой аудитории имел контакт с рекламой при условии, что в первом ме-

диа реклама размещалась m_1 раз, а во втором — m_2 раз. Охват аудитории $G(m_1, m_2)$ в условиях независимого обращения к этим СМИ, как показано в работе [8], вычисляется по формуле $G(m_1, m_2) = G_1(m_1) + G_2(m_2) - G_1(m_1)G_2(m_2)$. С учетом сказанного риск ρ можно представить как функцию числа размещений m_1, m_2 :

$$\rho(m_1, m_2) = 1 - G_1(m_1) - G_2(m_2) + G_1(m_1)G_2(m_2), \quad (3)$$

где G_j — охваты аудитории первым ($j = 1$) и вторым ($j = 2$) медиа, которые согласно формуле (13) из работы [6] являются функциями чисел размещения рекламы m_j , рейтингов медиа R_j и их предельных охватов G_j^∞ :

$$G_j(m_j) = G_j^\infty \left[1 - (1 - R_j/G_j^\infty)^{m_j} \right]. \quad (4)$$

Поскольку все параметры медиа (здесь — R_j и G_j^∞) фиксированы, риск (3) можно рассматривать как функцию двух переменных $\rho = \rho(m_1, m_2)$.

Исключим одну переменную, например, переменную m_2 , используя условие постоянства рекламных затрат $v_1 m_1 + v_2 m_2 = V = \text{const}$. Тогда функция риска (4) будет функцией одной переменной $\rho = \rho(m_1)$. Приравняв первую производную этой функции по m_1 к нулю, получим уравнение относительно критической точки m_1 , в которой реализуется экстремум функции $\rho(m_1)$:

$$\begin{aligned} & G_1^\infty \left\{ 1 - G_2^\infty \left[1 - (1 - R_2/G_2^\infty)^{(V/v_2 - m_1 v_1/v_2)} \right] \right\} \times \\ & \times (1 - R_1/G_1^\infty)^{m_1} \ln(1 - R_1/G_1^\infty) - \\ & - G_2^\infty \left\{ 1 - G_1^\infty \left[1 - (1 - R_1/G_1^\infty)^{m_1} \right] \right\} \times \\ & \times (v_1/v_2)(1 - R_2/G_2^\infty)^{(V/v_2 - m_1 v_1/v_2)} \ln(1 - R_2/G_2^\infty) = 0. \end{aligned}$$

Это уравнение может быть решено численными методами. Если пренебречь слагаемыми второго порядка малости по произведениям охватов первого и второго СМИ, то данное уравнение имеет приближенное аналитическое решение для критической точки m_1 :

$$m_1 = \ln \left[q_2^{V/v_2} v_1 G_2^\infty \ln q_2 / (v_2 G_1^\infty \ln q_1) \right] \ln(q_1 q_2^{v_1/v_2}), \quad (5)$$

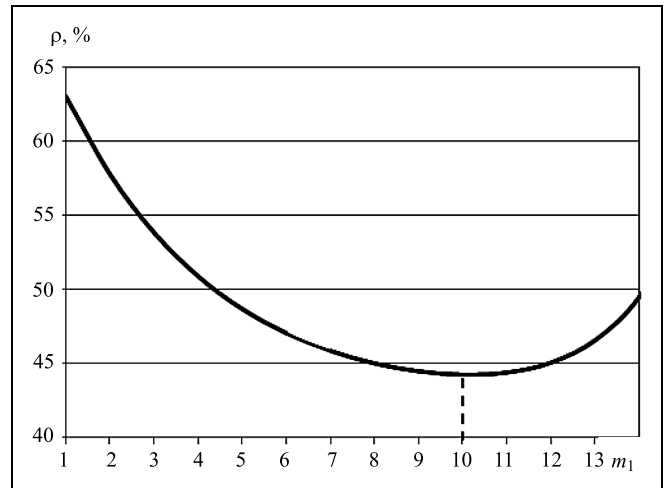


Рис. 1. Зависимость риска ρ размещения рекламы от числа m_1 размещения рекламы при постоянном рекламном бюджете

где $q_j = 1 - R_j/G_j^\infty$; $j = 1, 2$. Вычисляя вторую производную функции $\rho(m_1)$ в точке экстремума, нетрудно показать, что найденная критическая точка является точкой минимума.

На рис. 1 показана зависимость риска размещения рекламы от числа размещений m_1 , построенная при значениях параметров медиа: $R_1 = 10\%$, $= 40\%$, $R_2 = 20\%$, $= 30\%$ и стоимостей размещения: $v_1 = 8\,000$ руб., $v_2 = 15\,000$ руб., $V = 125\,000$ руб. Согласно формуле (5) при этих значениях параметров минимум риска достигается в том случае, если $m_1 = 10$, $m_2 = 3$.

Таким образом, проведена аналитическая минимизация риска размещения рекламы в СМИ. Показано существование минимума риска размещения рекламы в зависимости от чисел размещения рекламы в СМИ и их параметров.

3. ЧИСЛЕННАЯ МИНИМИЗАЦИЯ РИСКОВ РАЗМЕЩЕНИЯ РЕКЛАМЫ

Если число СМИ, в которых размещается реклама, больше двух, то аналитическое нахождение минимумов риска размещения рекламы становится затруднительным ввиду громоздкости соответствующих вычислений. В этом случае оптимизацию необходимо проводить численными методами. Согласно формулам (1) и (2) риск, связанный с размещением рекламы, можно представить как функцию числа размещений $\rho = \rho(m_j)$. Считая m_j действительными переменными, представим их в виде $m_j = V_j/v_j$, где V_j — затраты на размещение рек-

ламы, v_j — стоимость одного размещения рекламы в j -м СМИ. Риск ρ является функцией затрат V_j на размещение рекламы в каждом СМИ: $\rho = \rho(V_j)$. Используя целевую функцию $\rho(V_j)$, оптимизируем размещение рекламы. Оптимизация осуществляется двумя способами:

1) путем минимизации целевой функции риска

$$\rho(V_1, \dots, V_L) \Rightarrow \min$$

при заданном рекламном бюджете (ограничение на переменные V_j)

$$\sum_{j=1}^L V_j = V_0 = \text{const};$$

2) путем минимизации рекламного бюджета

$$\sum_{j=1}^L V_j \Rightarrow \min$$

при заданном уровне риска

$$\rho(V_1, \dots, V_L) = \rho_0 = \text{const.} \quad (9)$$

Здесь V_0 — заданный рекламный бюджет, ρ_0 — заданный риск не получить необходимую для достижения цели рекламы частоту рекламных контактов, $\sum_{j=1}^L V_j$ — рекламный бюджет, m_j и v_j — число и стоимость размещений рекламы в j -м СМИ, $V_j = m_j v_j$.

Сформулируем методику оценки риска размещения рекламы. Для этого предварительно сформулируем критерий эффективности размещения, связанный с поставленной рекламодателем целью рекламы. Пусть целью рекламной кампании является создание осведомленности о новой марке товара, выходящего на рынок. В этом случае при размещении рекламы нужно обеспечить такую интенсивность рекламного воздействия (частоту рекламных контактов $f_{\text{эф}}$), которая достаточна для запоминания предмета рекламы. Для решения этой задачи необходимо предварительно (до размещения рекламы) определить параметры эффективности: эффективную частоту $f_{\text{эф}}$ и допустимый риск ρ того, что эта частота контактов не будет достигнута. Далее нужно выбрать способ оптимизации, который осуществляется рекламодателем, исходя из соображений экономической или коммуникативной эффективности рекламы. Минимизация риска $\rho(V_1, \dots, V_L)$ или рекламного бюджета

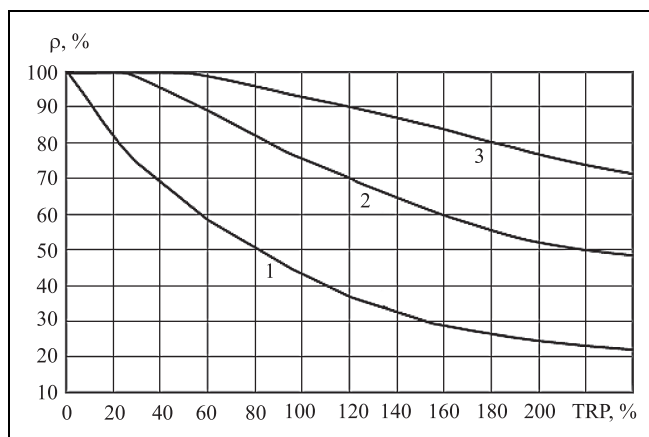


Рис. 2. Зависимость риска ρ неэффективного размещения рекламы от числа контактов TRP: 1 — $f_{\text{эф}} = 1$; 2 — $f_{\text{эф}} = 3$; 3 — $f_{\text{эф}} = 5$

$\sum_{j=1}^L V_j$ осуществляется численными методами, например, градиентными, в которых используется текущая рентабельность СМИ $Rent_j$ [8]. При вычислении риска ρ использовалась функция эффективности вида: $E(f) = 1$, если $f \geq f_{\text{эф}}$; $E(f) = 0$, если $1 \leq f < f_{\text{эф}}$.

Изложенная методика позволяет оценить зависимость риска ρ от параметров размещения рекламы — числа размещений m_j , эффективной частоты $f_{\text{эф}}$ и др.

На рис. 2 приведены зависимости рисков размещения рекламы от числа контактов TRP (target rating point — суммарного рейтинга), полученные в результате оптимизации размещения рекламы при разных значениях эффективной частоты $f_{\text{эф}}$. Суммарный рейтинг вычисляется по формуле

$$TRP = \sum_{j=1}^L m_j R_j$$

и представляет собой количественную меру интенсивности размещаемой рекламы: количественно TRP равен числу контактов с рекламой в процентах от численности целевой аудитории (подробнее см. в работе [8]).

Зависимости $\rho(TRP)$ получены следующим образом. Оптимизировалось размещение рекламы на 10-ти телеканалах Екатеринбурга для целевой аудитории «женщины 25—44 лет с уровнем дохода не ниже среднего» в соответствии с критерием эффективности, предусматривающем минимизацию риска размещения при заданном рекламном бюджете (оптимизационная задача 1, сформулированная выше).



Из рис. 2 видно, что увеличение эффективной частоты $f_{эф}$ при неизменном числе контактов TRP приводит к существенному увеличению риска ρ неэффективного размещения рекламы, а рост числа контактов TRP при фиксированном уровне эффективной частоты $f_{эф}$ приводит к уменьшению риска. Например, согласно результатам, представленным на рис. 2, риск того, что представитель целевой аудитории не получит ни одного рекламного контакта при $TRP = 160\%$ составляет 28% ; риск не получить *трех* рекламных контактов составляет 60% ; риск не получить *пяти* рекламных контактов равен 84% (при том же $TRP = 160\%$).

Число контактов TRP и рекламный бюджет связаны между собой прямо пропорциональной зависимостью. Поэтому результаты, представленные на рис. 2, позволяют оценить размер рекламного бюджета, достаточный для того чтобы риск не получить необходимое (эффективное) число контактов, не превышал заданного уровня. Проиллюстрируем сказанное примером. Пусть в результате анализа рекламного отклика установлено, что необходимое для решения рекламной задачи эффективное число контактов $f_{эф} = 3$, а допустимый уровень риска $\rho = 50\%$. Тогда, согласно данным, представленным на рис. 2, рекламный бюджет должен быть таким, чтобы обеспечить интенсивность рекламы, заданную значением $TRP = 220\%$. Если же эффективная частота $f_{эф} = 5$, то размещение рекламы и увеличение рекламного бюджета необходимо продолжать до тех пор, пока риск ρ , определяемый кривой 3 на рис. 2, не станет равным 50% .

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Изложена методика моделирования и управления рисками, связанными с размещением рекла-

мы в СМИ. Сформулированы методы вычисления рисков и методы оптимизации размещения рекламы, позволяющие минимизировать риски неэффективного размещения рекламы. Показано существование оптимумов чисел размещения рекламы, соответствующих минимуму риска. Получены зависимости рисков размещения рекламы от эффективной частоты контактов при разных значениях интенсивности рекламы, оцениваемой числом контактов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Knight F. Risk, Uncertainty and Profit. — Boston: Houghton Mifflin Co, 1921.
2. Рэдхэд К., Хьюз С. Управление финансовыми рисками. — М.: Инфра-М, 1996. — 288 с.
3. Шоломицкий А.Г. Теория риска. Выбор при неопределенности и моделирование риска. — М.: Изд. дом ГУ ВШЭ, 2005. — 400 с.
4. Королев В.Ю., Беннинг В.Е., Шоргин С.Я. Математические основы теории риска. — М.: Физматлит, 2011. — 591 с.
5. Мардер А.Г. Риски и шансы: Неопределенность, прогнозирование и оценка. — М.: Красанд, 2014. — 448 с.
6. Попов Е.В., Шматов Г.А. Теория вычисления охвата СМИ // Проблемы управления. — 2009. — № 5. — С. 22–27.
7. Попов Е.В., Шматов Г.А. Вычисление охвата СМИ // Проблемы управления. — 2010. — № 2. — С. 34–38.
8. Шматов Г.А. Теория медиапланирования. — Екатеринбург: Изд-во Гуманитарного ун-та, 2012. — 442 с.
9. Брайант Дж., Томпсон С. Основы воздействия СМИ. — М.: Вильямс, 2004. — 428 с.

Статья представлена к публикации членом редколлегии В.В. Кульбой.

Шматов Георгий Артемович — канд. физ.-мат. наук, доцент, Уральский федеральный университет, Екатеринбург, sga36@mail.ru.

Не забудьте подписаться!

Подписку на журнал «Проблемы управления» можно оформить в любом почтовом отделении (подписной индекс 81708 в каталоге Роспечати или 38006 в объединенном каталоге «Пресса России»), а также через редакцию с любого месяца, при этом почтовые расходы редакция берет на себя. Отдельные номера редакция высылает по первому требованию.

ОПТИМАЛЬНЫЕ ТРАЕКТОРИИ БЕСПИЛОТНЫХ ЛЕТАТЕЛЬНЫХ АППАРАТОВ ПРИ СЛЕЖЕНИИ ЗА ПОДВИЖНОЙ ЦЕЛЮ С ПОМОЩЬЮ АНТЕННОЙ РЕШЕТКИ

К.В. Андреев

Рассмотрена задача оптимизации траекторий полета беспилотного летательного аппарата (БПЛА), осуществляющего слежение за подвижной целью с помощью линейной антенной решетки путем угловых азимутальных наблюдений. Показано, что точность измерения азимутальных направлений на цель существенно зависит от взаимного расположения цели и БПЛА, что приводит к наличию «слепых» зон — значений углов с присущими им высокими ошибками измерений. Отмечено, что учет такой структуры наблюдений позволяет ставить задачу о выборе оптимальных (в смысле точности слежения за целью) траекторий полета БПЛА и необходимости введения дополнительных ограничений на интенсивность его маневрирования. Оптимальные траектории получены известными численными методами, основанными на принципе максимума Л.С. Понтрягина.

Ключевые слова: угловые наблюдения, фильтр Калмана, принцип максимума Понтрягина, вырожденная задача оптимального управления.

ВВЕДЕНИЕ

Постановка задачи определения элементов движения цели (ЭДЦ) по угломерной информации известна с 1947 года [1]. С ее решением связаны две основные трудности: результаты измерений нелинейно зависят от координат цели [2] и при слежении за подвижной целью возникает проблема ее наблюдаемости [3], что требует от БПЛА выполнения маневров. Задача планирования траектории БПЛА при определении ЭДЦ по угломерным данным достаточно подробно исследована в работах [4–6]. Однако, как будет показано далее, учет ограничений на точность наблюдений, обусловленных физической структурой детектора сигнала, установленного на борту БПЛА [7], может существенно влиять как на вид программных траекторий полета, так и на точность оценки ЭДЦ.

В настоящей работе рассмотрен случай слежения за целью в радиодиапазоне с помощью линейной антенной решетки (антенные элементы размещены вдоль прямой линии на равном расстоянии друг от друга), расположенной вдоль фюзеляжа

БПЛА. Антенные решетки (или «умные антенны» — smart antennas) и алгоритмы определения угла прихода сигнала (AoA — Angle of Arrival) получили широкое распространение, в частности, и в телекоммуникациях [8, 9]. Некоторые алгоритмы определения AoA опираются на законы Фурье-оптики [10] и основаны на построении псевдоспектральной плотности, например, алгоритм Бартлетта [11], Capon [12] и MUSIC [13], которые описаны в работе [8]. Поскольку эти алгоритмы базируются на построении спектральной плотности, они требуют существенных вычислительных затрат, связанных со сканированием возможных значений AoA, и построением спектральной плотности для каждого возможного значения. Альтернативный подход связан с применением алгоритма ESPRIT — Estimation of Signal Parameters via Rotational Invariants [14], не требующего сканирования всех возможных значений AoA, оценки которого выводятся непосредственно из корреляционной матрицы сигнала [8]. Алгоритм основан на том, что исходная линейная антенная решетка может быть разделена на две идентичных антенных решетки, причем одна из другой получается параллельным



переносом. В качестве примера можно привести антенную решетку с четным числом элементов и разбиением на массивы четных и нечетных элементов. Алгоритм ESPRIT работает в предположениях:

- принимаемый сигнал узкополосный;
- помеха представляет собой аддитивный белый шум, что выполняется только при отсутствии многолучевого распространения сигнала или при достаточно большой высоте полета БПЛА [15] по сравнению с элементами ландшафта.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И СПОСОБ РЕШЕНИЯ

Рассмотрим БПЛА, выполняющий полет на фиксированной высоте с постоянной по модулю скоростью V . С борта БПЛА осуществляется наблюдение за целью, движущейся равномерно и прямолинейно со скоростью v вдоль плоской поверхности Земли. Управление БПЛА задается углом рысканья $\gamma = \gamma(t)$ — гладкой функцией времени. Введем прямоугольную систему координат с началом отсчета в центре масс БПЛА и выберем координатные оси так, чтобы относительные координаты цели $(x, y) = (x(t), y(t))$ задавались системой дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{x} = -V \cos \gamma + v_x, \\ \dot{y} = -V \sin \gamma + v_y, \end{cases} \quad t \in [0, T], \quad (1)$$

с некоторыми начальными условиями (x_0, y_0) . Здесь v_x и v_y — неизвестные, но постоянные значения компонент вектора скорости цели. Предполагается, что время T выполнения миссии БПЛА фиксировано. Если относительные координаты цели точно известны, то известно и точное азимутальное направление на цель

$$\theta(t) = \arctan \frac{x(t)}{y(t)}. \quad (2)$$

Реальные наблюдения $\phi(t) = \theta(t) + n(t)$ содержат аддитивную ошибку $n = n(t)$, имеющую нормальное распределение с нулевым средним. Дисперсия распределения ошибок является функцией направления (2) на цель и ориентации антенной решетки, определяемой направлением движения БПЛА или углом рысканья.

Фильтр Калмана [16] — на сегодня, пожалуй, один из наиболее распространенных способов получения оценок ЭДЦ по сериям зашумленных наблюдений. Если функция наблюдений нелинейная (как, например, функция (2)), то применяется расширенный фильтр Калмана, в уравнения которого подставляется линеаризованная (в окрестности текущей оценки) функция наблюдений [2]. Пусть ЭДЦ задаются фазовым вектором $\rho = \rho(t)$:

$$\rho = (x, y, v_x, v_y)'. \quad (3)$$

Здесь и далее символ «штрих» означает транспонирование.

В соответствии с уравнениями фильтра Калмана [17] эволюция оценки $\hat{\rho} = \hat{\rho}(t)$ вектора (3) ЭДЦ описывается стохастическим дифференциальным уравнением

$$\frac{d\hat{\rho}}{dt} = F\hat{\rho} + PH'R^{-1}(\phi - H\hat{\rho}), \quad (4)$$

начальное условие которого представляет собой гауссовский вектор с заданными средним $\rho_0 = (x_0, y_0, v_{x_0}, v_{y_0})'$ и матрицей ковариации P_0 . Динамика системы описывается уравнением $\frac{d\rho}{dt} = F\rho$, где

$$F = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$P = P(t)$ — матрица ковариации текущей оценки ЭДЦ, $R = R(t)$ — скалярная функция, характеризующая дисперсию шума в наблюдениях (определена ниже), а $H = H(t)$ — линеаризованная вектор-функция наблюдений

$$H = \left. \frac{\partial \theta}{\partial (x, y, v_x, v_y)} \right|_{\rho = \hat{\rho}} \Rightarrow H = \left(-\frac{y}{r}, \frac{x}{r}, 0, 0 \right),$$

где $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.

В случае, когда цель не совершает маневров, элементы матрицы ковариации подчиняются матричному уравнению Риккати [17]

$$\dot{P} = FP + PF' - PH'R^{-1}HP'. \quad (5)$$

Критерием качества получаемой оценки ЭДЦ может служить след матрицы ковариации в конечный момент времени T :

$$G = \text{tr} P|_{t=T} = p_{xx} + p_{yy} + p_{x_x v_x} + p_{v_y v_y}|_{t=T}, \quad (6)$$

где tr — оператор следа матрицы, p с индексами обозначает соответствующие диагональные элементы матрицы ковариации (см. Приложение).

При планировании миссии БПЛА будущие наблюдения не могут быть использованы для уточнения ЭДЦ. По этой причине задача оптимального планирования траектории решается при экстраполяции начальной оценки ЭДЦ. Иными словами, уравнение (4) меняется более простым уравнением $d\hat{\rho}/dt = F\hat{\rho}$, что эквивалентно замене v_x и v_y на v_{x_0} и v_{y_0} в уравнении (1). Задача оптимального управления состоит в том, чтобы найти такую функцию времени $\gamma = \gamma(t)$, для которой система (1), (5) с на-

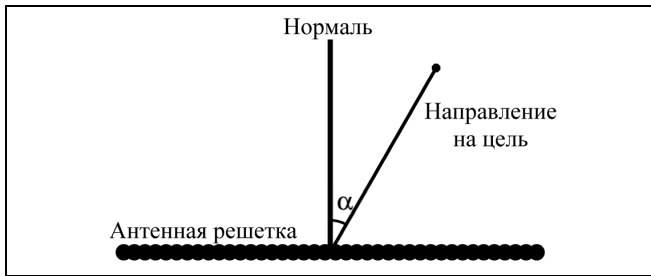


Рис. 1. Линейная антенная решетка, нормаль к ней и направление на цель

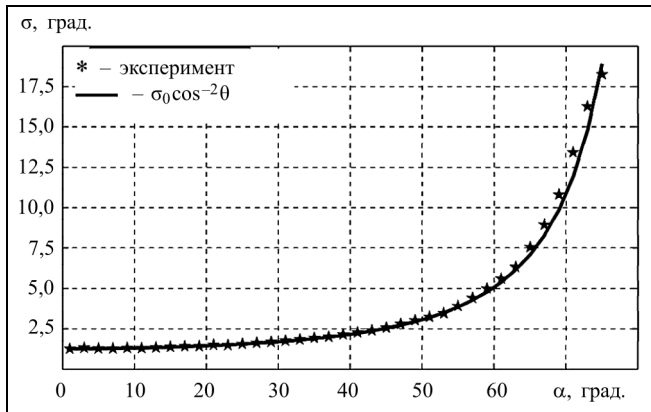


Рис. 2. Зависимость ошибки определения AoA от азимутального направления на цель

чальными условиями ρ_0 , P_0 реализовывала бы минимально возможное значение функционала (6).

При решении задачи необходимо сначала определить зависимость среднеквадратической ошибки $\sigma(\alpha)$ определения AoA от взаимного расположения антенной решетки и цели, после чего появляется возможность включить эту зависимость в явном виде в уравнение (5). Далее задача оптимального управления может быть сведена к двухточечной задаче с помощью принципа максимума Л.С. Понтрягина и решена численно.

Рассмотрим угол α (рис. 1) между точным направлением на цель и нормалью к линии фюзеляжа, вдоль которой установлены антенные элементы. Линия фюзеляжа задается единичным вектором $(\cos\gamma, \sin\gamma)$. Нормаль к ней представляет собой единичный вектор $(\sin\gamma, -\cos\gamma)$, где γ — угол рысканья БПЛА. Точность определения AoA оценим с помощью вычислительного эксперимента в предположении, что многолучевое распространение сигнала отсутствует, а модель шума в канале представляет собой аддитивный гауссовый шум. В результате получена зависимость среднеквадратической ошибки определения AoA от значения α , изображенная на рис. 2.

Значения параметров вычислительного эксперимента при определении $\sigma(\alpha)$

Число отсчетов при оценке матрицы ковариации сигнала	500
Число элементов антенной решетки	40
Расстояние между элементами антенной решетки, длин волн	0,25
Отношение «сигнал/шум» на приемнике, дБ	0
Число независимых экспериментов для оценки σ для каждого значения α	10^4

Из результатов вычислительного эксперимента видно, что $\sigma(\alpha)$ достаточно хорошо аппроксимируется зависимостью

$$\sigma(\alpha) \approx \frac{\sigma_0}{\cos^2 \alpha}, \quad (7)$$

где $\sigma_0 = \sigma(0)$.

Поскольку для каждого значения α было выполнено 10^4 независимых испытаний, то можно с высокой степенью достоверности утверждать, что распределение ошибки определения AoA нормальное с нулевым средним для значений α вплоть до 60° . Большие значения α могут быть охарактеризованы как «слепые» зоны, поскольку точность определения угла прихода сигнала становится слишком низкой.

Запишем теперь зависимость (7) как функцию x, y, γ . Для этого найдем $\cos\alpha$ с помощью скалярного произведения вектора относительных координат цели и единичного вектора нормали к линии антенной решетки:

$$\cos\alpha = (x, y) \begin{pmatrix} \cos\gamma \\ -\sin\gamma \end{pmatrix} \frac{1}{r} = \frac{x\sin\gamma - y\cos\gamma}{r}.$$

Перепишем уравнение (7) в виде

$$\frac{1}{\sigma^2(x, y, \gamma)} = \frac{(x\sin\gamma - y\cos\gamma)^4}{\sigma_0^2 r^4} = \frac{\eta(x, y, \gamma)}{\sigma_0^2}.$$

Коэффициент $\eta(x, y, \gamma)$ возрастания ошибки определения AoA полностью задает дисперсию $\mathbf{R}$ в уравнении (5).

Матричный множитель $\mathbf{H}^* \mathbf{R}^{-1} \mathbf{H}$ в уравнении (5) может быть записан как

$$\mathbf{H}^* \mathbf{R}^{-1} \mathbf{H} = \begin{pmatrix} \mathbf{H}_{xx} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{H}_{xx} = \begin{pmatrix} h_1 & h_2 \\ h_2 & h_3 \end{pmatrix},$$

где $\mathbf{H}_{xx}$ — (2×2) симметричная матрица с элементами

$$h_1 = \frac{y^2}{r^4 \sigma_0^2} \eta(x, y, \gamma), \quad h_2 = -\frac{xy}{\sigma_0^2 r^4} \eta(x, y, \gamma),$$

$$h_3 = \frac{x^2}{\sigma_0^2 r^4} \eta(x, y, \gamma).$$



В результате уравнение (5) фильтра Калмана принимает вид

$$\dot{P} = FP + PF' - P \begin{pmatrix} H_{xx} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P'. \quad (8)$$

Уравнение (8) описывает эволюцию всех десяти элементов симметричной матрицы $P = P(t)$ размером 4×4 .

2. ДВУХТОЧЕЧНАЯ ЗАДАЧА И СПОСОБ ЕЕ РЕШЕНИЯ

Сформулированная задача оптимального управления представляет собой задачу Майера. В соответствии с принципом максимума Л.С. Понтрягина, эта задача может быть сведена к двухточечной задаче [18]. Из условий трансверсальности часть граничных условий будет определена на левом конце траектории (при $t = 0$), а часть — на правом (при $t = T$). Запишем условия трансверсальности в виде, предложенном в работе [19]:

$$[\partial G - \mathcal{H} \delta t + \psi \cdot \delta \xi]_i^f = 0,$$

где $\mathcal{H}$ — гамильтониан задачи, символ δ обозначает вариацию, точкой обозначено скалярное произведение, индекс i символизирует набор граничных условий в начальной точке траектории БПЛА, а индекс f — в конечной, G — оптимизируемый функционал (6). Вектор фазовых переменных ξ состоит из элементов матрицы ковариации $P = P(t)$ (вычисляются в Приложении) и относительных координат x , y цели:

$$\begin{aligned} \xi &= (\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4, \xi_5, \xi_6, \xi_7, \xi_8, \xi_9, \xi_{10}, \xi_{11}, \xi_{12}) = \\ &= (p_{xx}, p_{xy}, p_{yy}, p_{xv_x}, p_{xv_y}, p_{yv_x}, p_{yv_y}, \\ &\quad p_{xv_x}, p_{xv_y}, p_{v_x y}, p_{v_y y}, x, y), \end{aligned}$$

а вектор сопряженных переменных ψ определен как

$$\psi = (\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4, \psi_5, \psi_6, \psi_7, \psi_8, \psi_9, \psi_{10}, \psi_{11}, \psi_{12}),$$

$$\psi = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \xi},$$

где гамильтониан $\mathcal{H} = \dot{\xi} \cdot \psi$.

Начальные условия (i) полностью заданы априорным значением матрицы ковариации и начальной оценкой ЭДЦ. Поскольку время выполнения миссии фиксировано (т. е. $\delta T = 0$), условия трансверсальности можно переписать в виде

$$[\partial G + \psi \cdot \delta \xi]_f = 0,$$

что определяет значения сопряженных переменных в конечной точке (f) выполнения миссии, т. е. при $t = T$: $\psi_{1,3,4,6}^f = -1$, $\psi_{2,5,7,8,9,10,11,12}^f = 0$. Согласно принципу максимума Л.С. Понтрягина, необходимым условием оптимальности выбранного управ-

вления γ является максимум гамильтониана $\mathcal{H}$ по этому управлению в каждой точке траектории. Гамильтониан задачи имеет вид:

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= \mathcal{H}_0(x \sin \gamma - y \cos \gamma)^4 + D - \psi_{11}(V \cos \gamma - v_x) - \\ &\quad - \psi_{12}(V \sin \gamma - v_y), \end{aligned} \quad (9)$$

где

$$\mathcal{H}_0 = \frac{-Ay^2 + Bxy - Cx^2}{\sigma_0^2 r^8},$$

а выражения для A , B , C и D определены в Приложении.

Опишем далее процедуру численного решения задачи поиска максимума гамильтониана, заметив, что гамильтониан представляет собой полином четвертой степени от тригонометрических функций управления, поэтому при $\gamma \in [0, 2\pi)$ он может иметь несколько локальных максимумов.

В ходе численного решения управление хранится в виде последовательности значений в различные моменты времени с интервалом $\Delta t \ll T$. Поскольку применялся метод решения дифференциальных уравнений с переменным шагом, то для получения управления в произвольный момент времени применялась интерполяция.

Для получения оптимальной траектории применялся итеративный алгоритм, на каждом шаге которого значение функционала G строго убывает. Каждая итерация состоит из нескольких шагов. Сначала решается система дифференциальных уравнений для фазовых переменных с известными начальными условиями для прямого времени «слева направо», затем по известным значениям фазовых переменных строится решение системы сопряженных уравнений «справа налево» с граничными условиями в момент $t = T$ [20]. Для перехода к следующей итерации необходимо обновить оптимальное управление. Для этого был выбран такой способ (уравнение записано для каждой точки траектории, в которой хранится управление):

$$\gamma_{k+1} = a\gamma_k + (1-a)\gamma_{k+1}^*,$$

где γ_{k+1} — новое управление на текущей итерации $k+1$ с номером в каждой точке траектории, а γ_{k+1}^* — оптимальное управление, полученное из условия глобального максимума гамильтониана по управлению при известных фазовых и сопряженных переменных в каждой точке траектории. Параметр $a \in (0, 1)$ выбран для сглаживания [20].

Альтернативой поиску глобального максимума гамильтониана служит изменение управления пропорционально градиенту гамильтониана по управлению:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_\gamma &= 4\mathcal{H}_0(x \sin \gamma - y \cos \gamma)^3(x \cos \gamma + y \sin \gamma) + \\ &\quad + \psi_{11} V \sin \gamma - \psi_{12} V \cos \gamma. \end{aligned} \quad (10)$$

Однако такой метод может привести к сходимости к локальному максимуму гамильтониана. Оптимальное управление ищется в диапазоне $\gamma \in \theta \pm \pi$, поскольку $\mathcal{H}(\gamma)$ является периодической функцией аргумента γ , а θ — азимутальное направление на цель. Как будет показано далее, в действительности оптимальное управление находится в диапазоне $\gamma \in \theta \pm \pi/2$.

3. ТРАЕКТОРИИ ПОЛЕТА БПЛА

Оптимальные траектории полета получены с помощью описанной выше численной процедуры в предположении дискретного времени. В случае непрерывного времени для получения $\mathbf{R}$ в уравнении (5) необходимо умножить среднеквадратическую ошибку определения АоА на квадратный корень из периода между последовательными наблюдениями. Предположим, что точность определения элементов скорости движения цели важнее точности определения координат. В качестве единицы длины в выражении (6) удобно выбрать километр, а в качестве единицы скорости — метр в секунду. Начальная матрица ковариации берется диагонального вида с заданными элементами $\{\sigma_x^2, \sigma_y^2, \sigma_v^2, \sigma_w^2\}$.

Значения параметров вычислительного эксперимента для построения траекторий полета БПЛА

Скорость полета БПЛА, м/с	100
Среднеквадратическая ошибки определения азимута σ_0 (7), мрад	26
Частота прихода наблюдений, Гц	10
Время выполнения миссии, с	210
Скорость движения цели, м/с	15
Начальное расстояние между БПЛА и целью, км	20
Начальная априорная ошибка определения координат цели σ_x , км	10
Начальная априорная ошибка определения скорости цели σ_v , м/с	15

Для решения задачи рассмотрим сначала случай $\eta(x, y, \gamma) \equiv 1$ и сформулируем возможные труд-

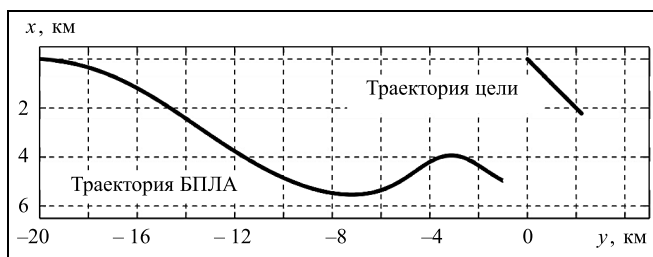


Рис. 3. Оптимальная траектория БПЛА при слежении за подвижной целью для случая $\eta(x, y, \gamma) \equiv 1$

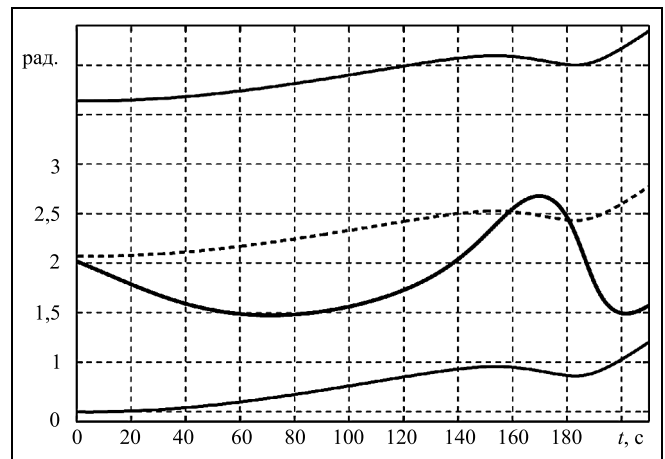


Рис. 4. Функция управления БПЛА при слежении за подвижной целью для случая $\eta(x, y, \gamma) \equiv 1$: — направление наилучшей точности; ---- — угол в направлении цели; — оптимальное управление

ности, связанные с получением искомого решения.

На рис. 3 представлена траектория полета БПЛА для случая, когда точность определения азимутального направления на цель не зависит от взаимного расположения БПЛА и цели, т. е. при $\eta(x, y, \gamma) \equiv 1$, или при «изотропном» сенсоре. В этом случае гамильтониан имеет единственный максимум в каждой точке траектории при $\gamma \in \theta \pm \pi$, а полученная функция управления и соответствующая ей траектория гладкие. При этом максимальное угловое ускорение БПЛА вдоль программной траектории удовлетворит любым конструкционным ограничениям. Для реальной антенной решетки гамильтониан состоит из двух слагаемых, в которые входит управление. Первое слагаемое

$$\mathcal{H}_1(\gamma) = \dots - \psi_{11} V \cos \gamma - \psi_{12} V \sin \gamma \quad (11)$$

задает оптимальное управление БПЛА в случае $\eta(x, y, \gamma) \equiv 1$ и определяет маневры, необходимые для наблюдаемости цели (см. рис. 3 и 4), оно имеет единственный максимум при $\gamma \in \theta \pm \pi$. Максимум второго слагаемого

$$\mathcal{H}_2(\gamma) = \mathcal{H}_0(x \sin \gamma - y \cos \gamma)^4 - \dots \quad (12)$$

достигается в том случае, когда БПЛА движется в направлении, перпендикулярном направлению на цель ($\gamma = \theta \pm \pi/2$). При таком управлении достигается максимальная точность собираемых угловых наблюдений.

На рис. 4 представлена зависимость функции управления от времени для случая $\eta(x, y, \gamma) \equiv 1$. Более тонкими линиями показаны величины $\gamma = \theta \pm \pi/2$, обозначенные как «направление наилучшей точности». В моменты времени 160 и 180 с оптимальное управление пересекает границу

секторов обзора — угол в направлении цели. Так как максимум гамильтониана (9) достигается на интервале между максимумами слагаемых (11) и (12), итоговое оптимальное управление может оказаться разрывным в те моменты времени, когда максимум слагаемого (11) при движении вдоль траектории пересечет границу секторов обзора.

Именно такой случай продемонстрирован на рис. 5. Соответствующая этому управлению траектория не является гладкой (рис. 6, тонкая линия), т. е. для получения физически реализуемого управления необходимы дополнительные ограничения на интенсивность маневрирования БПЛА.

Введем новую фазовую переменную γ , которая в предыдущем варианте постановки задачи играла роль управления. Для учета ограничений на интенсивность маневрирования зададим динамику угла рысканья в виде дифференциального уравнения

$$\dot{\gamma} = \frac{V}{g_{\max}} \sin u,$$

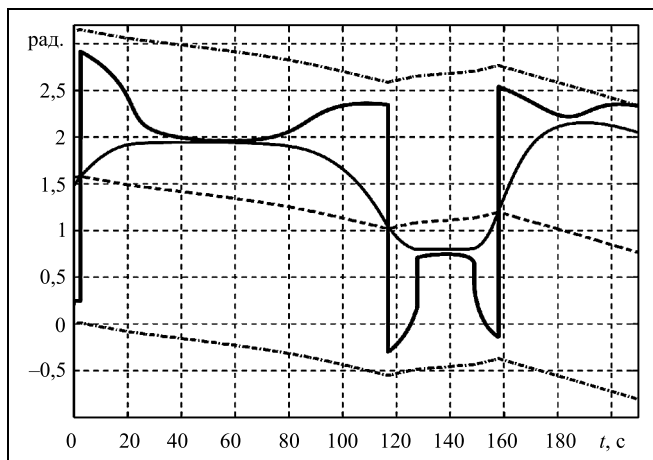


Рис. 5. Функция управления БПЛА при слежении за подвижной целью при использовании антенной решетки в случае $\eta(x, y, \gamma) \equiv 1$: — значение γ , доставляющее максимум (11), ---- — границы секторов обзора $\gamma = \theta + \pi/2$; — оптимальное управление

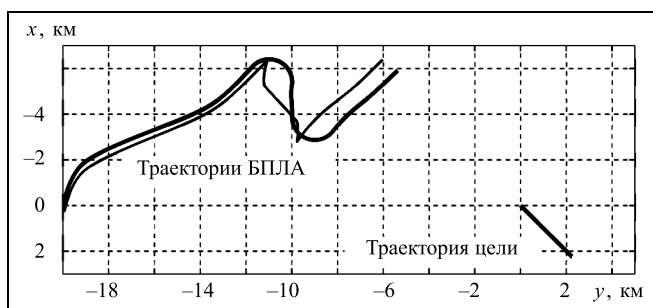


Рис. 6. Траектории полета БПЛА при слежении за подвижной целью при наличии (жирная линия) и отсутствии (тонкая линия) ограничений на интенсивность маневрирования БПЛА

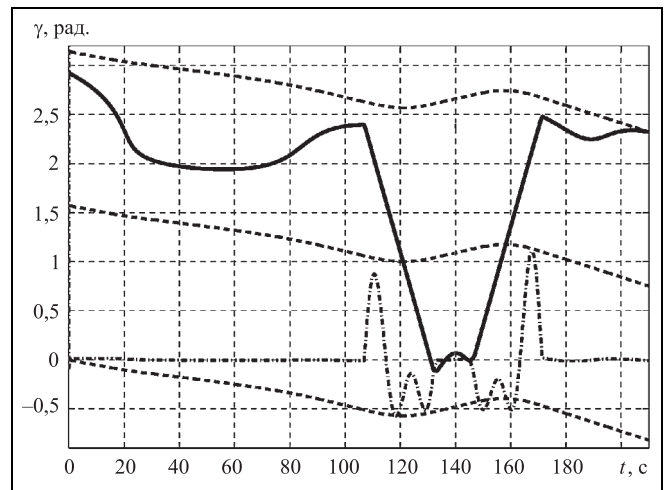


Рис. 7. Функция управления БПЛА при слежении за подвижной целью при наличии ограничений на интенсивность маневрирования БПЛА: ---- — $\frac{\partial \mathcal{H}_{old}}{\partial \gamma} \cdot 100$; — границы секторов обзора; — оптимальное управление

где $u = u(t)$ — новое управление. Такой способ задания управления позволяет естественным образом ограничить модуль максимального бокового ускорения БПЛА величиной $g_{\max}$. Введение новой фазовой переменной влечет за собой новую сопряженную переменную ψ_{13} , динамика которой описывается в точности уравнением (10). Новый гамильтониан имеет вид:

$$\mathcal{H}_{new} = \mathcal{H}_{old} + \psi_{13} \frac{V}{g_{\max}} \sin u,$$

где $\mathcal{H}_{old}$ задается уравнением (9), в котором γ теперь является фазовой переменной.

Оптимальное управление u определяется максимизацией гамильтониана $\mathcal{H}_{new}$ и зависит от знака переменной ψ_{13} . В случае $\psi_{13} > 0$ БПЛА выполняет маневр с максимальной интенсивностью в одну сторону, в случае $\psi_{13} < 0$ — в другую. Для $\psi_{13} \equiv 0$ на каком-либо участке траектории необходимо найти особое управление. Легко убедиться в том, что $\mathcal{H}_{old}$ является первым интегралом при $\psi_{13} \equiv 0$.

Численный метод поиска оптимальной траектории с учетом ограничений на интенсивность маневрирования БПЛА состоит в следующем. С помощью метода градиентного спуска, используя уравнение (10) при $\psi_{13} \equiv 0$, следует найти такое управление, при котором $\mathcal{H}_{old} = \text{const}$. В противном случае, в зависимости от знака переменной ψ_{13} , необходимо двигаться с максимально допустимым боковым ускорением $g_{\max}$. Аналогичный подход, позволяющий учесть ограничения на фазовые пе-

Ожидаемые среднеквадратические ошибки определения координат цели при движении БПЛА вдоль оптимальных траекторий

Сценарий	G	Δx , м	Δv , м/с
Случай $\eta(x, y, \gamma) \equiv 1$	0,369	73,8	0,603
Нет ограничений на маневрирование БПЛА	0,837	139,4	0,904
Максимальное угловое ускорение БПЛА $1g$	0,951	160,8	0,962

ременные, описан в работе [19]. Кроме того, явное включение новых переменных γ и ψ_{13} в системы дифференциальных уравнений для фазовых и сопряженных переменных не требуется. Новая (см. рис. 6) траектория полета БПЛА гладкая. На рис. 7 представлено соответствующее такой траектории непрерывное управление. Для полученной траектории локальный максимум гамильтониана в каждой точке траектории, где $\psi_{13} \neq 0$, является глобальным. На этом же рисунке для наглядности представлена зависимость $\mathcal{H}_\gamma$ (см. уравнение (10)) от времени. Это значение оказывается близким к нулю в те моменты времени, где условие на максимальную перегрузку строго выполнено. Количественные оценки получаемых точностей определения координат представлены в таблице. Обозначим через Δx арифметический корень следа матрицы P_x — координатной части матрицы ковариации оценки ЭДЦ, а через Δv — арифметический корень следа матрицы P_v (см. Приложение). Данные величины могут рассматриваться как 1σ доверительные области (или размер 50 % доверительной области [2]) для координат и компонент скоростей цели.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассмотрен метод получения программных оптимальных траекторий БПЛА, следящего за подвижной целью с помощью азимутальных наблюдений, принимаемых линейной антенной решеткой. Учет физической структуры сенсора изменяет вид оптимальных траекторий БПЛА, а также приводит к 2,5-кратным потерям в оценке значения функционала. Однако если БПЛА выполняет полет вдоль оптимальной траектории, вычисленной для случая $\eta(x, y, \gamma) \equiv 1$ и осуществляет наблюдения с помощью антенной решетки, то значение функционала $G = 4,961$, что более, чем в пять раз больше оптимального значения функционала, полученного вдоль траектории, вычисленной с учетом свойств антенной решетки. Потому физические свойства сенсора на борту БПЛА должны быть учтены при планировании траектории полета.

Проблема построения траектории наблюдателя, осуществляющего угловые наблюдения, связа-

на с наблюдаемостью цели [3]. Если наблюдатель движется вдоль траектории, при которой точность наблюдений максимальна (т. е. когда направление на цель ортогонально направлению движения БПЛА), то получить оценки координат цели невозможно, и значение функционала возрастает в этом случае более чем в 100 раз, что показывает необходимость БПЛА совершать маневры.

Рассмотренная задача оптимального управления служит поиском компромиссного решения: с одной стороны (см. выражение (12)), для получения точных оценок ЭДЦ необходимо, чтобы точность наблюдений была бы высокой. С другой стороны (см. выражение (11)), БПЛА должен выполнять маневры, сближаясь с целью (см. рис. 3). Однако при сближении с целью большая часть наблюдений попадает в «слепую» зону сенсора — значения углов, при которых точность определения азимутальных направлений низкая. Необходимость смены секторов наблюдения (двух областей с высокой точностью наблюдения по левому и правому бортам БПЛА) приводит к тому, что оптимальное управление оказывается разрывной функцией. Введение дополнительных ограничений на фазовые переменные позволило разрешить эту проблему и получить гладкие траектории полета БПЛА.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Система дифференциальных уравнений для элементов матрицы ковариации. Запишем уравнение (5) в блочном виде

$$\dot{P} = \begin{pmatrix} \dot{P}_x & \dot{P}_{xv} \\ \dot{P}_{xv} & \dot{P}_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_{xv} + P'_{xv} - P_x H_{xx} P_x & P_v - P_x H_{xx} P'_{xv} \\ P_v - P_{xv} H_{xx} P_x & -P_{xv} H_{xx} P_{xv}^T \end{pmatrix}.$$

Здесь каждый блок имеет размер 2×2 и может быть представлен в виде элементов

$$P_x = \begin{pmatrix} p_{xx} & p_{xy} \\ p_{xy} & p_{yy} \end{pmatrix}, \quad P_v = \begin{pmatrix} p_{v_x v_x} & p_{v_x v_y} \\ p_{v_x v_y} & p_{v_y v_y} \end{pmatrix},$$

$$P_{xv} = \begin{pmatrix} p_{xv_x} & p_{xv_y} \\ p_{xv_y} & p_{v_y} \end{pmatrix}.$$

Система дифференциальных уравнений для сопряженных переменных. Гамильтониан можно записать в виде

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_{\psi P} - \psi_{11}(V \cos \gamma - v_x) - \psi_{12}(V \sin \gamma - v_y),$$

где $\mathcal{H}_{\psi P}$ соответствует скалярному произведению первых десяти элементов фазового вектора и первых десяти сопряженных переменных и является линейной функцией элементов $h_{\{1,2,3\}}$ матрицы H_{xx} . Группируя множи-



тели перед этими элементами, перепишем гамильтониан в виде:

$$\mathcal{H}_{\Psi P} = -(Ah_1 + Bh_2 + Ch_3) + D.$$

Для первых десяти сопряженных переменных имеем дифференциальные уравнения:

$$\begin{cases} \dot{\Psi}_1 = h_1(2p_{xx}\Psi_1 + p_{xy}\Psi_2 + p_{xv_x}\Psi_7 + p_{xv_y}\Psi_8) + \\ + h_2(2p_{xy}\Psi_1 + p_{yy}\Psi_2 + p_{v_x y}\Psi_7 + p_{v_y y}\Psi_8), \\ \dot{\Psi}_2 = h_1(p_{xx}\Psi_2 + 2p_{xy}\Psi_3 + p_{xv_x}\Psi_9 + p_{xv_y}\Psi_{10}) + \\ + h_2(2p_{xx}\Psi_1 + 2p_{xy}\Psi_2 + 2p_{yy}\Psi_3 + p_{xv_x}\Psi_7 + p_{xv_y}\Psi_8 + \\ + p_{v_x y}\Psi_9 + p_{v_y y}\Psi_{10}) + h_3(2p_{xy}\Psi_1 + p_{yy}\Psi_2 + p_{v_x y}\Psi_7 + p_{v_y y}\Psi_8), \\ \dot{\Psi}_3 = h_2(p_{xx}\Psi_2 + 2p_{xy}\Psi_3 + p_{xv_x}\Psi_9 + p_{xv_y}\Psi_{10}) + \\ + h_3(p_{xy}\Psi_2 + 2p_{yy}\Psi_3 + p_{v_x y}\Psi_9 + p_{v_y y}\Psi_{10}), \end{cases} \quad (П1)$$

$$\begin{cases} \dot{\Psi}_4 = -\Psi_7, \\ \dot{\Psi}_5 = -\Psi_8 - \Psi_9, \\ \dot{\Psi}_6 = -\Psi_{10}, \end{cases} \quad (П2)$$

$$\begin{cases} \dot{\Psi}_7 = h_1(2p_{xv_x}\Psi_4 + p_{xv_y}\Psi_5 + p_{xx}\Psi_7 + p_{xy}\Psi_9) + \\ + h_2(2p_{v_x y}\Psi_8 + p_{v_y y}\Psi_9 + p_{xy}\Psi_7 + p_{yy}\Psi_9) - 2\Psi_1, \\ \dot{\Psi}_8 = h_1(p_{xv_x}\Psi_5 + 2p_{xv_y}\Psi_6 + p_{xx}\Psi_8 + p_{xy}\Psi_{10}) + \\ + h_2(p_{v_x y}\Psi_5 + 2p_{v_y y}\Psi_6 + p_{xy}\Psi_8 + p_{yy}\Psi_{10}) - \Psi_2, \\ \dot{\Psi}_9 = h_2(2p_{xv_x}\Psi_4 + p_{xv_y}\Psi_5 + p_{xx}\Psi_7 + p_{xy}\Psi_9) + \\ + h_3(2p_{v_x y}\Psi_4 + p_{v_y y}\Psi_5 + p_{xy}\Psi_7 + p_{yy}\Psi_9) - \Psi_2, \\ \dot{\Psi}_{10} = h_2(p_{xv_x}\Psi_5 + 2p_{xv_y}\Psi_6 + p_{xx}\Psi_8 + p_{xy}\Psi_{10}) + \\ + h_3(p_{v_x y}\Psi_5 + 2p_{v_y y}\Psi_6 + p_{xy}\Psi_8 + p_{yy}\Psi_{10}) - 2\Psi_2, \end{cases} \quad (П3)$$

Для последних двух сопряженных переменных имеем дифференциальные уравнения:

$$\begin{aligned} \dot{\Psi}_{11} &= A(h_1)_x + B(h_2)_x + C(h_3)_x, \\ \dot{\Psi}_{12} &= A(h_1)_y + B(h_2)_y + C(h_3)_y. \end{aligned} \quad (П4)$$

Чтобы записать двухточечную задачу в явном виде, необходимо вычислить частные производные $h_{\{1,2,3\}}$ по переменным x и y . Для этого необходимо сначала продифференцировать η :

$$\eta_x = 4y(x\sin\gamma - y\cos\gamma)(y\sin\gamma + x\cos\gamma)r^{-6},$$

$$\eta_y = 4x(x\sin\gamma - y\cos\gamma)(y\sin\gamma + x\cos\gamma)r^{-6}.$$

Запишем теперь частные производные элементов матрицы H_{xx} :

$$(h_1)_x = -\frac{4y^2x}{\sigma_0^2r^6}\eta + \frac{y^2}{\sigma_0^2r^4}\eta_x, \quad (h_1)_y = \frac{2y(x^2 - y^2)}{\sigma_0^2r^6}\eta - \frac{y^2}{\sigma_0^2r^4}\eta_y,$$

$$(h_2)_x = \frac{y(3x^2 - y^2)}{\sigma_0^2r^6}\eta - \frac{xy}{\sigma_0^2r^4}\eta_x,$$

$$(h_2)_y = \frac{x(3y^2 - x^2)}{\sigma_0^2r^6}\eta + \frac{xy}{\sigma_0^2r^4}\eta_y,$$

$$(h_3)_x = \frac{2x(y^2 - x^2)}{\sigma_0^2r^6}\eta + \frac{x^2}{\sigma_0^2r^4}\eta_x, \quad (h_3)_y = -\frac{4x^2y}{\sigma_0^2r^6}\eta - \frac{x^2}{\sigma_0^2r^4}\eta_y.$$

Таким образом, система дифференциальных уравнений для сопряженных переменных определяется выражениями (П1)–(П4).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Stansfield R.G.* Statistical Theory of D.F. Fixing. Part III: Radiocommunication // Journal of the Institution of Electrical Engineers. — 1947. — Vol. 94 (15). — P. 762–770.
2. *Don Koks.* Numerical Calculations for Passive Geolocation Scenarios / Defense Science and Technology Organization Research Report, DSTO-RR-0319, Australia, 2007.
3. *Aidala V.J., Nardone S.C.* Observability Criteria For Bearings-Only Target Motion Analysis // IEEE Trans. on Aerospace and Electronic Systems. — 1981. — Vol. AES-17, N 2.
4. *Liu P.T.* An Optimum Approach in Target Tracking with Bearing Measurements // Optimization Theory and Applications. — 1988. — Vol. 56, iss. 2. — P. 205–214.
5. *Hammel S.E., Liu P.T., Hilliard E.J., Kong K.F.* Optimal Observer Motion For Localization With Bearing Measurements // Computers Math. Applic. — 1989. — Vol. 18, N 1. — C. 171–180.
6. *Oshman Y., Davidson P.* Optimization of Observer Trajectories for Bearings-Only Target Localization // IEEE Trans. on Aerospace and Electronic Systems. — 1999. — Vol. 35, N 3. — C. 892–902.
7. *Adamy D.L.* EW 103: Communications Electronic Warfare. — URL: http://www.sofly.org/ebooks-list/ew-103-tactical-battlefield-communications-electronic-warfare_363ko.html (дата обращения 7.07.2015).
8. *Gross F.* Smart Antennas for Wireless Communications: With MATLAB. — N.-Y.: McGraw-Hill Education, Professional Engineering, 2005.
9. *Godara L.C.* Smart Antennas — Taylor & Francis / Electrical Engineering & Applied Signal Processing Series, 2014.
10. *Goodman J.W.* Introduction to Fourier Optics. — N.-Y.: McGraw-Hill, McGraw-Hill Series in Electrical and Computer Engineering: Communications and Signal Processing, 1996.
11. *Bartlett M.S.* An Introduction to Stochastic Processes, with Special Reference to Methods and Applications. — Cambridge: Cambridge University Press, 1978.
12. *Haykin S.S. and Justice J.H.* Array Signal Processing. — Prentice-Hall, Signal processing series, 1985.
13. *Schmidt R.O.* Multiple Emitter Location and Signal Parameter Estimation // IEEE Trans. on Antennas and Propagation. — 1986. — Vol. 34. — P. 276–280.
14. *Roy R. and Kailath T.* ESPRIT-Estimation of Signal Parameters via Rotational Invariance Techniques // IEEE Trans. on Acoustics, Speech and Signal Processing. — 1989. — Vol. 37. — P. 984–995.
15. *Rappaport T.S.* Wireless Communications: Principles and Practice. — N.-Y.: IEEE Press; 1996.
16. *Davis M.H.A.* Lectures on stochastic control and nonlinear filtering. — Berlin — Heidelberg — N.-Y. — Tokyo: Springer Verlag, 1984.
17. *Липиц Р., Ширяев А.* Статистика случайных процессов. — М.: Наука, 1974.
18. *Моисеев Н.Н.* Элементы теории оптимальных систем. — М.: Наука, 1969.
19. *Летов А.М.* Динамика полета и управление. — М.: Наука, 1969.
20. *Чернушко Ф.Л., Баничук Н.В.* Вариационные задачи механики и управления. Численные методы. — М.: Наука, 1973.

Статья представлена к публикации членом редколлегии Е.Я. Рубиновичем.

Андреев Кирилл Владимирович — науч. сотрудник, Институт проблем передачи информации им. А.А. Харкевича РАН, г. Москва, ✉ andreev@iitp.ru.

CONTENTS & ABSTRACTS

MEASURING HIGHER EDUCATION INSTITUTIONS' EFFICIENCY: DATA ENVELOPMENT ANALYSIS AND STOCHASTIC FRONTIER APPROACH 2

F.T. Aleskerov, V.Yu. Belousova, V.V. Petrushchenko

The paper deals with empirical studies to extent the concept of higher education institutions' (HEIs) performance, ways of adjusting data envelopment analysis models for heterogeneous sampling, reasoning for model input and output data selection, ways of increasing performance of HEIs. Attention paid to consistency and comparability of results obtained by different models.

Keywords: higher education institutions, data envelopment analysis, stochastic frontier, efficiency evaluation.

TRACKING SYSTEM FOR OBJECT WITH THE DISTRIBUTED DELAY IN CONDITIONS OF DISTURBANCES AND NOISES 20

A.M. Tsykunov

The problem of robust tracking a reference signal was solved for object with the distributed delay, affected by limited external disturbances, while the vector of state is measured with noises. The control algorithm is derived, allowing to receive an asymptotically exact estimation of interference sources and to compensate the external limited disturbances with demanded accuracy. Numerical examples and results of computer simulation are presented.

Keywords: robust control, vector of state, disturbance, the distributed delay.

THE SIGMA-FUNCTION FOR PROBLEM OF STATES AND DISTURBANCES OBSERVERS SYNTHESIS 27

S.A. Krasnova, A.V. Utkin

Based on the principle of motions separation, methods for the synthesis of states observer with nonlinear corrective actions in the form of sigma functions are developed for nonlinear systems, operating under uncertainties. It is shown that for the systems, that can be represented in the regular form relatively to external disturbances, this approach allows to obtain current estimates of unmeasured state variables and external disturbances without expanding of dynamic order of the observer. It is possible because of the model that simulates the effect of external disturbances. Algorithms developed are used in a control system for induction motor with incomplete set of measuring units.

Keywords: nonlinear systems, states and disturbances observer, sigma-function, induction motor.

METHODS OF PREDICTIVE ESTIMATES OF SOCIO-ECONOMICS NATIONAL SECURITY INDICATORS 37

Rezhikov A.F., Tsvirkun A.D., Kushnikov V.A., et al.

A complex of system dynamics models is developed for forecasting main indicators of Russia's socio-economic development with an impact on national security. Graph of cause-and-effect relations between indicators under study is taken as a basis for constructing the complex of mathematical models. Based on it the system of non-linear differential equations is built, allowing to analyze the state of Russia's national security. The analysis of ruble/euro rate impact on socio-economic national security indicators in Russia is carried out using the proposed complex of models.

Keywords: mathematical model, system dynamics, socio-economic development, indicators of national security.

INNOVATIONAL COURNOT OLIGOPOLY 45

V.V. Breer, G.L. Mirzoyan, D.A. Novikov

A game-theoretical model of «innovational Cournot oligopoly» is considered to investigate the effects of competition on the innovative

product market, of limited market capacity and of an optimal number of active agents existence, of innovative technologies complementarity, conformal behavior of the agents. Conditions for the basic scenario realization are obtained for the dynamics of the «endogenous» appearance and interaction between innovators and imitators.

Keywords: cournot oligopoly, competition on the innovational market, innovators and imitators, conformal collective behavior.

COMPARATIVE ANALYSIS OF RASCH MODEL PARAMETERS ESTIMATES OBTAINED BY MAXIMUM LIKELIHOOD AND LEAST SQUARES METHODS 67

A.A. Maslak, S.I. Moiseyev, S.A. Osipov

Derived and investigated in a simulation experiment are statistical characteristics of Rasch model parameters' estimates, obtained by using maximum likelihood and least squares methods. Comparative analysis of these two sets of estimates was carried out, showing that estimates, obtained by using least squares method, are closer to data generated. Specificity of estimates obtained by both ways is considered.

Missing data influence on precision of Rasch dichotomous model parameters calculation is determined.

Keywords: latent variable, measurement, Rasch model, precision of estimates, maximum likelihood, least squares method.

PROBLEM OF INTERDEPENDENT PROJECTS PORTFOLIO OPTIMIZATION 67

Z.G. Rudenko

In this paper considered is a problem on composing an optimal portfolio of investment projects interdependent by effect. The proposed algorithm of finding an optimal solution for the problem is based on implementation of a network programming method. The algorithm work is demonstrated by the example.

Keywords: mathematic programming, project portfolio management, interdependent projects.

RISK MANAGEMENT METHODS IN MASS-MEDIA ADVERTISING 71

G.A. Shmatov

Article presents methods of a quantitative estimation of risks while placing an advertisement in mass-media. It is shown that the theory of media planning usage allows developing a technique of computing advertising placement risk, related to the failure of reaching an advertising impact required to solve the advertising problems.

Keywords: advertising, risk, media planning, optimization, efficiency.

OPTIMAL TRAJECTORIES FOR UNMANNED AERIAL VEHICLES TRACKING THE MOVING TARGETS USING LINEAR ANTENNA ARRAY 76

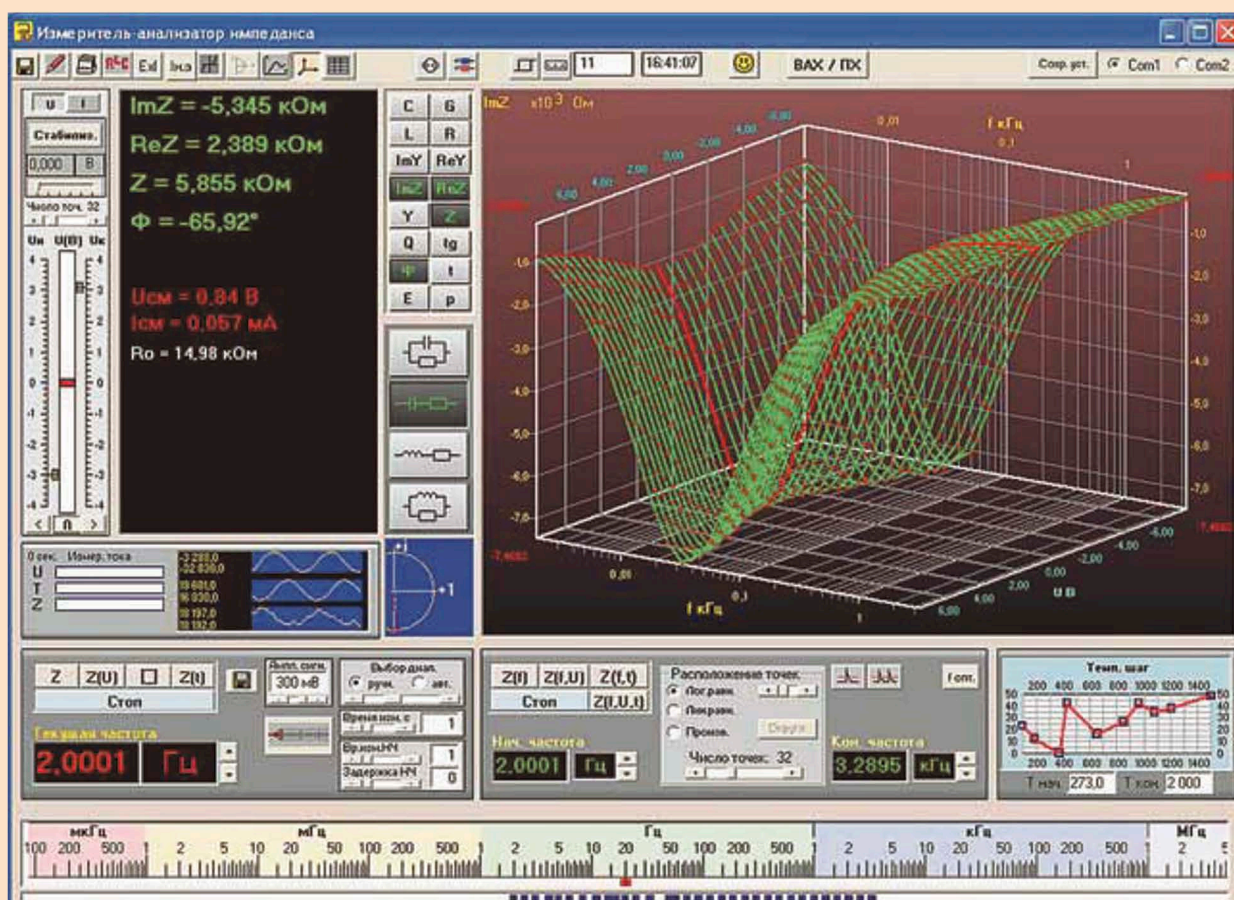
K.V. Andreev

Considered is a flight trajectory optimization problem for the unmanned aerial vehicle (UAV) that performs moving target tracking with linear antenna array by bearings observation. It is shown that bearing measurements accuracy is highly dependent on the antenna array orientation (mutual positioning of a target and UAV). This dependency leads to presence of «blind zones» — angles values with high range of measurement errors. Under such circumstances of observation an objective can be set to choose optimal (in terms of targeting accuracy) trajectories of UAV flight and to put additional restrictions on its maneuvering intensity. Optimal trajectories are calculated numerically as two-point boundary problem derived from Pontryagin's maximum principle.

Keywords: bearings-only measurements, Kalman filter, Pontryagin's maximum principle, degenerate problem of optimal control.

Виртуальный измеритель-анализатор импеданса для научных исследований и промышленного контроля

Представляет собой малогабаритный преобразователь и программное обеспечение, позволяющие с помощью ПК автоматически измерять в широком диапазоне частот различные параметры комплексной величины B : импеданса Z , адмитанса Y , а также комплексного коэффициента передачи W четырехполюсника ($|Z|$, $|Y|$ и $|W|$, фазовый угол $\varphi = \arg B$, действительную $\text{Re}B$ и мнимую $\text{Im}B$ составляющие, емкость C , индуктивность L , сопротивление R , проводимость G , тангенс угла потерь $\text{tg } \delta = \text{Re}B/\text{Im}B$, добротность $Q = \text{Im}R/\text{Re}B$, постоянную времени τ и др.), а также неэлектрические величины, определяемые по перечисленным параметрам электрической эквивалентной схемы исследуемого объекта. Обладает широкими функциональными возможностями.



Технические характеристики

Измеряемая величина	Диапазон изменения
$R, \text{Re}R, \text{Im}R, \text{Ом}$	$10^{-3} \dots 10^9$
$G, \text{Re}G, \text{Im}G, \text{См}$	$10^{-10} \dots 10^2$
$W, \text{Re} W, \text{Im} W$	$10^{-4} \dots 10^3$
Рабочая частота, Гц	$10^{-3} \dots 3 \times 10^6$
Основная относительная погрешность измерения, %	0,1...0,2

Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН

117806, Москва, ул. Профсоюзная, 65, тел.: (495) 334-91-90, e-mail: dabobyl@ipu.ru

