

ISSN 1819-3161

# ПРОБЛЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ

3/2021

CONTROL  SCIENCES

## РЕДАКЦИОННЫЙ СОВЕТ

С. Н. Васильев, академик РАН,  
И. А. Каляев, академик РАН,  
В. А. Левин, академик РАН,  
Н. А. Махутов, чл.-корр. РАН,  
А. Ф. Резчиков, чл.-корр. РАН,  
Е. А. Федосов, академик РАН

## РЕДКОЛЛЕГИЯ

Ф. Т. Алескеров, д-р техн. наук,  
В. Н. Афанасьев, д-р техн. наук,  
Н. Н. Бахтадзе, д-р техн. наук,  
В. Н. Бурков, д-р техн. наук,  
В. М. Вишневский, д-р техн. наук,  
В. В. Клочков, д-р экон. наук,  
С. А. Краснова, д-р техн. наук,  
О. П. Кузнецов, д-р техн. наук,  
Н. В. Кузнецов, д-р физ.-мат. наук,  
В. В. Кульба, д-р техн. наук,  
А. Г. Кушнер, д-р физ.-мат. наук,  
А. А. Лазарев, д-р физ.-мат. наук,  
В. Г. Лебедев, д-р техн. наук,  
В. Е. Лепский, д-р психол. наук,  
Н. Е. Максимова, канд. техн. наук  
(ответственный секретарь),  
А. С. Мандель, д-р техн. наук,  
Р. В. Мещеряков, д-р техн. наук,  
А. И. Михальский, д-р биол. наук,  
Д. А. Новиков, чл.-корр. РАН  
(гл. редактор),  
Б. В. Павлов, д-р техн. наук,  
Ф. Ф. Пашченко, д-р техн. наук  
(зам. гл. редактора),  
Л. Б. Рапопорт, д-р физ.-мат. наук,  
С. В. Ратнер, д-р экон. наук,  
Е. Я. Рубинович, д-р техн. наук,  
В. Ю. Рутковский, д-р техн. наук,  
М. В. Хлебников, д-р физ.-мат. наук,  
А. Д. Цвиркун, д-р техн. наук,  
П. Ю. Чеботарёв, д-р физ.-мат. наук,  
И. Б. Ядыкин, д-р техн. наук

## РУКОВОДИТЕЛИ РЕГИОНАЛЬНЫХ РЕДСОВЕТОВ

Владивосток – О. В. Абрамов, д-р техн. наук,  
Волгоград – А. А. Воронин, д-р техн. наук,  
Воронеж – С. А. Баркалов, д-р техн. наук,  
Курск – С. Г. Емельянов, д-р техн. наук,  
Липецк – А. К. Погодаев, д-р техн. наук,  
Пермь – В. Ю. Столбов, д-р техн. наук,  
Ростов-на-Дону – Г. А. Угольницкий,  
д-р техн. наук,  
Самара – М. И. Гераськин, д-р экон. наук,  
Саратов – В. А. Твердохлебов, д-р техн. наук,  
Уфа – Б. Г. Ильясов, д-р техн. наук

## ADVISORY BOARD

E. A. Fedosov, Academician of RAS<sup>1</sup>,  
I. A. Kalyaev, Academician of RAS,  
V. A. Levin, Academician of RAS,  
N. A. Makhutov, Corr. Member of RAS,  
A. F. Rezchikov, Corr. Member of RAS,  
S. N. Vassilyev, Academician of RAS

## EDITORIAL BOARD

V. N. Afanasev, D. Sc. (Tech.),  
F. T. Aleskerov, D. Sc. (Tech.),  
N. N. Bakhtadze, D. Sc. (Tech.),  
V. N. Burkov, D. Sc. (Tech.),  
P. Yu. Chebotarev, D. Sc. (Phys.-Math.),  
V. V. Klochkov, D. Sc. (Econ.),  
M. V. Khlebnikov, D. Sc. (Phys.-Math.),  
S. A. Krasnova, D. Sc. (Tech.),  
V. V. Kulba, D. Sc. (Tech.),  
A. G. Kushner, D. Sc. (Phys.-Math.),  
O. P. Kuznetsov, D. Sc. (Tech.),  
N. V. Kuznetsov, D. Sc. (Phys.-Math.),  
A. A. Lazarev, D. Sc. (Phys.-Math.),  
V. G. Lebedev, D. Sc. (Tech.),  
V. E. Lepskiy, D. Sc. (Psych.),  
N. E. Maximova, Ph. D. (Tech.),  
Executive Editor-in-Chief,  
A. S. Mandel, D. Sc. (Tech.),  
R. V. Meshcheryakov, D. Sc. (Tech.),  
A. I. Michalski, D. Sc. (Biol.),  
D. A. Novikov, Corr. Member of RAS,  
Editor-in-Chief,  
F. F. Pashchenko, D. Sc. (Tech.),  
Deputy Editor-in-Chief,  
B. V. Pavlov, D. Sc. (Tech.),  
L. B. Rapoport, D. Sc. (Phys.-Math.),  
S. V. Ratner, D. Sc. (Econ.),  
E. Ya. Rubinovich, D. Sc. (Tech.),  
V. Yu. Rutkovskii, D. Sc. (Tech.),  
A. D. Tsvirkun, D. Sc. (Tech.),  
V. M. Vishnevsky, D. Sc. (Tech.),  
I. B. Yadykin, D. Sc. (Tech.)

## LEADERS OF REGIONAL BOARDS

Kursk – S. G. Emelyanov, D. Sc. (Tech.),  
Lipetsk – A. K. Pogodaev, D. Sc. (Tech.),  
Perm – V. Yu. Stolbov, D. Sc. (Tech.),  
Rostov-na-Donu, G. A. Ougolnitsky –  
D. Sc. (Tech.),  
Samara – M. I. Geraskin, D. Sc. (Econ.),  
Saratov – V. A. Tverdokhlebov, D. Sc. (Tech.),  
Ufa – B. G. Ilyasov, D. Sc. (Tech.)  
Vladivostok – O. V. Abramov, D. Sc. (Tech.),  
Volgograd – A. A. Voronin, D. Sc. (Phys.-Math.),  
Voronezh – S. A. Barkalov, D. Sc. (Tech.)

<sup>1</sup> Russian Academy of Sciences.



**CONTROL SCIENCES**

**Научно-технический  
журнал**

6 номеров в год

ISSN 1819-3161

Издается с 2003 года

**УЧРЕДИТЕЛЬ**

Федеральное государственное  
бюджетное учреждение науки  
Институт проблем управления  
им. В.А. Трапезникова РАН

Главный редактор  
чл.-корр. РАН

**Д.А. Новиков**

Заместитель главного  
редактора

**Ф.Ф. Пащенко**

Ответственный секретарь  
**Н.Е. Максимова**

Выпускающий редактор  
**Л.В. Петракова**

Издатель  
ООО «Сенсидат-Плюс»

Адрес редакции  
117997, ГСП-7, Москва,  
ул. Профсоюзная, д. 65, к. 410.  
Тел./факс (495) 334-92-00  
E-mail: pu@ipu.ru  
Интернет: <http://pu.mtas.ru>

Оригинал-макет и электронная версия  
подготовлены  
ИП Кишенкова Т. В.

Отпечатано в ООО «Авансед солюшнз»  
Заказ № РВ321

Подписано в печать  
17.06.2021 г.

Журнал зарегистрирован  
в Министерстве Российской  
Федерации по делам печати,  
телерадиовещания и средств  
массовых коммуникаций

Свидетельство о регистрации  
ПИ № ФС 77-49203 от 30 марта 2012 г.

Журнал входит в RSCI на платформе  
Web of Science и Перечень  
рецензируемых научных изданий ВАК

Журнал включен в Российский индекс  
научного цитирования (РИНЦ).  
На сайте Научной электронной  
библиотеки ([www.elibrary.ru](http://www.elibrary.ru)) доступны  
полные тексты статей.

Подписные индексы:  
**80508** и **81708** в каталоге Роспечати;  
**38006** в объединенном каталоге  
«Пресса России»

Цена свободная

© Федеральное государственное  
бюджетное учреждение науки  
Институт проблем управления  
им. В.А. Трапезникова РАН

# ПРОБЛЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ

## 3.2021

### СОДЕРЖАНИЕ

#### Обзоры

**Ильясов Б.Г., Сaitова Г.А.** Исследование многосвязных систем автоматического управления сложными динамическими объектами на основе парадигмы Б.Н. Петрова . . . . . 3

**Бойко Л.М., Губанов Д.А., Петров И.В.** Информационные сообщества в социальных сетевых структурах. Ч. 3. Прикладные аспекты выявления и анализа сообществ . . . . . 16

#### Математические проблемы управления

**Базилевский М.П.** Построение степенно-показательных и линейно-логарифмических регрессионных моделей . . . . . 25

#### Анализ и синтез систем управления

**Честнов В.Н., Шатов Д.В.** Синтез многомерных следящих систем по инженерным критериям качества на основе  $H_\infty$ -подхода . . . . . 33

#### Управление в социально-экономических системах

**Бурков В.Н., Щепкин А.В.** Противозатратные механизмы ценообразования при ограничении на сумму цен . . . . . 42

**Прокофьев В.Н., Акимова К.В., Мячин А.Л.** Исследование показателей стратегии развития спорта в регионах РФ . . . . . 50

#### Управление техническими системами и технологическими процессами

**Работников М.А.** Разработка метода обновления многомерной динамической модели управляемого технологического объекта . . . 58

#### Управление подвижными объектами и навигация

**Волковицкий А.К., Гладышев А.И., Гольдин Д.А.** и др. Применение средств компьютерного моделирования для анализа функционирования магнитоградиентных систем . . . . . 65

#### Хроника

**Тринадцатая** международная конференция «Управление развитием крупномасштабных систем» MLSD'2020 . . . . . 75



## CONTROL SCIENCES

### Scientific Technical Journal

6 issues per year

ISSN 1819-3161

Published since 2003

#### FOUNDER

V. A. Trapeznikov Institute  
of Control Sciences  
of Russian Academy of Sciences

#### Editor-in-Chief

D. A. Novikov, Corr. Member of RAS

#### Deputy Editor-in-Chief

F. F. Pashchenko

#### Executive Editor-in-Chief

N. E. Maximova

#### Editor

L. V. Petrakova

#### Publisher Sensidat-Plus LLC

#### Editorial address

65 Profsoyuznaya st., office 410,

Moscow 117997, Russia

☎/📠 +7 (495) 334-92-00

✉ pu@ipu.ru

URL: <http://pu.mtas.ru>

Design layout and electronic version  
prepared by SP Kishenkova T. V.

Printed by Advanced Solutions LLC

Order No. PB321

Approved for print on 15.06.2021

The Journal is registered by the Ministry  
of Press, Broadcasting and Mass Media  
of the Russian Federation  
Registration certificate of  
ПИ № ФС 77-49203 of 30 March 2012

The Journal is included in RSCI  
(Russian Science Citation Index)  
on the platform Web of Science  
and in the list of peer-reviewed  
scientific publications of the HAC

On the website of the Scientific electronic  
library ([www.elibrary.ru](http://www.elibrary.ru)) full texts of articles  
are available.

#### Subscription indexes:

**80508** and **81708** in the catalogue  
of Rospechat;

**38006** in the joint catalogue  
«Press of Russia»

Free price

© V. A. Trapeznikov Institute of Control  
Sciences of Russian Academy of Sciences

# CONTROL SCIENCES

## 3.2021

### CONTENTS

#### Surveys

- Ilyasov, B.G. and Saitova, G.A.** Investigation of Multivariable Automatic Control Systems for Complex Dynamic Objects Based on Petrov's Paradigm . . . . . 3
- Boiko, L.M., Gubanov, D.A., Petrov, I.V.** Information Communities in Social Networks. Part III: Applied Aspects of Detection and Analysis . . . . . 16

#### Mathematical Problems of Control

- Bazilevskiy, M.P.** Constructing Power-Exponential and Linear-Logarithmic Regression Models . . . . . 25

#### Analysis and Design of Control Systems

- Chestnov, V.N. and Shatov, D.V.** Design of Multivariable Tracking Systems via Engineering Performance Indices Based on  $H_\infty$ -Approach . . . . . 33

#### Control in Social and Economic Systems

- Burkov, V.N. and Shchepkin, A.V.** Pricing Mechanisms for Cost Reduction Under Budget Constraints . . . . . 42
- Prokofiev, V.N., Akimova, K.V., Myachin, A.L.** Studying the Indicators of Regional Sports Development in Russian Federation . . . . . 50

#### Control of Complex Technological Processes and Productions

- Rabotnikov, M.A.** An Updating Method for the Dynamic MIMO Model of a Controlled Technological Object . . . . . 58

#### Moving Objects Control and Navigation

- Volkovitsky, A.K., Gladyshev, A.I., Goldin, D.A., et al.** A Computer Simulation Complex for Analysis of Magnetic Gradiometry Systems . . . . 65

#### Chronicle

- 13th International Conference «Management of Large-Scale System Development» MLSD'2020** . . . . . 75

# ИССЛЕДОВАНИЕ МНОГОСВЯЗНЫХ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ СЛОЖНЫМИ ДИНАМИЧЕСКИМИ ОБЪЕКТАМИ НА ОСНОВЕ ПАРАДИГМЫ Б.Н. ПЕТРОВА<sup>1</sup>

Б.Г. Ильясов, Г.А. Саитова

**Аннотация.** Рассмотрены различные научные подходы к исследованию свойств (в частности, устойчивости) многосвязных систем автоматического управления (МСАУ), основанные на различных моделях их описания. Статья посвящена теории, являющейся продолжением ранее высказанных идей академика Б.Н. Петрова и положенных в основу классической теории автоматического управления. В основе теории Б.Н. Петрова лежит структурно-функциональная декомпозиция МСАУ на отдельные реальные подсистемы и многомерные связи между ними, представленные в виде новой модели описания, и изучение свойств системы на основе частотных методов, что позволило отнести данную теорию к физическому (инженерному) подходу к исследованию динамических систем. Показана методика описания МСАУ через индивидуальные характеристики подсистем и элементы многомерных связей, предложены критерии устойчивости для линейных МСАУ с идентичными подсистемами, критерий устойчивости состояния равновесия системы, а также технология нахождения параметров периодических движений и оценка их устойчивости для нелинейных МСАУ. Приводятся численные примеры, демонстрирующие данную технологию исследования свойств МСАУ техническими объектами.

**Ключевые слова:** многосвязная система, декомпозиция, частотные методы, линейная система, нелинейная система.

*Светлой памяти академика АН СССР Б.Н. Петрова посвящается*

## ВВЕДЕНИЕ

В первой половине XX в. появились в эксплуатации сложные динамические объекты (СДО) (самолет, энергетические и двигательные установки, электротехнические установки, сложные технологические процессы в нефтехимической, машиностроительной и других отраслях промышленности), которые требовали автоматического управления несколькими выходными координатами путем воздействия на некоторое количество управляющих органов объекта. Это привело к созданию нового класса управляемых систем — многосвязных систем автоматического управления (МСАУ) СДО.

Особенность этого класса систем заключалась в том, что каждая подсистема, стремясь поддержать в автоматическом режиме заданное значение своей выходной координаты, неизбежно оказывала влияние на работу других подсистем в силу физических процессов (аэродинамических, газодинамических, электрических, химических, тепловых и т. д.), которые протекали в объекте управления и связывали эти подсистемы. Исследование нового класса систем стало практической потребностью, а перед теорией автоматического управления возникли новые сложные задачи.

Целью настоящей статьи является раскрытие содержания парадигмы (как модели проблем и их решений) Б.Н. Петрова применительно к исследованию МСАУ. Идея Б.Н. Петрова основана на структурно-функциональной декомпозиции МСАУ СДО на физические подсистемы и многомерные

<sup>1</sup> Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (Грант РФФИ № 20-08-01172 А).

связи между ними с привлечением частотных методов для изучения их свойств. Эта идея представляет собой продолжение ранее высказанной им идеи (1945 г.) [1], положенной в основу классической теории управления.

Авторы статьи преследуют скромную мысль: показать на уровне публикаций учеников школы Б.Н. Петрова возможности парадигмы Б.Н. Петрова и тем самым утвердить ее как равноценную новую технологию изучения свойств МСАУ наряду с технологиями, основанными на других парадигмах. Поэтому авторы статьи, говоря о достоинствах классических парадигм по изучению свойств устойчивости МСАУ, хотели бы подчеркнуть практические достоинства парадигмы Б.Н. Петрова при решении этой проблемы.

### 1. МОДЕЛИ МНОГОСВЯЗНЫХ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ СЛОЖНЫМИ ДИНАМИЧЕСКИМИ ОБЪЕКТАМИ

Выделим три типа моделей МСАУ СДО, записав их в векторно-матричной форме:

$$X(s) = W(s)U(s) + Q(s)F(s),$$

$$U(s) = R(s)[X^o(s) - X(s)],$$

где  $X(s)$ ,  $X^o(s)$ ,  $U(s)$ ,  $F(s)$  — векторы регулируемых, задающих, управляющих и возмущающих переменных соответственно;  $W(s) = \|W_{ij}(s)\|_{n \times n}$ ,  $R(s) = \|R_{ij}(s)\|_{n \times n}$  — матричная передаточная функция (МПФ) объекта и регулятора (вместе с исполнительным механизмом);  $Q(s) = \|Q_{ij}(s)\|_{n \times n}$  — МПФ по возмущению.

Пусть **первая модель** отражает только естественные связи между подсистемами через многомерный объект управления. Тогда МПФ  $R(s)$  представляет собой диагональную матрицу,  $R(s) = \|R_{ij}(s)\|_{n \times n}$ , на диагонали которой расположена передаточная функция  $R_i(s)$  управляющего устройства и исполнительного механизма соответствующей подсистемы.

Рассмотрим **вторую модель** МСАУ, в которой многомерный объект представляет собой множество автономно работающих объектов (энергетических установок, роботов, электродвигателей и т. п.). Тогда его МПФ будет представлять собой диагональную матрицу  $W(s) = \|W_i(s)\|_{n \times n}$ . В системе же осуществляется комплексное управление множеством объектов через многомерный регулятор, МПФ которого равна  $R(s) = \|R_{ij}(s)\|_{n \times n}$ . Проблемы проектирования остаются теми же, что и в первой модели.

Наконец, в **третьей модели** связи между подсистемами осуществляются и через многомерный

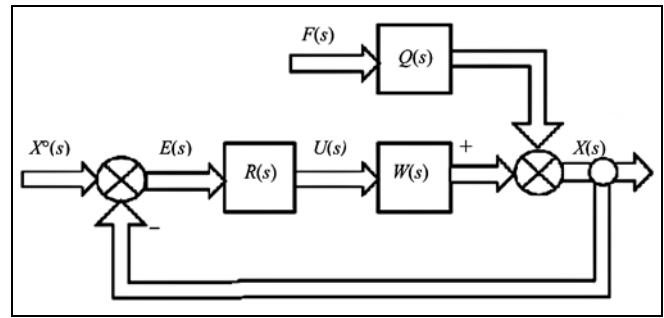


Рис. 1. МСАУ СДО

объект управления, и через многомерный регулятор. Возможности таких МСАУ еще мало изучены.

Структурная схема МСАУ представлена на рис. 1.

Для МСАУ СДО первой и главной проблемой стала проблема устойчивости. Если устойчивость для каждой подсистемы определяется по известным классическим критериям (Ляпунова, Рауса, Гурвица, Стодола, Найквиста, Эрмита — Михайлова), то характеристическое уравнение много-связной системы образуется в виде произведения характеристических уравнений подсистем с учетом их взаимосвязей, что приводит к характеристическому уравнению вида

$$D(s) = a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n = 0, \quad (1)$$

но с очень высокой степенью  $n > (25-40)$ . Для оценки устойчивости системы в наше время уравнение (1) не требует поиска собственных значений, но и не позволяет, кроме установления фактов устойчивости, эффективно исследовать причину природы формирования устойчивости всей много-связной системы с использованием приведенных выше критериев. Множество существующих на сегодня алгоритмов и программ позволяет определить устойчивость МСАУ, но не позволяет анализировать влияние на степень устойчивости МСАУ, например, одновременного изменения множества физических параметров подсистем и коэффициентов связи между ними, так как связь между коэффициентами  $a_i$  уравнения (1) и физическими параметрами системы не всегда четко проявляется.

### 2. ПАРАДИГМА АВТОНОМНОСТИ И.Н. ВОЗНЕСЕНСКОГО

В 1938 г. в работе [2] И.Н. Вознесенского был сформулирован принцип автономности МСАУ по собственным движениям.

Для реализации этого принципа нужно было рассмотреть третью модель МСАУ и синтезировать искусственные связи между подсистемами через многомерный регулятор таким образом, что-



бы они компенсировали естественные связи через многомерный объект. Тогда структура всей МСАУ распадется на отдельные устойчивые подсистемы. Однако добиться полной компенсации естественных связей часто не удастся из-за инерционности элементов системы. При этом речь идет о компенсации связей только на конкретном режиме работы системы. С изменением режимов ее работы необходимо всю МСАУ перенастраивать. Если эту задачу решать как задачу экстремальной настройки МСАУ, то можно добиться определенных успехов [3].

В работе [4] проблема автономности решалась благодаря структурам подсистем, позволяющим достигать неограниченное увеличение коэффициента усиления без нарушения устойчивости МСАУ в целом.

При достижении высокого быстродействия подсистем их взаимное влияние друг на друга оказывается минимальным: подсистемы из-за быстрого выполнения своей задачи управления не успевают полностью реагировать на воздействия других подсистем. Автор работы [4] замечает, что при таких свойствах системы можно достичь ее инвариантности от нагрузки. При этом все же отмечается, что для ряда важных объектов достижение автономности противоречит технологическим процессам.

Позднее было показано, что при управлении сложными динамическими объектами многосвязное управление просто необходимо и позволяет достичь более высокой эффективности, чем переход к автономной структуре. Несмотря на это, на основе парадигмы автономности построены многие промышленные системы в металлургии, энергетике, при управлении системой паровых котлов, при регулировании теплофикационных турбин, работающих в стабильных условиях.

### 3. ПАРАДИГМА ИССЛЕДОВАНИЯ МСАУ, ОСНОВАННАЯ НА ОПИСАНИИ В ПЕРЕМЕННЫХ СОСТОЯНИЯ

Эта парадигма реализует чисто математический подход, когда описание МСАУ в виде дифференциального уравнения  $n$ -го порядка сводят к ее описанию в виде системы дифференциальных уравнений первого порядка (форма Коши). Такой подход дал огромный толчок к изучению свойств динамических систем с обратной связью.

Пусть динамическая система описывается системой уравнений, заданной в векторно-матричной форме:

$$\begin{aligned} \dot{X} &= AX + BU, \\ Y &= CX, \end{aligned} \quad (2)$$

где  $A = \|a_{ij}\|_{n \times n}$ ,  $B = \|b_{ik}\|_{n \times m}$ ,  $C = \|c_{\lambda i}\|_{p \times n}$ , есть числовые матрицы с численными значениями коэффици-

циентов;  $X$  — вектор переменных состояния;  $Y$  — вектор выходных переменных состояния;  $U$  — вектор входных переменных (управление).

Отметим, что при такой форме записи МСАУ желательно строить в классе полностью управляемых, полностью наблюдаемых и структурно-устойчивых систем. При этом структура МСАУ полностью растворяется в математической структуре (2).

Задавая различные значения числовым параметрам матриц  $A$ ,  $B$ ,  $C$ , можно определить в любой момент времени состояние системы  $X$  (траекторию движения, решение системы (2)). Этот процесс можно повторять многократно. Многообразие методов исследования, полученных в результате различных модификаций модели (2), не меняет сути исследования динамических систем в пространстве переменных состояния. Однако анализ устойчивости МСАУ после преобразования ее характеристического уравнения, записанного в виде

$$D(s) = \det[Is - A] = 0,$$

где  $I$  — единичная матрица, в итоге сводится к характеристическому уравнению (1). А это значит, что проблема генезиса (происхождения) устойчивости МСАУ остается по-прежнему открытой.

Другой недостаток этой парадигмы, с точки зрения инженерной практики, заключается в трудности установления прямой связи между переменными состояния и физическими параметрами реальной системы. По этой причине реализация данной парадигмы при проектировании реальных МСАУ встречает определенные трудности и ограничения. Используя данную парадигму, инженер-проектировщик не может получить четкий ответ на вопрос: как изменятся свойства МСАУ, если одновременно внести изменения в характеристики тех или иных элементов реальной конструкции системы? Останется ли при этом реальная система устойчивой?

Несмотря на эти прикладные проблемы, данная парадигма эффективно работает при исследовании МСАУ на уровне их математического описания (2). Некоторые проблемы можно снять, если к построению модели (2) подходить не сверху, а снизу, т. е. идти от моделей элементов, постепенно объединяя их в систему (2).

Даже если матрицу  $A$  состояния многосвязной системы составить как многосвязное соединение подматриц физических подсистем и коэффициентов связи между ними, то можно повысить эффективность исследования — например, анализировать изменение запасов устойчивости МСАУ в зависимости от изменения отдельных параметров подсистем. Однако задача усложняется, если одновременно менять системные характеристики подсистем. Кроме того, устойчивость МСАУ определяется комплексами, представляющими собой объ-

единение двух, трех, ...,  $n$  подсистем, связанных многомерными характеристиками связи, которые в матричной форме в явном виде не проявляются. Поэтому, на наш взгляд, изучение генезиса устойчивости МСАУ при варьировании системных характеристик подсистем потребует проведения дополнительных исследований, что при проектировании реальных МСАУ порождает определенные трудности и ограничения.

Для оценки устойчивости заданной МСАУ по ее математической модели парадигма пространства состояний может успешно применяться. Она лежит в основе современной теории управления динамическими системами с обратной связью и отражена во многих работах исследователей [5–15].

#### **4. ПАРАДИГМА ИССЛЕДОВАНИЯ МСАУ, ОСНОВАННАЯ НА ОПИСАНИИ В ФОРМЕ МАТРИЧНЫХ ПЕРЕДАТОЧНЫХ ФУНКЦИЙ**

Матричная форма описания динамики МСАУ достаточно удобна и делает получаемые результаты более обозримыми. Однако описание МСАУ с помощью МПФ (см. рис. 1) в определенном смысле неполно и в некоторой степени не отражает поведения системы в целом, так как не дает информации о поведении неуправляемых и ненаблюдаемых частей системы. Для полного описания системы переходят к ее описанию в пространстве состояний (2), размерность которого равна числу степеней свободы системы. При этом вектор выходных регулируемых координат МСАУ связан с вектором переменных состояния линейным соотношением.

Недостаток данной парадигмы в какой-то степени повторяет недостатки парадигмы описания МСАУ в пространстве состояний. В результате матричных преобразований инженер-проектировщик получает конечный результат при заданных параметрах системы и входных воздействиях  $U(t)$ , а сами матричные преобразования не отражают физических процессов.

По-прежнему остается вопрос: как установить связь между физическими параметрами реальной системы и параметрами матричных преобразований? Для установления влияния изменения какого-либо физического параметра, например, на устойчивость системы, требуется, как и в предыдущей парадигме, многократное повторение численного эксперимента. Задача еще более усложняется, если одновременно варьируется группа физических параметров.

Отметим, что на основе матричных преобразований получение, например, критериев устойчивости в аналитической форме, как это имеет место в классической теории управления, практически невозможно. Анализ устойчивости МСАУ происходит по-прежнему на основе анализа характерис-

тического уравнения (1), которое получено путем преобразования уравнения

$$D(s) = \det[I + W(s)R(s)] = 0. \quad (3)$$

Анализ устойчивости по уравнениям (1) или (3) не дает ответа на вопрос, как влияют на устойчивость МСАУ свойства отдельных подсистем и свойства взаимных связей между подсистемами.

Исследованию свойств МСАУ на основе матричных методов посвящены работы А.А. Красовского [16], М.В. Меерова [17], П.И. Чинаева [18], В.Т. Морозовского [19], О.С. Соболева [20]. Результаты практического применения теории многосвязных систем отражены в работах В.А. Боднера [21, 22], А.А. Шевякова [23], Р.Т. Янушевского [24], У.Х. Рея [25] и других исследователей.

#### **5. ПАРАДИГМА ИССЛЕДОВАНИЯ МСАУ Б.Н. ПЕТРОВА, ОСНОВАННАЯ НА СТРУКТУРНО-ФУНКЦИОНАЛЬНОЙ ДЕКОМПОЗИЦИИ СИСТЕМЫ И ЧАСТОТНЫХ МЕТОДАХ ИССЛЕДОВАНИЯ**

В конце 1970-х гг. академиком Б.Н. Петровым была поставлена задача: осуществить описание МСАУ более крупными (чем элементы подсистем) физическими блоками и многомерными элементами связей между ними. Сам академик Б.Н. Петров известен в теории автоматического управления как автор парадигмы перехода от системы дифференциальных уравнений к ее структурному представлению в виде функциональных блоков с операторами и связями между ними [1]. Эта парадигма дала новый колоссальный толчок в развитии и создании классической теории автоматического управления (ТАУ). Теперь была поставлена аналогичная задача перед исследователями МСАУ. Главная цель решения поставленной задачи заключалась в сохранении физичности структуры и всех преобразований, чтобы инженер-проектировщик точно знал (не решая систему дифференциальных уравнений), какие вносимые им изменения будут способствовать улучшению динамических свойств МСАУ.

Решение этой проблемы в виде новой формы описания МСАУ через физические характеристики подсистем и многомерные характеристики связей было представлено в Докладах Академии наук СССР [26]. Эта форма описания использовалась в дальнейшем в работах [27–29].

Из представленной структуры МСАУ (см. рис. 1) видно, что она состоит из множества взаимосвязанных замкнутых сепаратных подсистем, задача функционирования каждой из которых заключается в управлении одной (собственной) выходной координатой объекта. Из приведенных выше моделей МСАУ рассмотрим как наиболее распространенную в инженерной практике первую модель, в





которой связи между подсистемами осуществляются через многомерный объект управления. В этом случае, как отмечалось, МПФ  $R(s)$  регулятора будет диагональной, на которой расположены передаточные функции  $R_i(s)$ .

Основное требование к описанию динамических характеристик МСАУ заключается в том, чтобы оно обеспечивало возможность отличать как одну подсистему от другой, так и один элемент связей от другого, т. е. каждая характеристика должна иметь свою «индивидуальность». Для этого вводится упорядоченная маркировка характеристик как подсистем, так и элементов связи с указанием их размерности.

В качестве отдельной  $i$ -й подсистемы рассмотрим замкнутую систему с ее внутренним строением, которая осуществляет управление собственной  $i$ -й выходной координатой многомерного объекта управления. В качестве индивидуальной характеристики (ИХ)  $i$ -й подсистемы рассмотрим характеристику, которая полностью отражает изучаемые свойства подсистемы и служит выражением этих свойств и отличительных признаков. Таким требованиям удовлетворяет индивидуальная передаточная функция  $\Phi_i(s)$  в режиме управления, когда  $i$ -я подсистема функционирует в изолированном (автономном) от других подсистем режиме:

$$\forall i: \Phi_i(s) = \frac{X_i(s)}{X_i^o(s)} = \frac{R_i(s)W_{ii}(s)}{1 + R_i(s)W_{ii}(s)}.$$

Отметим, что в качестве ИХ  $i$ -й подсистемы могут быть рассмотрены также ее амплитудно-фазовая характеристика (АФХ)  $\Phi_i(j\omega)$  и передаточная функция по ошибке  $\Phi_\varepsilon(s) = 1 - \Phi_i(s)$ . В данном случае  $i$ -я подсистема соответствует реальной физической системе, имеющей самостоятельное конструкторское значение и свою индивидуальную динамическую характеристику (модель), которая широко используется в классической ТАУ с ее хорошо развитыми методами исследования замкнутых систем с одним входом и одним выходом.

Для конкретизации отношений между подсистемами и выражения их особенностей вводят в рассмотрение многомерную характеристику взаимных связей (ХВС). Эта характеристика (модель) отражает реально существующие взаимоотношения между подсистемами, и их математическая модель строится из типовых динамических звеньев классической ТАУ. Для рассматриваемого класса МСАУ перекрестные связи между подсистемами определяются только недиагональными элементами  $W_{ij}(s)$  ( $i \neq j$ ) МПФ  $W(s)$  многомерного объекта управления, которые образуют матрицу связей

$$\|W_{ij}(s)\gamma_{ij}\|, \text{ где } \gamma_{ij} = \begin{cases} 1, & i \neq j, \\ 0, & i = j, \end{cases} \quad i, j = \overline{1, n}. \text{ Эта матрица}$$

отражает индивидуальность отношений между парами, тройками, четверками и т. д. подсистем.

Для данного класса МСАУ важно выявить не столько абсолютное действие перекрестных связей, сколько их действие относительно прямых связей через объект управления. Последние характеризуются диагональной матрицей вида  $\|W_{ij}(s)\delta_{ij}\|$ ,

$$\text{где } \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j, \end{cases} \quad i, j = \overline{1, n}.$$

Эта относительная связь между подсистемами и рассматривается в качестве многомерной ХВС в МСАУ. Математическая модель многомерной ХВС между  $k$  подсистемами имеет вид:

$$H_k(s) = \frac{\det \|W_{ij}(s)\gamma_{ij}\|_{k \times k}}{\det \|W_{ij}(s)\delta_{ij}\|_{k \times k}}. \quad (4)$$

Характеристика  $H_k(s)$  может быть либо вещественной, либо комплексной, либо мнимой.

По характеру действия многомерная ХВС может быть гибкой или жесткой, стабилизирующей или дестабилизирующей, форсирующей, инерционной или запаздывающей. В общем случае она характеризует как знак, так и величину («силу»), а также характер связей в группе из  $k$  подсистем, которые соединены в единое целое этим многомерным элементом связи.

Таким образом, модель (4) позволяет конкретизировать характер связей между подсистемами, а меняя знак, параметры и структуру модели, можно решить задачу синтеза связей в МСАУ из условия обеспечения требуемых свойств системы в целом.

Среди различных типов МСАУ часто выделяют класс гомогенных (идентичных, однотипных) МСАУ, у которых ИХ  $\Phi_i(s)$  подсистем идентичны и равны друг другу. Для этого класса МСАУ целесообразно ввести понятие обобщенной ХВС, представляющей собой сумму характеристик связи подсистем одного класса эквивалентности. Например, для всех взаимосвязанных пар подсистем эта обобщенная характеристика связей (ХС)

будет равна  $H_2(s) = \sum_{i,j=1}^{C_n^2} H_{ij}(s)$ , для всех взаимосвязанных троек в  $n$ -мерной системе обобщенная ХС

$H_3(s) = \sum_{i,j,k=1}^{C_n^3} H_{ijk}(s)$ , где  $C_n^k$  — число сочетаний из

$n$  по  $k$ , равное  $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ , и т. д.

Обобщенная ХС выражает суммарную связь  $H_k(s)$ , создаваемую группой из  $C_n^k$  идентичных подсистем. При этом слагаемые, входящие в  $H_k(s)$ , могут быть разного знака, что не исключает слу-

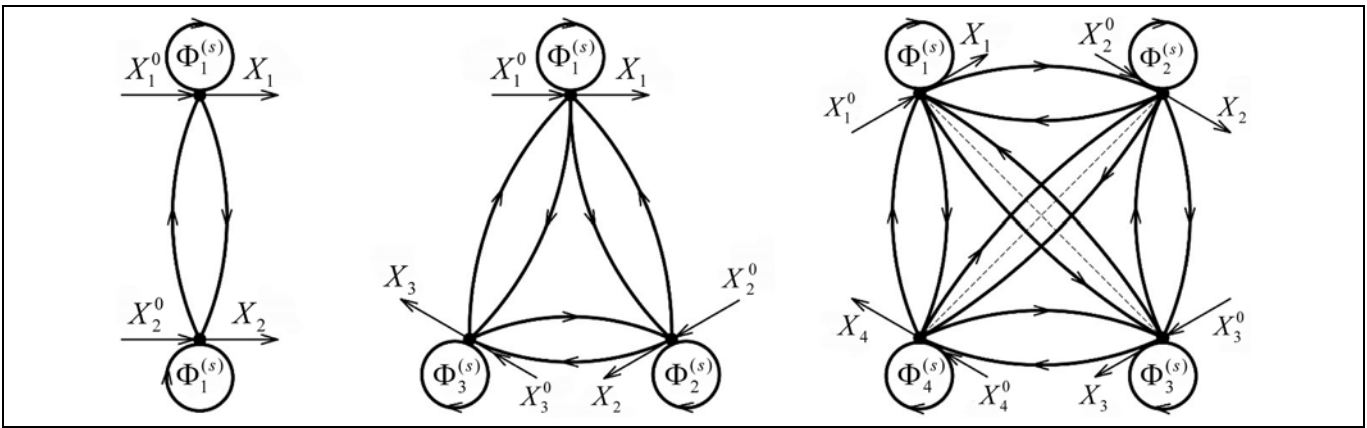


Рис. 2. Структура МСАУ в форме петлевого маркированного орграфа

чая, когда связи между подсистемами в рамках одного класса эквивалентности будут компенсировать друг друга, — тогда  $H_k(s) = 0$ . То же самое получается, если связи между подсистемами в  $k$ -м классе эквивалентности отсутствуют.

Введенные выше понятия ИХ подсистем и многомерных ХВС позволяют осуществить переход от описания МСАУ на уровне элементарных динамических звеньев к описанию на уровне подсистем и многомерных ХВС, образованных из этих элементов.

Новой форме описания МСАУ будут соответствовать и новые структурные схемы, которые можно изобразить в виде петлевого маркированного орграфа (рис. 2).

Для структур МСАУ, изображенных на рис. 2, характеристическое уравнение может быть представлено через ИХ подсистем и ХВС между ними [27–29]:

$$D(\Phi, H) = 1 + \sum_{i,j=1}^{C_n^2} \Phi_i \Phi_j H_{ij} + \sum_{i,j,k=1}^{C_n^3} \Phi_i \Phi_j \Phi_k H_{ijk} + \dots \\ \dots + H_{1n} \prod_{i=1}^n \Phi_i = 0. \quad (5)$$

Здесь ИХ  $\Phi_i(s)$  подсистем и ХВС  $H_k(s)$  являются функциями комплексной переменной  $s$ , а это означает, что для исследования характеристического уравнения (5) могут применяться частотные методы.

Запишем характеристическое уравнение (5) для класса МСАУ с гомогенными (однотипными, идентичными) подсистемами. Учитывая, что

$$\Phi_1(s) = \Phi_2(s) = \dots = \Phi_n(s) = \Phi(s),$$

получим:

$$D(\Phi, H) = 1 + H_2(s)\Phi^2(s) + H_3(s)\Phi^3(s) + \dots \\ \dots + H_k(s)\Phi^k(s) + \dots + H_n(s)\Phi^n(s) = 0,$$

где  $H_k(s)$  — обобщенная ХВС для подсистемы  $k$ -го размера, которая вычисляется по формуле (4).

Таким образом, получилось характеристическое уравнение с комплексными коэффициентами относительно одной переменной  $\Phi(s)$ .

Рассмотрим случай, когда связь либо только через объект, либо только через регулятор выражается в виде числовых коэффициентов  $k_{ij}$ . При этом ХВС будет иметь вид:

$$h_k = \frac{\det \|K_{ij} \gamma_{ij}\|_{k \times k}}{\det \|K_{ij} \delta_{ij}\|_{k \times k}}. \quad (6)$$

Тогда характеристическое уравнение для гомогенных (однотипных) систем будет иметь вид [30]:

$$D(\Phi, h) = 1 + h_2 \Phi^2(s) + h_3 \Phi^3(s) + \dots \\ \dots + h_n \Phi^n(s) = 0. \quad (7)$$

Характеристическое уравнение (7) можно переписать в другом виде. С учетом предположения, что  $\Phi(s) = \frac{1}{M(s)}$ , где  $M(s)$  есть характеристический полином подсистемы, характеристическое уравнение МСАУ будет иметь вид [31]:

$$D(M, h) = M^n(s) + h_2 M^{n-2}(s) + h_3 M^{n-3}(s) + \dots \\ \dots + h_{n-1} M(s) + h_n = 0. \quad (8)$$

Здесь характеристический полином  $M(s)$  (Эрмита — Михайлова) выступает в качестве ИХ подсистем.

Запись характеристических уравнений в форме (7) и (8) открывает новые возможности в исследовании многосвязных систем.

Таким образом, парадигма Б.Н. Петрова позволила изучать отдельно индивидуальные характеристики  $\Phi_i(s)$ ,  $M_i(s)$  подсистем и обобщенные ХВС  $H_k(s)$  между подсистемами, а затем интегрировать их вместе в единую характеристику реальной МСАУ для изучения ее системных свойств.

## 6. АНАЛИЗ УСТОЙЧИВОСТИ ЛИНЕЙНЫХ МСАУ НА ОСНОВЕ ПАРАДИГМЫ Б.Н. ПЕТРОВА

Начиная с 80-х годов прошлого века, научное направление на основе парадигмы Б.Н. Петрова развивалось в Уфимском авиационном институте (УАИ), а с 1992 г. — в Уфимском государственном авиационном техническом университете (УГАТУ) в научной школе, возглавляемой профессором Б.Г. Ильясовым.

На первых этапах решение характеристического уравнения (5) осуществлялось на основе частотных и численных методов, которые позволяли оценивать устойчивость проектируемых МСАУ газотурбинными двигателями (ГТД) сверхзвуковых летательных аппаратов (ЛА) при их работе в различных условиях полета.

Результаты этих ранних исследований были изложены в монографиях [27, 28] в соавторстве с учеными Института проблем управления (ИПУ) им. В.А. Трапезникова и Центрального института авиационного моторостроения (ЦИАМ) им. П.И. Баранова.

В этот период были получены условия статической устойчивости (т. е. положительности свободного члена характеристического уравнения) МСАУ, состоящей из идентичных астатических подсистем, т. е.  $\Phi(0) = 1$ ,

$$D(h, \Phi) = 1 + h_2 + h_3 + \dots + h_n > 0, \quad (9)$$

и МСАУ, состоящей из идентичных статических подсистем,

$$D(h, \Phi) = 1 + h_2\Phi^2(0) + h_3\Phi^3(0) + \dots + h_n\Phi^n(0) > 0, \quad (10)$$

где  $\Phi(0) = \frac{k}{1+k}$ ,  $k$  — коэффициент усиления разомкнутой подсистемы.

Такая форма записи, в отличие от матричной формы, позволяет проще анализировать влияние на процесс формирования такого свойства МСАУ, как статическая устойчивость, ввиду связей между подсистемами, т. е. проще оценивать нарушение структурной устойчивости из-за изменения величин связей между подсистемами.

Для МСАУ, состоящей из различных статических подсистем, условие статической устойчивости имеет вид:

$$D(h, \Phi) = 1 + h_2\Phi_1(0)\Phi_2(0) + h_3\prod_{i=1}^3\Phi_i(0) + \dots + h_n\prod_{i=1}^n\Phi_i(0) > 0.$$

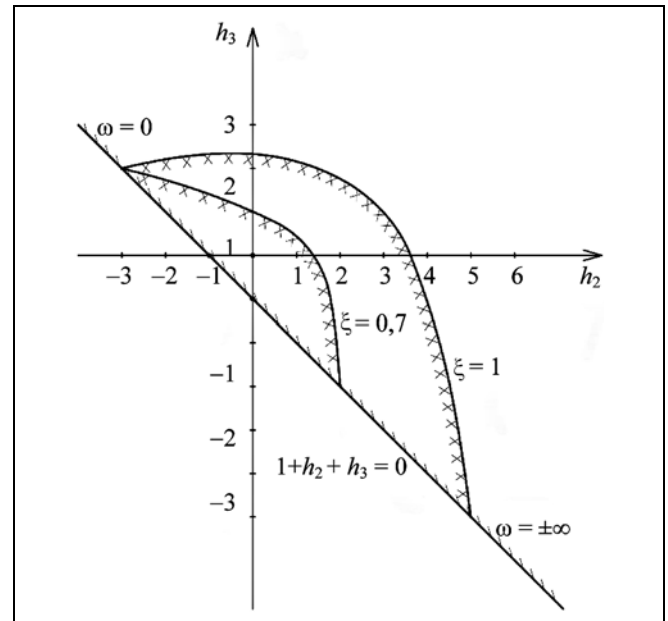


Рис. 3. Области устойчивости трехсвязной САУ при различных значениях  $\xi$

Для оценки динамической устойчивости методом  $D$ -разбиения была решена аналитически задача устойчивости трехсвязной системы, состоящей из трех идентичных подсистем второго порядка, взаимосвязанных друг с другом по выходным координатам числовыми коэффициентами. Характеристическое уравнение этой системы

$$D(h, \Phi) = 1 + h_2\Phi^2(s) + h_3\Phi^3(s) = 0 \quad (11)$$

было представлено на плоскости коэффициентов связи  $(h_2, h_3)$  (рис. 3). В качестве примера индивидуальной характеристики подсистемы была взята функция

$$\Phi(s) = 1/(\tau^2 s^2 + 2\xi\tau s + 1),$$

где  $\tau = 0,5$  с;  $\xi \in (0, 1 \dots 1)$  [28, 29].

Из рис. 3 видно, что чем меньше демпфированная подсистемы, тем меньше по размерам область устойчивости всей МСАУ.

Применяя численные и частотные методы, можно решить уравнение (11) и для более сложного вида и более высокого порядка функции  $\Phi(s)$ . Отметим, что данный подход позволил на практике впервые оценивать устойчивость проектируемых трехсвязных САУ газотурбинных двигателей сверхзвуковых ЛА на основе их математических моделей [27, 28].

На основе полученных результатов были впервые сформулированы центральные положения (закономерности) для МСАУ, состоящей из устойчивых идентичных подсистем, связанных друг с другом по выходным координатам.

**Положение 1.** Условия (9) и (10) статической устойчивости данного класса МСАУ одновременно являются и условием ее структурной устойчивости, так как при нарушении этих условий устойчивость МСАУ не может быть достигнута из-за изменения параметров подсистем. Этот вывод справедлив и для МСАУ с устойчивыми подсистемами, имеющими различную структуру и индивидуальную характеристику.

**Положение 2.** Если в составе устойчивой МСАУ появилась структурно-неустойчивая подсистема, то это будет достаточным условием структурной неустойчивости всей МСАУ, в которой все подсистемы связаны друг с другом по выходным координатам численными коэффициентами связи, ибо изменение коэффициентов связи  $h_2$  или  $h_3$  не позволяет в этом случае восстановить структурную устойчивость МСАУ в целом.

**Положение 3.** Для МСАУ, в которой числовые связи между  $n$  подсистемами реализуются либо через многомерный объект управления, либо через многомерный регулятор, дополнительно должно существовать  $n$  критических точек, расположенных на границе устойчивости МСАУ и определяемых уравнениями многомерных связей.

**Положение 4.** Значения критических точек определяются корнями уравнения многомерной связи, которые получаются либо из характеристического уравнения (7) заменой  $\Phi(s)$  на  $x$

$$D(h, x) = 1 + h_2x^2 + h_3x^3 + \dots + h_nx^n = 0, \quad (12)$$

либо из характеристического уравнения (8) заменой  $M(s)$  на  $z$

$$D(h, z) = z^n + h_2z^{n-2} + h_3z^{n-3} + \dots + h_n = 0, \quad (13)$$

где порядок  $n$  уравнения связи определяется количеством взаимосвязанных подсистем.

Понятие уравнения многомерных связей через многомерные коэффициенты  $h_i$  в парадигме Б.Н. Петрова было введено впервые.

**Положение 5.** Для динамической устойчивости МСАУ, в которой идентичные подсистемы жестко связаны друг с другом по выходным координатам, необходимо и достаточно, чтобы соответствующая АФХ подсистемы  $\Phi(j\omega)$  при изменении частоты  $\omega$  от 0 до  $+\infty$  не пересекала и не охватывала ни одну из критических точек уравнения связи (12), а характеристический полином  $M(j\omega)$  Эрмита — Михайлова не пересекал, но охватывал все критические точки уравнения связи (13).

**Положение 6.** Для МСАУ с идентичными подсистемами введено понятие запасов устойчивости (по модулю и по фазе) как расстояния соответствующей частотной характеристики подсистемы на комплексной плоскости до ближайшей критической точки уравнений многомерных связей (12) или (13) [32]. Данное положение справедливо и при

наличии у идентичных подсистем элементов с чистым запаздыванием [33].

**Положение 7.** Линейная МСАУ с идентичными  $n$  подсистемами, связанными друг с другом по выходным координатам, находится на границе колебательной устойчивости, т. е. в ней возникают установившиеся колебания (периодические движения с частотой  $\omega_n$  и амплитудой  $\alpha_n$ ), если одна из характеристик идентичной подсистемы проходит через ближайшую критическую точку уравнений связи (12) или (13). При этом амплитуда и частота колебаний определяются из соответствующей индивидуальной характеристики подсистемы и характеристики многомерной связи [30, 31].

На основе положения 3 были сформулированы два конкретных частотных критерия устойчивости.

**Критерий 1.** Для устойчивости линейной МСАУ с числовыми коэффициентами связи между идентичными подсистемами необходимо и достаточно, чтобы при изменении частоты  $\omega$  от 0 до  $\infty$  АФХ подсистемы  $\Phi(j\omega)$  не пересекала и не охватывала ни одну из критических точек, определяемых значениями корней уравнения связи (12) [30].

В работах [31, 32] приведены примеры численных расчетов, подтверждающих данный критерий (рис. 4).

**Пример 1.** Передаточная функция замкнутой устойчивой сепаратной подсистемы в составе трехсвязной системы имеет вид:  $\Phi(s) = 1/(s^3 + 3s^2 + 2s + 1)$ .

Числовые связи между подсистемами осуществляются через многомерный элемент связи

$$h = \begin{pmatrix} 0 & 0,2 & 0,4 \\ 0,2 & 0 & 0,5 \\ 0,2 & 0,5 & 0 \end{pmatrix}.$$

Характеристическое уравнение системы с числовыми коэффициентами относительно функции  $\Phi$  имеет вид:

$$D(\Phi) = 1 + h_2\Phi^2 + h_3\Phi^3 = 0, \quad (14)$$

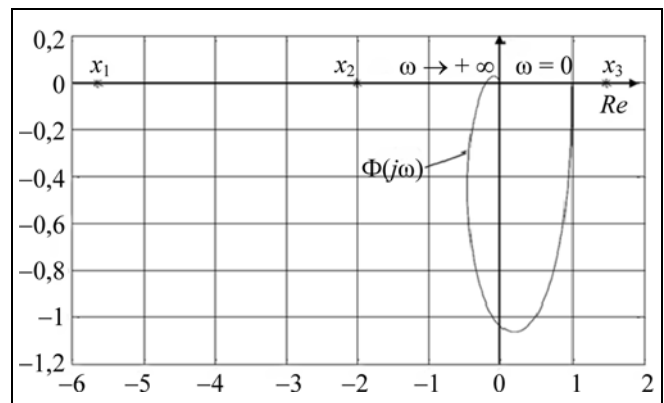


Рис. 4. Годограф функции  $\Phi(j\omega)$  и критические точки  $x_i, i = \overline{1, 3}$

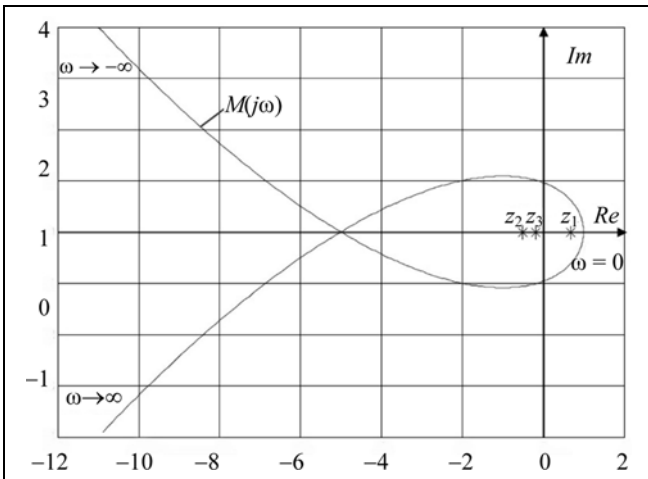


Рис. 5. Годограф Эрмита — Михайлова  $M(j\omega)$  и критические точки  $z_i, i = \overline{1, 3}$

где  $h_3 = -0,6; h_2 = -0,37$  определяются по формуле (6). Если в уравнении (14) вместо функции  $\Phi$  поставим комплексную переменную  $x$ , то получим уравнение многомерных связей:

$$D(x) = 1 + h_2x^2 + h_3x^3 = 0. \quad (15)$$

При этом значения его корней, т. е. критических точек, будут равны  $x_1 = -5,64; x_2 = -2,00; x_3 = 1,48$ .

Построим на комплексной плоскости годограф функции  $\Phi(j\omega)$  при  $\omega \in (0, +\infty)$ . На этой же плоскости расположим значения критических точек  $x_i, i = \overline{1, 3}$ . Тогда, согласно критерию устойчивости 1, многосвязная система будет устойчива, так как АФХ автономной подсистемы  $\Phi(j\omega)$  не охватывает ни одну из критических точек уравнения (15) при изменении частоты  $\omega$  от 0 до  $+\infty$  (рис. 4). ♦

**Критерий 2.** Для устойчивости линейной МСАУ с числовыми коэффициентами связи по выходным координатам между идентичными подсистемами необходимо и достаточно, чтобы при изменении частоты  $\omega$  от 0 до  $\infty$  характеристический годограф подсистемы (годограф Эрмита — Михайлова) не пересекал и охватывал все критические точки, определяемые значениями корней уравнения связи вида (13) [31].

Численный пример расчета трехсвязной системы подтверждает справедливость данного критерия (рис. 5).

**Пример 2.** Перепишем характеристическое уравнение для примера 1 согласно формуле (8):

$$D(M) = M^3 + h_2M + h_3 = 0, \quad (16)$$

где коэффициенты уравнения (16) вычислены по формуле (6) и равны  $h_3 = -0,06; h_2 = -0,37$ .

Уравнение критических точек имеет вид:  $z^3 + h_2z + h_3 = 0$ . Замкнутые сепаратные подсистемы имеют характеристическое уравнение, соответствующее устойчи-

вой подсистеме:  $M(s) = s^3 + 3s^2 + 2s + 1 = 0$ . При этом корни уравнения критических точек равны  $z_1 = 0,68; z_2 = -0,5; z_3 = -0,18$ .

Построим на комплексной плоскости годограф Эрмита — Михайлова  $M(j\omega)$  при  $\omega \in (0, \pm\infty)$ . На этой же плоскости расположим корни уравнения критических точек  $z_i$ . Из рис. 5 видно, что годограф Эрмита — Михайлова  $M(j\omega)$  охватывает все корни уравнения критических точек. Согласно вышеизложенному критерию, МСАУ является устойчивой, что подтверждают и переходные процессы. ♦

**Положение 8.** Приведенные исследования показали, что вышеизложенные положения справедливы и для МСАУ, содержащей идентичные подсистемы с цифровой или дискретной во времени управляющей частью [31].

## 7. ИССЛЕДОВАНИЕ СВОЙСТВ НЕЛИНЕЙНЫХ МСАУ НА ОСНОВЕ ПАРАДИГМЫ Б.Н. ПЕТРОВА

Данный подход может применяться и для исследования свойств нелинейных МСАУ. Например, рассмотрим класс нелинейных МСАУ с идентичными подсистемами, которые содержат элементы с нелинейными статическими характеристиками. При этом связь между подсистемами осуществляется через многомерный объект управления.

Пусть для этого класса МСАУ применим метод гармонической линеаризации, при этом к ней предъявляется жесткое требование, заключающееся в том, чтобы характеристики всех подсистем и образующихся с помощью связей замкнутых контуров удовлетворяли условию фильтра.

Представим структуру нелинейной МСАУ в виде взаимного соединения нелинейного элемента (НЭ) и линейной части  $W_L$  системы на рис. 6.

Здесь  $p$  — оператор дифференцирования, функции  $W_L(p)$  образуют оператор линейной части (ЛЧ) системы, а гармонически линеаризованная часть образует нелинейный элемент (НЭ) системы  $W_N[q(\alpha), q'(\alpha)]$ .

Тогда индивидуальная характеристика гармонически линеаризованной идентичной подсистемы имеет вид:

$$\Phi(p, \alpha) = \frac{W_N[q(\alpha), q'(\alpha)] W_L(p)}{1 + W_N[q(\alpha), q'(\alpha)] W_L(p)},$$

где  $q(\alpha), q'(\alpha)$  — коэффициенты гармонической линеаризации;  $\alpha$  — амплитуда входного сигнала.

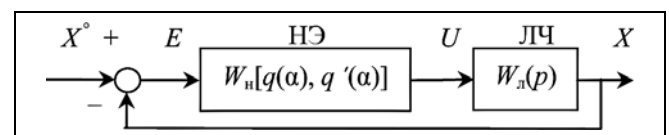


Рис. 6. Нелинейная МСАУ

Далее запишем характеристическое уравнение для всей МСАУ с идентичными нелинейными подсистемами:

$$D(p, \alpha) = 1 + h_2 \Phi^2(p, \alpha) + h_3 \Phi^3(p, \alpha) + \dots + h_n \Phi^n(p, \alpha) = 0.$$

Переходя от функции  $\Phi(p, \alpha)$  к  $M(p, \alpha) = 1/\Phi(p, \alpha)$ , получим:

$$D(p, \alpha) = M^n(p, \alpha) + h_2 M^{n-2}(p, \alpha) + h_3 M^{n-3}(p, \alpha) + \dots + h_n = 0.$$

Для этих двух уравнений справедливы и уравнения связи (12) и (13) соответственно.

Далее переходим к частотным характеристикам заменой  $p = j\omega$ . Тогда каждое характеристическое уравнение есть функция от  $\omega$  и  $\alpha$ , т. е.  $D(\omega, \alpha) = 0$ . Учитывая, что для гармонически линеаризованной МСАУ справедливы все восемь изложенных положений, можно сформулировать для нее следующее положение.

**Положение 9.** Для устойчивости положения равновесия нелинейной МСАУ с гармонически линеаризованными идентичными подсистемами необходимо и достаточно, чтобы при изменении частоты  $\omega$  от 0 до  $\pm\infty$  характеристики  $\Phi(j\omega, \alpha)$  не охватывали бы все критические точки, а кривые  $M(j\omega, \alpha)$  при варьировании амплитуды  $\alpha$  в некотором диапазоне охватывали бы все критические точки соответствующих уравнений связи, не пересекая их.

**Положение 10.** В нелинейной МСАУ имеют место периодические движения, если либо характеристика  $\Phi(j\omega, \alpha)$ , либо кривая Эрмита — Михайлова (характеристический полином подсистемы)  $M(j\omega, \alpha)$  пересекают одну из критических точек соответствующих уравнений многомерных связей (12) или (13). Далее, используя технологии классической теории управления, определяют частоту  $\omega_n$  и амплитуду  $\alpha_n$  периодических движений. При этом амплитуда  $\alpha_n$  определяется по соответствующей характеристике, а частота  $\omega_n$  — по уравнению связи.

**Положение 11.** Далее по направлению деформации кривых  $\Phi(j\omega, \alpha)$  или  $M(j\omega, \alpha)$  при увеличе-

нии амплитуды  $\alpha$  и по вновь занимаемому их положению оценивают устойчивость периодических движений, как это делается в классической теории управления.

По этой же методике был проведен анализ периодических движений в однотипной МСАУ с нечеткими регуляторами в сепаратных подсистемах.

**Пример 3.** Требуется исследовать нелинейную трехсвязную систему на наличие автоколебаний. Многосвязная система состоит из идентичных нелинейных подсистем, связанных друг с другом численными коэффициентами по выходным переменным  $Y$ . Нелинейная подсистема представляет собой стандартную структуру, состоящую из нелинейного элемента (НЭ) и линейной части (ЛЧ) (рис. 7).

В качестве НЭ рассматривается реле (рис. 7) с коэффициентами гармонической линеаризации, равными  $q(\alpha) = 4c/\pi\alpha$ ;  $c = \pi$ ;  $q'(\alpha) = 0$ .

Пусть передаточная функция линейной части равна  $W_{\text{лч}} = \frac{2}{p(p^2 + p + 1)}$ .

Тогда характеристический полином  $M(p)$  гармонически линеаризованного уравнения подсистемы будет равен

$$M(p) = \alpha(p^3 + p^2 + p) + 8. \quad (17)$$

Матрица  $h$  коэффициентов связи между подсистемами равна

$$h = \begin{bmatrix} 0 & 0,75 & -1,45 \\ 0,18 & 0 & 0,75 \\ 0,75 & 0,18 & 0 \end{bmatrix}.$$

Характеристическое уравнение трехсвязной системы имеет вид:

$$D(M) = M^3 + h_2 M + h_3 = 0. \quad (18)$$

При исследовании автономных подсистем параметры автоколебаний равны  $\omega_n = 1$ ;  $\alpha_n = 8$ . Из формулы (17) в соответствии с уравнением (13) получим уравнение критических точек, заменив  $M$  на  $z$ :

$$D(z) = z^3 + h_2 z + h_3 = 0. \quad (19)$$

Коэффициенты  $h_2$  и  $h_3$  характеристического уравнения (18) вычислим по формулам (6). При заданных числовых значениях коэффициентов связи получим  $h_2 = 0,8175$ ;  $h_3 = 1,728$ , тогда корни уравнения связи (19) равны  $z_1 = -0,976$ ;  $z_{2,3} = 0,488 \pm 1,238j$ .

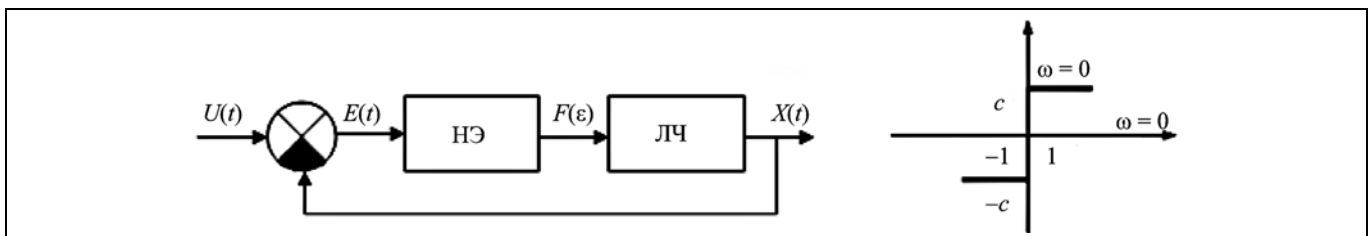


Рис. 7. Структурная схема нелинейной МСАУ

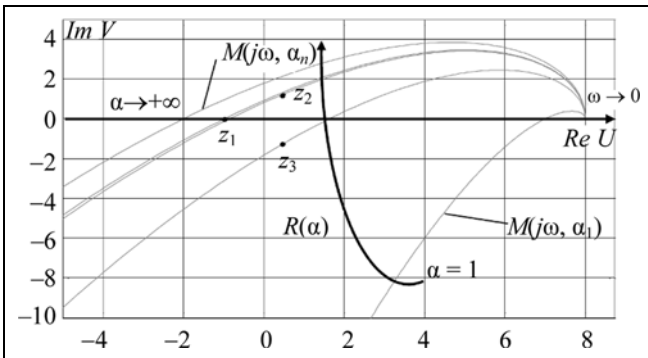


Рис. 8. Расположение годографов Эрмита — Михайлова  $M(j\omega, \alpha)$  и критических точек  $z_i$ ,  $i = \overline{1, 3}$ , в примере 3

Эту задачу можно решить графически. Построим годограф функции  $M(j\omega)$  (17) при  $\omega \in (0, +\infty)$  и  $\alpha \in (0, +\infty)$ . На этой же плоскости расположим собственные значения уравнения критических точек  $z_i$  (рис. 8). Из всех корней ближним критическим корнем будет  $z_1 = -0,976$ , так как прохождение годографа  $M(j\omega, \alpha)$  через остальные корни соответствует неустойчивой нелинейной МСАУ (по вышеприведенному критерию).

Следовательно, в многосвязной системе существуют устойчивые периодические движения с параметрами  $\omega_n = 1$ ;  $\alpha_n = 8,976$ . Отметим, что при числовых связях в многосвязных системах (МС) частота  $\omega$  подсистем не меняется, а изменяется лишь амплитуда  $\alpha_n$  колебаний в МС по сравнению с автономной подсистемой. ♦

Таким образом, применение парадигмы Б.Н. Петрова позволяет расширить далее методы классической теории управления на класс линейных и нелинейных МСАУ, в том числе с логическими элементами [32], элементами искусственного интеллекта [35], адаптивными системами [36], а также системами с изменяемой структурой [37] при сохранении физического смысла влияния элементов системы на свойства МСАУ в целом.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Академиком Б.Н. Петровым и его учениками была предложена новая парадигма исследования МСАУ, основанная на описании характеристического уравнения линейной МСАУ через индивидуальные характеристики подсистем и многомерные элементы связей между ними с дальнейшим исследованием свойств системы в частотной области. Это было сделано в теории многосвязных систем впервые.

Формирование из многомерных коэффициентов связи уравнения связи и нахождение по нему новых критических точек для подсистем, по которым можно оценить устойчивость МСАУ в целом, является новым в теории многосвязной систем. Это позволило сформировать новые критерии устойчивости МСАУ.

Данная парадигма Б.Н. Петрова, основанная на структурно-функциональной декомпозиции МСАУ и применении частотных методов для выявления свойств МСАУ, принципиально отличается от существующих подходов тем, что позволяет в процессе исследований сохранить физический смысл как каждого элемента подсистемы, так и каждого элемента связи и их роль в формировании свойств МСАУ.

За последние 40 лет развитие теории МСАУ на основе парадигмы Б.Н. Петрова осуществлялось в трудах его учеников до получения как новых теоретических результатов, так и использования их при решении практических задач. Показано, что полученные теоретические и практические результаты для линейных и нелинейных МСАУ на основе парадигмы Б.Н. Петрова позволяют сохранить «дух» классической теории управления и физический (инженерный) смысл проводимых исследований сложных систем.

Парадигма Б.Н. Петрова вносит существенный вклад российских ученых в мировую науку в виде нового подхода к исследованию различных классов МСАУ СДО и ведет к выявлению их уникальных свойств.

Исследования МСАУ на основе парадигмы Б.Н. Петрова открывают новые возможности для исследования различных классов МСАУ сложными динамическими объектами.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Петров Б.Н. О построении и преобразовании структурных схем // Изв. АН СССР. ОТН. — 1945. — № 12. — С. 1146—1162. [Petrov, B.N. O postroenii i preobrazovanii strukturnykh skhem // Izv. AN SSSR. OTN. — 1945. — No. 12. — P. 1146—1162. (In Russian)]
2. Вознесенский И.Н. О регулировании машин с большим числом регулируемых параметров // Автоматика и телемеханика. — 1938. — № 4-5. — С. 65—78. [Voznesenskii, I.N. O regulirovanii mashin s bol'shim chislom reguliruemyykh parametrov // Automation and Remote Control. — 1938. — No. 4-5. — P. 65—78. (In Russian)]
3. Корнилов Ю.Г. Автономное регулирование как экстремальная задача // Изв. АН СССР. ОТН. — 1954. — № 4. [Kornilov, Yu.G. Avtonomnoe regulirovanie kak ehkstremaal'naya zadacha // Izv. AN SSSR. OTN. — 1954. — No. 4. (In Russian)]
4. Мееров М.В. Об автономности многосвязных систем, устойчивых при неограниченном увеличении установившейся точности // Автоматика и телемеханика. — 1956. — № 5. — С. 410—424. [Meerov, M.V. Ob avtonomnosti mnog-osvyaznykh sistem, ustoychivyykh pri neogranichennom uvelichenii ustanovivsheysya tochnosti // Automation and Remote Control. — 1956. — No. 5. — P. 410—424. (In Russian)]
5. Справочник по теории автоматического управления / под ред. А.А. Красовского. — М.: Наука, 1987. — 712 с. [Spravochnik po teorii avtomaticheskogo upravleniya / pod red. A.A. Krasovskogo. — M.: Nauka, 1987. — 712 s. (In Russian)]
6. Андреев Ю.Н. Управление конечномерными линейными объектами. — М.: Наука, 1976. — 424 с. [Andreev, Yu.N. Upravlenie konechnomernymi lineinymi ob'ektami. — M.: Nauka, 1976. — 424 s. (In Russian)]

7. Воронов А.А. Устойчивость, управляемость, наблюдаемость. — М.: Наука, 1979. — 335 с. [Voronov, A.A. Ustoi-chivost', upravlyaemost', nablyudaemost'. — М.: Nauka, 1979. — 335 s. (In Russian)]
8. Деруссо П., Роу Р., Клоуз Ч. Пространство состояний в теории управления. — М.: Наука, 1970. — 620 с. [Derusso, P., Roi, R., Klouz, Ch. Prostranstvo sostoyanii v teorii upravleniya. — М.: Nauka, 1970. — 620 s. (In Russian)]
9. Квакернаак Х., Сиван Р. Линейные оптимальные системы управления. — М.: Мир, 1977. — 650 с. [Kvakernaak, Kh., Sivan, R. Lineinye optimal'nye sistemy upravleniya. — М.: Mir, 1977. — 650 s. (In Russian)]
10. Сю Д., Мейер А. Современная теория автоматического управления и ее применение. Перевод с англ. / Под ред. д-ра техн. наук, проф. Ю.И. Топчиева. — М.: Машиностроение, 1972. — 544 с. [Syu, D., Meier, A. Sovremennaya teoriya avtomaticheskogo upravleniya i ee primenenie. Perevod s angl. / Pod red. d-r techn. nauk, prof. Yu.I. Topchieva. — М.: Mashinostroenie, 1972. — 544 s. (In Russian)]
11. Калман Р., Фалб П., Арbib М. Очерки по математической теории систем. Перевод с англ. / Под ред. Я.З. Цыпкина. Перевод Э.Л. Наппельбаума. — М.: Мир, 1971. — 400 с. [Kalman, R., Falb, P., Arbib, M. Ocherki po matematicheskoi teorii sistem. Perevod s angl. / Pod red. Ya.Z. Tsyapkina. Perevod Eh.L. Nappel'bauma. — М.: Mir, 1971. — 400 s. (In Russian)]
12. Ту Ю. Современная теория управления. Перевод с англ. Я.Н. Гибадулина / Под ред. В.В. Солодовникова. — М.: Машиностроение, 1971. — 472 с. [Tu, Yu. Sovremennaya teoriya upravleniya. Perevod s angl. Ya.N. Gibadulina / Pod red. V.V. Solodovnikova. — М.: Mashinostroenie, 1971. — 472 s. (In Russian)]
13. Буков В.Н. Вложение систем. Аналитический подход к анализу и синтезу матричных систем. — Калуга: Изд-во научной лит-ры Н.Ф. Бочкаревой. — 2006. — 720 с. [Bukov, V.N. Vlozhenie sistem. Analiticheskij podhod k analizu i sintezu matrichnykh sistem. — Kaluga: Izd-vo nauchnoj lit-ry N.F. Bochkarevoj. — 2006. — 720 s. (In Russian)]
14. Баженов С.Г., Козийчев А.Н., Королев В.С. Частотные методы анализа устойчивости самолета с многосвязной системой управления // Проблемы управления. — 2020. — № 2. — С. 20—27. [Bazhenov, S.G., Kozuyachev, A.N., Korolyov, V.S. Stability Analysis of Airplane with MIMO Control System Based on Frequency Methods / Control Sciences. — 2020. — No. 2. — P. 20—27. (In Russian)]
15. Паршева Е.А. Модифицированный алгоритм адаптации высокого порядка для децентрализованного управления многосвязными объектами с запаздыванием по состоянию // Проблемы управления. — 2008. — № 3. — С. 37—43. [Parsheva, E.A. A Modified High Order Adaptation Algorithm for Decentralized Control of Multivariable Plants with State Delay / Control Sciences. — 2008. — No. 3. — P. 37—43. (In Russian)]
16. Красовский А.А. О двухканальных системах автоматического регулирования с антисимметричными связями // Автоматика и телемеханика. — 1957. — № 2. — С. 123—136. [Krasovskij, A.A. O dvuhkanal'nykh sistemah avtomaticheskogo regulirovaniya s antisimmetrichnymi svyaziyami // Automation and Remote Control. — 1957. — No. 2. — P. 123—136. (In Russian)]
17. Мееров М.В. Системы многосвязного регулирования. — М.: Наука, 1965. — 384 с. [Meerov, M.V. Sistemy mnogovyaznogo regulirovaniya. — М.: Nauka, 1965. — 384 s. (In Russian)]
18. Чинаев П.И. Методы анализа и синтеза многомерных автоматических систем. — Киев: Техніка, 1969. — 380 с. [Chinaev, P.I. Metody analiza i sinteza mnogomernykh avtomaticheskikh sistem. — Kiev: Tekhnika, 1969. — 380 s. (In Russian)]
19. Морозовский В.Т. Многосвязные системы автоматического регулирования. — М.: Энергия, 1970. — 288 с. [Morozovskii, V.T. Mnogosvyaznye sistemy avtomaticheskogo regulirovaniya. — М.: Energiya, 1970. — 288 s. (In Russian)]
20. Соболев О.С. Методы исследования линейных многосвязных систем. — М.: Энергоиздат, 1985. — 120 с. [Sobolev, O.S. Metody issledovaniya lineinykh mnogovsvyaznykh sistem. — М.: Ehnergoizdat, 1985. — 120 s. (In Russian)]
21. Боднер В.А. Теория автоматического управления полетом. — М.: Наука, 1964. — 698 с. [Bodner, V.A. Teoriya avtomaticheskogo upravleniya poletom. — М.: Nauka, 1964. — 698 s. (In Russian)]
22. Боднер В.А., Рязанов Ю.А., Шаймарданов Ф.А. Системы автоматического управления двигателями летательных аппаратов. — М.: Машиностроение, 1973. — 248 с. [Bodner, V.A., Ryazanov, Yu.A., Shaimardanov, F.A. Sistemy avtomaticheskogo upravleniya dvigatelyami letatel'nykh apparatov. — М.: Mashinostroenie, 1973. — 248 s. (In Russian)]
23. Шевяков А.А. Автоматика авиационных и ракетных силовых установок. — М.: Машиностроение, 1970. — 660 с. [Shevyakov, A.A. Avtomatika aviatsionnykh i raketnykh silovykh ustanovok. — М.: Mashinostroenie, 1970. — 660 s. (In Russian)]
24. Янушевский Р.Т. Теория линейных оптимальных многосвязных систем управления. — М.: Наука, 1973. [Yanush-evskii, R.T. Teoriya lineinykh optimal'nykh mnogovsvyaznykh sistem upravleniya. — М.: Nauka, 1973. (In Russian)]
25. Рей, У.Х. Методы управления технологическими процессами / У. Рей; Пер. с англ. А.М. Шафиро. — М.: Мир, 1983. — 368 с. [Rei, U.Kh. Metody upravleniya tekhnologicheskimi protsessami / U. Rei; Per. s angl. A.M. Shafira. — М.: Mir, 1983. — 368 s. (In Russian)]
26. Петров Б.Н., Черкасов Б.А., Ильясов Б.Г., Куликов Г.Г. Частотный метод анализа и синтеза многомерных систем автоматического регулирования // Доклады АН СССР. — 1979. — Т. 247. — № 2. — С. 304—307. [Petrov, B.N., Cherkasov, B.A., Ilyasov, B.G., Kulikov, G.G. Chastotnyi metod analiza i sinteza mnogomernykh sistem avtomaticheskogo regulirovaniya // Doklady AN SSSR. — 1979. — Vol. 247, no. 2. — P. 304—307. (In Russian)]
27. Проектирование систем автоматического управления газотурбинных двигателей. Нормальные и нештатные режимы / Под ред. академика Б.П. Петрова. — М.: Машиностроение, 1981. — 400 с. [Proektirovanie sistem avtomaticheskogo upravleniya gazoturbinykh dvigatelei. Normal'nye i neshatnye rezhimy / Pod red. akad. B.N. Petrova. — М.: Mashinostroenie, 1981. — 400 s. (In Russian)]
28. Оптимизация многомерных систем управления газотурбинных двигателей летательных аппаратов / А.А. Шевяков, Т.С. Мартыанова, В.Ю. Рутковский, Б.Г. Ильясов и др.; под общ. ред. А.А. Шевякова и Т.С. Мартыановой. — М.: Машиностроение, 1989. — 256 с. [Optimizatsiya mnogomernykh sistem upravleniya gazoturbinykh dvigatelei letatel'nykh apparatov / A.A. Shevyakov, T.S. Mart'yanova, V.Yu. Rutkovskii, B.G. Ilyasov, et al. pod obshch. red. A.A. Shevyakova i T.S. Mart'yanovoi. — М.: Mashinostroenie, 1989. — 256 s. (In Russian)]
29. Основы теории многосвязных систем автоматического управления летательными аппаратами. Учеб. пособие / С.Ф. Бабак, В.И. Васильев, Б.Г. Ильясов и др. Под ред. М.Н. Красильщикова. — М. Изд-во МАИ, 1995. — 288 с. [Osnovy teorii mnogovsvyaznykh sistem avtomaticheskogo upravleniya letatel'nymi apparatami. Ucheb. posobie / S.F. Babak, V.I. Vasil'ev, B.G. Ilyasov, et al. Pod red. M.N. Krasil'shchikova. — М.: Izd-vo MAI, 1995. — 288 s. (In Russian)]
30. Ильясов Б.Г., Кабальнов Ю.С. Исследование устойчивости однотипных многосвязных систем автоматического управления с голономными связями между подсистемами // Автоматика и телемеханика, — 1995. — № 8. — С. 82—90. [Ilyasov, B.G., Kabal'nov, Yu.S. Issledovanie ustoychivosti odnotipnykh mnogovsvyaznykh sistem avtomaticheskogo upravleniya s golonomnymi svyaziyami mezhdru podsystemami // Automation and Remote Control. — 1995. — No. 8. — P. 82—90. (In Russian)]
31. Ильясов Б.Г., Саитова Г.А. Анализ устойчивости динамических систем, представленных в полиномиальной вектор-





- но-матричной форме // Известия РАН. Теория и системы управления. — 2018. — № 2. — С. 3—10. [Ilyasov, B.G., Saitova, G.A. Analiz ustoychivosti dinamicheskikh sistem, predstavlenykh v polinomial'noi vektorno-matrichnoi forme // Izvestiya RAN. Teoriya i sistemy upravleniya. — 2018. — No. 2. — P. 3—10. (In Russian)]
32. Ильясов Б.Г., Саитова Г.А. Системный подход к исследованию многосвязных систем автоматического управления на основе частотных методов // Автоматика и телемеханика. — 2013. — № 3. — С. 173—191. [Ilyasov, B.G., Saitova, G.A. Sistemnyi podkhod k issledovaniyu mnogosvyaznykh sistem avtomaticheskogo upravleniya na osnove chastotnykh metodov // Automation and Remote Control. — 2013. — No. 3. — P. 173—191. (In Russian)]
33. Ильясов Б.Г., Саитова Г.А., Елизарова А.В. Исследование многосвязной системы управления с запаздыванием методом декомпозиции // Современные наукоемкие технологии. — 2019. — № 3-2. — С. 177—181. [Ilyasov, B.G., Saitova, G.A., Elizarova, A.V. Issledovanie mnogosvyaznoi sistemy upravleniya s zapazdyvaniem metodom dekompozitsii // Sovremennye naukoemkie tekhnologii. — 2019. — No. 3-2. — P. 177—181. (In Russian)]
34. Ильясов Б.Г., Саитова Г.А. Исследование периодических движений в одностепенных нелинейных многосвязных системах, представленных в полиномиальной векторно-матричной форме // Известия РАН. Теория и системы управления. — 2020. — № 2. — С. 11—12. [Ilyasov, B.G., Saitova, G.A. Issledovanie periodicheskikh dvizhenii v odnotipnykh nelineynykh mnogosvyaznykh sistemakh, predstavlenykh v polinomial'noi vektorno-matrichnoi forme // Izvestiya RAN. Teoriya i sistemy upravleniya. — 2020. — No. 2. — P. 11—12. (In Russian)]
35. Ильясов Б.Г., Мунасыпов Р.А., Саитова Г.А. и др. Анализ периодических движений в многосвязных системах с нечеткими регуляторами в отдельных подсистемах // Мехатроника, автоматизация, управление. — 2004. — № 8. — С. 24—29. [Ilyasov, B.G., Munasyrov, R.A., Saitova, G.A., et al. Analiz periodicheskikh dvizhenii v mnogosvyaznykh sistemakh s nechetkimi regulatorami v separatnykh podsystemakh // Mekhatronika, avtomatizatsiya, upravlenie. — 2004. — No. 8. — P. 24—29. (In Russian)]
36. Ильясов Б.Г., Саитова Г.А., Назаров А.Ш. Об одном подходе к построению адаптивных многосвязных систем автоматического управления сложным динамическим объектом // Мехатроника, автоматизация, управление: Теоретич. и прикладной научно-технич. журн. — М.: Машиностроение, 2010. — № 8. — С. 13—20. [Ilyasov, B.G., Saitova, G.A., Nazarov, A.Sh. Ob odnom podkhode k postroeniyu adaptivnykh mnogosvyaznykh sistem avtomaticheskogo upravleniya slozhnym dinamicheskim ob'ektom // Mekhatronika, avtomatizatsiya, upravlenie: Teoretich. i prikladnoi nauchno-tekhnich. zhurn. — M.: Mashinostroenie, — 2010. — No. 8. — P. 13—20. (In Russian)]
37. Ильясов, Б.Г., Саитова Г.А., Назаров А.Ш. Алгоритм реконфигурации структуры многосвязной системы автоматического управления из условия устойчивости на основе частотных методов // Вестник Уфимского государственного авиационного технического университета. — 2012. — Т. 16. — № 3 (48). — С. 3—10. [Ilyasov, B.G., Saitova, G.A., Nazarov, A.Sh. Algoritm rekonfiguratsii struktury mnogosvyaznoi sistemy avtomaticheskogo upravleniya iz usloviya ustoychivosti na osnove chastotnykh metodov // Vestnik Ufimskogo gosudarstvennogo aviatsionnogo tekhnicheskogo universiteta. — 2012. — Vol. 16, no. 3 (48). — P. 3—10. (In Russian)]

Статья представлена к публикации членом редколлегии Н.В. Кузнецовым.

Поступила в редакцию 27.11.2020, после доработки 15.02.2021.  
Принята к публикации 24.02.2021.

Ильясов Барый Галеевич — д-р техн. наук, ✉ ilyasov@ugatu.su,

Саитова Гузель Асхатовна — канд. техн. наук, ✉ saitova@bk.ru.

ФГБОУ ВО «Уфимский государственный авиационный технический университет».

## INVESTIGATION OF MULTIVARIABLE AUTOMATIC CONTROL SYSTEMS FOR COMPLEX DYNAMIC OBJECTS BASED ON PETROV'S PARADIGM

B.G. Ilyasov and G.A. Saitova

Ufa State Aviation Technical University, Ufa, Russia

✉ ilyasov@ugatu.su, ✉ saitova@bk.ru

**Abstract.** This paper considers some approaches to studying the properties of multivariable automatic control systems (MACSs), particularly their stability, based on different descriptive models. The theory presented below extends the previously known ideas of Academician B.N. Petrov, which are fundamental in the classical theory of automatic control. Petrov's theory is based on the structural and functional decomposition of MACSs into separate real subsystems and multidimensional connections between them, described by a new model, and the study of system properties using frequency methods. Therefore, this theory is related to the physical (engineering) approach to dynamical systems analysis. A method for describing MACSs by the individual characteristics of subsystems and the elements of multidimensional connections is suggested. Stability criteria for linear MACSs with identical subsystems and a stability criterion for the system's equilibrium are established. A technology for finding the parameters of periodic motions and assessing their stability for nonlinear MACSs is introduced. Some numerical examples with technical objects illustrate this technology for studying the properties of MACSs.

**Keywords:** multivariable system, decomposition, frequency methods, linear system, nonlinear system.

**Funding.** This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research, project no. 20-08-01172 A.

# ИНФОРМАЦИОННЫЕ СООБЩЕСТВА В СОЦИАЛЬНЫХ СЕТЕВЫХ СТРУКТУРАХ. Ч. 3. Прикладные аспекты выявления и анализа сообществ<sup>1</sup>

Л.М. Бойко, Д.А. Губанов, И.В. Петров

**Аннотация.** Представлен обзор эмпирических исследований процессов формирования и выявления информационных сообществ в социальных сетевых структурах. В первой и второй частях обзора кратко изложена концепция информационного сообщества и рассмотрены релевантные математические модели формирования представлений индивидов. Неопределенность относительно механизмов обработки информации индивидами и структуры сетевого взаимодействия делает актуальными задачи идентификации моделей, сбора данных и анализа информационного взаимодействия в социальных сетях. В целях решения задачи идентификации проводятся поведенческие эксперименты и полевые исследования; на практике исследователи анализируют сообщества исходя из доступной им информации, применяя методы анализа на основе структурных свойств сети информационного взаимодействия между индивидами, характеристик индивидов и комбинации структурных и индивидуальных характеристик. В третьей, заключительной части обзора представлены исследования, посвященные вопросам идентификации моделей формирования представлений в сети, рассмотрены прикладные аспекты анализа информационных сообществ в социальных сетях.

**Ключевые слова:** социальные сетевые структуры, информационное сообщество, формирование информационных сообществ, формирование представлений, выявление информационных сообществ.

## ВВЕДЕНИЕ

В первой и второй частях настоящего обзора [1, 2] введена проблематика выявления и исследования информационных сообществ в социальных сетях, представлены математические модели динамики представлений и формирования информационных сообществ в социальных сетях, а также рассмотрены факторы и условия формирования информационных сообществ. Идентификация таких моделей на практике представляет собой непростую задачу: многие параметры являются экзогенными, в то время как в прикладных исследованиях существенная сторона процесса научения остается ненаблюдаемой. Во многих ситуациях лю-

ди не демонстрируют как свои истинные убеждения, так и доступную им для принятия решений информацию или механизмы обработки этой информации.

В процессе социального взаимодействия люди получают информацию от своих оппонентов в неполном объеме — например, в виде информации о результатах действий/активности других людей, но не о том, на основании чего и как эти решения принимались. Это ограничение может быть вызвано многими факторами, например, природой средств социального взаимодействия или высокими затратами на получение и/или передачу информации в полном объеме. Несмотря на возникающие трудности, исследователями проводятся полевые исследования и поведенческие эксперименты, направленные на выявление механизмов обработки информации людьми в реальной жизни; предложено множество методов анализа информационных сообществ на примерах общедоступных данных.

<sup>1</sup> Исследование выполнено при частичной финансовой поддержке РФФИ в рамках научных проектов № 19-17-50225, № 20-07-00190 (Д.А. Губанов) и № 20-31-90133 (И.В. Петров).



Структура третьей части обзора такова: в § 1 представлены работы, посвященные вопросам идентификации моделей формирования представлений в сети, в § 2 рассмотрены прикладные исследования информационных сообществ в социальных сетях.

### 1. ИДЕНТИФИКАЦИЯ МОДЕЛЕЙ ФОРМИРОВАНИЯ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ В СЕТИ

Можно привести такую классификацию типов агентов по методам обработки информации (см. первую и вторую части обзора [1, 2]):

- рациональные агенты (например, в рамках концепции байесовской рациональности), которых также можно разделить на «близоруких» (*myopic*) — выбирающих ответ, наилучший в краткосрочной перспективе, и стратегических — выбирающих ответ, оптимальный с точки зрения некоторой теоретико-игровой концепции (например, равновесия Нэша).
- «наивные» (*naive*) — в описание этой категории зачастую включают правило ДеГроота, согласно которому агенты формируют собственные представления, усредняя наблюдаемые мнения других агентов.

Существует ряд ранних работ, посвященных выявлению типов агентов в лабораторных и полевых исследованиях [3–5]. Недостатком этих исследований являются допущения о существовании агентов с различными механизмами научения в рамках одной и той же подвергающейся исследованию группы агентов. В недавней работе [6] была предпринята попытка выявления типов агентов на нескольких наборах реальных данных — показано, что социальные группы состоят из смеси рациональных (байесовских) и наивных (действующих по ДеГрооту) агентов, и что соотношение между типами варьируется для различных наборов данных. Так, в случае серии поведенческих экспериментов с участием жителей 19 индийских деревень выявлено 10 % населения, поведение которых согласуется с концепцией байесовской рациональности, в то время как остальные агенты предпочитают усреднять ответы своих соседей в сети социальных отношений. В том же эксперименте, но уже среди студентов Технологического института Мехико, доля байесовских агентов достигла 50 %. Число экспериментов для каждой из групп составляло 95 и 50 соответственно, число участников — 665 и 350 соответственно.

В этом исследовании авторы идентифицировали четыре паттерна научения, позволяющих различить агентов, обучающихся по правилам Байеса и ДеГроота в модели с неполной информацией и

определили ключевую сетевую характеристику, разделяющую типы обучения, которую они называют кланом (*clan*) — сильно связанной компонентой графа:

1) если клан полностью состоит из агентов, обучающихся по правилу ДеГроота, и если они в некоторый момент времени достигают согласия относительно состояния мира, то во все следующие моменты времени они не изменят своих представлений, даже если они ошибочны;

2) в модели с полной информацией байесовский агент  $i$ , соседи которого принадлежат множеству соседей байесовского агента  $j$ , копирует оценку состояния мира агента  $j$ ;

3) вне зависимости от типа агента  $i$  байесовский агент  $j$  никогда не принимает во внимание его оценку состояния мира (дополнение паттерна 2);

4) даже в случае неполной информации байесовский агент, идентифицирующий простое большинство оценок состояния мира своих соседей, никогда не изменит своей оценки при изменении оценок отдельными соседями.

В работе [7] проведено менее масштабное экспериментальное исследование со схожими результатами: авторы обнаружили, что испытуемые принимают решения, согласующиеся с обновлением по ДеГрооту в 80–98 % случаев, причем ошибки прогноза обусловлены позицией агента в сети. Однако в их исследовании центральное место занимает такое наблюдение: соответствие реального процесса научения агентов «наивному» правилу ДеГроота наблюдается только в сравнительной статике, в то время как динамика достижения консенсуса в лабораторных экспериментах предполагает использование более сложных правил обработки информации. Авторы идентифицируют эти эвристики, тестируют широкий класс других правил научения и модифицируют классическую модель ДеГроота, позволяя агентам корректировать вес своих предшествующих состояний.

Помимо сложности идентификации механизмов обработки информации агентами, зачастую и структура социального взаимодействия также может быть идентифицирована с трудом или вовсе недоступна внешнему наблюдателю, в то время как ее влияние на научение агентов может играть критическую роль [8–10]. С этой точки зрения современные технологии (реализованные, например, в виде социальных онлайн-платформ) кардинально изменили способы взаимодействия и потребления информации. Однако и здесь возникают явления, препятствующие выявлению социальных связей и источников информации. Одним из ключевых аспектов в данной области является политика обработки персональных данных онлайн-платформами [11], когда пользователь вынужден выби-

рать между приватностью и раскрытием большого объема личной информации (такой, как биографические сведения, геолокационные данные или так называемые цифровые следы — история активности в сети интернет) другим пользователям, владельцам платформы или сторонних приложений, принимая решение о доступности сведений о своих социальных связях с другими участниками сети. Также, несмотря на возросшую эффективность в передаче информации, пользователи по-прежнему имеют когнитивные и временные ограничения, что привело к развитию рекомендательных систем и росту интереса к области алгоритмической персонализации. Влияние алгоритмической фильтрации на социальное научение пока мало изучено, однако существует ряд моделей (см., например, статью [12]) в которых показано, что порядок получаемых информационных сообщений может существенно влиять на эффективность научения и достижение консенсуса. Все эти факторы играют решающую роль в задаче идентификации структур информационного взаимодействия и затрудняют наблюдаемость социальных связей.

Таким образом, возникает неопределенность как относительно механизмов обработки информации индивидами, так и относительно структуры взаимодействия, в рамках которой агенты обмениваются полученной информацией, что определяет интерес исследователей к данной области.

## 2. ИССЛЕДОВАНИЕ ИНФОРМАЦИОННЫХ СООБЩЕСТВ В СОЦИАЛЬНЫХ СЕТЯХ

### 2.1. Выявление информационных сообществ

В литературе нет единого мнения относительно формального определения информационных сообществ, и в прикладных исследованиях авторы выбирают достаточно общие определения, разумно отражающие суть явлений, происходящих в сетевых структурах информационного взаимодействия. Существует ряд таких явлений, характеризующих наличие информационных сообществ, которые вместе принято характеризовать как *разногласия (controversy)*:

— *эхо-камера (echo chamber)* — социально-психологический феномен, в рамках которого мнения или убеждения поддерживаются в сообществах, созданных единомышленниками, которые одобряют и укрепляют мнения друг друга;

— *информационный пузырь (filter bubble)* — явление, при котором алгоритмы персонифицированных рекомендательных систем предлагают контент, согласующийся с информацией, поступившей пользователю ранее, тем самым исключая для

пользователя возможность ознакомиться с альтернативной или новой информацией.

Подавляющее большинство работ, направленных на исследование информационных сообществ, связаны с существенными ограничениями. В них рассматриваются представления общества по политическим вопросам, в частности, они сосредоточены на масштабных долгосрочных событиях, таких как выборы. Во многих странах граждане активно участвуют в обсуждениях общественно значимых вопросов в онлайн-социальных сетях (таких как Twitter, Facebook и др.), вследствие чего для анализа становятся доступными огромные тематические массивы данных, содержащие информацию о пользователях и их действиях. Это приводит к тому, что многие работы можно охарактеризовать как тематические исследования (case study), в которых информационные сообщества исследуются на специфическом наборе данных, связанных с отдельным социальным явлением.

В этих исследованиях информационных сообществ, как правило, изучаются процессы распространения информации и их свойства, при этом не идентифицируются механизмы формирования представлений участников сети (рассматриваемые в соответствующих моделях первой и второй частей обзора [1, 2]). Помимо сложности идентификации правил научения, объясняется это еще и тем, что в большей части теоретических моделей сетевая структура задается экзогенно и не зависит от результатов научения: результаты научения не приводят к изменению взаимного влияния участников информационного процесса. Однако эмпирические исследования явлений, характеризующих информационные сообщества, обнаруживают свидетельства взаимосвязи между научением и структурой взаимодействий. Идентификация этих явлений и их формализация в теоретических моделях могли бы существенно сократить разрыв между теорией и практикой, однако в данный момент прикладные исследования ограничены разработкой методов идентификации состояния индивидов (оценкой внутренних представлений на основе наблюдаемой информации) и анализом сравнительной статистики.

Попытки решения задачи идентификации состояний участников информационного взаимодействия зачастую базируются на следующем наблюдении. В общем случае процесс формирования информационного сообщества может быть представлен в виде диффузионного процесса на сетевой структуре (известного как процесс распространения инноваций, идей или информации), в котором присоединение к новому сообществу является аналогом принятия идеи/представлений. Верно и обратное — любой процесс распространения на


**Краткая характеристика наиболее цитируемых работ, посвященных идентификации информационных сообществ**

Работа	Понятие сообщества	Тип графа	Тип показателя	Тип данных	Источник данных
Testing Models of Social Learning on Networks: Evidence from Two Experiments [6]	Набор узлов, которые больше связаны между собой, чем с теми, кто находится вне группы	Искусственно созданная сеть связей между участниками эксперимента	Структурный (clan)	Offline	Лабораторные эксперименты
Ideological Segregation Online and Offline [14]	Сообщество с эквивалентными характеристиками участников	Связи между участниками взаимодействия не учитываются	Индивидуальные характеристики (isolation index)	Online/Offline	Интернет-новости/офлайн-медиа/личное взаимодействие
Quantifying Controversy in Social Media — [15]	Мнения или убеждения поддерживаются в сообществах, созданных единомышленниками, которые укрепляют и одобряют мнения друг друга	Граф диалогов — граф, соответствующий тематическим дискуссиям, где связи между участниками формируются в случае ответов пользователей на сообщения друг друга	Структурный (Random Walk Controversy, Betweenness Centrality Controversy, Embedding Controversy)	Online	Twitter
Political Discourse on Social Media: Echo Chambers, Gatekeepers, and the Price of Bipartisanship [16]	Предпочтения к контенту, получаемому пользователями в сети, совпадают с предпочтениями к контенту, который они распространяют	Граф подписчиков — направленная связь между участниками возникает в случае, если один участник следит за обновлениями информации от другого участника	Индивидуальные характеристики (production polarity, consumption polarity)	Online	Twitter
Community Interaction and Conflict on the Web [17]	Участники сообщества преимущественно взаимодействуют с другими членами своего сообщества	Двудольный мультиграф между пользователями и сообществами. Связи возникают в случае общения между пользователями в рамках отдельного сообщества.	Смешанный	Online, временной ряд	Reddit
Quantifying Echo Chamber Effects in Information Spreading over Political Communication Networks [18]	Убеждения укрепляются в результате неоднократного взаимодействия с лицами, разделяющими одни и те же точки зрения	Граф подписчиков — направленная связь между участниками — возникает в случае, если один участник следит за обновлениями информации от другого участника	Смешанный	Online, временной ряд	Twitter
An Empirical Examination of Echo Chambers in US Climate Policy Networks [19]	Сообщество характеризуется двумя признаками: информацией, которая совпадает с уже устоявшимися убеждениями, и кластеризованной структурой взаимодействия	Сеть взаимодействия между экспертами	Смешанный	Online	Опросы
Echo Chambers: Emotional Contagion and Group Polarization on Facebook [20]	Группы единомышленников, убеждения которых приобретают экстремальные значения	Связи между участниками взаимодействия не учитываются	Индивидуальные характеристики (user sentiment polarization)	Online	Facebook

Работа	Понятие сообщества	Тип графа	Тип показателя	Тип данных	Источник данных
Exposure to Ideologically Diverse News and Opinion on Facebook [21]	Два типа сообществ: — множество участников, подверженных только воздействию информации от единомышленников, — соответствие предлагаемой алгоритмами информации предыстории действий пользователя	Граф связей дружбы между участниками социальной сети	Смешанный (Alignment score)	Online	Facebook
Filter Bubbles, Echo Chambers, and Online News Consumption [22]	—"—"–	Связи между участниками взаимодействия не учитываются	Индивидуальные характеристики (audience-based measure of outlet slant)	Online	История веб-серфинга

сети можно рассматривать с точки зрения формирования сообщества в сетевой структуре, в которой элементы сети сгруппированы по своему состоянию. Одним из примеров таких процессов является процесс распространения информации — так называемый информационный каскад (рис. 1, см. третью страницу обложки).

Естественно предположить, что такие информационные процессы/каскады должны коррелировать с представлениями участвующих в них индивидов, влиять на их представления. Данная аналогия с диффузионными процессами зачастую выступает отправной точкой в исследовании формирования информационных сообществ, в которых авторы применяют методы на основе структурных свойств сети информационного взаимодействия, свойств элементов сети или комбинации структурных и индивидуальных характеристик.

Тем самым возникает задача идентификации двух основных характеристик информационного взаимодействия — структуры связей между участниками и индивидуальных характеристик участников. В таблице приведен список наиболее цитируемых работ, посвященных идентификации информационных сообществ: краткие характеристики используемых данных, предлагаемые показатели и применяемые методы. Как было сказано выше, обе задачи идентификации являются сложными и выбор метода выявления информационных сообществ исследователями во многом обусловлен тем, каким набором реальных данных обладают авторы.

В п. 2.2 приводятся некоторые наиболее общие методы и показатели, позволяющие идентифицировать информационные сообщества.

## 2.2. Методы идентификации информационных сообществ, основанные на свойствах элементов структуры сети

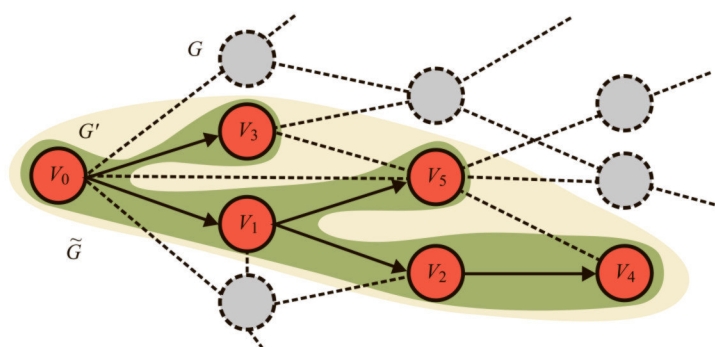
В прикладных исследованиях центральную роль в измерении эффектов, характеризующих наличие информационных сообществ, играет контент. Наиболее существенной характеристикой информационного сообщества является степень соответствия между потребляемым и производимым участниками сети контентом. В связи с этим в работе [16] вводится разделение процесса информационного взаимодействия на процессы потребления и производства информации. Авторы работы определили принадлежность каждого сообщения  $t$  социальной сети одному из двух подклассов  $l(t) = l_n \in \{0, 1\}$  (в исследовании использовались данные социальной сети Twitter;  $P_u$  — информация, опубликованная пользователем на своей личной странице;  $C_u$  — публикации, которые пользователь получает от других авторов; классификация информации проводилась на основании политических взглядов пользователей, где  $l_n = 1$  для представителей консервативных взглядов и 0 — для либеральных). На основе множества всей потребляемой (произведенной) пользователем  $u$  информации  $P_u(C_u)$  определяется степень разнообразия потребляемого/произведенного пользователями контента (production/consumption polarity) как отношение количества информации из одного класса к общему количеству информации, потребленной/произведенной пользователем:

$$p(u) = \frac{\sum_{t \in P_u} l(t)}{|P_u|}, \quad c(u) = \frac{\sum_{t \in C_u} l(t)}{|C_u|}.$$

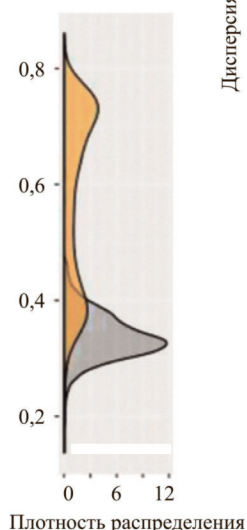
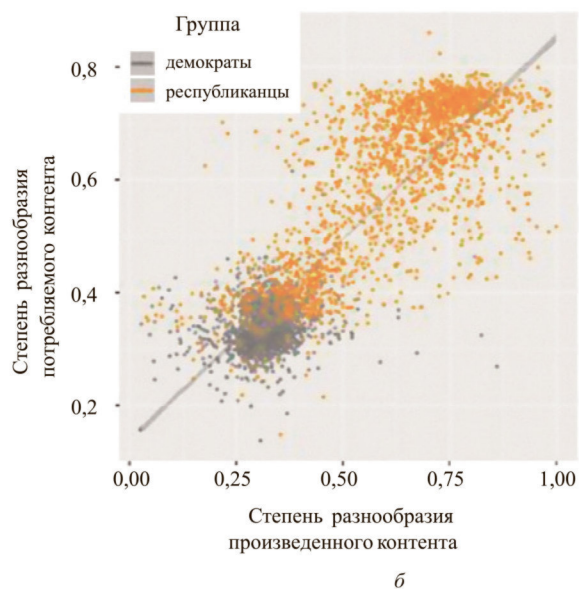
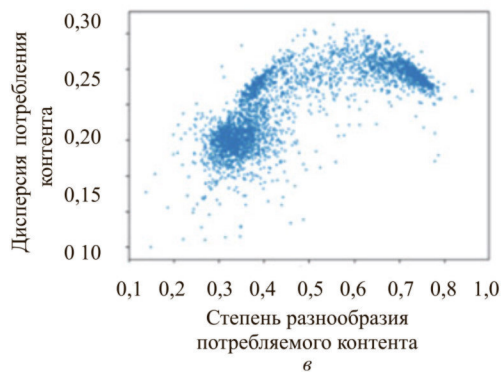
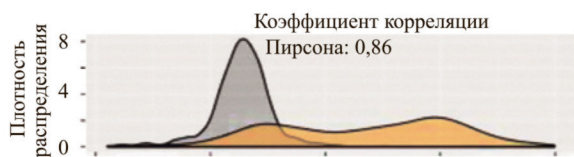
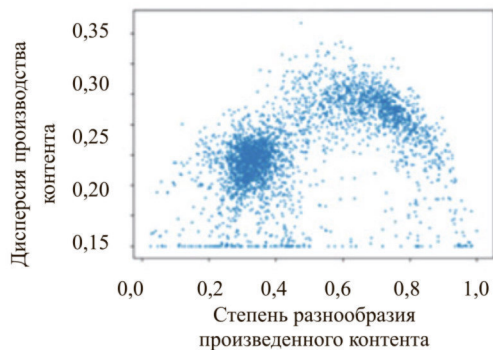
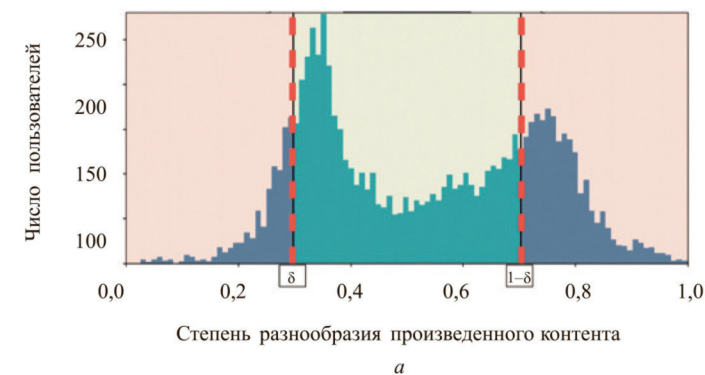
## «ИНФОРМАЦИОННЫЕ СООБЩЕСТВА В СОЦИАЛЬНЫХ СЕТЕВЫХ СТРУКТУРАХ.

### Ч. 3. ПРИКЛАДНЫЕ АСПЕКТЫ ВЫЯВЛЕНИЯ И АНАЛИЗА СООБЩЕСТВ»

(с. 16–24)



**Рис. 1. Интерпретация процесса формирования сообщества в виде диффузионного процесса на сети [13].** Утолщенными направленными ребрами в графе  $G$  изображен процесс распространения информации, начинающийся с вершины  $v_0$  и охватывающий вершины подграфа  $G$ . Ненаправленные ребра — связи социального взаимодействия узлов сети (например, связи дружбы). Вместе эти связи порождают подграф друзей  $G'$



**Рис. 2. Оценка статистических характеристик информационного взаимодействия пользователей online-платформы Twitter по теме законодательного регулирования оборота оружия [16]**



Существуют различные вариации этих показателей (где вариативность обусловлена спецификой реальных данных), которые позволяют делать содержательные выводы о процессе распространения информации среди пользователей. В частности, вычисляя статистические характеристики (такие как дисперсия, корреляция или меры близости распределений) полученных оценок разнообразия потребляемого/производимого контента, исследователи демонстрируют наличие информационных сообществ (рис. 2, см. третью страницу обложки).

Рис. 2, а демонстрирует распределение пользователей по степени разнообразия производимого контента: двупиковость данного распределения является одним из признаков наличия информационных сообществ (эхо-камер). График взаимосвязи между разнообразием потребляемого и производимого контента (рис. 2, б) демонстрирует высокую степень кластеризации значений для представителей различных групп пользователей. Графики справа призваны оценить зависимость между разнообразием потребляемого/производимого контента и его дисперсией.

### 2.3. Методы анализа информационных сообществ, основанные на структурных свойствах информационного взаимодействия

Анализируя структурные свойства информационных сообществ, исследователи делают акцент на сопоставление процессов взаимодействия между узлами различных сообществ. В качестве инструмента анализа зачастую выступают свойства случайных процессов на графах или меры центральности, отражающие эффективность узлов в процессе распространения информации.

Показатель *Random Walk Controversy* (RWC [19]) — основанная на случайном блуждании мера, которая определяется следующим образом. Предположим, что уже произведено разбиение графа по некоторому признаку на два подграфа, множества вершин которых не пересекаются. Пусть теперь имеется два случайных блуждания, одно из которых заканчивается в подграфе  $X$ , а другое — в подграфе  $Y$ ; RWC — это разница вероятностей двух событий (первое — оба случайных блуждания начались в том же подграфе, в котором закончились, второе — оба случайных блуждания начались в подграфе, отличном от того, в котором они закончились):

$$RWC = P_{XX}P_{YY} - P_{YX}P_{XY},$$

где  $P_{AB} = P$  (процесс начинается в  $A$  | процесс оканчивается в  $B$ ) — условная вероятность,  $A, B \in \{X, Y\}$ .

Другим методом выявления информационных сообществ, основанном на случайных блужданиях, является персонализированная версия алгоритма PageRank [23], в котором коэффициент затухания (damping factor) изменяется в зависимости от того, к какой группе относится вершина графа, с которой начинается процесс случайного блуждания [17]. В классической версии алгоритма переходы могут осуществляться либо к связанным узлам, либо к любому другому узлу, выбранному равномерно (что интерпретируется как завершение процесса перехода по ссылкам и начало нового). В персонализированной версии распределение вероятностей на множестве вершин различно для вершин из разных сообществ. Таким образом, данный метод также позволяет оценить степень разногласий между сообществами на основе сравнения вероятностей взаимодействия между участниками различных сообществ [17].

*Мера, основанная на центральности по посредничеству* [15]. Центральность по посредничеству  $bc(e)$  ребра сети  $e$  определяется как

$$bc(e) = \sum_{s \neq t \in V} \frac{\sigma_{s,t}(e)}{\sigma_{s,t}},$$

где  $\sigma_{s,t}$  — общее число кратчайших путей между вершинами  $s$  и  $t$  в графе и  $\sigma_{s,t}(e)$  — число кратчайших путей, проходящих через ребро  $e$ . Авторы работы [15] предлагают анализировать различия в центральностях вершин двух множеств, образующих разбиение графа (в оригинальной работе авторы применяли алгоритм METIS [24]). Идея предлагаемого показателя заключается в сопоставлении центральностей ребер, входящих в разрез графа (т. е. ребер, соединяющих вершины из разных подмножеств вершин графа), и центральностей ребер в остальной части графа. Если получен «хороший» разрез графа, то большинство кратчайших путей из одной части графа в другую будут пролегать через ребра разреза и центральность этих ребер будет иметь более высокие значения по сравнению с центральностью ребер в остальном графе. Сравнивая два распределения центральностей — в разрезе и вне его — например, с помощью KL-дивергенции  $d_{KL}$  и проводя нормировку, получаем выражение для расчета меры разногласий *Betweenness Centrality Controversy* (BCC)

$$BCC = 1 - e^{-d_{KL}}.$$

Помимо указанных методов, применяются классические методы кластеризации, не связанные с диффузионными процессами на сетях или расчетом путей между вершинами: полученные таким образом структурные характеристики исследовате-



ли связывают с индивидуальными характеристиками отдельных узлов графа, тем самым комбинируя продемонстрированные выше методы.

#### 2.4. Методы анализа информационных сообществ, основанные на комбинации структурных и индивидуальных характеристик

Комбинирование индивидуальных характеристик участников и структурных характеристик информационного взаимодействия представляет собой непростую задачу и редко встречается в работах исследователей. Одним из вариантов для анализа является применение методов машинного обучения, позволяющих учесть все имеющиеся у исследователей характеристики процесса информационного взаимодействия (множество всей потребляемой/произведенной информации, содержание информации, структурные характеристики сети и отдельных участников и т. д.) и погрузить их в единое пространство признаков. При этом для выявления информационных сообществ применяются методы классификации.

Перспективным направлением в задаче объединения индивидуальных и структурных характеристик представляется использование различных преобразований исходных данных — вложений (embedding) и, в частном случае, вложений вершин/ребер/графов (node/edge/graph embedding) [25].

В общем случае данная операция состоит в преобразовании исходного пространства признаков в другое пространство, как правило, меньшей размерности. С этой точки зрения все перечисленные выше методы можно понимать как частные случаи таких преобразований. Решение задачи кластеризации классическими методами в новом пространстве [26, 27] и использование, например, меры *Embedding Controversy* (EC)

$$EC = 1 - \frac{d_X + d_Y}{2d_{XY}},$$

где  $d_X(d_Y)$  — среднее расстояние между парами элементов множества  $X(Y)$ , а  $d_{XY}$  — среднее расстояние между парами элементов, принадлежащих различным множествам, приводит к еще одному способу идентификации информационных сообществ [15]. Значение показателя, близкое к единице, характеризует наличие информационных сообществ и высокую степень кластеризации графа; значение показателя, близкое к нулю, говорит об обратном.

Метод вложения графов более сложен, однако позволяет анализировать не отдельные узлы графа, а графы целиком. Метод заключается в использовании ядер графов (graph kernel) — преобразований, позволяющих производить попарное срав-

нение структур между собой, и может применяться как для сравнительного анализа отдельных групп вершин графа [28], так и информационных процессов, протекающих на сетевых структурах [29—31]. Такой подход открывает возможность исследования последовательностей информационных потоков, сравнительного анализа характеристик информационных каскадов (таких как размеры, скорость и др.), протекающих в информационных сообществах, и предсказания этих характеристик.

#### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе проведен обзор исследований, связанных с информационными сообществами во взаимодействующих направлениях: модели формирования информационных сообществ в социальных сетевых структурах, которые имеют как микроэкономические, так и когнитивные и социально-психологические основания, а также методы выявления информационных сообществ и прикладные исследования, посвященные анализу информационных сообществ в социальных сетевых структурах.

В первой и второй частях обзора кратко изложена концепция информационного сообщества и рассмотрены релевантные модели формирования представлений индивидов, которые стремятся устранить неопределенность относительно заданного(-ых) вопроса(-ов), формируя в итоге информационные сообщества. Описаны подходы к моделированию обновления представлений индивидов и влияние различных факторов на достижение истинных представлений, а также формирование в сети различных или одинаковых устойчивых представлений, приводящих к возникновению информационных сообществ.

Эмпирическим исследованиям, изучающим вопросы существования информационных сообществ в реальных социальных сетях, посвящена настоящая часть обзора. Неопределенность относительно механизмов обработки информации индивидами и структуры взаимодействия, а также обилие наборов реальных данных (преимущественно из онлайн-социальных сетей) приводит к разнообразию эмпирических методов идентификации информационных сообществ и специализации исследований на источниках реальных данных. Отметим, что в силу специфики доступных данных рассмотренные методы характеризуют не столько представления самих пользователей социальных сетей, сколько информацию, которая производится и потребляется пользователями. Отсутствие предпосылок о механизмах формирования представлений является существенным недостатком указанных методов и позволяет делать только косвенные выводы как об истинных убеждениях участников информационных взаи-



модействий, так и о динамике формирования информационных сообществ. Переход от анализа взаимодействия на уровне отдельных узлов к анализу взаимодействия структур более высокого порядка, характеризующих развитие информационного процесса, является перспективным для решения задачи идентификации сообществ в структурах информационного взаимодействия. Исследования в данном направлении могут существенно расширить понимание взаимосвязи между информационными процессами и формированием информационных сообществ.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Губанов Д.А., Петров И.В. Информационные сообщества в социальных сетевых структурах. Ч. 1. От основного понятия к математическим моделям формирования // Проблемы управления. — 2021. — № 1. — С. 15–23. [Gubanov, D.A., Petrov, I.V. Information communities in social network structures. part 1. from concept to mathematical models // Control Sciences. — 2021. — No. 1. — P. 15–23. (In Russian)]
2. Губанов Д.А., Петров И.В. Информационные сообщества в социальных сетевых структурах. Ч. 2. Математические сетевые модели формирования сообществ // Проблемы управления. — 2021. — № 2. — С. 18–32. [Gubanov, D.A., Petrov, I.V. Information communities in social networks. Part II: Networked models of formation // Control Sciences. — 2021. — No. 2. — P. 18–32. (In Russian)]
3. Hung, A.A., Plott, C.R. Information Cascades: Replication and an Extension to Majority Rule and Conformity-Rewarding Institutions // American Economic Review. — 2001. — Vol. 91, no. 5. — P. 1508–1520.
4. Kübler, D., Weizsäcker, G. Limited Depth of Reasoning and Failure of Cascade Formation in the Laboratory // The Review of Economic Studies. — 2004. — Vol. 71, no. 2. — P. 425–441.
5. Choi, S., Gale, D., Kariv, S. Behavioral Aspects of Learning in Social Networks: An Experimental Study. — Emerald Group Publishing Limited, 2005.
6. Chandrasekhar, A.G., Larreguy, H., Xandri, J.P. Testing Models of Social Learning on Networks: Evidence From Two Experiments // Econometrica. — 2020. — No. 1 (88). — P. 1–32.
7. Grimm, V., Mengel, F. Experiments on Belief Formation in Networks // Journal of the European Economic Association. — 2020. — Vol. 18, no. 1. — P. 49–82.
8. Acemoglu, D., Ozdaglar, A. Opinion Dynamics and Learning in Social Networks // Dynamic Games and Applications. — 2011. — No. 1 (1). — P. 3–49.
9. Golub, B., Sadler, E. Learning in Social Networks. — 2017. — URL: <http://dx.doi.org/10.2139/ssrn.2919146>.
10. Young, J.G., Cantwell, G.T., Newman, M.E.J. Robust Bayesian Inference of Network Structure from Unreliable Data. — arXiv preprint arXiv:2008.03334. — 2020.
11. Lovato, J., Allard, A., Harp, R., Hébert-Dufresne, L. Distributed Consent and Its Impact on Privacy and Observability in Social Networks. — arXiv preprint arXiv:2006.16140. — 2020.
12. Perra, N., Rocha, L.E.C. Modelling Opinion Dynamics in the Age of Algorithmic Personalisation // Scientific Reports. — 2019. — Vol. 9, no. 1. — P. 1–11.
13. Cheng, J., Adamic, L., Dow, P.A., et al. Can Cascades Be Predicted? // Proceedings of the 23rd International Conference on World Wide Web. — 2014. — P. 925–936.
14. Gentzkow, M., Shapiro, J.M. Ideological Segregation Online and Offline // The Quarterly Journal of Economics. — 2011. — Vol. 126, no. 4. — P. 1799–1839.
15. Garimella, K., Morales, G.D.F., Gionis, A., Mathioudakis, M. Quantifying Controversy on Social Media // ACM Transactions on Social Computing. — 2018. — Vol. 1, no. 1. — P. 1–27.
16. Garimella, K., Morales, G.D.F., Gionis, A., Mathioudakis, M. Political Discourse on Social Media: Echo Chambers, Gatekeepers, and the Price of Bipartisanship // ArXiv180101665 Cs. — 2018.
17. Kumar, S., Hamilton, W.L., Leskovec, J., Jurafsky, D. Community Interaction and Conflict on the Web // Proceedings of the 2018 World Wide Web Conference. — 2018. — P. 933–943.
18. Cota, W., Ferreira, S.C., Pastor-Satorras, R., Starnini, M. Quantifying Echo Chamber Effects in Information Spreading over Political Communication Networks // EPJ Data Science. — 2019. — Vol. 8, no. 1. — P. 35.
19. Jasny, L., Waggle, J., Fisher, D.R. An Empirical Examination of Echo Chambers in US Climate Policy Networks // Nature Climate Change. — 2015. — Vol. 5, no. 8. — P. 782–786.
20. Del Vicario, M., Vivaldo, G., Bessi, A., et al. Echo Chambers: Emotional Contagion and Group Polarization on Facebook // Scientific Reports. — 2016. — Vol. 6. — P. 37825.
21. Bakshy, E., Messing, S., Adamic, L.A. Exposure to Ideologically Diverse News and Opinion on Facebook // Science. — 2015. — Vol. 348, no. 6239. — P. 1130–1132.
22. Flaxman, S., Goel, S., Rao, J.M. Filter Bubbles, Echo Chambers, and Online News Consumption // Public Opinion Quarterly. — 2016. — Vol. 80, no. S1. — P. 298–320.
23. Page, L., Brin, S., Motwani, R., Winograd, T. The PageRank Citation Ranking: Bringing Order to the Web. — Stanford InfoLab. — 1999.
24. Karypis, G. METIS: Unstructured Graph Partitioning and Sparse Matrix Ordering System // Technical Report. — 1997.
25. Rossi, R.A., Jin, D., Kim, S., et al. On Proximity and Structural Role-Based Embeddings in Networks: Misconceptions, Techniques, and Applications // ACM Transactions on Knowledge Discovery from Data (TKDD). — 2020. — Vol. 14, no. 5. — P. 1–37.
26. Chattopadhyay, S., Ganguly, D. Community Structure Aware Embedding of Nodes in a Network // arXiv preprint arXiv:2006.15313. — 2020.
27. Billings, J.C.W., Hu, M., Lerda, G., et al. Simplex2Vec Embeddings for Community Detection in Simplicial Complexes // arXiv preprint arXiv:1906.09068. — 2019.
28. Rossi, R.A., Jin, D., Kim, S., et al. From Community to Role-Based Graph Embeddings // arXiv preprint arXiv:1908.08572. — 2019.
29. Zhou, X., Zafarani, R. A Survey of Fake News: Fundamental Theories, Detection Methods, and Opportunities // arXiv preprint arXiv:1812.00315. — 2018.
30. Ma, J., Gao, W., Wong, K.F. Detect Rumors in Microblog Posts Using Propagation Structure via Kernel Learning. — Association for Computational Linguistics. — 2017.
31. Wu, K., Yang, S., Zhu, K.Q. False Rumors Detection on Sina Weibo by Propagation Structures // 2015 IEEE 31st International Conference on Data Engineering. — IEEE, 2015. — P. 651–662.

Статья представлена к публикации членом редколлегии чл.-корр. РАН Д.А. Новиковым.

Поступила в редакцию 26.08.2020, после доработки 09.11.2020.  
Принята к публикации 24.11.2020.

**Бойко Лилия Михайловна** — мл. науч. сотрудник,  
✉ boiko.lilia@gmail.com,

**Губанов Дмитрий Алексеевич** — канд. техн. наук,  
✉ dmitry.a.g@gmail.com,

**Петров Илья Владимирович** — аспирант,  
✉ zyxzy@protonmail.ch,

Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН,  
г. Москва.

## INFORMATION COMMUNITIES IN SOCIAL NETWORKS. PART III: Applied Aspects of Detection and Analysis

L.M. Boiko<sup>1</sup>, D.A. Gubanov<sup>2</sup>, and I.V. Petrov<sup>3</sup>

Trapeznikov Institute of Control Sciences, Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia

<sup>1</sup>✉ boiko.lilia@gmail.com, <sup>2</sup>✉ dmitry.a.g@gmail.com, <sup>3</sup>✉ zyxzy@protonmail.ch

**Abstract.** This paper overviews the empirical studies of the formation and detection of information communities in social networks. In parts I and II of the survey, we outlined the concept of an information community and considered the relevant mathematical models describing the formation of private beliefs. Model identification, data gathering, and data analysis become highlighted areas of current research due to the uncertainty about social learning mechanisms and networked interaction structure. To solve the identification problem, researchers carry out behavioral experiments and field investigations. In practice, researchers analyze communities on available real-world data, applying methods based on the structural properties of the network of information interactions between agents, the individual characteristics of agents, and a combination of structural and individual characteristics. Part III of the survey presents studies on identifying learning models and discusses some practical aspects of analyzing information communities in social networks.

**Keywords:** social networks, information community, formation of information communities, belief formation, identification of information communities.

**Funding:** This research was supported by the Russian Foundation for Basic Research, projects nos. 19-17-50225, 20-07-00190 (Gubanov D.A.), and 20-31-90133 (Petrov I.V.).



*Новая книга*

**Сидельников Ю.В. Технология создания новаций: теоретические и прикладные аспекты: монография** / Ю.В. Сидельников; Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова [и др.], Минобрнауки РФ. — Москва: ИПУ РАН, 2021. — 244 с. — ISBN 978-5-91450-253-6. — Текст: непосредственный.

В научном издании рассмотрена гипероболочка технологии, позволяющая повышать эффективность получения новых знаний от экспертов. Можно ли создать технологию создания новых знаний с помощью экспертов, которая позволит решать любые задачи? Вряд ли. Но можно ли создать некую «размытую» технологию, как гипероболочку, которая в процессе как постановки задачи, так и в ходе подстройки самой технологии, будет адаптироваться специалистами на каждом этапе под нужный вид, тип и класс задач, и тем самым способствовать их решению? Не исключено, что это возможно. Важно подчеркнуть, что ни одна технология или креативный метод не сможет гарантированно привести к новации. Создав предлагаемую здесь гипероболочку технологии, мы сможем организовать процесс создания «подсказок» или новых идей, которые преобразовывались бы в конструктивные приемы решения научной задачи создания новаций, что в конечном итоге повысило бы эффективность мыслительных процессов исследователей с учетом их индивидуального опыта, знаний, личных склонностей и взглядов.

В рамках монографии анализируется сам процесс создания нового с помощью экспертов. Для этой цели выделяем важнейшие процессы рассматриваемой технологии.

- Постановка задачи ЛППР и (или) специальной группой и ее корректировка.
- Генерация идей группой людей или отдельным исследователем.
- Анализ идей группой людей или отдельным исследователем.
- Принятие группового решения и (или) ЛППР.

*Рецензенты: д-р экон. наук, проф. А.И. Агеев, д-р техн. наук, проф. В.Н. Бурков, д-р геогр. наук, проф. В.Б. Коробов; д-р экон. наук, проф. Р.М. Нижегородцев.*

# ПОСТРОЕНИЕ СТЕПЕННО-ПОКАЗАТЕЛЬНЫХ И ЛИНЕЙНО-ЛОГАРИФМИЧЕСКИХ РЕГРЕССИОННЫХ МОДЕЛЕЙ

М.П. Базилевский

**Аннотация.** Часто при использовании нелинейных регрессионных моделей оценки полученной зависимости затруднительно или вовсе невозможно интерпретировать. С целью создания таких нелинейных спецификаций регрессий, в которых любому оцененному параметру, за исключением свободного члена, всегда может быть дана какая-либо содержательная интерпретация, разработаны мультипликативная степенно-показательная регрессия, представляющая собой обобщение производственной функции Кобба — Дугласа, и аддитивная линейно-логарифмическая регрессия. Для каждой из них сформулированы три стратегии построения и подробно рассмотрены вопросы интерпретации их оценок. Стратегии построения предложенных моделей с помощью метода наименьших модулей формализованы в виде задач линейного и частично-булевого линейного программирования. Для демонстрации разработанного в настоящей работе математического аппарата решена задача моделирования железнодорожных грузоперевозок в Иркутской области.

**Ключевые слова:** регрессионная модель, интерпретация, мультипликативная степенно-показательная регрессия, линейно-логарифмическая регрессия, отбор «информативных» регрессоров, метод наименьших модулей, железнодорожные грузоперевозки.

## ВВЕДЕНИЕ

Регрессионный анализ представляет собой признанный во всем мире инструмент построения математических моделей статистического типа [1, 2]. Одним из первых и, возможно, самым важным этапом построения регрессионной модели является ее спецификация, т. е. выбор состава переменных и математической формы связи между ними. К настоящему времени разработано значительное количество таких спецификаций, большинство из которых можно найти в работах [3–6]. Самой простой спецификацией является модель множественной линейной регрессии:

$$y_i = \alpha_0 + \sum_{j=1}^l \alpha_j x_{ij} + \varepsilon_i, \quad i = \overline{1, n}, \quad (1)$$

где  $y_i, i = \overline{1, n}$ , — наблюдаемые значения объясняемой (выходной) переменной  $y$ ;  $x_{ij}, i = \overline{1, n}$ ,

$j = \overline{1, l}$ , — наблюдаемые значения объясняющих (входных) переменных  $x_1, x_2, \dots, x_l$ ;  $\varepsilon_i, i = \overline{1, n}$ , — ошибки аппроксимации;  $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_l$  — неизвестные параметры.

Линейная регрессия (1) легко оценивается, например, с помощью метода наименьших квадратов (МНК). Пусть ее оцененное уравнение имеет вид:

$$\tilde{y} = \tilde{\alpha}_0 + \sum_{j=1}^l \tilde{\alpha}_j x_j, \quad (2)$$

где  $\tilde{y}$  — рассчитываемое по модели значение объясняемой переменной;  $\tilde{\alpha}_0, \tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2, \dots, \tilde{\alpha}_l$  — оценки неизвестных параметров.

Коэффициент уравнения (2)  $\tilde{\alpha}_s$  при объясняющей переменной  $x_s$  интерпретируется так: если значение объясняющей переменной  $x_s$  изменится на одну единицу, то значение объясняемой переменной  $y$  изменится в среднем на  $\tilde{\alpha}_s$  единиц.

Отметим, что разработка новых спецификаций регрессионных моделей продолжается и по сей день. Так, в работе [7] предложена линейно-мультипликативная регрессия (ЛМР), в работе [8] — регрессия, противоположная по смыслу производственной функции Леонтьева, в работе [9] рассмотрен их симбиоз, а в работе [10] — индексная регрессия.

Для решения проблемы спецификации разработана технология организации «конкурса» регрессионных моделей, подробно описанная в монографии [6]. Суть конкурса состоит в формировании множества альтернативных вариантов регрессий и многокритериальном выборе лучшей из них. В работе [6] рассмотрен следующий алгоритм формирования альтернатив. Сначала набор исходных объясняющих переменных расширяется с помощью преобразований, в качестве которых могут выступать, например, элементарные функции  $\ln x$ ,  $e^x$ ,  $x^{-1}$ ,  $x^2$ ,  $x^3$ ,  $\sqrt{x}$  и т. д. Затем полным перебором комбинаций решается задача отбора  $m$  информативных регрессоров (ОИР) [11]. К сожалению, полученное таким образом уравнение регрессии может оказаться значительно нелинейным, что затруднит или вовсе сделает невозможной интерпретацию найденных оценок.

Целью настоящей работы является разработка таких нелинейных спецификаций, для которых априори было бы известно, что в результате проведения «конкурса» моделей любому коэффициенту полученной регрессии, за исключением свободного члена, всегда можно будет дать какую-либо содержательную интерпретацию.

### 1. МУЛЬТИПЛИКАТИВНАЯ СТЕПЕННО-ПОКАЗАТЕЛЬНАЯ РЕГРЕССИЯ

Однофакторная показательная регрессия [12, 13] имеет вид:

$$y_i = \alpha_0 e^{\alpha_1 x_i} \varepsilon_i, \quad i = \overline{1, n}. \quad (3)$$

Модель (3) является нелинейной по оцениваемым параметрам, но может быть линеаризована с помощью логарифмирования:

$$\ln y_i = c_0 + \alpha_1 x_i + u_i, \quad i = \overline{1, n}, \quad (4)$$

где  $c_0 = \ln \alpha_0$ ,  $u_i = \ln \varepsilon_i$ .

Линейную по параметрам модель (4) называют полулогарифмической (левой логарифмической, логарифмически-линейной) регрессией [13].

В работе [13] можно найти такую интерпретацию оцененного коэффициента  $\tilde{\alpha}_1$  моделей (3) и (4): если значение объясняющей переменной  $x$  из-

менится на одну единицу, то значение объясняемой переменной  $y$  изменится в среднем на  $100\tilde{\alpha}_1$  %.

Но, к сожалению, как отмечено в работе [13], такая интерпретация коэффициента  $\tilde{\alpha}_1$  моделей (3) и (4) правомерна лишь для малых  $\tilde{\alpha}_1$ .

Рассмотрим обобщение модели (3) — аддитивную многофакторную показательную регрессию:

$$y_i = a_0 + \sum_{j=1}^l a_j e^{\beta_j x_{ij}} + \varepsilon_i, \quad i = \overline{1, n}, \quad (5)$$

где  $\beta_j$ ,  $j = \overline{1, l}$  — неизвестные параметры.

Линеаризовать модель (5) не представляется возможным. Но даже если бы были найдены ее оценки, то затруднительно было бы дать им какую-либо содержательную интерпретацию. Поэтому рассмотрим мультипликативную многофакторную показательную регрессию:

$$y_i = \alpha_0 \prod_{j=1}^l e^{\alpha_j x_{ij}} \varepsilon_i, \quad i = \overline{1, n}. \quad (6)$$

Модель (6) линеаризуется с помощью логарифмирования и все ее коэффициенты можно интерпретировать так, как показано выше.

Регрессия (6) по своим свойствам очень напоминает производственную функцию (ПФ) Кобба — Дугласа (степенную регрессию):

$$y_i = \alpha_0 \prod_{j=1}^l x_{ij}^{\alpha_j} \varepsilon_i, \quad i = \overline{1, n}. \quad (7)$$

Модель (7) тоже линеаризуется с помощью логарифмирования, а оцененный коэффициент  $\tilde{\alpha}_s$  при объясняющей переменной  $x_s$  интерпретируется так: если значение объясняющей переменной  $x_s$  изменится на 1 %, то значение объясняемой переменной  $y$  изменится в среднем на  $\tilde{\alpha}_s$  %. Иными словами,  $\tilde{\alpha}_s$  представляет собой коэффициент эластичности переменной  $y$  по  $x_s$ .

Тогда составим мультипликативную конструкцию моделей (6) и (7):

$$y_i = \alpha_0 \prod_{j=1}^l x_{ij}^{\alpha_j} \prod_{j=1}^l e^{\beta_j x_{ij}} \varepsilon_i, \quad i = \overline{1, n}. \quad (8)$$

Будем называть выражение (8) мультипликативной степенно-показательной регрессией (МСПР).

Отметим, что симбиоз степенных и показательных регрессий вводится не впервые. Так, например, в статье [14] рассмотрена модификация ПФ Кобба — Дугласа, в которую труд и капитал входят в виде степенных функций, а научно-техническая информация — в виде показательной. Нельзя так-



же не упомянуть о ПФ Тинбергена [6], представляющей собой произведение степенной регрессии (7) и множителя  $e^{it}$ , учитывающего влияние «нейтрального» технического прогресса. Однако МСПР обобщает все эти известные модификации.

Прологарифмированная МСПР (8) имеет вид:

$$\ln y_i = c_0 + \sum_{j=1}^l \alpha_j \ln x_{ij} + \sum_{j=1}^l \beta_j x_{ij} + u_i, \quad i = \overline{1, n}. \quad (9)$$

Как видно, с оцениванием МСПР проблем нет. Но возникает проблема с интерпретацией ее коэффициентов, поскольку в модель (9) каждая объясняющая переменная входит и линейно, и логарифмически. Поэтому для того, чтобы иметь возможность интерпретировать любой коэффициент МСПР, при ее построении обязательно нужно проводить ОИР.

Для дальнейшего изложения введем булевы переменные:

$$\sigma_j^{ct} = \begin{cases} 1, & \text{если } x_j \text{ входит в МСПР} \\ & \text{в степенном виде,} \\ 0, & \text{если не входит,} \end{cases}$$

$$\sigma_j^{pok} = \begin{cases} 1, & \text{если } x_j \text{ входит в МСПР} \\ & \text{в показательном виде,} \\ 0, & \text{если не входит.} \end{cases}$$

Тогда можно ввести линейные ограничения на коэффициенты моделей (8) и (9):

$$-M\sigma_j^{ct} \leq \alpha_j \leq M\sigma_j^{ct}, \quad j = \overline{1, l}, \quad (10)$$

$$-M\sigma_j^{pok} \leq \beta_j \leq M\sigma_j^{pok}, \quad j = \overline{1, l}, \quad (11)$$

где  $M$  — большое положительное число.

Понятно, что если  $\sigma_j^{ct} = 1, \sigma_j^{pok} = 0, j = \overline{1, l}$ , то МСПР (8) трансформируется в степенную регрессию (7), а если  $\sigma_j^{ct} = 0, \sigma_j^{pok} = 1, j = \overline{1, l}$ , — в показательную (6).

Сформулируем три стратегии построения МСПР:

- Стратегия 1. Нет никаких ограничений на то, в каком виде переменные входят в модель. В этом случае нужно просто оценить линейную регрессию (9) с  $(2l + 1)$  параметром и перейти к МСПР (8). Оцененное уравнение можно использовать для прогнозирования, но интерпретировать коэффициенты невозможно.

- Стратегия 2. Каждая объясняющая переменная входит в модель либо в степенном виде, либо в показательном. На формальном языке эта стратегия имеет вид:

$$\sigma_j^{ct} + \sigma_j^{pok} = 1, \quad j = \overline{1, l}. \quad (12)$$

В этом случае нужно оценить  $2^l$  линейных регрессий (9) с  $(l + 1)$  параметром, выбрать из них наилучшую и перейти к МСПР (8). В полученном уравнении гарантированно можно дать интерпретацию любому коэффициенту (если его знак соответствует содержательному смыслу задачи), за исключением, быть может, свободного члена. Также полученное уравнение можно использовать для прогнозирования. Но если число переменных  $l$  велико, то возникает задача отбора заданного числа наиболее информативных из них.

- Стратегия 3. Каждая объясняющая переменная входит в модель либо в степенном виде, либо в показательном, а общее количество регрессоров равно  $m$ . На формальном языке эта стратегия имеет вид:

$$\sigma_j^{ct} + \sigma_j^{pok} \leq 1, \quad j = \overline{1, l}, \quad (13)$$

$$\sum_{j=1}^l (\sigma_j^{ct} + \sigma_j^{pok}) = m. \quad (14)$$

В этом случае нужно оценить  $C_l^m \cdot 2^m$  линейных регрессий (9) с  $(m + 1)$  параметром, выбрать из них наилучшую и перейти к МСПР (8). Полученное уравнение можно использовать как для прогнозирования, так и для интерпретации.

## 2. ЛИНЕЙНО-ЛОГАРИФМИЧЕСКАЯ РЕГРЕССИЯ

Однофакторная логарифмическая [12] (правая логарифмическая, линейно-логарифмическая) регрессия имеет вид:

$$y_i = \alpha_0 + \alpha_1 \ln x_i + \varepsilon_i, \quad i = \overline{1, n}. \quad (15)$$

На сайте [15] можно найти такую интерпретацию оцененного коэффициента  $\tilde{\alpha}_1$  модели (15): если значение объясняющей переменной  $x$  изменится на 1 %, то значение объясняемой переменной  $y$  изменится в среднем на  $\tilde{\alpha}_1/100$  единиц.

На наш взгляд, оценку  $\tilde{\alpha}_1$  логарифмической модели (15) можно интерпретировать и так: если значение объясняющей переменной  $x$  изменится в  $e$  раз, то значение объясняемой переменной  $y$  изменится в среднем на  $\tilde{\alpha}_1$  единиц.

Рассмотрим обобщение модели (15) — аддитивную многофакторную логарифмическую регрессию:

$$y_i = \alpha_0 + \sum_{j=1}^l \alpha_j \ln x_{ij} + \varepsilon_i, \quad i = \overline{1, n}. \quad (16)$$

Модель (16) является линейной по параметрам и любой ее оцененный коэффициент при логарифме объясняющей переменной можно интерпретировать вышеуказанными способами.

Стоит отметить, что нет смысла использовать в выражении (16) логарифмы с различными основаниями. Рассмотрим, например, двухфакторную модель

$$y_i = \alpha_0 + \alpha_1 \log_2 x_{i1} + \alpha_2 \log_3 x_{i2} + \varepsilon_i, \quad i = \overline{1, n}.$$

Используя известное свойство логарифма  $\log_a x = \frac{\log_c x}{\log_c a}$ , эту модель можно представить в виде:

$$y_i = \alpha_0 + \alpha_1 \frac{\ln x_{i1}}{\ln 2} + \alpha_2 \frac{\ln x_{i2}}{\ln 3} + \varepsilon_i, \quad i = \overline{1, n}.$$

Если в полученном выражении переобозначить параметры  $\frac{\alpha_1}{\ln 2}$  и  $\frac{\alpha_2}{\ln 3}$ , то получим частный случай регрессии (16).

Составим аддитивную конструкцию моделей (1) и (16):

$$y_i = \gamma_0 + \sum_{j=1}^l \gamma_j x_{ij} + \sum_{j=1}^l \delta_j \ln x_{ij} + \varepsilon_i, \quad i = \overline{1, n}. \quad (17)$$

Будем называть выражение (17) линейно-логарифмической регрессией (ЛЛР).

При попытке интерпретировать ЛЛР возникает та же проблема, что и при интерпретации МСПР, связанная с тем, что в уравнение (17) каждая объясняющая переменная входит и линейно, и логарифмически.

Введем булевы переменные:

$$\sigma_j^{\text{лин}} = \begin{cases} 1, & \text{если } x_j \text{ входит в ЛЛР в линейном виде,} \\ 0, & \text{если не входит,} \end{cases}$$

$$\sigma_j^{\text{лог}} = \begin{cases} 1, & \text{если } x_j \text{ входит в ЛЛР} \\ & \text{в логарифмическом виде,} \\ 0, & \text{если не входит.} \end{cases}$$

Тогда можно ввести линейные ограничения на коэффициенты модели (17):

$$-M\sigma_j^{\text{лин}} \leq \gamma_j \leq M\sigma_j^{\text{лин}}, \quad j = \overline{1, l}, \quad (18)$$

$$-M\sigma_j^{\text{лог}} \leq \delta_j \leq M\sigma_j^{\text{лог}}, \quad j = \overline{1, l}. \quad (19)$$

Очевидно, что если  $\sigma_j^{\text{лин}} = 1, \sigma_j^{\text{лог}} = 0, j = \overline{1, l}$ , то ЛЛР (17) трансформируется в линейную регрессию (1), а если  $\sigma_j^{\text{лин}} = 0, \sigma_j^{\text{лог}} = 1, j = \overline{1, l}$  — в логарифмическую (16).

По аналогии с МСПР, сформулируем три стратегии построения ЛЛР.

- Стратегия 1. Нет никаких ограничений на то, в каком виде переменные входят в модель. В этом случае нужно просто оценить линейную регрессию (17) с  $(2l + 1)$  параметром. Оцененное уравнение нельзя использовать для интерпретации, но можно использовать для прогнозирования.
- Стратегия 2. Каждая объясняющая переменная входит в модель либо в линейном виде, либо в логарифмическом. На формальном языке эта стратегия имеет вид:

$$\sigma_j^{\text{лин}} + \sigma_j^{\text{лог}} = 1, \quad j = \overline{1, l}. \quad (20)$$

В этом случае нужно оценить  $2^l$  линейных регрессий (17) с  $(l + 1)$  параметром и выбрать из них наилучшую. Ее можно использовать как для интерпретации, так и для прогнозирования.

- Стратегия 3. Каждая объясняющая переменная входит в модель либо в линейном виде, либо в логарифмическом, а общее количество регрессоров равно  $m$ . На формальном языке эта стратегия имеет вид:

$$\sigma_j^{\text{лин}} + \sigma_j^{\text{лог}} \leq 1, \quad j = \overline{1, l}, \quad (21)$$

$$\sum_{j=1}^l (\sigma_j^{\text{лин}} + \sigma_j^{\text{лог}}) = m. \quad (22)$$

В этом случае нужно оценить  $C_l^m \cdot 2^m$  линейных регрессий (17) с  $(m + 1)$  параметром и выбрать из них наилучшую.

### 3. ФОРМАЛИЗАЦИЯ ЗАДАЧИ ПОСТРОЕНИЯ МСПР И ЛЛР В ВИДЕ ЗАДАЧИ ЧАСТИЧНО-БУЛЕВОГО ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Аппарат математического программирования находит широкое применение в регрессионном анализе (см., например, работы [16—18]).

Пусть прологарифмированная МСПР (9) оценивается с помощью метода наименьших модулей (МНМ). Тогда, как показано в монографии [6],



МНМ-оценки этой регрессии могут быть найдены в результате решения задачи линейного программирования (ЛП):

$$\lambda_i^+ + \lambda_i^- \rightarrow \min, \quad (23)$$

$$v_i = c_0 + \sum_{j=1}^l \alpha_j z_{ij} + \sum_{j=1}^l \beta_j x_{ij} + \lambda_i^+ - \lambda_i^-, \quad (24)$$

$$i = \overline{1, n},$$

$$\lambda_i^+, \lambda_i^- \geq 0, \quad (25)$$

где  $v_i = \ln y_i$ ,  $z_{ij} = \ln x_{ij}$ ,

$$\lambda_i^+ = \begin{cases} v_i - c_0 - \sum_{j=1}^l \alpha_j z_{ij} - \sum_{j=1}^l \beta_j x_{ij}, \\ \text{если } v_i - c_0 - \sum_{j=1}^l \alpha_j z_{ij} - \sum_{j=1}^l \beta_j x_{ij} > 0, \\ 0, \text{ в противном случае,} \end{cases}$$

$$\lambda_i^- = \begin{cases} c_0 + \sum_{j=1}^l \alpha_j z_{ij} + \sum_{j=1}^l \beta_j x_{ij} - v_i, \\ \text{если } c_0 + \sum_{j=1}^l \alpha_j z_{ij} + \sum_{j=1}^l \beta_j x_{ij} - v_i > 0, \\ 0, \text{ в противном случае.} \end{cases}$$

Тогда в зависимости от выбранной стратегии построения МСПР необходимо решить такие задачи:

- для первой стратегии — задачу ЛП с целевой функцией (23) и с линейными ограничениями (24), (25);
- для второй стратегии — задачу частично-булевого линейного программирования (ЧБЛП) с целевой функцией (23) и с линейными ограничениями (24), (25), (10)—(12);
- для третьей стратегии — задачу ЧБЛП с целевой функцией (23) и с линейными ограничениями (24), (25), (10), (11), (13), (14).

Аналогично формализуется задача построения ЛЛР. При этом МНМ-оценки ЛЛР (17) могут быть найдены на основе решения задачи ЛП:

$$\theta_i^+ + \theta_i^- \rightarrow \min, \quad (26)$$

$$y_i = \gamma_0 + \sum_{j=1}^l \gamma_j x_{ij} + \sum_{j=1}^l \delta_j z_{ij} + \theta_i^+ - \theta_i^-, \quad (27)$$

$$i = \overline{1, n},$$

$$\theta_i^+, \theta_i^- \geq 0, \quad (28)$$

где  $z_{ij} = \ln x_{ij}$ ,

$$\theta_i^+ = \begin{cases} y_i - \gamma_0 - \sum_{j=1}^l \gamma_j x_{ij} - \sum_{j=1}^l \delta_j z_{ij}, \\ \text{если } y_i - \gamma_0 - \sum_{j=1}^l \gamma_j x_{ij} - \sum_{j=1}^l \delta_j z_{ij} > 0, \\ 0, \text{ в противном случае,} \end{cases}$$

$$\theta_i^- = \begin{cases} \gamma_0 + \sum_{j=1}^l \gamma_j x_{ij} + \sum_{j=1}^l \delta_j z_{ij} - y_i, \\ \text{если } \gamma_0 + \sum_{j=1}^l \gamma_j x_{ij} + \sum_{j=1}^l \delta_j z_{ij} - y_i > 0, \\ 0, \text{ в противном случае.} \end{cases}$$

Тогда в зависимости от выбранной стратегии построения ЛЛР необходимо решить такие задачи:

- для первой стратегии — задачу ЛП с целевой функцией (26) и с линейными ограничениями (27), (28);
- для второй стратегии — задачу ЧБЛП с целевой функцией (26) и с линейными ограничениями (27), (28), (18)—(20);
- для третьей стратегии — задачу ЧБЛП с целевой функцией (26) и с линейными ограничениями (27), (28), (18), (19), (21), (22).

#### 4. МОДЕЛИРОВАНИЕ ЖЕЛЕЗНОДОРОЖНЫХ ГРУЗОПЕРЕВОЗОК ИРКУТСКОЙ ОБЛАСТИ

Актуальной на сегодняшний день является задача моделирования объемов железнодорожных перевозок (см., например, работы [19, 20]). Для демонстрации предложенного в настоящей работе математического аппарата решалась задача моделирования железнодорожных грузоперевозок в Иркутской области. Для построения моделей на официальном сайте Федеральной службы государственной статистики были собраны годовые данные за период 2000—2018 гг. по показателям:

- отправление грузов железнодорожным транспортом общего пользования (млн т)  $y$ ;
- численность рабочей силы (тыс. чел.)  $x_3$ ;
- валовой региональный продукт (млн руб.)  $x_{14}$ ;
- число предприятий и организаций  $x_{18}$ ;
- объем промышленной продукции (млн руб.);
- производство электроэнергии (млрд кВт/ч)  $x_{22}$ ;
- среднегодовая номинальная начисленная заработная плата работников в области добычи полезных ископаемых (руб.)  $x_{23}$ ;



— среднегодовая номинальная начисленная заработная плата работников в области обрабатывающих производств (руб.)  $x_{24}$ ;

— продукция сельского хозяйства (млн руб.)  $x_{25}$ ;

— среднегодовая номинальная начисленная заработная плата работников сельского хозяйства, охоты и лесного хозяйства (руб.);

— число действующих строительных организаций;

— оборот розничной торговли (млн руб.)  $x_{31}$ .

Для построения МСПР и ЛЛР на языке `hansl` эконометрического пакета `Gretl` был разработан специальный скрипт.

Сначала по исходным данным осуществлялось построение МСПР по третьей стратегии. Задача решалась методом перебора, оценивание производилось с помощью МНК, число отбираемых регрессоров  $m$  задавалось равным 3. В результате перебора  $C_{11}^3 \cdot 2^3 = 1320$  альтернатив была выбрана наилучшая по величине коэффициента детерминации  $R^2$ . В прологарифмированном виде эта регрессия имеет вид

$$\ln \tilde{y} = -1,2502 + 8,431 \cdot 10^{-6} x_{23} - 3,388 \cdot 10^{-5} x_{25} + 0,5176 \ln x_{31}, \quad (29)$$

(2,972)                      (-6,098)                      (11,13)

а ее коэффициент детерминации  $R^2 = 0,9334$ . В уравнении (29) под коэффициентами при объясняющих переменных указаны значения  $t$ -критерия Стьюдента. С их помощью можно сделать вывод, что для уровня значимости  $\alpha = 0,05$  все коэффициенты значимы.

К сожалению, из-за эффекта мультиколлинеарности исказился знак коэффициента при переменной  $x_{25}$ , поэтому попытка интерпретации уравнения (29) приводит к абсурдному выводу: чтобы увеличить объемы железнодорожных перевозок, нужно снижать объемы продукции сельского хозяйства. Этот противоречивый результат указывает на то, что в процессе перебора моделей нужно организовывать проверку соответствия знаков коэффициентов уравнения регрессии содержательному смыслу факторов. Если хотя бы один коэффициент не соответствует смыслу, то такая модель исключается из дальнейшего рассмотрения. Эту известную рекомендацию можно найти в монографии [6]. Поэтому было принято решение перестроить МСПР. Группой экспертов было установлено, что все вышеперечисленные объясняющие переменные должны влиять на  $y$  со знаком «+». После корректировки разработанного скрипта и запуска его с теми же настройками оказалось, что из 1320 альтернатив только 64 удовлетворяют содержательно-

му смыслу задачи. Лучшей из них в прологарифмированном виде является модель

$$\ln \tilde{y} = -6,4889 + 0,00127 x_3 + 0,533 \ln x_{18} + 0,754 \ln x_{22}, \quad (30)$$

(2,812)                      (3,555)                      (3,447)

в которой значимы все коэффициенты при объясняющих переменных, а критерий  $R^2 = 0,7437$ .

Уравнению (30) соответствует МСПР вида

$$\tilde{y} = 0,00152 \cdot e^{0,00127 x_3} \cdot x_{18}^{0,533} \cdot x_{22}^{0,754}. \quad (31)$$

Сумма квадратов остатков для модели (31) составляет 229,598.

Интерпретация модели (31): с увеличением численности рабочей силы  $x_3$  на 1 тыс. чел. перевозки грузов  $y$  возрастают в среднем на 0,127 %; с увеличением числа предприятий и организаций  $x_{18}$  на 1 % перевозки грузов  $y$  возрастают в среднем на 0,533 %; с увеличением производства электроэнергии  $x_{22}$  на 1 % перевозки грузов  $y$  возрастают в среднем на 0,754 %.

Затем по исходным данным осуществлялось построение ЛЛР по третьей стратегии. Настройки задавались те же, что и для МСПР. В результате перебора из 1320 альтернатив была выбрана модель

$$\tilde{y} = -267,173 + 0,000639 x_{24} - 0,00193 x_{25} + 29,124 \ln x_{14}, \quad (32)$$

(2,55)                      (-6,185)                      (12,87)

в которой все коэффициенты при регрессорах значимы, а критерий  $R^2 = 0,9328$ .

В модели (32) коэффициент при переменной  $x_{25}$  снова не удовлетворяет содержательному смыслу задачи. Поэтому эта модель была перестроена с учетом контроля соответствия знаков коэффициентов. Оказалось, что из 1320 альтернатив только 64 удовлетворяют смыслу задачи. Лучшей из них оказалась регрессия

$$\tilde{y} = -552,38 + 0,0746 x_3 + 31,1352 \ln x_{18} + 42,7013 \ln x_{22}, \quad (33)$$

(2,764)                      (3,489)                      (3,282)

в которой все коэффициенты при объясняющих переменных значимы, критерий  $R^2 = 0,7312$ , а сумма квадратов остатков составляет 233,236.

Как видно, по величине суммы квадратов остатков ЛЛР (33) оказалась несколько хуже, чем МСПР (31). При этом ЛЛР (33) имеет в своем составе те же регрессоры, что и МСПР (31).

Интерпретация модели (33): с увеличением численности рабочей силы  $x_3$  на 1 тыс. чел. перевозки грузов  $y$  возрастают в среднем на 0,0746 млн т; с



увеличением числа предприятий и организаций  $x_{18}$  на 1 % перевозки грузов у возрастают в среднем на 0,3113 млн т; с увеличением производства электроэнергии  $x_{22}$  на 1 % перевозки грузов у возрастают в среднем на 0,427 млн т. Также можно сделать вывод: если число предприятий и организаций  $x_{18}$  увеличится в  $e$  раз, то перевозки грузов у вырастут в среднем на 31,1352 млн т; если производство электроэнергии  $x_{22}$  увеличится в  $e$  раз, то перевозки грузов у вырастут в среднем на 42,7013 млн т.

Таким образом, если целью исследователя является получение только прогнозных значений объемов перевозок грузов  $u$ , то для этого лучше воспользоваться моделями (29) и (32). А если исследователя интересуют еще и интерпретация влияния факторов на  $u$ , то нужно использовать примерно одинаковые по качеству, но разные по смыслу МСПР (31) и ЛЛР (33).

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе введены две новые спецификации регрессионных моделей — мультипликативная степенно-показательная регрессия (МСПР) и линейно-логарифмическая регрессия (ЛЛР). Рассмотрены вопросы их оценивания и интерпретации. Главным достоинством предложенных спецификаций является то, что в результате их построения каждому коэффициенту регрессии, за исключением свободного члена, гарантированно можно дать некоторую содержательную интерпретацию. Спецификации МСПР и ЛЛР позволяют выявлять и анализировать новые нелинейные закономерности функционирования исследуемых процессов или объектов, поэтому в целом повышают ценность регрессионного анализа.

### ЛИТЕРАТУРА

1. *Pardoe, I.* Applied Regression Modeling. — Wiley, 2020. — 336 p.
2. *Westfall, P.H., Arias, A.L.* Understanding Regression Analysis: a Conditional Distribution Approach. — Chapman and Hall/CRC, 2020. — 514 p.
3. *Клейнер Г.Б.* Производственные функции: теория, методы, применение. — М.: Финансы и статистика, 1986. — 239 с. [*Kleiner, G.B.* Production Functions: Theory, Methods, Application. — Moscow: Finance and Statistics, 1986. — 239 s. (In Russian)]
4. *Клейнер Г.Б.* Экономика. Моделирование. Математика. Избранные труды. — М.: ЦЭМИ РАН, 2016. — 856 с. [*Kleiner, G.B.* Economy. Modeling. Maths. Selected Works. — Moscow: TsEMI RAN, 2016. — 856 s. (In Russian)]
5. *Хацкевич Г.А., Проневич А.Ф., Чайковский М.В.* Двухфакторные производственные функции с заданной предельной нормой замещения // Экономическая наука сегодня. — 2019. — № 10. — С. 169—181. [*Khatskevich, G.A., Pronевич, A.F., Chaikovskii, M.V.* Dvukhfaktornye proizvodstvennyye funktsii s zadannoi predel'noi normoi zameshcheniya // Ekonomicheskaya nauka segodnya. — 2019. — No. 10. — P. 169—181. (In Russian)]
6. *Носков С.И.* Технология моделирования объектов с нестабильным функционированием и неопределенностью в данных. — Иркутск: Облформпечать, 1996. — 320 с. [*Noskov, S.I.* Tekhnologiya modelirovaniya ob'ektov s nestabil'nym funktsionirovaniem i neopredelennost'yu v dannykh. — Irkutsk: Oblinformpechat', 1996. — 320 s. (In Russian)]
7. *Базилевский М.П., Носков С.И.* Формализация задачи построения линейно-мультипликативной регрессии в виде задачи частично-булевого линейного программирования // Современные технологии. Системный анализ. Моделирование. — 2017. — № 3 (55). — С. 101—105. [*Bazilevskii, M.P., Noskov, S.I.* Formalizatsiya zadachi postroeniya lineino-mul'tiplikativnoi regressii v vide zadachi chastichno-bulevogo lineinogo programmirovaniya // Sovremennye tekhnologii. Sistemyi analiz. Modelirovanie. — 2017. — Vol. 55, No. 3. — P. 101—105. (In Russian)]
8. *Иванова Н.К., Лебедева С.А., Носков С.И.* Идентификация параметров некоторых негладких регрессий // Информационные технологии и проблемы математического моделирования сложных систем. — 2016. — № 17. — С. 107—110. [*Ivanova, N.K., Lebedeva, S.A., Noskov, S.I.* Identifikatsiya parametrov nekotorykh negladkikh regressii // Informatsionnye tekhnologii i problemy matematicheskogo modelirovaniya slozhnykh sistem. — 2016. — No. 17. — P. 107—110. (In Russian)]
9. *Носков С.И., Хоняков А.А.* Программный комплекс построения некоторых типов кусочно-линейных регрессий // Информационные технологии и математическое моделирование в управлении сложными системами. — 2019. — № 3 (4). — С. 47—55. [*Noskov, S.I., Khonyakov, A.A.* Programnyi kompleks postroeniya nekotorykh tipov kushchno-lineinykh regressii // Informatsionnye tekhnologii i matematicheskoe modelirovanie v upravlenii slozhnyimi sistemami. — 2019. — Vol. 4, No. 3. — P. 47—55. (In Russian)]
10. *Базилевский М.П., Носков С.И.* Оценка индексных моделей регрессии с помощью метода наименьших модулей // Вестник Российского нового университета. Серия: Сложные системы: модели, анализ и управление. — 2020. — № 1. — С. 17—23. [*Bazilevskii, M.P., Noskov, S.I.* Otsenivanie indeksnykh modelei regressii s pomoshch'yu metoda naimen'shiikh modulei // Vestnik Rossiiskogo novogo universiteta. Seriya: Slozhnye sistemy: modeli, analiz i upravlenie. — 2020. — No. 1. — P. 17—23. (In Russian)]
11. *Базилевский М.П., Вергасов А.С., Носков С.И.* Групповой отбор информативных переменных в регрессионных моделях // Южно-Сибирский научный вестник. — 2019. — № 4-1 (28). — С. 36—39. [*Bazilevskii, M.P., Vergasov, A.S., Noskov, S.I.* Gruppovoi otbor informativnykh peremennykh v regressionnykh modelyakh // Yuzhno-Sibirskii nauchnyi vestnik. — 2019. — Vol. 28, No. 4-1. — P. 36—39. (In Russian)]
12. *Елисеева И.И., Курьшева С.В., Костеева Т.В.* и др. Эконометрика. — М.: Финансы и статистика, 2007. — 576 с. [*Eliseeva, I.I., Kuryshcheva, S.V., Kosteeva, T.V., et al.* Econometrics. — Moscow: Finance and statistics, 2007. — 576 p. (In Russian)]
13. *Доуэрти К.* Введение в эконометрику. — М.: ИНФРА-М, 2009. — 465 с. [*Dougherty, K.* Introduction to Econometrics. — Moscow: INFRA-M, 2009. — 465 p. (In Russian)]
14. *Горидько Н.П., Нижегородцев Р.М.* Построение лаговых регрессионных моделей типа Кобба-Дугласа на долгосрочных временных горизонтах // Проблемы управления. — 2012. — № 3. — С. 55—63. [*Goridko, N.P., Nizhegorodtsev, R.M.* Elaborating of Long-Run Lag Regression Models of Cobb-Douglas Type // Control Sciences. — 2012. — No. 3. — P. 55—63. (In Russian)]
15. URL: <https://ru.coursera.org/lecture/ekonometrika/3-1-3-inti-erprietiatsiia-koeffitsiienta-pri-logharifmirovanii-DdROH>.

16. Park, Y.W., Klabjan, Y.W. Subset selection for multiple linear regression via optimization // Journal of Global Optimization. — 2020. — Vol. 77. — P. 543—574.
  17. Chung, S., Park, Y.W., Cheong, T. A mathematical programming approach for integrated multiple linear regression subset selection and validation // Pattern Recognition. — 2020. — Vol. 108. — Article no. 107565.
  18. Bertsimas, D., Li, M.L. Scalable holistic linear regression // Operations Research Letters. — 2020. — Vol. 48, no. 3. — P. 203—208.
  19. Базилевский М.П., Врублевский И.П., Носков С.И. и др. Среднесрочное прогнозирование эксплуатационных показателей функционирования Красноярской железной дороги // Фундаментальные исследования. — 2016. — № 10-3. — С. 471—476. [Bazilevskii, M.P., Vrublevskii, I.P., Noskov, S.I., et al. Srednesrochnoe prognozirovanie ekspluatatsionnykh pokazatelei funktsionirovaniya Krasnoyarskoi zheleznoi dorogi // Fundamental'nye issledovaniya. — 2016. — No. 10-3. — P. 471—476. (In Russian)]
  20. Носков С.И., Врублевский И.П. Регрессионная модель динамики эксплуатационных показателей функционирования железнодорожного транспорта // Современные технологии. Системный анализ. Моделирование. — 2016. — № 2 (50). — С. 192—197. [Noskov, S.I., Vrublevskii, I.P. Regressionnaya model' dinamiki ekspluatatsionnykh pokazatelei funktsionirovaniya zheleznodorozhnogo transporta // Sovremennye tekhnologii. Sistemnyi analiz. Modelirovanie. — 2016. — Vol. 50, no. 2. — P. 192—197. (In Russian)]
- Статья представлена к публикации членом редколлегии Н.Н. Бахтадзе.
- Поступила в редакцию 11.01.2021, после доработки 04.03.2020.  
Принята к публикации 10.03.2020.
- Базилевский Михаил Павлович** — канд. техн. наук, Иркутский государственный университет путей сообщения, ✉ mik2178@yandex.ru.

## CONSTRUCTING POWER-EXPONENTIAL AND LINEAR-LOGARITHMIC REGRESSION MODELS

M.P. Bazilevskiy

Irkutsk State Transport University, Irkutsk, Russia

✉ mik2178@yandex.ru

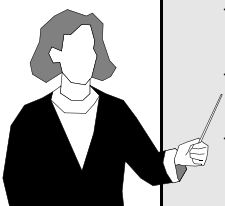
**Abstract.** When using nonlinear regression models, the estimates of the resulting dependence are often difficult or even impossible to interpret. This paper develops nonlinear regression specifications in which any estimated parameter, except the free term, can always be given some practical interpretation. A multiplicative power-exponential regression generalizing the Cobb—Douglas production function and an additive linear-logarithmic regression are constructed. Three construction strategies are formulated for each of them, and the issues of interpreting their estimates are considered in detail. The construction strategies based on the least absolute deviations method are formalized as linear and partially Boolean linear programming problems. The mathematical apparatus developed in this paper is illustrated by modeling rail freight traffic in Irkutsk oblast.

**Keywords:** regression model, interpretation, multiplicative power-exponential regression, linear-logarithmic regression, feature selection, least absolute deviations, rail freight traffic.



### Читайте в ближайших номерах

- ✓ Широкий А.А., Калашников А.О. Применение методов естественных вычислений для управления рисками сложных систем
- ✓ Краснов Д.В., Антипов А.С. Синтез двухконтурного наблюдателя в задаче управления однозвенным манипулятором в условиях неопределенности
- ✓ Барабанова Е.А., Вытовтов К.А., Подлазов В.С. Неблокируемые отказоустойчивые двухкаскадные дуальные фотонные коммутаторы



# СИНТЕЗ МНОГОМЕРНЫХ СЛЕДЯЩИХ СИСТЕМ ПО ИНЖЕНЕРНЫМ КРИТЕРИЯМ КАЧЕСТВА НА ОСНОВЕ $H_\infty$ -ПОДХОДА

В.Н. Честнов, Д.В. Шатов

**Аннотация.** Для линейных многомерных объектов построен алгоритм синтеза регуляторов по измеряемому выходу, гарантирующий заданные либо достижимые инженерные показатели качества. Объект управления подвержен действию ограниченных внешних возмущений (из класса полигармонических функций с бесконечным числом гармоник и ограниченной суммой амплитуд гармоник по каждой компоненте возмущения), что приводит к появлению дополнительных ошибок слежения по регулируемым переменным. Поставлена задача синтеза многомерного регулятора по выходу, обеспечивающего заданные или достижимые ошибки слежения, время регулирования, характеризуемое заданной или достижимой степенью устойчивости замкнутой системы, а также совокупность показателей колебательности  $M_i$  для  $i$ -го замкнутого контура, связывающего  $i$ -е задающее воздействие с  $i$ -регулируемой переменной. При этом регулятор должен обеспечивать выполнение условия  $M_i \leq \gamma$ , где  $\gamma$  — заданное или минимизируемое число. Показано, что аппарат  $H_\infty$ -теории весьма удобен для решения подобного рода задач. Приводится пример синтеза при управлении взаимосвязанным электроприводом.

**Ключевые слова:** линейные многомерные системы, ограниченные внешние возмущения, ошибки слежения, время регулирования, степень устойчивости, показатель колебательности  $i$ -го контура.

## ВВЕДЕНИЕ

Классическая теория автоматического управления минимально-фазовыми нейтральными объектами с одним входом и одним выходом показала высокую практическую эффективность благодаря физической ясности инженерных критериев качества, положенных в ее основу: ошибки слежения, времени регулирования и показателя колебательности [1].

Для многомерных объектов подобный подход к синтезу регуляторов еще не сформировался, хотя очевидным первым шагом является решение задачи автономного управления [2–4], восходящей к И.Н. Вознесенскому [5].

Недавние работы авторов [6, 7] были посвящены одномерным объектам (как минимально-фазовым, так и неминимально-фазовым, а также устойчивым и неустойчивым), регуляторы которых строились на основе  $H_\infty$ -техники. Настоящая работа посвящена многомерным объектам и может рассматриваться как развитие подхода [8] на слу-

чай следящих систем, когда вместо радиуса запасов устойчивости для оценки робастности замкнутой системы используется показатель колебательности, более естественный и общепринятый в теории и практике следящих систем.

Уточним здесь, что под показателем колебательности многомерной системы мы будем понимать совокупность показателей колебательности  $M_i$  для  $i$ -го замкнутого контура, связывающего  $i$ -е задающее воздействие  $g_i$  с  $i$ -й регулируемой переменной  $z_i$ . При этом задачей регулятора является обеспечение выполнения условия  $M_i \leq \gamma$ , где  $\gamma$  — заданное или минимизируемое число. В работе показано, что для решения подобного рода задач аппарат  $H_\infty$ -теории является весьма удобным.

На практике автоматические системы подвержены действию ограниченных внешних возмущений, которые приводят к появлению дополнительных ошибок слежения. В настоящей работе рассматриваются полигармонические внешние возмущения с неизвестными амплитудами (с ограничением их суммы по каждой компоненте возмущения) и не-

известными частотами, число которых неограниченно. Регулятор должен обеспечивать заданные (или достижимые) ошибки слежения в присутствии таких возмущений. Эти возмущения покрывают практически важный класс возмущений, которые непрерывны и имеют кусочно-непрерывные производные по времени [8, 9].

Другой инженерный показатель качества, рассматриваемый при синтезе, — это время регулирования, характеризующее быстродействие замкнутой системы, при ненулевых начальных условиях и/или при ступенчатом изменении задающих или возмущающих воздействий. В настоящей работе время регулирования косвенно учитывается путем обеспечения заданной степени устойчивости замкнутой системы. Хотя этот показатель весьма приближенно оценивает скорость протекания переходных процессов (особенно в случае близких корней характеристического полинома замкнутой системы), тем не менее он хорошо зарекомендовал себя в практических приложениях при начальной оценке времени регулирования. Кроме того, как демонстрируется в работах [6, 10], чрезмерное увеличение степени устойчивости (более минимального расстояния нуля объекта до мнимой оси), даже в минимально-фазовом случае с регулятором по выходу приводит к катастрофическому уменьшению радиуса запасов устойчивости (росту показателя колебательности) и запасов устойчивости по фазе и модулю, что неприемлемо на практике в силу больших выбросов (перерегулирования) в переходной характеристике замкнутой системы. Это аналог эффекта всплеска [11] для регуляторов по выходу. Поэтому в алгоритме синтеза регулятора, как и в работе [8], предусмотрено постепенное увеличение степени устойчивости.

В мировой научной литературе, насколько известно авторам, приоритет в постановке (в рамках теории LQ и  $H_\infty$ -оптимизации) и решении отдельных задач этой весьма непростой проблемы принадлежит А.Г. Александрову [12, 13] и его ученикам. Подробный обзор работ этого направления приведен в статье [8]. Что касается работ западных авторов, то с появлением  $H_\infty$ -теории в начале 80-х годов прошлого века вопросам запасов устойчивости уделялось в них большое внимание [10, 14]. Вместе с тем, вопросы точности, быстродействия и запасов устойчивости, объединенные в едином методе синтеза многомерных следящих систем по измеряемому выходу, не получили должного освещения.

Отметим здесь некоторые, на наш взгляд, важные работы, посвященные отдельным аспектам рассматриваемой проблемы. Так, в работе [15] рассматриваются вопросы негладкой оптимизации по  $H_\infty$ -критерию, что позволило решать задачу синтеза регуляторов заданной структуры и порядка (например, ПИД-регуляторов) [16]. Это тесно связа-

но с тем, что регуляторы, построенные на основе современных техник синтеза, имеют высокий порядок, что приводит к их «хрупкости» (потере устойчивости при малых отклонениях параметров регулятора от расчетных) [17], что обычно выражается в малых запасах устойчивости по фазе и модулю в контурах регулирования. Укажем также на нерешенную и поныне проблему выбора весовых функций в задаче синтеза многомерных  $H_\infty$ -регуляторов, что и отмечается в работе [18] (для скалярных систем некоторые правила имеются в монографии [14]). В настоящей же работе дано строгое математическое правило выбора весового коэффициента по заданной точности слежения.

Подчеркнем принципиальную новизну подхода настоящей работы по сравнению с работой [8] (помимо другой меры робастности замкнутой системы, о чем сказано ранее) к вопросу точности. Здесь, в отличие от работы [8], не вводится новый вектор взвешенных регулируемых переменных, а взвешивается вектор внешних возмущений, что позволяет существенно уменьшить степень достаточности получаемого результата.

Показано, что поставленная задача обеспечения вышеперечисленных инженерных показателей качества сводится к специальным образом сконструированной проблеме  $H_\infty$ -оптимизации [19, 20]. Численное решение такой вырожденной задачи удобно искать на основе метода линейных матричных неравенств (Linear Matrix Inequalities, LMI) [21, 22], например, в MATLAB — пакете Robust Control Toolbox [23]. Приводится пример синтеза при управлении взаимосвязанным электроприводом [8].

## 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим объект управления, описываемый уравнениями состояния

$$\dot{x} = Ax + B_1 f + B_2 u, \quad z = Cx, \quad (1)$$

где  $x \in R^n$  — вектор состояния объекта;  $u \in R^m$  — вектор управлений;  $z \in R^{m_1}$  — вектор регулируемых переменных;  $f \in R^{m_2}$  — вектор внешних возмущений, недоступный для измерения.

Пусть объект (1) замкнут стабилизирующим регулятором по измеряемому выходу

$$\dot{x}_c = A_c x_c + B_c \varepsilon, \quad u = C_c x_c + D_c \varepsilon, \quad \varepsilon = g - z, \quad (2)$$

где  $x_c \in R^{n_c}$  — вектор состояния регулятора ( $n_c \leq n$ ),  $g \in R^{m_1}$  — вектор задающих воздействий,  $\varepsilon \in R^{m_1}$  — вектор ошибок слежения, доступный измерению,  $A_c, B_c, C_c, D_c$  — матрицы чисел.



Компоненты вектора внешних возмущений — ограниченные функции

$$f_i(t) = \sum_{k=1}^{\infty} f_{ik} \sin(\omega_k t + \psi_{ik}), \quad i = \overline{1, m_3}, \quad (3)$$

где амплитуды  $f_{ik} \geq 0$ , начальные фазы  $\psi_{ik}$ , а также частоты  $\omega_k$  ( $i = \overline{1, m_3}, k = \overline{1, \infty}$ ) неизвестны, а число гармоник неограниченно.

Предполагается, что внешнее возмущение ограничено в следующем смысле:

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_{ik} \leq f_i^*, \quad i = \overline{1, m_3}, \quad (4)$$

где  $f_i^* > 0, i = \overline{1, m_3}$  — заданные числа.

Условия (3), (4) означают, что имеют место неравенства  $|f_i(t)| \leq f_i^*, (i = \overline{1, m_3})$ . Модель внешнего возмущения (3), (4) покрывает широкий практически важный класс возмущений, которые непрерывны и имеют кусочно-непрерывные производные по времени [8] и, следовательно, разложимы в абсолютно сходящийся ряд Фурье [9], который является частным случаем (3) с кратными частотами. Кроме того, ряд (3) необязательно периодическая функция времени. Например, если все частоты в (3) взять нулевыми, а начальные фазы равными  $(2k + 1)\pi/2$ , где  $k = \overline{0, \infty}$ , то приходим к ступенчатой функции.

Определим ошибки слежения, вызванные действием внешнего возмущения (3), (4), соотношением

$$\varepsilon_{i,st} = \sup_{t \geq t_p} |\varepsilon_i(t)|, \quad i = \overline{1, m_1},$$

где  $t_p$  — время регулирования. Обычно на практике требуется, чтобы выполнялись неравенства

$$\varepsilon_{i,st} \leq \varepsilon_i^*, \quad i = \overline{1, m_1}, \quad (5)$$

где  $\varepsilon_i^* > 0$  — заданные числа (желаемые ошибки слежения).

Время регулирования в замкнутой системе (1), (2) можно оценить по приближенной формуле  $t_p \approx 3/\beta$ , где  $\beta$  — степень устойчивости замкнутой системы — минимальное расстояние собственных значений матрицы замкнутой системы (1), (2)  $A_{cl}$  до мнимой оси, где

$$A_{cl} = \begin{bmatrix} A - B_2 D_c C & B_2 C_c \\ -B_c C & A_c \end{bmatrix}.$$

**Задача.** Найти стабилизирующий регулятор (2) такой, чтобы

- выполнялись требования к точности системы

$$\varepsilon_{i,st} \leq \gamma_1 \varepsilon_i^*, \quad i = \overline{1, m_1}, \quad (6)$$

где  $\gamma_1$  — заданное или минимизируемое число;

- индивидуальные показатели колебательности не превышали заданного или минимизируемого значения  $\gamma_2$ :

$$M_i = \|t_i\|_{\infty} \leq \gamma_2, \quad i = \overline{1, m_1}, \quad (7)$$

где  $t_i(s)$  — передаточная функция замкнутой системы, связывающая  $i$ -е задающее воздействие  $g_i$  с  $i$ -й регулируемой переменной  $z_i$ , а  $\|t_i\|_{\infty}$  ее  $H_{\infty}$ -норма;

- собственные значения матрицы  $A_{cl}$  замкнутой системы (1), (2) удовлетворяли условию

$$\operatorname{Re} \lambda_i(A_{cl}) \leq -\beta, \quad i = \overline{1, n + n_c}, \quad (8)$$

где  $\beta \geq 0$  — заданное число.

Прокомментируем поставленную задачу.

Если объект управления (1) неминимально-фазовый по управлению (имеет правые нули), то исходное требование к точности (5) не может быть выполнено для любых  $\varepsilon_i^*$ , поэтому необходимо выполнить требования (6). Если дополнительно объект еще и неустойчивый [14], то величина  $\gamma_2$  в правой части неравенства (7) всегда больше единицы и она имеет нижнюю границу, меньше которой сделать величину  $M_i$  не удастся никаким линейным регулятором. И наконец, степень устойчивости  $\beta$  не может быть сделана больше нуля объекта, ближайшего к мнимой оси, что приводит к резкому уменьшению запаса устойчивости, т. е. требование высокой точности противоречит требованию малых показателей колебательности, а высокое быстродействие (большое значение  $\beta$ ) противоречит требованию к запасам устойчивости (малым значениям  $M_i$ ).

В настоящей работе ищется разумный компромисс между взаимопротиворечивыми инженерными показателями качества на основе техники  $H_{\infty}$ -оптимизации, которая оказалась весьма удобным инструментом для решения задач синтеза регуляторов, имеющим практическую направленность.

## 2. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ С ПОМОЩЬЮ $H_{\infty}$ -ПОДХОДА

Для решения поставленной задачи прежде всего установим связь индивидуальных показателей колебательности  $M_i, i = \overline{1, m_1}$  с  $H_{\infty}$ -нормой передаточной матрицы замкнутой системы  $T(s)$ , связывающей вектор задающих воздействий  $g$  с вектором регулируемых переменных  $z$ . Справедливо следующее утверждение.

**Лемма.** Пусть выполнено неравенство

$$\|T\|_{\infty} \leq \gamma, \quad (9)$$

тогда

$$M_i \leq \gamma, \quad i = \overline{1, m_1}. \quad (10)$$

Заметим, что в силу выражения (9) подобное неравенство будет выполняться и для любого элемента матрицы  $T(s)$  [24], в частности, для любого диагонального элемента  $t_i(s)$ :  $\|t_i\|_\infty \leq \gamma$ . Но передаточная функция  $t_i(s)$  связывает  $i$ -е задающее воздействие  $g_i$  с  $i$ -й регулируемой переменной  $z_i$ , и тогда, по определению,  $M_i = \|t_i\|_\infty$ , что ведет к неравенству (10).

На вход замкнутой системы (1), (2) подается два внешних сигнала  $g$  и  $f$ , которые объединим в расширенный вектор  $w^T = [g^T \ f^T]$ . В качестве регулируемого выхода возьмем вектор  $z$ . В замкнутой системе эти векторы связаны передаточной матрицей  $T_{zw}(s)$ , которая имеет структуру

$$z = T_{zw}(s)w = [T(s) \ T_f(s)]w, \quad (11)$$

где  $T(s)$  — передаточная матрица замкнутой системы от вектора  $g$  к вектору  $z$ ;  $T_f(s)$  — передаточная матрица замкнутой системы от вектора  $f$  к вектору  $z$ .

Рассмотрим вспомогательную задачу  $H_\infty$ -оптимизации

$$\|T_{zw}\|_\infty \leq \gamma, \quad (12)$$

где  $\gamma$  — заданное или минимизируемое число.

Учитывая структуру передаточной матрицы (11) условие (12) можно представить в эквивалентной частотной форме

$$T^T(-j\omega)T(j\omega) + T_f^T(-j\omega)T_f(j\omega) \leq \gamma^2 I, \quad \omega \in [0, \infty), \quad (13)$$

где  $I$  — единичная матрица соответствующих размеров. Отсюда следуют два неравенства

$$T^T(-j\omega)T(j\omega) \leq \gamma^2 I, \quad T_f^T(-j\omega)T_f(j\omega) \leq \gamma^2 I, \quad \omega \in [0, \infty), \quad (14)$$

первое из которых эквивалентно неравенству (9), а второе означает, что  $\|T_f\|_\infty \leq \gamma$ .

Таким образом, находя регулятор (2) из решения задачи (12), мы добиваемся выполнения целевого условия (7) поставленной задачи для  $\gamma_2 = \gamma$ , где  $\gamma$  — реализовавшееся значение при решении задачи (12).

Обратимся теперь к требованиям к точности (6). Для их учета при решении задачи (12) заменим матрицу  $B_1$  объекта (1) на масштабированную матрицу  $B_1 Q^{1/2}$ , где  $Q^{1/2}$  — скалярный весовой коэффициент, выбираемый ниже. Тогда второе условие (14) примет вид:

$$T_f^T(-j\omega)QT_f(j\omega) \leq \gamma^2 I, \quad \omega \in [0, \infty).$$

Обратившись теперь к Лемме о рабочем процессе из статьи [8], для установившихся значений регулируемых переменных  $z_{i,st} = \sup_{t \geq t_p} |z_i(t)|$ ,  $i = \overline{1, m_1}$ ,

можно записать

$$Qz_{i,st}^2 \leq \gamma^2 \left( \sum_{j=1}^{m_3} f_j^* \right)^2, \quad i = \overline{1, m_1}, \quad (15)$$

где  $f_j^*$  — известные границы компонент внешних возмущений из неравенства (4). В формуле (15), в отличие от работы [8], присутствует общий для всех переменных  $z_{i,st}$  весовой коэффициент  $Q$ . Поэтому выбор его осуществим по наименьшей заданной ошибке  $z_{\min} = \varepsilon_{\min} = \min\{\varepsilon_1^*, \varepsilon_2^*, \dots, \varepsilon_{m_1}^*\}$ , а именно:

$$Q = \left( \sum_{j=1}^{m_3} f_j^* \right)^2 / (\varepsilon_{\min}^*)^2. \quad (16)$$

В этом случае ошибка слежения от действия внешнего возмущения  $f$  удовлетворяет равенству  $\varepsilon_{i,st} = z_{i,st}$ . И тогда из неравенства (15) получим

$$\varepsilon_{i,st} \leq \gamma \varepsilon_{\min}^*, \quad i = \overline{1, m_1},$$

и, следовательно, требования к точности (6) выполняются.

Учтем теперь требования к степени устойчивости (8) замкнутой системы, определяющей время регулирования. Следуя работе [8], заменим при решении задачи (12) матрицу  $A$  объекта (1) на смещенную матрицу  $\tilde{A} = A + \beta I$ , где  $\beta$  — желаемая степень устойчивости. Тогда решение смещенной задачи (12) с такой матрицей  $\tilde{A}$  объекта даст смещенный регулятор с матрицами  $\tilde{A}_c, B_c, C_c, D_c$ . Искомый регулятор (2), обеспечивающий решение поставленной задачи, имеет матрицы [8]

$$A_c = \tilde{A}_c - \beta I, B_c, C_c, D_c. \quad (17)$$

Суммируя изложенное, сформулируем следующее утверждение.

**Теорема.** Регулятор (2), (17) разрешает поставленную задачу, если весовой коэффициент  $Q$  в смещенной  $H_\infty$ -проблеме (12) выбран из условия (16). При этом значения величин  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$ , фигурирующих в целевых условиях (6), (7) поставленной задачи, совпадают и равны значению  $\gamma$ , реализовавшемуся при численном решении задачи (12), (13).

Заметим, что переход от неравенства (12) к неравенствам (14) придает достаточный характер представленному результату.



### 3. ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ

Поскольку вектор регулируемых переменных в системе (11) не содержит управлений, то задача (12) вырождена и численно не может быть решена на базе 2-Риккати похода [19]. Более предпочтительно ее решение на основе LMI-техники [21, 22] MATLAB-пакета [23], как представлено ниже. Как отмечалось ранее, чрезмерное увеличение степени устойчивости  $\beta$  ведет к резкому увеличению показателей колебательности и, как следствие, большим выбросам в переходной функции замкнутой системы. Поэтому в алгоритме синтеза, представленном ниже, применяется принцип постепенного увеличения быстродействия или значения  $\beta$ .

1. Заменим матрицу  $A$  объекта на матрицу  $\tilde{A} = A + \beta I$ , полагая сначала  $\beta = 0$ .

2. Выбираем весовой коэффициент  $Q$  из равенства (16) и строим четверку матриц  $A_{об}, B_{об}, C_{об}, D_{об}$  уравнений состояния обобщенного объекта  $A_{об} = \tilde{A}$ ,

$$B_{об} = [0 \ B_1 \cdot Q^{1/2} \ B_2], \ C_{об} = \begin{bmatrix} C \\ -C \end{bmatrix}, \ D_{об} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{21} & D_{22} \end{bmatrix},$$

$D_{11} = [0 \ 0], D_{21} = [I \ 0], D_{22} = 0, D_{12} = 0$ , где размерности матриц должны быть согласованы.

3. Формируем системную матрицу обобщенного объекта с помощью команды

$$P = \text{ltisys}(A_{об}, B_{об}, C_{об}, D_{об}).$$

4. Находим оптимальное значение  $\gamma_0 = \text{hinflmi}(P, [m_2, m])$  в задаче (12), где  $m_2$  и  $m$  — число входов и выходов регулятора соответственно.

5. Выбираем  $\gamma > \gamma_0$  и строим системную матрицу регулятора  $K$ , разрешающего задачу (12), с помощью процедуры  $[\gamma, K] = \text{hinflmi}(P, [m_2, m], \gamma, \varepsilon)$ , где  $\varepsilon$  — точность вычисления  $\gamma$ .

6. Из системной матрицы  $K$  извлекаем матрицы уравнений состояния смещенного регулятора процедурой  $[\tilde{A}_c, B_c, C_c, D_c] = \text{ltiss}(K)$ .

7. Находим матрицы  $A_c = \tilde{A}_c - \beta I, B_c, C_c, D_c$  искомого регулятора (17).

8. Строим переходный процесс в замкнутой системе при действии внешних возмущений из класса (3), (4), находим ошибки слежения и время регулирования, а также показатели колебательности  $M_i$ . Если требования к точности (6) и/или показателям колебательности (7) не выполнены, то задача неразрешима данным подходом. Иначе, переходим к п. 9.

9. Если требования к быстродействию не выполняются, то увеличиваем значение параметра  $\beta$  и переходим к п. 1, иначе задача решена.

При первом проходе алгоритма естественно использовать  $\gamma = \gamma_0$ . Если требования (6) и/или (7) не выполнены, то целесообразно решить отдельные задачи синтеза по показателю колебательности (здесь  $T_{zw}(s) = T(s)$ ) или заданной точности (здесь  $T_{zw}(s) = T_f(s)$  с весовым коэффициентом из формулы (16)). Эти задачи имеют необходимый и достаточный характер, что позволяет найти значение  $\gamma_0$ , определяющее достижимые значения точности (6) либо показатели колебательности  $M_i = \gamma_0$ .

### 4. СИНТЕЗ РЕГУЛЯТОРА ДЛЯ ВЗАИМОСВЯЗАННОГО ЭЛЕКТРОПРИВОДА

Рассмотрим взаимосвязанный электропривод, модель которого приведена в статье [8]. В работе [25] такая модель отнесена к классу параллельных систем. Структурная схема модели приведена на рис. 1.

На схеме  $x_1, x_2$  — отклонения выходных напряжений тиристорных преобразователей от номинальных, подаваемых в якорные цепи двигателей;  $x_3, x_4$  — отклонения якорных токов приводных двигателей;  $x_5$  — отклонение угловой скорости вращения вала двигателей;  $u_1, u_2$  — отклонения управляющих напряжений, подаваемые на тиристорные преобразователи с системы управления приводами;  $M_{дв1}, M_{дв2}$  — отклонения электромагнитных моментов, развиваемых двигателями от номинала;  $M_c$  — отклонение момента сопротивления (нагрузки);  $T_{ТП1}, T_{ТП2}$  — постоянные времени тиристорных преобразователей;  $k_{ТП1}, k_{ТП2}$  — коэффициенты передачи тиристорных преобразователей;  $c_{M1}, c_{M2}, c_{e1}, c_{e2}$  — конструктивные постоянные двигателей;  $R_{я1}, R_{я2}$  — активные сопротивления якорных цепей двигателей;  $T_{э1}, T_{э2}$  — электромагнитные постоянные якорных цепей двигателей;  $J$  — суммарный момент инерции, приведенный к одному из валов двигателя.

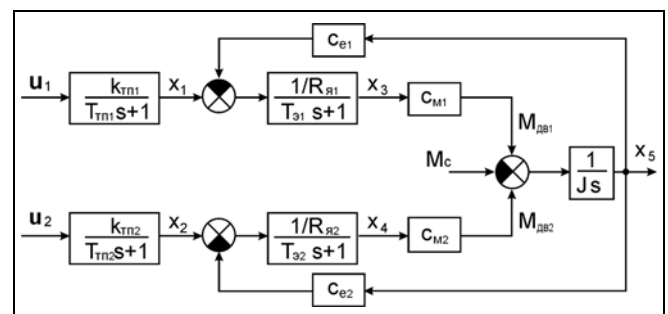


Рис. 1. Структурная схема объекта управления



На структурной схеме рис. 1 коэффициенты модели имеют такие числовые значения:  $c_{M1} = 8,1 \frac{\text{Н}\cdot\text{м}}{\text{А}}$ ,  $c_{M2} = 8,262 \frac{\text{Н}\cdot\text{м}}{\text{А}}$ ,  $c_{e1} = 8,15 \frac{\text{В}\cdot\text{с}}{\text{рад}}$ ,  $c_{e2} = 8,313 \frac{\text{В}\cdot\text{с}}{\text{рад}}$ ,  $T_{Э1} = 0,0886 \text{ с}$ ,  $T_{Э2} = 0,090372 \text{ с}$ ,  $T_{ТП1} = 0,01 \text{ с}$ ,  $T_{ТП2} = 0,012 \text{ с}$ ,  $R_{Я1} = 0,0819 \text{ Ом}$ ,  $R_{Я2} = 0,08358 \text{ Ом}$ ,  $k_{ТП1} = 161,2$ ,  $k_{ТП2} = 164,424$ ,  $J = 32,5 \text{ кг}\cdot\text{м}^2$ .

Внешнее возмущение  $f = M_c$  — отклонение момента сопротивления (нагрузки) от номинального, не превышает величины  $f^* = 600 \text{ Нм}$  (20 % номинального момента двигателя). Измеряемые переменные для этого объекта связаны с физическими переменными соотношениями  $y_1 = x_3$ ,  $y_2 = x_4$ ,  $y_3 = x_5$ ; внешнее возмущение  $f$  и управляющие воздействия  $u_1$ ,  $u_2$  приложены в разных точках. Главной регулируемой переменной объекта является угловая скорость двигателей  $z_3 = y_3 = x_5$ . Помимо этого важным практическим требованием к параллельным системам является требование равномерности двигателей (близости их якорных токов) при работе на общую нагрузку, что при использовании стандартных ПИ-регуляторов зачастую не выполняется [25]. Численные эксперименты показали, что если в качестве регулируемой переменной рассматривать только угловую скорость двигателей  $z_3 = x_5$ , то требование равномерности двигателей может не выполняться, и самое главное, запасы устойчивости на выходе объекта по измеряемым переменным  $y_1 = x_3$  и  $y_2 = x_4$  (токам двигателей) могут быть весьма малыми, что недопустимо на практике. Поэтому в качестве регулируемых переменных далее будем рассматривать все измеряемые переменные объекта  $z_1 = y_1 = x_3$ ,  $z_2 = y_2 = x_4$ ,  $z_3 = y_3 = x_5$  (токи и угловую скорость двигателей). Таким образом, задающие воздействия  $g_1$  и  $g_2$  фактически будут фиктивными, используемыми только при синтезе регулятора. Надо сказать, что поведение токов двигателей в номинальном режиме определяется только изменениями момента нагрузки — возмущения.

Матрицы объекта (1) имеют вид [8]:

$$A = \begin{bmatrix} -100 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -83,333 & 0 & 0 & 0 \\ 137,811 & 0 & -11,287 & 0 & -1123,155 \\ 0 & 132,459 & 0 & -11,065 & -1101,133 \\ 0 & 0 & 0,2487 & 0,254 & 0 \end{bmatrix},$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -0,031 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 16 & 120 & 0 \\ 0 & 13 & 702 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Требования к системе:

- ошибка слежения по угловой скорости  $\varepsilon_{3,ст} = z_{3,ст} \leq z_3^* = 1 \text{ рад/с}$ , а отклонения токов в переходных режимах не должны превышать  $|z_1| \leq 375 \text{ А}$ ,  $|z_2| \leq 375 \text{ А}$ ;
- показатели колебательности не более единицы обеспечиваются по измеряемому выходу объекта — переменным  $y_1$ ,  $y_2$ ,  $y_3$ ;
- время регулирования  $t_p = 0,25 \text{ с}$ .

Для решения задачи синтеза по алгоритму из § 3 настоящей статьи найдем весовой коэффициент из формулы (16)  $Q^{1/2} = f^*/z_3^* = 600/1 = 600$  и положим  $\beta = 0$ . Это дает следующие матрицы регулятора (2) и реализовавшееся значение  $\gamma$ :

$$A_c = \begin{bmatrix} -387,822 & -91,669 & 421,791 & 902,372 & -4003,386 \\ -18,692 & -371,046 & -82,211 & 1772,776 & -7073,098 \\ -74,743 & -12,302 & -65,282 & 170,106 & -613,257 \\ -6,386 & -24,3 & -3,326 & -10,924 & 135,406 \\ 0,0525 & 0,0697 & 0,066 & -484,352 & -484,698 \end{bmatrix},$$

$$B_c = \begin{bmatrix} -0,00119 & 0,00132 & 0,000937 \\ 0,000693 & -0,000701 & 0,00003 \\ -0,00223 & 0,00252 & 0,000215 \\ 0,552 & 0,579 & 4,817 \\ 63,954 & 62,713 & -13,418 \end{bmatrix},$$

$$C_c = \begin{bmatrix} -0,00639 & 0,0118 & 0,0162 & -0,0697 & 0,265 \\ 0,0197 & 0,0161 & -0,0237 & -0,12 & 0,506 \end{bmatrix},$$

$$D_c = 0_{2 \times 3}, \quad \gamma = 51,86.$$

Заметим, что реакция замкнутой системы (1), (2) ( $g_3 \rightarrow z_3$ ) на задающее воздействие  $g_3 = 1$  дает большую статическую ошибку по угловой скорости. Поэтому для устранения последней масштабируем задающее воздействие величиной, обратной этой ошибке (коэффициентом передачи замкнутой системы, который легко найти из годографа разомкнутой системы по угловой скорости, приведенного ниже). После такого масштабирования

амплитудно-частотная характеристика замкнутой системы по задающему воздействию примет вид, представленный на рис. 2, б, а переходный процесс по угловой скорости представлен на рис. 3, б. На рис. 2, а, приведена промасштабированная (величиной 600 Нм) амплитудно-частотная характеристика замкнутой системы по возмущению ( $f \rightarrow z_3$ ). Из этой монотонно убывающей характеристики очевидно, что наихудшим возмущением из класса (3), (4) для замкнутой системы является ступенчатое. Соответствующий переходный процесс по угловой скорости на такое возмущение величиной 600 Нм приведен на рис. 3, а и, следовательно, требования к точности выполнены. Из приведенных переходных процессов также очевидно,

что требования к быстродействию замкнутой системы выполнены,  $t_p \leq 0,25$  с. Токи двигателей в переходных режимах весьма близки и, следовательно, двигатели равнонагружены, а их отклонения от номинала много меньше допустимого значения 375 А.

На рис. 4 приведены годографы Найквиста системы, разомкнутой по соответствующим измеряемым переменным: токам двигателей слева и угловой скорости справа. Из этих характеристик очевидно, что по измеряемым переменным система имеет бесконечный запас по фазе, поскольку годографы  $w_i(j\omega)$  целиком находятся внутри круга единичного радиуса с центром в начале координат.

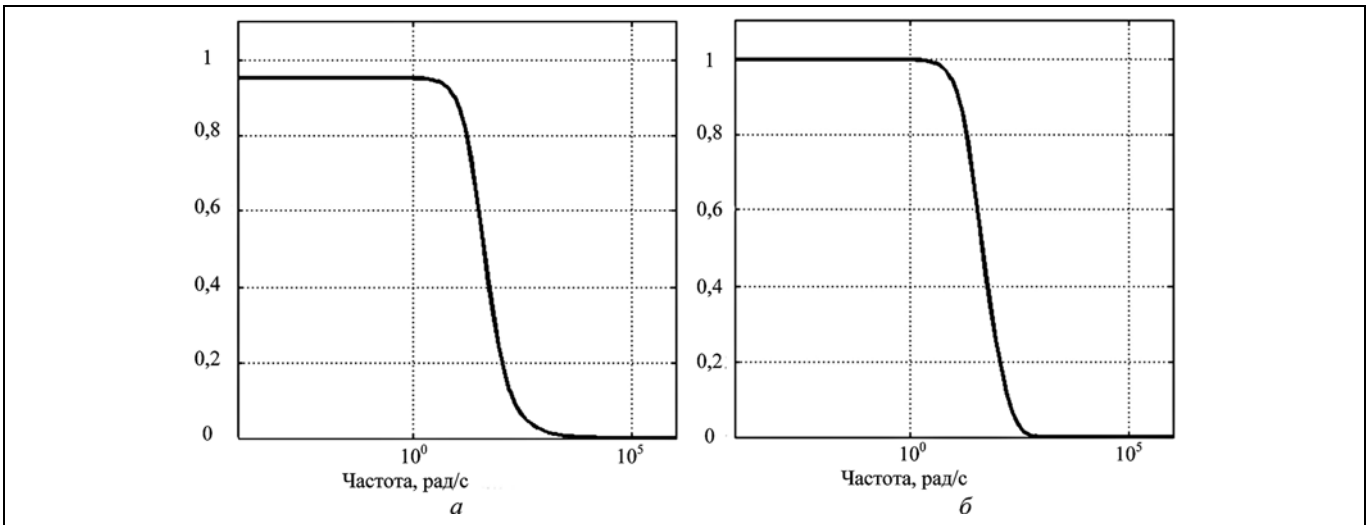


Рис. 2. АЧХ замкнутой системы: а — по возмущению; б — по заданию

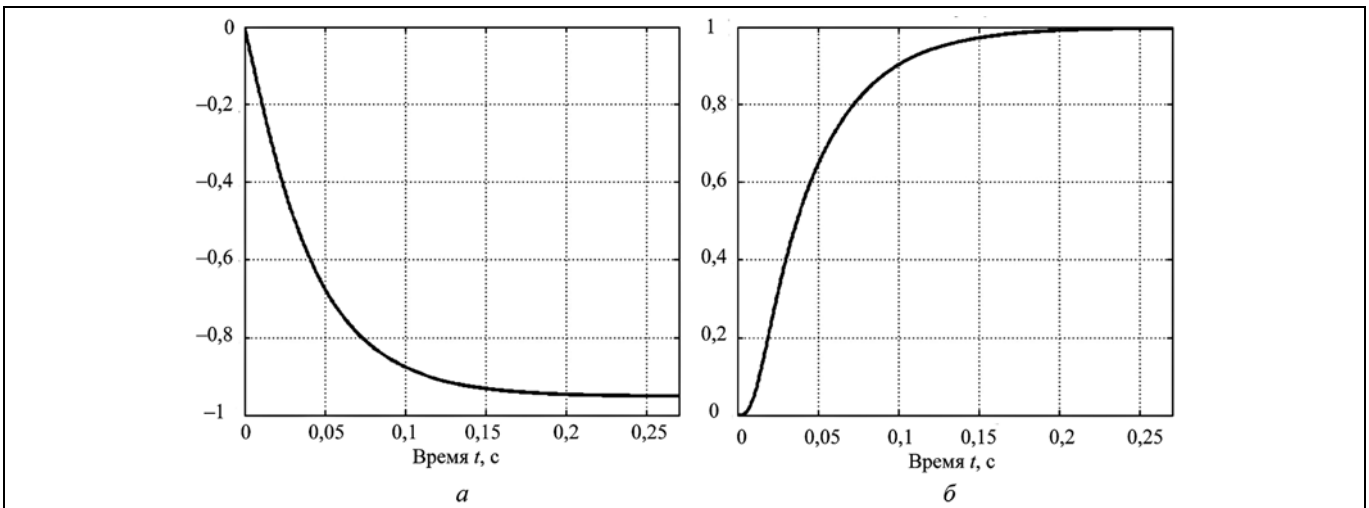


Рис. 3. Реакция системы на ступенчатое возмущение и задающее воздействие: а — выход системы при  $f(t) = 600$ ; б — выход системы при  $g_3(t) = 85,47$

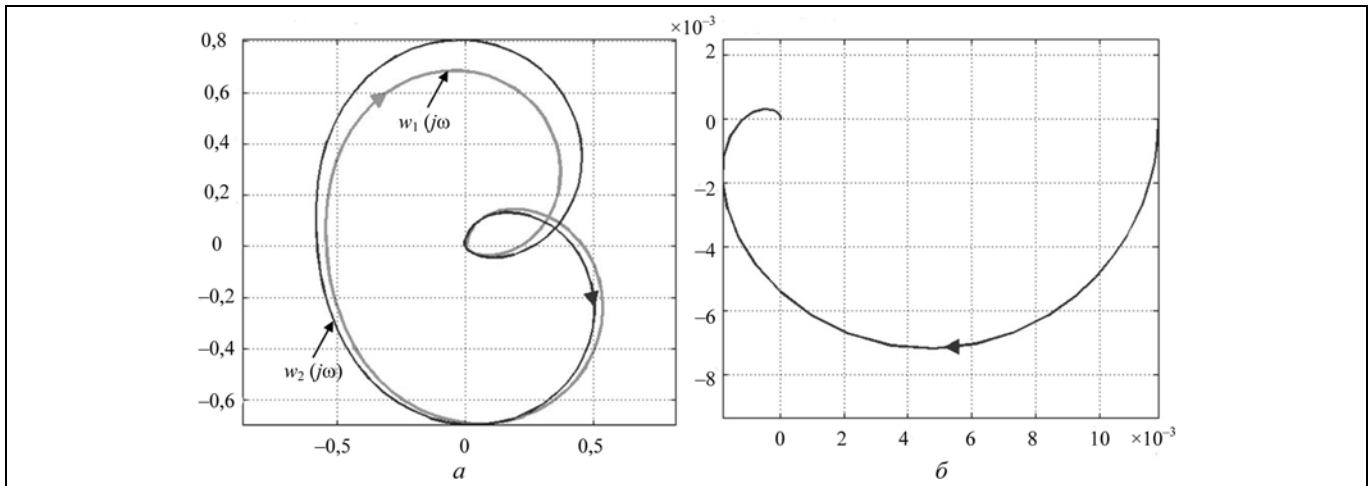


Рис. 4. Годографы Найквиста разомкнутой системы по каждому выходу: а —  $w_1(j\omega)$  и  $w_2(j\omega)$ ; б —  $w_3(j\omega)$

Запас по модулю для первой измеряемой переменной (току первого двигателя) составил 1,6, по току второго двигателя составил 1,4, а по главной регулируемой переменной угловой скорости двигателя составил величину, равную 833. Таким образом, по измеряемым переменным система обладает внушительными запасами устойчивости. Кроме того, поскольку годографы не охватывают критической точки  $(-1, j0)$ , то разомкнутые системы устойчивы, что важно с практической точки зрения. Проверка запасов устойчивости на физическом входе объекта (по управлениям  $u_1, u_2$ ) показала, что радиус запасов устойчивости по управлениям  $u_1$  и  $u_2$  имеет значения 0,46 и 0,42 соответственно, а разомкнутые системы по управлению  $u_1$  или  $u_2$  устойчивы.

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе представлено решение задачи синтеза многомерных следящих систем по инженерным показателям качества: ошибкам слежения от действия внешних неизмеряемых возмущений, совокупности показателей колебательности  $M_i$  для  $i$ -го замкнутого контура, связывающего  $i$ -е задающее воздействие  $g_i$  с  $i$ -й регулируемой переменной  $z_i$ , а также времени регулирования. Отметим некоторые привлекательные с инженерной точки зрения особенности предлагаемого подхода:

- применяются ясные инженерные показатели качества;
- процедура синтеза сведена к стандартной задаче  $H_\infty$ -оптимизации, для решения которой существует богатое программное обеспечение;
- порядок регулятора не превышает порядка исходного физического объекта;

— в качестве внешних возмущений рассматривается практически важный класс функций, которые непрерывны и имеют кусочно-непрерывные производные.

Отметим также, что если требуется обеспечить показатели колебательности на физическом входе объекта, то следует дополнительно ввести фиктивные внешние возмущения аддитивно с управлениями, а в качестве регулируемых переменных рассматривать управления.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Бесекерский В.А., Попов Е.П. Теория систем автоматического регулирования. — М.: Наука, 1975. — 768 с. [Besekerskij, V.A., Popov, E.P. Teoriya sistem avtomaticheskogo regulirovaniya. — M.: Nauka, 1975. — 768 s. (In Russian)]
2. Wang, Q.-G. Decoupling Control. — Springer, Berlin, 2003.
3. Александров А.Г. Синтез регуляторов по показателям точности и быстродействию. III. Многомерные объекты, устойчивые по управлению // Автоматика и телемеханика. — 2018. — № 2. — С. 51–70. [Aleksandrov, A.G. Design of controllers by indices of precision and speed. III. Control-stable multidimensional plants // Automation and Remote Control. — 2018. — Vol. 79, no. 2. — P. 241–257.]
4. Александров А.Г. Синтез регуляторов по показателям точности и быстродействию. IV. Метод диагонального доминирования // Автоматика и телемеханика. — 2018. — № 4. — С. 3–18. [Aleksandrov, A.G. Design of controllers by the indices of precision and speed. IV. Method of diagonal domination // Automation and Remote Control. — 2018. — Vol. 79, no. 4. — P. 581–593.]
5. Вознесенский И.Н. О регулировании машин с большим числом регулируемых параметров // Автоматика и телемеханика. — 1938. — № 4-5. — С. 65–78. [Voznesenskii, I.N. On regulation of machines with a large number of parameters regulated // Automation and Remote Control. — 1938. — Vol. 4-5. — P. 65–78.]
6. Честнов В.Н., Шатов Д.В. Синтез одномерных регуляторов по заданному показателю колебательности: модальный и  $H_\infty$ -подходы // Проблемы управления. — 2019. — № 2. — С. 2–8. [Chestnov, V.N., Shatov, D.V. Design of given oscillations



- tion index scalar controllers: modal and  $H_\infty$ -approaches // Control Sciences. — 2019. — No. 2. — P. 2–8. (In Russian)
7. *Честнов В.Н., Шатов Д.В.* Синтез  $H_\infty$ -регуляторов одномерных следящих систем по инженерным критериям качества / Тр. 13-го Всероссийского совещания по проблемам управления (ВСПУ XIII, Москва, 2019). — М.: ИПУ РАН, 2019. — С. 88–93. [*Chestnov, V.N., Shatov, D.V.* Sintez  $H_\infty$ -regulyatorov odnomernykh sledyashchih sistem po inzhenernym kriteriyam kachestva / Tr. 13-go Vserossiyskogo soveshchaniya po problemam upravleniya (VSPU XIII, Moskva, 2019). — М.: IPU RAN, 2019. — S. 88–93. (In Russian)]
  8. *Честнов В.Н.* Синтез многомерных систем по инженерным критериям качества на основе  $H_\infty$ -оптимизации // Автоматика и телемеханика. — 2019. — № 10. — С. 132–152. [*Chestnov, V.N.* Synthesis of multivariable systems according to engineering quality criteria based on  $H_\infty$ -optimization // Automation and Remote Control. — 2019. — Vol. 80, no. 10. — P. 241–257.]
  9. *Бари Н.К.* Тригонометрические ряды. — М.: Госуд. издат. физ.-мат. лит., 1961. [*Bari, N.K.* Trigonometricheskie ryady. — М.: Gosud. izdat. fiz.-mat. lit., 1961. (In Russian)]
  10. *Åström, K.J., Murray, R.M.* Feedback systems: an introduction for scientists and engineers. — New Jersey: Princeton University Press, 2008. — 396 p.
  11. *Поляк Б.Т., Хлебников М.В., Шербаков П.С.* Управление линейными системами при внешних возмущениях. Техника линейных матричных неравенств. — М.: ЛЕНАНД, 2014. — 560 с. [*Polyak, B.T., Hlebnikov, M.V., Shcherbakov, P.S.* Upravlenie linejnymi sistemami pri vneshnih vozmushcheniyah. Tekhnika linejnyh matrichnyh neravenstv. — М.: LENAND, 2014. — 560 s. (In Russian)]
  12. *Александров А.Г.* Синтез регуляторов многомерных систем. — М.: Машиностроение, 1986. — 272 с. [*Aleksandrov, A.G.* Sintez regulyatorov mnogomernykh sistem. — М.: Mashinostroenie, 1986. — 272 s. (In Russian)]
  13. *Александров А.Г.* Методы построения систем автоматического управления. — М.: Изд-во физико-математической литературы, 2008. — 232 с. [*Aleksandrov, A.G.* Metody postroeniya sistem avtomaticheskogo upravleniya. — М.: Izd-vo fiziko-matematicheskoy literatury, 2008. — 232 s. (In Russian)]
  14. *Skogestad, S., Postlethwaite, I.* Multivariable feedback control. Analysis and design. — N.-Y.: John Wiley and Sons, 2006. — 595 p.
  15. *Apkarian, P., Noll, D.* Nonsmooth  $H_\infty$  Synthesis // IEEE Trans. Autom. Contr. — 2006. — Vol. 51, no. 1. — P. 71–86.
  16. *Gahinet, P., Apkarian, P.* Structured  $H_\infty$ -Synthesis in MATLAB // Preprints of the 18th IFAC World Congress. — Milano, Italy, 2011. — P. 1435–1440.
  17. *Keel, L.H., Bhattacharyya, S.P.* Robustness and Fragility of High Order Controllers: A Tutorial // Proceedings of IEEE Conference on Control Applications (CCA). — Buenos Aires, Argentina, 2016. — P. 191–202.
  18. *Pittet, C., Mignot, J., Viaud, F.* Attitude and active payload control: the  $H_\infty$ -revolution // Preprints of the 20th IFAC World Congress. — Toulouse, France, 2017. — P. 6619–6624.
  19. *Doyle, J.C., Glover, K., Khargonekar, P.P., Francis, B.A.* State-space solution to standard  $H_2$  and  $H_\infty$ -control problem // IEEE Trans. Autom. Contr. — 1989. — Vol. 34, no. 8. — P. 831–846.
  20. *Zhou, K., Doyle, J.C., Glover, K.* Robust and Optimal Control. — New Jersey: Prentice-Hall, 1996. — 596 p.
  21. *Boyd, S., El Ghaoui, L., Feron, E., Balakrishnan, V.* Linear matrix inequality in system and control theory. — Philadelphia: SIAM, 1994. — 193 p.
  22. *Gahinet, P., Apkarian, P.* A linear matrix inequality approach to  $H_\infty$  control // Int. J. Robust and Nonlinear Control. — 1994. — Vol. 4. — P. 421–448.
  23. *Balas, G.J., Chiang, R.Y., Packard, A., Safonov, M.G.* Robust Control Toolbox 3. User's guide. — Natick (Mass.). The Math Works, Inc, 2010. — 178 p.
  24. *The Control Handbook* / Ed. W.S. Levine. — IEEE Press, 1996.
  25. *Åström, K.J., Häggglund, T.* Advanced PID control. — NC: ISA, 2006. — 460 p.

Статья представлена к публикации членом редколлегии С.А. Красновой.

Поступила в редакцию 13.02.2020, после доработки 13.05.2021.  
Принята к публикации 13.05.2021.

**Честнов Владимир Николаевич** — д-р техн. наук,  
✉ vnchest@yandex.ru.

**Шатов Дмитрий Владимирович** — канд. техн. наук,  
✉ dvshatov@gmail.com,

Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН,  
г. Москва.

## DESIGN OF MULTIVARIABLE TRACKING SYSTEMS VIA ENGINEERING PERFORMANCE INDICES BASED ON $H_\infty$ -APPROACH

V.N. Chestnov and D.V. Shatov

Trapeznikov Institute of Control Sciences, Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia

✉ vnchest@yandex.ru, ✉ dvshatov@gmail.com

**Abstract.** This paper proposes an algorithm for designing a measured output-feedback controller with given or achievable engineering performance indices for linear multivariable systems. The control plant is subjected to bounded external disturbances from the class of polyharmonic functions with an infinite number of harmonics and a bounded sum of their amplitudes for each disturbance component. As a result, additional tracking errors appear in controlled variables. The problem is to design a multivariable output-feedback controller ensuring given or achievable tracking errors, the settling time determined by a given or achievable degree of stability of the closed loop system, and a set of the oscillation indices  $M_i$  for the  $i$ th closed loop relating the  $i$ th reference signal  $g_i$  to the  $i$ th controlled variable  $z_i$ . In addition, the controller should ensure the conditions  $M_i \leq \gamma$ , where  $\gamma$  is a given value or the minimand. As shown below,  $H_\infty$  control methods are quite convenient for solving such problems. An illustrative example of designing an interconnected electric drive is presented.

**Keywords:** linear multivariable systems, bounded external disturbances, tracking errors, settling time, degree of stability, oscillation index of the  $i$ th loop.

# ПРОТИВОЗАТРАТНЫЕ МЕХАНИЗМЫ ЦЕНООБРАЗОВАНИЯ ПРИ ОГРАНИЧЕНИИ НА СУММУ ЦЕН

В.Н. Бурков, А.В. Щепкин

**Аннотация.** Рассматривается задача определения цен (стоимостей) отдельных проектов, составляющих единый мегапроект или программу. Руководитель мегапроекта определяет стоимость каждого проекта на основе информации о планируемой стоимости проекта, полученной от исполнителей проекта с учетом бюджетного ограничения на общую стоимость программы. Исполнитель каждого проекта является монополистом в соответствующей области, поэтому замена одного исполнителя на другого не допускается. В детерминированном случае при определении плановой стоимости своего проекта исполнители точно знают величину его фактической стоимости; для этого случая исследована манипулируемость механизма формирования стоимости проектов. В стохастическом случае на этапе определения плановой стоимости исполнителям неизвестна фактическая стоимость их проектов, и при определении плановой стоимости они оценивают вероятное значение фактической стоимости. Для этой оценки используется функция распределения фактической стоимости проекта. Анализируется противозатратный механизм ценообразования, параметры которого определяются из бюджетного ограничения на общую стоимость программы и вида функции распределения вероятности фактической стоимости проекта.

**Ключевые слова:** себестоимость, лимитная цена, прибыль, математическое ожидание, манипулируемость, противозатратность.

## ВВЕДЕНИЕ

Ожидания, что рыночная экономика обеспечит максимальную эффективность производства, не оправдались. Это связано с тем, что предпосылкой повышения эффективности в рыночной экономике является конкуренция, а конкуренция в экономике, состоящей из монополистов, отсутствует.

Противозатратный механизм в монографии [1] определяется как механизм, который побуждает каждого на своем рабочем месте максимально повышать эффективность производства, выпускать продукцию лучшего качества с меньшими затратами и меньшей ценой. Основные результаты исследований противозатратных механизмов управления получены для детерминированных моделей [1–4]. При этом детерминированность прежде всего понимается как отсутствие случайных возмущений. Отметим здесь, что противозатратные механизмы управления разработаны в рамках теории активных систем [5] для борьбы с монопольным

эффектом, таким как устранение или предотвращение конкуренции [6]. В то же время большинство исследований российских ученых направлены на разработку мероприятий по сокращению затрат без учета монопольного эффекта [7–12]. Что касается исследований западных ученых, то здесь преобладают работы, посвященные применению антимонопольных законов [13–16], в том числе для дробления монополий. Кроме того, наряду с этими работами широко представлены исследования проблем снижения и управления затратами [17–19].

В отечественных разработках решение стохастических задач в теории активных систем прежде всего связано с анализом механизмов стимулирования [20–22]. В работах зарубежных ученых рассмотрение аналогичных задач связано с исследованиями по теории контрактов [23–28] и анализом рисков [29, 30]. В настоящей статье рассматривается ситуация, когда разработчик проекта заранее не знает его себестоимости, но ему известна функция распределения величины себестоимости.



## 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматривается двухуровневая система, состоящая из Центра (верхний уровень), распределяющего средства на выполнение программы, и агентов (нижний уровень) — исполнителей программы. Программа состоит из  $n$  проектов и выполняется  $n$  организациями (агентами), каждый из которых является монополистом в соответствующей области. Каждому агенту известна себестоимость и лимитная цена (стоимость) проекта. Центр располагает средствами в размере  $R$ , которые ограничивают стоимость всей программы, и ему известны лимитные цены (стоимости) каждого проекта. Обозначим  $c_i$  и  $l_i$  себестоимость и лимитную цену  $i$ -го проекта,  $i = 1, \dots, n$ . Требуется определить стоимости каждого проекта.

Рассмотрим теоретико-игровую постановку задачи.

1. Каждый агент сообщает оценку затрат на реализацию проекта (это его стратегия).

2. Центр определяет стоимости (цены) всех проектов на основе полученной информации.

3. Агенты и центр определяют выигрыши. Выигрышем агента является прибыль (ожидаемая прибыль). Функция выигрыша центра может быть различной. В данном случае это не важно, так как цель настоящей статьи — анализ стратегий агентов.

В дальнейшем будем предполагать, что  $C < R$ , где  $C = \sum_{i=1}^n c_i$ . Для определения стоимости  $\Pi_i$   $i$ -го проекта,  $i = 1, \dots, n$ , будем применять противозатратный механизм ценообразования [1–4]

$$\Pi_i = s_i + k(l_i - s_i), \quad i = 1, \dots, n,$$

где  $s_i$  — оценка себестоимости, сообщенная  $i$ -м агентом. Естественно предположить, что  $s_i < l_i$  — это соответствует тому, что оценки себестоимости выше лимитной цены или равные ей Центром не рассматриваются. Естественно также предполагать, что  $\sum_{i=1}^n l_i = L > R$ .

Значение величины  $k$  определяется из условия

$$R = \sum_{i=1}^n \Pi_i = S + k(L - S), \quad (1)$$

где  $S = \sum_{i=1}^n s_i$ .

Из условия (1) получаем:

$$k = \frac{R - S}{L - S}. \quad (2)$$

Отсюда следует, что если  $S > R$ , то  $k < 0$ , т. е. цена проекта, которую установил Центр, меньше,

чем оценка себестоимости, которую установил агент. Соответственно, если  $S < R$ , то  $1 > k > 0$ , — это означает, что цена проекта выше, чем оценка его себестоимости.

Прибыль, получаемая агентом, определяется выражением

$$P_i = \Pi_i - c_i = s_i + k(l_i - s_i) - c_i, \quad i = 1, \dots, n. \quad (3)$$

Перепишем выражение (3) в виде

$$P_i = k(l_i - s_i) + s_i - c_i, \quad i = 1, \dots, n. \quad (4)$$

Обозначим  $P_i^{(пл)} = k(l_i - s_i)$  — плановая прибыль агента, а  $P_i^{(сн)} = s_i - c_i$  — сверхплановая прибыль. Естественно, о сверхплановой прибыли можно говорить, если  $s_i > c_i$ . В дальнейшем будем считать, что прибыль  $i$ -го агента рассчитывается как

$$P_i = P_i^{(пл)} + qP_i^{(сн)} = k(l_i - s_i) + q(s_i - c_i), \quad i = 1, \dots, n, \quad (5)$$

где  $q \leq 1$ . Если  $q \in (0; 1]$ , то это означает, что Центр оставляет в распоряжении агента часть сверхплановой прибыли, соответственно,  $q$  — норматив, определяющий величину сверхплановой прибыли, остающейся у агента. Если же  $q \leq 0$ , то  $q$  — коэффициент штрафа за искажение информации о себестоимости проекта.

В случае, когда  $s_i < c_i$ , прибыль агента будет записываться в виде (4). Легко видеть, что при  $s_i = c_i$  выражение (4) совпадает с выражением (5).

## 2. ИССЛЕДОВАНИЕ МАНИПУЛИРУЕМОСТИ

Предположим, что в своих действиях агенты придерживаются гипотезы слабого влияния [5]. В этом случае  $i$ -й агент не учитывает влияние своей оценки  $s_i$  на величину  $k$ . Для того чтобы агентам было невыгодно увеличивать оценки себестоимости своих проектов, должно выполняться условие

$$\frac{\partial P_i}{\partial s_i} = -k + q < 0, \quad i = 1, \dots, n. \quad (6)$$

Неравенство (6) справедливо всегда, если  $q < k$ . При выполнении условия (6) каждому агенту выгодно сообщать истинную оценку себестоимости  $c_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , а значение величины  $k$  в этом случае будет определяться выражением

$$k = \frac{R - C}{L - C}.$$

Отсюда следует, что даже если  $0 < q < k$  и часть сверхплановой прибыли Центр оставляет в распоряжении агентов, то агентам не выгодно завышать оценку себестоимости своих проектов и получать сверхплановую прибыль, а выгодно сообщать истинные оценки себестоимости.

Однако проблема возникает из-за того, что значение  $q$  Центром объявляется еще до того, как агенты сообщили свои оценки себестоимости проектов и Центр рассчитал значение  $k$ .

Для исследования манипулируемости перепишем формулу (5) в виде

$$P_i = kl_i - qc_i - (k - q)s_i, \quad i = 1, \dots, n. \quad (7)$$

Напомним, что рассматривается случай  $S < R$ .

**Пусть  $S < R$ .** Из формулы (2) следует, что при этом  $0 < k < 1$ . Из выражения (7) видно, что если  $q < k$ , то прибыль  $i$ -го агента убывает с ростом его оценки себестоимости. Поэтому оптимальной стратегией агента является стратегия  $s_i^* = c_i, i = 1, \dots, n$ . Если же  $q = k$ , то оптимальной стратегией агента так же является стратегия  $s_i^* = c_i, i = 1, \dots, n$ . Действительно, из выражения (7) видно, что если агент настроен благожелательно к Центру, т. е. справедлива гипотеза благожелательности [31], то он реализует такое действие, которое выгодно для Центра.

Таким образом, для получения достоверной информации о себестоимости проектов при  $S < R$  Центру достаточно установить  $q = \beta k$ , где  $\beta \leq 1$ .

**Пусть  $S > R$ .** Из формулы (2) следует, что при этом  $k < 0$ . Из выражения (7) видно, что если  $k - q > 0$ , то прибыль  $i$ -го агента отрицательная (получен убыток). Чтобы сократить убыток, агенту выгодно уменьшать оценку себестоимости. Поэтому оптимальной стратегией агента является стратегия  $s_i^* = c_i, i = 1, \dots, n$ . Заметим, что  $q < k$  здесь соответствует тому, что  $q < 0$ , т. е. на агента накладывается штраф за искажение информации. Если же  $q = k$ , то оптимальной стратегией агента так же является стратегия  $s_i^* = c_i, i = 1, \dots, n$ . Это следует из выводов для случая  $S < R$ .

Таким образом, если установить  $q = \beta k$ , где  $\beta \leq 1$ , рассматриваемый механизм будет противозатратным в обоих случаях.

**Пусть  $S = R$ .** В этом случае  $k = 0$ . Прибыль  $i$ -го агента равна

$$P_i = q(s_i - c_i), \quad i = 1, \dots, n.$$

Последнее выражение для прибыли показывает, что при  $q < 0$  агенту выгодно уменьшать оценку себестоимости. Поэтому оптимальной стратегией агента является стратегия  $s_i^* = c_i, i = 1, \dots, n$ . Если же  $q > 0$ , то агенты должны быть заинтересованы увеличивать оценку себестоимости, однако реализовать эту заинтересованность они не могут, так как любое увеличение оценки затрат немедленно приводит к тому что из ситуации  $S = R$  агенты переходят в ситуацию  $S > R$ , в которой должно выполняться ограничение  $q \leq k$ .

Заметим здесь, что механизм остается противозатратным и в случае одного агента. Действительно, для одного агента

$$k^{(1)} = \frac{R - s_1}{l_1 - s_1}, \quad (8)$$

и  $P_1 = R - qc_1 - (1 - q)s_1$ . А так как  $q \in (0; 1]$ , то оптимальной стратегией является  $s_1^* = c_1$ .

### 3. СТОХАСТИЧЕСКИЙ СЛУЧАЙ

Здесь мы будем считать, что агенты при планировании стоимости проекта не могут точно определить его себестоимость, но им известна функция распределения  $F(x_i)$  ( $F(l_i) = 1$ ) величины себестоимости и, соответственно, плотность распределения  $f(x_i) = F'(x_i)$ . Как было сказано выше,  $s_i \leq l_i$ , в дальнейшем будем предполагать, что все оценки себестоимости, которые агенты сообщают Центру, удовлетворяют условиям  $s_i \in [d_i; l_i], i = 1, \dots, n$ , и, соответственно, справедливо условие  $c_i \in [d_i; l_i], i = 1, \dots, n$ . Таким образом, и Центру, и агентам известно, что стоимость проекта не может быть меньше  $d_i, i = 1, \dots, n$ . В отличие от детерминированного случая, где механизм считался противозатратным, когда оптимальная стратегия агента заключалась в сообщении достоверной информации о себестоимости проекта  $s_i^* = c_i, i = 1, \dots, n$ , в стохастическом случае механизм будем считать противозатратным, когда оптимальная стратегия агента заключается в сообщении планируемой себестоимости проекта меньше лимитной цены.

Сначала рассмотрим задачу с одним агентом ( $n = 1$ ).

Так как при этом значение  $k^{(1)}$  определяется по формуле (8), то прибыль агента может быть записана в виде

$$P_1(s_1) = R - s_1 + \begin{cases} q(s_1 - x_1), & \text{если } x_1 \leq s_1, \\ s_1 - x_1, & \text{если } x_1 > s_1. \end{cases}$$

Определим математическое ожидание прибыли:

$$M[P_1(s_1)] = R - s_1 + q \int_{d_1}^{s_1} (s_1 - x_1) f(x_1) dx_1 + \int_{s_1}^{l_1} (s_1 - x_1) f(x_1) dx_1. \quad (9)$$

Из выражения (9) получаем:

$$\frac{dM[P_1(s_1)]}{ds_1} = -(1 - q)F(s_1).$$



Отсюда видно, что  $\frac{dM[P_1(s_1)]}{ds_1} < 0$ . В этом случае математическое ожидание прибыли принимает максимальное значение при  $s_1 = d_1$ , что соответствует тому, что механизм противозатратный:

$$M[P_1(d_1)] = R - \int_{d_1}^{l_1} x_1 f(x_1) dx_1.$$

Пусть, например, случайная величина  $x_i, i = 1, \dots, n$ , имеет равномерное распределение на участке от  $d_i$  до  $l_i$ . Тогда плотность распределения  $f(x_i)$  может быть записана как

$$f(x_i) = \frac{1}{l_i - d_i}. \quad (10)$$

При этом математическое ожидание прибыли принимает максимальное значение, равное

$$M[P_1(d_1)] = R - \frac{l_1 + d_1}{2}.$$

Рассмотрим случай с  $n$  агентами. Учитывая выражения (4) и (5), прибыль  $i$ -го агента может быть записана в виде

$$P_i = k(L_i - s_i) + \begin{cases} q(s_i - x_i), & \text{если } x_i \leq s_i, \\ s_i - x_i, & \text{если } x_i \geq s_i, \end{cases} \quad i = 1, \dots, n.$$

Определим математическое ожидание прибыли:

$$M[P_i] = k(l_i - s_i) + s_i - (1 - q) \left( s_i F(s_i) + \int_{s_i}^{l_i} x_i f(x_i) dx_i \right) - q \int_{d_i}^{l_i} x_i f(x_i) dx_i.$$

Предположим сначала, что в системе справедлива гипотеза слабого влияния [5], согласно которой влияние оценки агента  $s_i$  на величину  $k$  не учитывается, т. е.  $\frac{\partial k}{\partial s_i} = 0$ , тогда

$$\frac{\partial M[P_i]}{\partial s_i} = (1 - k) - (1 - q)F(s_i), \quad i = 1, \dots, n. \quad (11)$$

При этом неравенство  $\frac{\partial M[P_i]}{\partial s_i} > 0$  будет выполняться всегда, если справедливо  $(1 - k) > (1 - q)$  или  $S > \frac{R - qL}{1 - q}$ . Последнее неравенство справедливо всегда, если  $D > \frac{R - qL}{1 - q}$  или

$$q > 1 - \frac{L - R}{L - D}. \quad (12)$$

Таким образом, если для величины  $q$  справедливо неравенство (12), то математическое ожида-

ние прибыли стремится к максимальному значению при  $s_i \rightarrow l_i, i = 1, \dots, n$ , а это означает, что механизм не является противозатратным.

Рассмотрим теперь случай, когда  $q < 1 - \frac{L - R}{L - D}$ .

Чтобы найти оценки агентов  $s_i, i = 1, \dots, n$ , при которых математическое ожидание прибыли принимает максимальное значение, необходимо решить систему уравнений

$$(1 - k) - (1 - q)F(s_i) = 0, \quad i = 1, \dots, n.$$

Если случайная величина  $x_i, i = 1, \dots, n$ , имеет равномерное распределение на участке от  $d_i$  до  $l_i$ , то в соответствии с формулой (10) это уравнение можно переписать в виде

$$\frac{s_i - d_i}{l_i - d_i} = \frac{1 - k}{1 - q}, \quad i = 1, \dots, n. \quad (13)$$

Решение системы (13) имеет вид:

$$s_i^{(1)} = \frac{l_i + d_i}{2} + \frac{l_i - d_i}{2} \sqrt{1 - V}, \quad i = 1, \dots, n,$$

и

$$s_i^{(2)} = \frac{l_i + d_i}{2} - \frac{l_i - d_i}{2} \sqrt{1 - V}, \quad i = 1, \dots, n,$$

где  $V = \frac{4}{1 - q} \frac{L - R}{L - D}$  и  $D = \sum_{i=1}^n d_i$ .

Отсюда видно, что система (13) имеет решение, если

$$q \leq 1 - 4 \frac{L - R}{L - D}. \quad (14)$$

Было отмечено, что при  $q \in (0; 1]$  Центр оставляет в распоряжении агента часть сверхплановой прибыли, поэтому из неравенства (14) следует, что в распоряжении агента остается часть сверхплановой прибыли, когда  $q > 0$ , или когда выполняется условие  $R > \frac{1}{4}(3L + D)$ .

Исходя из того, что

$$\frac{\partial^2 M[P_i]}{\partial s_i^2} = -(1 - q)f(s_i), \quad i = 1, \dots, n,$$

можем утверждать, что математическое ожидание прибыли имеет два локальных максимума в точках  $\{s_i^{(1)}\}$  и  $\{s_i^{(2)}\}, i = 1, \dots, n$ .

При этом математическое ожидание прибыли в точке  $\{s_i^{(1)}\}$  принимает значение, равное

$$M[P_i(s_i^{(1)})] = \frac{l_i - d_i}{2} \left[ \frac{1 + q}{2} - \frac{1 - q}{2} \left( \sqrt{1 - V} + \frac{1}{2} V \right) \right], \quad i = 1, \dots, n. \quad (15)$$



а в точке  $\{s_i^{(2)}\}$

$$M[P_i(s_i^{(2)})] = \frac{l_i - d_i}{2} \left[ \frac{1+q}{2} + \frac{1-q}{2} \left( \sqrt{1-V} - \frac{1}{2}V \right) \right],$$

$$i = 1, \dots, n. \quad (16)$$

Сравнивая выражения (15) и (16), легко увидеть, что максимальное значение математического ожидания агенты получают в точке  $\{s_i^{(2)}\}$ . Это означает, что рассматриваемый механизм — противозатратный.

В работе [5] при исследовании взаимодействия Центра с одним стохастическим элементом введено понятие надежности оценки плана элемента. По аналогии с надежностью определим вероятность того, что случайная величина оценки стоимости проекта  $\{s_i\}$  примет значение не больше, чем  $\{s_i^{(2)}\}$ . Из функции распределения следует, что вероятность  $p(s_i \leq s_i^{(2)})$  определяется выражением

$$p(s_i \leq s_i^{(2)}) = \frac{1 - \sqrt{1-V}}{2}.$$

Чтобы эта вероятность была не меньше, чем  $u$  (которую будем считать надежностью оценки  $\{s_i\}$ ), должно быть справедливо неравенство

$$\frac{1 - \sqrt{1-V}}{2} \geq u.$$

Из этого неравенства следует, что максимальное значение  $u$  не может превышать 0,5. Достижение этой надежности можно обеспечить выбором значения  $q$ . Действительно, достаточно выбрать такое значение  $q$ , чтобы неравенство (14) превратилось в равенство. Отметим здесь, что выбор значения  $q$  определяет значение  $\{s_i^{(2)}\}$ . Для  $q = 1 - 4 \frac{L-R}{L-D}$

получаем  $s_i^{(2)} = \frac{l_i + d_i}{2}$  и при этом  $p(s_i \leq \frac{l_i + d_i}{2}) = \frac{1}{2}$ .

Рассмотрим теперь случай, когда  $\frac{\partial k}{\partial s_i} \neq 0$ , при этом формулу (11) можно переписать в виде

$$\frac{\partial M[P_i]}{\partial s_i} = (1-k) \left( 1 - \frac{l_i - s_i}{L-S} \right) - (1-q)F(s_i),$$

$$i = 1, \dots, n. \quad (17)$$

Если предположить, что для достаточно большого  $n$  справедливо

$$\frac{l_i - s_i}{L-S} = \frac{l_i - s_i}{\sum_{j=1}^n (l_j - s_j)} \approx \frac{1}{n},$$

то формула (17) принимает вид:

$$\frac{\partial M[P_i]}{\partial s_i} = \frac{(n-1)(1-k)}{n} - (1-q)F(s_i), \quad i = 1, \dots, n.$$

Нетрудно видеть, что неравенство  $\frac{\partial M[P_i]}{\partial s_i} > 0$  будет выполняться всегда, если справедливо  $\frac{(n-1)(1-k)}{n} > (1-q)$  или  $S > \frac{(n-1)R - (nq-1)L}{n(1-q)}$ . Последнее неравенство справедливо всегда, если  $D > \frac{(n-1)R - (nq-1)L}{n(1-q)}$  или

$$q > 1 - \frac{n-1}{n} \frac{L-R}{L-D}. \quad (18)$$

Таким образом, если для величины  $q$  справедливо неравенство (18), то математическое ожидание прибыли стремится к максимальному значению при  $s_i \rightarrow l_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Это означает, что в данном случае механизм не является противозатратным.

Рассмотрим теперь случай, когда  $q < 1 - \frac{n-1}{n} \times \frac{L-R}{L-D}$ . Чтобы найти оценки агентов  $s_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , при которых математическое ожидание прибыли принимает максимальное значение, необходимо решить систему уравнений

$$\frac{(n-1)(1-k)}{n} - (1-q)F(s_i) = 0, \quad i = 1, \dots, n.$$

Если случайная величина  $x_i$ ,  $i = 1, \dots, n$  имеет равномерное распределение на участке от  $d_i$  до  $l_i$ , то, соответственно, справедливо выражение (10). Тогда это уравнение можно переписать в виде

$$\frac{s_i - d_i}{l_i - d_i} = \frac{n-1}{n(1-q)} \frac{L-R}{L-S}, \quad i = 1, \dots, n. \quad (19)$$

Решение системы (19) имеет вид:

$$\hat{s}_i^{(1)} = \frac{l_i + d_i}{2} - \frac{l_i - d_i}{2} \sqrt{1 - \frac{n-1}{n} V}, \quad i = 1, \dots, n,$$

и

$$\hat{s}_i^{(2)} = \frac{l_i + d_i}{2} + \frac{l_i - d_i}{2} \sqrt{1 - \frac{n-1}{n} V}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Отсюда видно, что система (19) имеет решение, если справедливо неравенство

$$q \leq 1 - 4 \frac{n-1}{n} \frac{L-R}{L-D}. \quad (20)$$



Напомним, что Центр оставляет в распоряжении агента часть сверхплановой прибыли, когда  $q > 0$ . Из неравенства (20) легко получить, что в распоряжении агента остается часть сверхплановой прибыли при выполнении условия  $R > \frac{(3n-4)L+nD}{4(n-1)}$ .

Исходя из того, что

$$\frac{\partial^2 M[P_i]}{\partial s_i^2} = -\frac{n-1}{n} \frac{\partial k}{\partial s_i} - (1-q)f(s_i),$$

нетрудно показать, что всегда справедливо

$$\begin{aligned} & \left. \frac{\partial^2 M[P_i]}{\partial s_i^2} \right|_{s_i = \hat{s}_i^{(1)}} = \\ & = \frac{1-q}{l_i-d_i} \left( \frac{n}{n-1} \frac{l_i-d_i}{L-D} V \left( 1 - \sqrt{1 - \frac{n-1}{n} V} \right)^2 - 1 \right) < 0. \end{aligned}$$

А это означает, что математическое ожидание прибыли имеет максимум в точке  $\{\hat{s}_i^{(1)}\}$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Значение этого максимума равно

$$M[P_i] = \frac{l_i-d_i}{2} \left[ \frac{1+q}{2} + \frac{1-q}{2} \left( \sqrt{1 - \frac{n-1}{n} V} - \frac{n+1}{2n} V \right) \right], \quad i = 1, \dots, n. \quad (21)$$

Следовательно, механизм противозатратный.

Для рассматриваемого случая можно также определить вероятность того, что случайная величина оценки себестоимости проекта  $\{s_i\}$  примет значение не больше, чем  $\{s_i^{(1)}\}$ . Нетрудно показать, что максимальное значение  $u$  и в этом случае не может превышать 0,5. Для достижения этого значения достаточно выбрать такое значение  $q$ , чтобы неравенство (20) превратилось в равенство.

Из формул (15), (16) и (21) следует, что максимальные значения математического ожидания прибыли агентов отличаются друг от друга, только если у них отличаются значения разницы между лимитной ценой  $l_i$  и минимальной оценкой стоимости проекта  $d_i$ .

Если себестоимости проектов агентов не сильно отличаются друг от друга, будем считать, что разница между лимитной ценой  $l_i$  и минимальной оценкой стоимости проекта  $d_i$  для всех агентов одинакова, т. е.  $l_i - d_i = w$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Тогда для равномерного распределения случайной величины  $x_i$ ,

$i = 1, \dots, n$ , на участке от  $d_i$  до  $l_i$  производная (17) может быть записана как

$$\begin{aligned} \frac{\partial M[P_i]}{\partial s_i} &= (1-k) \left( 1 - \frac{l_i-s_i}{L-S} \right) - (1-q) \frac{s_i-d_i}{w}, \\ & i = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Чтобы найти оценки агентов  $s_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , при которых математическое ожидание прибыли принимает максимальное значение, необходимо решить систему уравнений

$$(1-k) \left( 1 - \frac{l_i-s_i}{L-S} \right) - (1-q) \frac{s_i-d_i}{w} = 0, \quad i = 1, \dots, n. \quad (22)$$

Решение этой системы имеет вид:

$$\tilde{s}_i^{(1)} = l_i - \frac{w}{2} \left( 1 - \sqrt{1 - \frac{n-1}{n} V} \right), \quad i = 1, \dots, n,$$

и

$$\tilde{s}_i^{(2)} = l_i - \frac{w}{2} \left( 1 + \sqrt{1 - \frac{n-1}{n} V} \right), \quad i = 1, \dots, n. \quad (23)$$

Легко видеть, что система (22) имеет решение, если справедливо неравенство (20). Для случая, когда  $l_i - d_i = w$ ,  $i = 1, \dots, n$ , неравенство (20) можно записать в виде  $q \leq 1 - \frac{4}{n-1} \frac{L-R}{w}$ .

Исходя из того, что

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 M[P_i]}{\partial s_i^2} &= 2 \left( 1 - \frac{l_i-s_i}{L-S} \right) \frac{(1-k)}{L-S} - (1-q)f(s_i), \\ & i = 1, \dots, n, \end{aligned} \quad (24)$$

то, учитывая формулы (2), (10) и (23), выражение (24) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} & \left. \frac{\partial^2 M[P_i]}{\partial s_i^2} \right|_{s_i = \tilde{s}_i^{(2)}} = \\ & = 2 \frac{1-q}{w} \left[ \frac{1}{(n-1)V} \left( 1 - \sqrt{1 - \frac{n-1}{n} V} \right)^2 - \frac{1}{2} \right], \\ & i = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Из этого выражения следует, что  $\left. \frac{\partial^2 M[P_i]}{\partial s_i^2} \right|_{s_i = \tilde{s}_i^{(2)}} < 0$ . Таким образом, максимум математического ожидания прибыли достигается в точке  $\tilde{s}_i^{(2)}$ . А это соответствует тому, что механизм противозатратный.

При этом математическое ожидание прибыли принимает значение, равное

$$M[P_i(\hat{s}_i^{(2)})] = \\ = \frac{w}{4} \left[ 1 + q - (1 - q) \left( \frac{n+1}{2n} V - \sqrt{1 - V \frac{n-1}{n}} \right) \right], \\ i = 1, \dots, n. \quad (25)$$

Отсюда видно, что если разница между лимитной ценой  $l_i$  и минимальной оценкой стоимости проекта  $d_i$  у всех агентов одинакова, то максимальные значения математического ожидания прибыли агентов не отличаются друг от друга.

Выражение (16), когда  $l_i - d_i = w$ ,  $i = 1, \dots, n$ , может быть записано в виде

$$M[P_i(s_i^{(2)})] = \frac{w}{4} \left[ 1 + q - (1 - q) \left( \frac{V}{2} - \sqrt{1 - V} \right) \right]. \quad (26)$$

Сравнивая формулы (25) и (26), получаем, что

$$M[P_i(\hat{s}_i^{(2)})] > M[P_i(s_i^{(2)})].$$

Таким образом, математическое ожидание прибыли в ситуации, когда агенты придерживаются гипотезы слабого влияния, оказывается меньше, чем в ситуации, когда агенты не учитывают слабого влияния.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В рамках задачи определения цен отдельных проектов, составляющих единую программу, рассмотрены детерминированный и стохастический случаи. В детерминированном случае противозатратность механизма обеспечивается выбором значения норматива  $q$ , определяющего величину сверхплановой прибыли, остающейся у агента ( $q \leq k$ ). Что касается стохастического случая, то условия противозатратности по известным причинам уже не могут обеспечивать совпадение плановой себестоимости проекта с фактической себестоимостью, а побуждают агентов сообщать планируемую себестоимость меньше лимитной цены. И здесь выбор норматива  $q$  позволяет не только обеспечить сообщение агентами оценок себестоимости ниже лимитной цены, но и определить условия, при которых можно рассчитать математическое ожидание прибыли. Кроме того, отметим, что параметры механизмов формирования цены выполнения проекта при ограничении на сумму цен могут быть выражены аналитически, если реализуется слабое влияние действий одного агента на показатели функционирования всей системы. Слабое влияние проявляется в случае, когда число агентов велико. В то же время, при увеличении числа проектов

(и, соответственно, агентов) ужесточаются ограничения на значение величины  $q$ , при которых агенты могут получать часть сверхплановой прибыли.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Бурков В.Н., Данев Б., Еналеев А.К. и др. Большие системы: моделирование организационных механизмов. — М.: Наука, 1989. — 246 с. [Burkov, V.N., Danev, B., Enaleev, A.K., et al. Large systems: modeling of organizational mechanisms. — Moscow: Nauka, 1989. — 246 p. (In Russian)]
2. Бурков В.Н., Кашенков А.Р. Противозатратные механизмы управления научными исследованиями и разработками. В кн. Совершенствование организационно-экономического механизма управления деятельностью научно-исследовательских и проектно-конструкторских учреждений. — М.: МДНТП, 1988. — С. 45. [Burkov, V.N., Kashenkov, A.R. Cost-saving mechanisms of scientific research and development management. In the book: Improving the organizational and economic mechanism for managing the activities of research and design institutions. — Moscow: MDNTP, 1988. — P. 45. (In Russian)]
3. Щепкин А.В. Противозатратные механизмы финансирования // Проблемы управления. — 2018. — № 3. — С. 17–25. [Shchepkin, A.V. Cost-Reducing Funding Mechanisms // Control Sciences. — 2018. — No. 3. — P. 17–25. (In Russian)]
4. Бурков В.Н., Дорри М.Х., Щепкин А.В., Кашенков А.Р. Манипулируемость противозатратного механизма ценообразования при определении стоимостей разработки, состоящей из нескольких проектов // Информационные технологии моделирования и управления. — 2018. — Т. 112. — № 4. — С. 244–252. [Burkov, V.N., Dorri, M.Kh., Shchepkin, A.V., Kashenkov, A.R. Manipulability of the Cost-Saving Pricing Mechanism in Determining the Costs of a Development Consisting of Several Projects // Information Technologies of Modeling and Management. — 2018. — Vol. 112, no. 4. — P. 244–252. (In Russian)]
5. Бурков В.Н. Основы математической теории активных систем. — М.: Наука, 1977. — 255 с. [Burkov, V.N. Fundamentals of the mathematical theory of active systems. — M.: Science, 1977. — 255 p. (In Russian)]
6. Хайек Ф.А. Право, законодательство и свобода: Современное понимание либеральных принципов справедливости и политики. — М.: ИРИСЭН, 2006. — 644 с. (Серия «Политическая наука») [Hayek, F.A. Law, Legislation and Liberty. A New Statement of the Liberal Principles of Justice and Political Economy — Routledge, 1982. — 646 p.]
7. Искосков М.О. Разработка алгоритма управления инвестиционными затратами на основе механизма развертывания целей // Вопросы экономики и права. — 2011. — № 37. — С. 102–107. [Iskoscov, M.O. Development of an Algorithm for Managing Investment Costs Based on the Goal Deployment Mechanism // Questions of Economics and Law. — 2011. — No. 37. — P. 102–107. (In Russian)]
8. Кузов М. Управление затратами: практика, идеи, подходы // Управление компанией. — 2007. — № 1. — С. 24–26. [Kuzov, M. Cost Management: Practice, Ideas, Approaches // Company Management. — 2007. — No. 1. — P. 24–26. (In Russian)]
9. Латыгин Ю.Н., Прохорова Н.Г. Управление затратами на предприятии: планирование и прогнозирование, анализ и минимизация затрат: практическое руководство. — М.: Экспо, 2008. — 400 с. [Lapygin, Yu.N., Prokhorova, N.G. Cost Management at the Enterprise: Planning and Forecasting, Analysis and Cost Minimization: A Practical Guide. — M.: Expo, 2008. — 400 p. (In Russian)]
10. Мицкевич А.А. Управление затратами и прибылью. — М.: Олма-Пресс. Инвест. Ин-т экономических стратегий, 2003. — 192 с. [Mitskevich, A.A. Cost and Profit Management. — M.: Olma-Press. Invest. Institute of Economic Strategies, 2003. — 192 p. (In Russian)]



11. *Saraev A.L., Tatarskikh B.Ya.* Нормирование затрат как инструмент управления производством продукции промышленных предприятий // Вестник Самарского государственного экономического университета. — 2012. — № 4. — С. 79–85. [*Saraev, A.L., Tatarskikh, B.Ya.* Rationing of Costs as a Tool for Managing Production of Industrial Enterprises Products // Vestnik Samarskogo gosudarstvennogo ekonomicheskogo universiteta. — 2012. — № 4. — P. 79–85. (In Russian)]
12. *Хамидуллина Г.Р.* Управление затратами: планирование, учет, контроль и анализ издержек обращения. — М.: Издательство «Экзамен», 2004. — 352 с. [*Khamidullina, G.R.* Cost Management: Planning, Accounting, Control and Analysis of Circulation Costs. — М.: Publishing House «Exam», 2004. — 352 p. (In Russian)]
13. *Hylton, K.N.* Antitrust Law: Economic Theory and Common Law Evolution. — Cambridge, University Press, 2003. — 430 p.
14. *Rockefeller, E.S.* Antitrust religion. — Cato Institute, 2007. — 124 p.
15. *Connor, J.M.* Effectiveness of Antitrust Sanctions of Modern International Cartels // Journal of Industry, Competition and Trade. — 2006. — Vol. 6, no. 3. — P.195–223.
16. *Manne, G.A., Wright, J.D.* Innovation and the Limits of Antitrust // Journal of Competition Law and Economics. 2010. — Vol. 6, no 1. — P. 153–202.
17. *Spedding, T.A, Sun, G.Q.*, Application of Discrete Event Simulation to the Activity Based Costing of Manufacturing Systems // International Journal of Production Economics. — 1999. — Vol. 58, no. 3. — P. 289–301.
18. *Mevellec, P.* Cost Systems Design. — Springer International Publishing, 2009. — 310 p.
19. *Berk, J.* Cost Reduction and Optimization for Manufacturing and Industrial Companies. — John Wiley & Sons, Inc. Hoboken, New Jersey and Scrivener Publishing LLC, Salem, Massachusetts, 2010. — 272 p.
20. *Бурков В.Н., Еналеев А.К., Новиков Д.А.* Вероятностная задача стимулирования // Автоматика и телемеханика. — 1993. — № 12. — С. 140–145. [*Burkov, V.N., Enaleev, A.K., Novikov, D.A.* Probabilistic Incentive Task // Automation and Remote Control. — 1993. — No. 12. — P. 140–145. (In Russian)]
21. *Еналеев А.К., Новиков Д.А.* Оптимальные механизмы стимулирования в активной системе с вероятной неопределенностью. I // Автоматика и телемеханика. — 1995. — № 9. — С. 117–126. [*Enaleev, A.K., Novikov, D.A.* Optimal Incentive Mechanisms in an Active System with Probable Uncertainty I // Automation and Remote Control. — 1995. — No. 9. — P. 117–126. (In Russian)]
22. *Бурков В.Н., Новиков Д.А.* Оптимальные механизмы стимулирования в активной системе с вероятностной неопределенностью. II // Автоматика и телемеханика. — 1995. — № 10. — С. 121–126. [*Burkov, V.N., Novikov, D.A.* Optimal Incentive Mechanisms in an Active System with Probabilistic Uncertainty II // Automation and Remote Control. — 1995. — No. 10. — P. 121–126. (In Russian)]
23. *Hart, O., Holmstrom, B.* Theory of Contracts // Advances in Economic Theory, 5th World Congress / Cambridge. — 1987. — P. 71–155.
24. *Hart, O.* Firms, Contracts and Financial Structure. — Oxford: Oxford University Press, 1995. — 240 p.
25. *Hart, O., Holmstrom, B.* Theory of Firm Scope // Quarterly Journal of Economics. — 2010. — Vol. 125, no. 2. — P. 483–513.
26. *Bolton, P.* Corporate Finance, Incomplete Contracts, and Corporate Control // Journal of Law, Economics, and Organization. — 2014. — Vol. 30, no. 1. — P. 64–81.
27. *Kreitner, R.* Voicing the market: Extending the ambition of contract theory // University of Toronto Law Journal. — 2019. — Vol. 69, no. 3. — P. 295–336.
28. *Dagan, H., Heller, M.* The Choice Theory of Contracts. — Cambridge: Cambridge University Press, 2017. — P. 180.
29. *Osadská, V.* Stochastic methods in risk analysis Transactions of the VSB — Technical university of Ostrava Safety Engineering Series. — 2017. — Vol. 12, no. 1. — P. 61–67.
30. *Moncef, E.* Stochastic calculus in a risk model with stochastic return on investments / An International Journal of Probability and Stochastic Processes. — 2021. — Vol. 93. — P. 110–129.
31. *Бурков В.Н., Коргин Н.А., Новиков Д.А.* Введение в теорию управления организационными системами: Учебник / Под ред. Д.А. Новикова. — М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2009. — 264 с. [*Burkov, V.N., Korgin, N.A., Novikov, D.A.* Introduction to the Theory of Organizational Systems Management: Textbook / Ed. by D.A. Novikov. — М.: Book House «LIBROCOM», 2009. — 264 p. (In Russian)]

Статья представлена к публикации руководителем регионального редсовета Г.А. Угольницким.

Поступила в редакцию 08.02.2021, после доработки 09.03.2020.  
Принята к публикации 10.03.2020.

**Бурков Владимир Николаевич** — д-р техн. наук, ✉ vlab17@bk.ru,  
**Щепкин Александр Васильевич** — д-р техн. наук,  
✉ av\_shch@mail.ru,

Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН,  
г. Москва.

## PRICING MECHANISMS FOR COST REDUCTION UNDER BUDGET CONSTRAINTS

V.N. Burkov and A.V. Shchepkin

Trapeznikov Institute of Control Sciences, Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia

✉ vlab17@bk.ru, ✉ av\_shch@mail.ru

**Abstract.** The problem of evaluating the prices (cost) of individual projects of a megaproject or program is considered. The megaproject manager evaluates the cost of each project based on its planned cost reported by the project executors under the budget constraint on the total cost of the program. The executor of each project is a monopolist in the relevant area and cannot be replaced by another executor. In the deterministic case, the executors know the exact actual cost of their project; the manipulability of the mechanism for forming the cost of projects is investigated. In the stochastic case, the executors do not know the actual cost of their projects; when evaluating the planned cost, they estimate a probable value of the actual cost. For this estimate, the distribution function of the project's actual cost is used. The paper proposes a pricing mechanism for cost reduction under the budget constraint on the total cost of the program and a given probability distribution of the project's actual cost.

**Keywords:** cost price, limit price, profit, mathematical expectation, manipulability, counter-expensive property.

# ИССЛЕДОВАНИЕ ПОКАЗАТЕЛЕЙ СТРАТЕГИИ РАЗВИТИЯ СПОРТА В РЕГИОНАХ РФ

В.Н. Прокофьев, К.В. Акимова, А.Л. Мячин

**Аннотация.** Проведен анализ спортивных показателей регионов Российской Федерации как для поиска регионов со схожей (по выбранной методологии и рассматриваемым мерам близости) стратегией развития, так и для выявления динамических групп в четырехлетнем периоде. Приведено описание некоторых методов кластеризации и анализа паттернов и обоснованность их применения в настоящем исследовании. Проведено сопоставление результатов, полученных на основе классических методов кластеризации и порядково-инвариантной паттерн-кластеризации. Выделены и проанализированы основные государственные программы в области спорта в Российской Федерации. Обозначены основные аспекты и проблемы в области государственного регулирования спортивной деятельности в Российской Федерации. Предложены варианты усовершенствования действующих нормативно-правовых актов на основе результатов динамического анализа паттернов регионов.

**Ключевые слова:** спорт, спортивная жизнь, физическая культура, государственное регулирование, кластерный анализ, анализ паттернов, порядково-инвариантная паттерн-кластеризация.

## ВВЕДЕНИЕ

В течение последних 15 лет в области спорта в Российской Федерации осуществляются реформы, направленные на улучшение спортивной инфраструктуры и на повышение обобщенных показателей, характеризующих уровень здоровья граждан страны. Давно известно, что именно спорт способствует улучшению самочувствия, а также повышает качество и продолжительность жизни.

Одной из проблем исследования данной тематики является операционализация самого понятия «спорт», поскольку «спорт» и «физическая культура» часто смешиваются. Возникновению подобных неточностей способствуют несколько факторов. В монографии [1] предполагается, что непонимание существующего различия возникает в связи со схожестью данных терминов. Чтобы исключить путаницу и дать однозначные определения, в России в 2007 г. был принят Федеральный закон № 329 «О физической культуре и спорте в Российской Федерации», в котором собраны спортивные понятия, их разъяснения, права и обязанности спортивных субъектов, а также создана система выстраивания спортивных федераций на всех уровнях власти. Так, например, понятие «спорт» определено как «сфера социально-культурной деятельности как совокупность видов спорта, сложившаяся

в форме соревнований и специальной практики подготовки человека к ним» [2]. Отсюда следует вывод: спорт, хотя и входит в состав физической культуры, но существенно отличается содержанием. Настоящая работа предполагает использование базовой системы показателей для комплексного исследования показателей эффективности развития спорта. Ранее, насколько известно авторам, проводилась лишь оценка отдельных показателей: развитие инфраструктуры [3], кадровая политика [4], эффективность госпрограмм и НПА [5].

В данный момент спорт, физическая культура и забота о здоровье являются социально популярными и «в тренде роста» [6]: по сравнению с 19 % в 2011 г. доля россиян, занимающихся спортом, выросла до 39,4 % в 2018 г., что является одной из причин формирования основы государственной социально-экономической политики Российской Федерации с учетом потребностей населения в занятии спортом и физической культурой. Правительство утверждает государственные программы, которые приобщают население к занятию спортом, а также улучшают спортивную инфраструктуру в стране. Примером может служить Федеральная целевая программа «Развитие физической культуры и спорта в Российской Федерации на 2006–2015 годы», цель которой заключается в приобщении всех слоев населения к занятию спортом

**Прогнозируемые и реальные результаты ФЦП «Развитие физической культуры и спорта в Российской Федерации на 2006—2015 годы»**

Показатель	Прогнозируемые результаты [7]	Реальные результаты <sup>1</sup>
Доля граждан Российской Федерации, систематически занимающихся физической культурой и спортом (%)	Увеличить до 30 % от общего числа граждан Российской Федерации	До: 15,9 После: 31,7
Обеспеченность населения Российской Федерации спортивными сооружениями (%):	Увеличить до 30 объектов на 100 тыс. жителей (один объект на 3000 чел.)	До: 22,7 После: 30,1
Количество квалифицированных тренеров, работающих по специальности, которые проводят физкультурную и оздоровительную работу (в 1 000 чел.):	Увеличить до 300 000 чел. (приблизительно один действующий тренер на 420 чел.)	До: 295,6 После: 361,3
Доля физкультурно-спортивных мероприятий (%)	Увеличить с 3 % в 2012 г. до 6 % к 2020 г.	В рамках ЕКП (Единый календарный план межрегиональных, всероссийских и международных физкультурных мероприятий, и спортивных мероприятий) проведено почти на 6 % больше мероприятий (более 11.600) по сравнению с 2014 г.

<sup>1</sup> URL: <https://www.minsport.gov.ru/activities/reports/9/28555/> (дата обращения: 17.01.2021)

путем создания необходимых условий (развитие спортивной инфраструктуры).

Несмотря на относительно высокие достигнутые значения показателей (по всем заявленным пунктам, см. табл. 1), в отчете Министерства спорта<sup>2</sup> по итогам данной госпрограммы были выделены проблемы:

- отсутствия эффективной системы развития детского и юношеского спорта,
- слабого уровня конкуренции в спорте высших достижений,
- среднестатистические возможности улучшения физического развития и здоровья у граждан
- отставания в инновационных технологиях в области спорта.

Однако, как упоминалось ранее, задача повышения значений показателей развития уровня спорта была эффективно выполнена. Таким образом, уже частично решены некоторые проблемы. К примеру, создана технологически инновационная спортивная база и инфраструктура (благодаря тому, что в России проводился чемпионат мира по футболу в 2018 г., способствовавший улучшению инвестиционного климата и повышению имиджа России на мировой спортивной арене). Однако, существует и ряд проблем [8]:

- высокие барьеры входа на рынок для новых производителей спортивных товаров,
- недостаток научно-исследовательских работ и проектов в области спорта,

<sup>2</sup> <https://minsport.gov.ru/activities/reports/fiz-ra-i-sport-skryt/26361/>

— недостаточный уровень спроса на отечественную спортивную продукцию и доли российской продукции на мировом уровне.

Для их решения в 2019 г. Правительством РФ была утверждена Стратегия развития спортивной индустрии до 2035 г. [9], которая ориентирована на создание новой системы спортивного воспитания населения, создание и внедрение мер по активной пропаганде здорового образа жизни, а также создание эффективных условий для развития физического воспитания в образовательных учреждениях. Итогом реализации данной стратегии должно стать увеличение доли населения, систематически занимающегося спортом, до 55 %, а также увеличение средней продолжительности здоровой жизни населения до 67 лет; планируется отремонтировать около 20 тыс. действующих спортивных площадок и оснастить их современным оборудованием, а также увеличить объем экспорта спортивной российской продукции на 30 % к 2024 г., что составит около 113 млн. долл.

## 1. МЕТОДОЛОГИЯ ВЫЯВЛЕНИЯ ОДНОРОДНЫХ ГРУПП РЕГИОНОВ СОГЛАСНО СТРУКТУРЕ РАЗВИТИЯ СПОРТА

Выявление структурно близких (даже при наличии фиксированной системы показателей) регионов по уровню спортивного развития представляет собой непростую задачу. Применение различных методов для ее решения связано с определенными особенностями, обуславливающими различие конечных результатов. Исходя из поставленной задачи, возможно использование таких подходов,

как линейная свертка и пороговое агрегирование; формирование агрегированных рейтингов (при возможности задействования теории индивидуального и коллективного выбора); методы классификации данных, кластеризации данных и анализа паттернов. Подробнее рассмотрим возможность применения каждого подхода.

Применению линейной свертки и порогового агрегирования для формирования единого агрегированного рейтинга, позволяющего выявить отдельные группы регионов, свойственны несколько положительных аспектов. Прежде всего, это простота и прозрачность расчетов. Присвоение каждому региону отдельной числовой характеристики (при линейной свертке показателей) или отдельного места в рейтинге (при пороговом агрегировании) позволяет оценить, насколько определенные регионы отстают от других. К тому же, минимизируются временные издержки, поскольку данные методы не требуют больших вычислительных затрат (при наличии базовой системы показателей). Однако, сложность применения подобного подхода заключена в проблеме с определением (а часто, и с невозможностью определения) веса каждого показателя или обоснования их равнозначности. Принцип использования линейной свертки позволяет, при составлении единой агрегированной характеристики, компенсировать низкие значения одних показателей высокими значениями других. Также следует отметить, что выстраивание единого рейтинга регионов согласно уровню развития спорта не входит в задачи настоящего исследования.

Другой подход предполагает использование агрегированных рейтингов (при возможности применения теории индивидуального и коллективного выбора). Наличие различных количественных показателей позволяет задействовать различные процедуры (к примеру, Борда, Хара или Нансона) для составления единого агрегированного рейтинга. Таким образом, «близость» регионов может быть определена их положением в рейтинге.

Практическое применение методов классификации данных в настоящем исследовании осложняется ввиду отсутствия как понимания конечного количества классов, так и их типичных представителей. Поскольку обучающую выборку в данном случае составить сложно, применение подобных методов затруднительно.

Основное отличие двух оставшихся подходов (применение методов кластерного анализа и анализа паттернов) — независимость от абсолютных значений показателей при анализе паттернов. Кластеризации данных посвящено множество обзоров (к примеру, [10, 11]). Поскольку одной из задач исследования является разделение всех регионов на группы, внутри которых будут находиться субъекты со схожим набором признаков, приме-

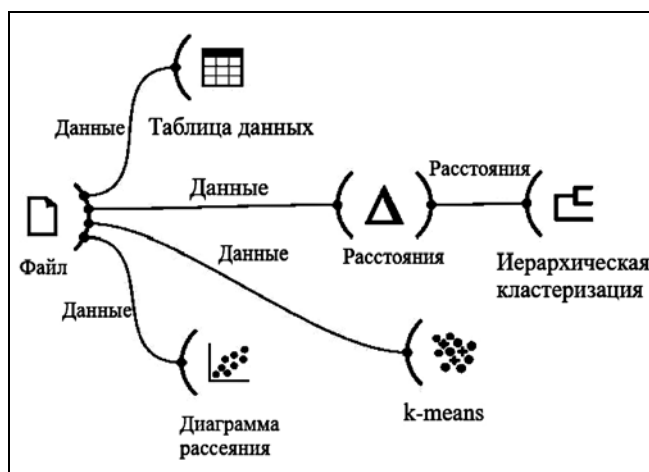


Рис. 1. Реализация методов кластеризации в программе Orange

ние методов кластеризации представляется одним из возможных решений. При этом будем пользоваться определением понятия «кластер» из работы [11, с. 4]: «часть данных, ..., которая выделяется из остальной части наличием некоторой однородности элементов». Среди множества существующих методологий в настоящем исследовании мы остановились на двух подходах (исходя из интерпретируемости полученных на их основе результатов): иерархическая кластеризация и k-means. Для автоматизации расчетов авторы пользовались программой Orange (рис. 1). Используемые метрики:  $L_1$  (манхэттенское расстояние) и  $L_2$  (евклидово расстояние). Для сравнения, в применяемых методах анализа паттернов в качестве оценки близости объектов используют расстояние Хемминга.

Анализ паттернов менее известен в русскоязычной литературе в сравнении с кластерным анализом (к примеру, по состоянию на 25.02.2021 ресурс Google Academy предоставил 76 тыс. результатов по запросу «кластерный анализ» против 42 тыс. по запросу «анализ паттернов»; при этом по запросу «cluster analysis» ресурс выдает более 4,5 млн результатов против 5,8 млн результатов у «pattern analysis»). Под паттерном в настоящей работе будем понимать «комбинацию определенных качественно похожих признаков» [12, с. 139]. Задача методов состоит в том, чтобы сгруппировать объекты, имеющие схожую структуру показателей при эндогенном определении состава и количества полученных групп. В настоящем исследовании применялись методы анализа паттернов, предполагающие парное сравнение показателей (порядково-фиксированная паттерн-кластеризация и порядково-инвариантная паттерн-кластеризация), алгоритмическая реализация которых описана в работах [12–14]. Порядково-фиксированная пат-



терн-кластеризация предполагает использование заранее заданной последовательности исследуемых показателей, и, как правило, применяется для получения предварительных «грубых» результатов. Порядково-инвариантная паттерн-кластеризация предполагает независимость результатов от выбора исходной последовательности показателей. Полное описание применяемой методологии (с характеристикой основных свойств) приведена в статье [12].

В настоящее время анализ паттернов используется в разных сферах: в области науки, образования и инновационной деятельности [15], в макроэкономическом анализе, в политологии и в оценке инновационного развития регионов [16], анализе электорального поведения [17], в работе [18] описан анализ коммерческих банков, а оценка государственной составляющей приведена в работе [19].

Распространенность данного метода объясняется возможностью не только анализа текущего положения исследуемых объектов, но и составления динамических траекторий развития (при исследовании смены паттерна регионов с течением времени).

## 2. ПОКАЗАТЕЛИ, ХАРАКТЕРИЗУЮЩИЕ РАЗВИТИЕ СПОРТА В РЕГИОНАХ РФ

Эффективность развития спорта и физической культуры в стране зависит от многих факторов: например, экономических (заработные платы, строительство необходимой инфраструктуры), демографических (уровень жизни населения), политических (создание госпрограмм, выделение на них необходимого финансирования, государственная поддержка спортивной жизни). Именно поэтому Министерством спорта РФ была сформирована система показателей, характеризующая все области спортивной жизни. Отчеты об этих показателях публикуются на официальном сайте Минспорта РФ.

В качестве исходных переменных в работе будут использованы показатели с 2014 по 2017 г., опубликованные в ежегодных отчетах Министерства спорта РФ. Для однозначности каждый регион  $r_i$  в год  $t$  будет описываться вектором  $r_i^t = (r_{i1}^t, r_{i2}^t, r_{i3}^t, r_{i4}^t, r_{i5}^t, r_{i6}^t, r_{i7}^t)$ , где:

$r_{i1}^t$  — фактическая доля граждан, систематически занимающихся физической культурой и спортом, в общей численности населения в год  $t$ ;

$r_{i2}^t$  — фактическая доля учащихся и студентов, систематически занимающихся физической культурой и спортом, в общей численности учащихся и студентов в год  $t$ ;

$r_{i3}^t$  — количество спортивных сооружений на 100 тыс. чел. населения в год  $t$ ;

$r_{i4}^t$  — фактический уровень обеспеченности населения спортивными сооружениями, исходя из единовременной пропускной способности объектов спорта в год  $t$ ;

$r_{i5}^t$  — количество подготовленных разрядников в год  $t$ ;

$r_{i6}^t$  — сумма финансирования физкультуры и спорта на одного жителя (руб.) в год  $t$ ;

$r_{i7}^t$  — кадровое обеспечение (количество штатных работников физической культуры и спорта) в год  $t$ .

В настоящем исследовании не использованы данные за 2018—2020 гг. в связи с некоторыми отличиями, связанными как со сбором, так и с методологией расчета некоторых показателей. Исследование данных последних трех лет станет одним из направлений дальнейшей работы.

До проведения анализа данных была осуществлена их предварительная обработка. Проведен корреляционный анализ (с использованием коэффициента корреляции Пирсона), результаты которого представлены в табл. 2 (приведен пример за 2017 г.). Нормировка каждого из показателей проведена с помощью линейного масштабирования согласно формуле

$$\tilde{r}_{ij}^t = \frac{r_{ij}^t - r_{j\_min}^t}{r_{j\_max}^t - r_{j\_min}^t},$$

Таблица 2

Корреляционный анализ показателей 2017 г.

	$r_{i1}^{2017}$	$r_{i2}^{2017}$	$r_{i3}^{2017}$	$r_{i4}^{2017}$	$r_{i5}^{2017}$	$r_{i6}^{2017}$	$r_{i7}^{2017}$
$r_{i1}^{2017}$	1						
$r_{i2}^{2017}$	0,83	1					
$r_{i3}^{2017}$	0,31	0,37	1				
$r_{i4}^{2017}$	0,34	0,36	0,76	1			
$r_{i5}^{2017}$	0,26	0,21	-0,17	-0,23	1		
$r_{i6}^{2017}$	0,44	0,37	0,14	0,12	0,46	1	
$r_{i7}^{2017}$	-0,16	-0,20	-0,14	-0,17	0,02	-0,07	1



где  $r_{j\_max}^t$  и  $r_{j\_min}^t$  — максимальные и минимальные значения показателя  $j$  за период времени  $t$  соответственно.

Корреляционный анализ за четыре года показал наличие сильной корреляции (на уровне 0,83) между показателями «доля граждан» и «доля учащихся и студентов», поэтому один из этих показателей можно исключить из дальнейшего анализа, так как сильная корреляция может негативно повлиять на группировку паттернов. Также отметим наличие положительной корреляции между «количеством спортивных сооружений» и «уровнем обеспеченности населения» (0,73), а также слабой корреляции между показателями «численность населения, которая занимается спортом» и «уровень обеспеченности населения спортивными сооружениями» (0,28). Данный факт частично объясняется относительной эффективностью проводимой политики, направленной на пропаганду развития спорта и вовлеченности населения в спорт. Однако, несмотря на увеличение спроса со стороны населения на занятия спортом, числа спортивных сооружений не хватает.

### 3. РЕЗУЛЬТАТЫ АНАЛИЗА

В настоящем исследовании проведен анализ 340 объектов (85 регионов за четыре года). Результаты, полученные с помощью методов анализа паттернов, были сопоставлены с результатами кластерного анализа, после чего выявлялись группы регионов, объединенных при использовании различных методологий. Отметим, что 1/3 исследуемых объектов отнесены к «уникальным» (т. е. один регион — один паттерн). Приведем описание некоторых полученных групп.

**Группа 1.** Отличительная черта регионов, вошедших в данную группу (рис. 2) — относительно большое количество населения, занимающееся

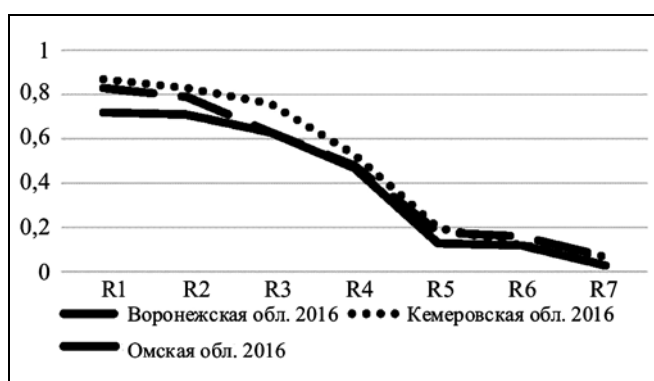


Рис. 2. Визуализация группы 1 в системе параллельных координат

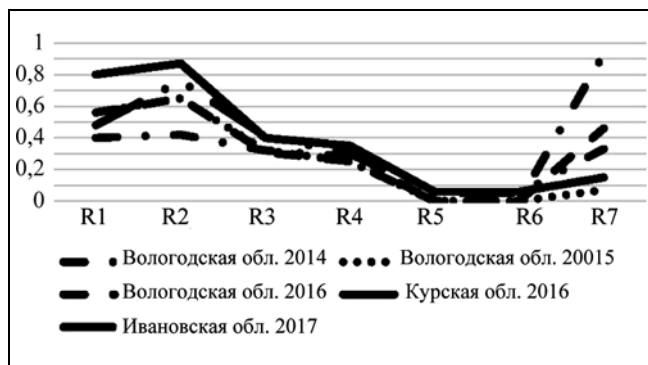


Рис. 3. Визуализация группы 2 в системе параллельных координат

спортом, несмотря на тот факт, что финансирование данной области и кадровое обеспечение находятся на относительно низком уровне. Это можно объяснить тем, что уровень вовлеченности населения в спорт высокий, как и доступность к спортивным объектам, так как региональная политика направлена на увеличение вовлеченности населения в спорт путем активной пропаганды здорового образа жизни (например, в Омской области было проведено за год более 800 спортивных мероприятий), а также на увеличение бесплатных и открытых спортивных площадок. Для простоты сопоставления далее приведена визуализация регионов в системе параллельных координат (в виде кусочно-линейных функций).

Визуализация **группы 2** приведена на рис. 3. Отметим, что в Вологодской области доля населения, занимающегося спортом, находится на достаточном уровне, однако численность кадрового состава в области спорта по сравнению с 2014 г. сократилась. Это объясняется тем фактом, что в последующие годы произошло массовое сокращение штата из-за нехватки финансирования. Очевидно, для решения данной проблемы региональным властям необходимо поддерживать спортсменов, окончивших профессиональные спортивные учреждения, а также спортивные секции (что требует учитывать при составлении бюджета). В Курской области уровень обеспечения спортивными сооружениями отстает от нормативных показателей, поэтому Администрация муниципального образования и ПАО «Газпром» заключили договор о сотрудничестве, в результате чего было увеличено число спортивных сооружений в регионе и повысилась доступность спорта для населения.

В **группу 3** попал лишь один регион за два года — Краснодарский край (рис. 4). Характерными для данного субъекта федерации являются относительно средние и высокие значения большинства показателей. Стоит учитывать, что в Краснодарском

крае проходила Зимняя Олимпиада в 2014 г., именно поэтому там резко повысился уровень развития спорта.

Второй задачей настоящего исследования является составление динамических траекторий развития регионов РФ в период 2014—2017 гг. на основе выбранной структуры показателей, характеризующей уровень спорта. В связи с этим возникает вопрос: менялась ли траектория развития спорта в данных регионах и принадлежность регионов к паттернам? Для решения этой задачи применяется динамический анализ паттернов. Подробно данный тип анализа описан в работах [14, 15, 17]. Кратко, после разбиения регионов на группы каждому региону присваивается вектор  $y_{ri} = (y_{2014}, y_{2015}, y_{2016}, y_{2017})$ , где  $y_t$  — номер группы, к которой принадлежит  $i$ -й регион в момент времени  $t$ . Таким образом, выявляются динамические группы согласно смене стратегий:

— абсолютно устойчивый тип, т. е. регионы не меняли принадлежность к группе в течение исследуемого временного отрезка;



Рис. 4. Визуализация группы «3» в системе параллельных координат



Рис. 5. Пример регионов со сменой стратегии по выбранной системе показателей

— устойчивый тип (регион менял принадлежность к группе всего один раз);

— неустойчивый тип (регион менял свою стратегию ежегодно).

Таким образом, формируются динамические группы. К примеру, рассмотрим три региона (Владимирская, Костромская и Оренбургская области), сменившие принадлежность к группе однократно (т. е. представляющие устойчивый тип динамических групп, рис. 5).

В группу неустойчивых попали 32 региона, однако есть регионы, которые после изменения стратегии развития спорта возвращались к ней. Отметим, что в работе не рассматриваются смены стратегий на «лучшую» и «худшую» (вопрос рейтингования регионов стоит за рамками данного исследования).

#### 4. ПРЕДЛОЖЕНИЯ ПО СОВЕРШЕНСТВОВАНИЮ ДЕЙСТВУЮЩЕГО ЗАКОНОДАТЕЛЬСТВА

По результатам проведенного исследования представляется целесообразным подвергнуть полной ревизии спортивное право и разработать на ее основе единый кодифицированный акт — Спортивный кодекс Российской Федерации (СК РФ). Его цель — восполнить действующие пробелы права, а также максимально широко регулировать общественные отношения в сфере спорта, которые в условиях отсутствия соответствующих норм права не могут должным образом развиваться (в частности, механизмы тиражирования и распространения лучших региональных практик среди «отстающих» субъектов РФ). Положительные ожидания от принятия данного кодекса опираются на зарубежный опыт — к примеру, подобный документ принят во Франции. В Спортивном кодексе Франции собраны все существующие нормативно-правовые акты, регулирующие спортивную деятельность, и не создаются новые законы.

Общественные отношения в спортивной и прилегающих к ней сферах (смежные области) имеют свою субстанциональную и уникальную специфику. Во взаимодействии и взаимосвязи они отличаются полнотой, а главное, системной целостностью — могут быть квалифицированы в качестве самостоятельной предметной области государственно-правового управления и регулирования. Единый кодифицированный акт СК РФ — наиболее эффективное средство упорядочения и систематизации «спортивных норм» в единое целое [20].

На сегодняшний день в области спорта происходят различные изменения: появляются «снежным комом» новые виды спорта (например, экстрим-спорт, «активные» разновидности киберспорта), которые не входят в государственную классификацию физической культуры. Зарегистри-

ровать спорт или федерацию спорта на государственном уровне весьма затруднительно. Данная процедура должна быть прозрачно регламентирована и предельно упрощена.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Ранее в исследованиях поднимался лишь вопрос анализа спортивных кластеров. В определении данного понятия вкладывалось строительство спортивной инфраструктуры [21]. Увеличение числа спортивных объектов, соответствующих всем техническим требованиям, — приоритетная задача госпрограммы, однако стоит внести коррективы. Именно поэтому в рамках настоящей работы «спортивными кластерами» были обозначены группы регионов, имевших схожую стратегию развития спорта (объединенных на основе кластеризации и анализа паттернов). По результатам исследования в каждой группе можно отметить регион с отличающимися от всех остальных показателями. Стратегия развития в данном регионе наиболее эффективна, поэтому властям регионов, попавших в общую группу, стоит уделить внимание тем показателям, которые отстают, и предпринять меры для их улучшения, анализируя политику региона с наилучшим показателем.

В работе, насколько известно авторам, впервые использован анализ паттернов для исследования спортивной деятельности в Российской Федерации и выделены особенности данного метода. Анализ паттернов представляет собой относительно молодой метод анализа данных, но уже продемонстрировал свою эффективность во многих сферах. Выявление регионов со схожей структурой показателей позволяет более эффективно корректировать государственную и региональную политику в соответствии с особенностями спортивной жизни каждого региона. Рекомендации дополнены предложениями по совершенствованию действующего законодательства.

## ЛИТЕРАТУРА

1. *Матвеев Л.П.* Общая теория спорта и ее прикладные аспекты: 4-е изд., испр. и доп. / Л.П. Матвеев. — Санкт-Петербург: «Лань», 2005. — 384 с. [Matveev, L.P. Obshchaya teoriya sporta i ee prikladnye aspekty: 4-e izd., ispr. i. dop. / L.P. Matveev. — Sankt-Peterburg: «Lan'», 2005. — 384 s. (In Russian)]
  2. *Федеральный закон* от 04.12.2007 № 329-ФЗ (ред. от 02.08.2019) «О физической культуре и спорте в Российской Федерации». [Federal Law No. 329-FZ of 04.12.2007 (as amended on 02.08.2019) «On Physical Culture and Sports in the Russian Federation». (In Russian)]
  3. *Бобровский Е.А.* Улучшение состояния спортивной инфраструктуры как инструмент популяризации спорта в регио-
- не // Международный журнал прикладных и фундаментальных исследований. — 2017. — № 3-2. — С. 297—301. [Bobrovsky, E.A. Improving de re publica ludis ludis, in ignarum vulgus infrastructure sicut instrumentum ad regionem // Journal of International Research et applicatam. — 2017. — No. 3-2. — S. 297—301. (In Russian)]
  4. *Бобровский Е.А.* Кадровая политика в сфере физической культуры и спорта в Российской Федерации // КНЖ. — 2017. — № 4 (21). [Bobrovskij, E.A. Kadrovaya politika v sfere fizicheskoy kul'tury i sporta v Rossijskoj Federacii // KNZH. — 2017. — No. 4 (21).] URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/kadrovaya-politika-v-sfere-fizicheskoy-kul'tury-i-sporta-v-rossijskoj-federatsii>.
  5. *Косова Ю.А.* Перспективные направления государственного регулирования в области физической культуры и спорта в Российской Федерации // ТДР. — 2011. — No. 8. [Kosova, Yu.A. Perspektivnye napravleniya gosudarstvennogo regulirovaniya v oblasti fizicheskoy kul'tury i sporta v Rossijskoj Federacii // TDR. — 2011. — No. 8.] URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/perspektivnye-napravleniya-gosudarstvennogo-regulirovaniya-v-oblasti-fizicheskoy-kul'tury-i-sporta-v-rossijskoj-federatsii>.
  6. URL: [https://www.dp.ru/a/2017/06/07/VCIOM\\_nazval\\_glavnie\\_zhizn](https://www.dp.ru/a/2017/06/07/VCIOM_nazval_glavnie_zhizn).
  7. *Постановление Правительства РФ* от 11 января 2006 г. № 7 «О федеральной целевой программе «Развитие физической культуры и спорта в Российской Федерации на 2006—2015 годы». [Resolution of the Government of the Russian Federation of January 11, 2006 No. 7 «On the federal target program» Development of physical culture and Sports in the Russian Federation for 2006—2015». (In Russian)]
  8. *Распоряжение Правительства РФ* от 07.08.2009 № 1101-р «Об утверждении Стратегии развития физической культуры и спорта в Российской Федерации на период до 2020 года». [Decree of the Government of the Russian Federation No. 1101-r of 07.08.2009 «On Approval of the Strategy for the Development of Physical Culture and Sports in the Russian Federation for the period up to 2020». (In Russian)]
  9. *Распоряжение Правительства РФ* от 3 июня 2019 г. № 1188-р «Об утверждении Стратегии развития спортивной индустрии до 2035 г. и комплекса мер по формированию современной отрасли спортивной индустрии на 2019—2020 гг.». [Decree of the Government of the Russian Federation No. 1188-r of June 3, 2019 «On approval of the Strategy for the Development of the Sports industry until 2035 and a set of measures for the formation of a modern branch of the sports industry for 2019—2020». (In Russian)]
  10. *Ким Д.О.* Факторный, дискриминантный и кластерный анализ. — Рипол Классик, 1989. [Kim, D.O. Faktornyj, diskriminantnyj i klasternyj analiz. — Ripol Klassik, 1989. (In Russian)]
  11. *Миркин Б.Г.* Методы кластер-анализа для поддержки принятия решений: обзор: препринт WP7/2011/03. — М.: Изд. дом Национального исследовательского университета «Высшая школа экономики», 2011 — 88 с. [Mirkin, B.G. Metody klaster-analiza dlya podderzhki prinyatiya reshenij: obzor: preprint WP7/2011/03. — M.: Izd. dom Nacional'nogo issledovatel'skogo universiteta «Vysshaya shkola ekonomiki», 2011 — 88 s. (In Russian)]
  12. *Мячин А.Л.* Анализ паттернов в системе параллельных координат на базе парного сравнения показателей // Автоматика и телемеханика. — 2019. — № 1. — С. 138—152. [Myachin, A.L. Pattern Analysis in Parallel Coordinates Based on Pairwise Comparison of Parameters // Automation and Remote Control. — 2019. — Vol. 80. — P. 112—123.]
  13. *Мячин А.Л.* Анализ паттернов: диффузионно-инвариантная паттерн-кластеризация // Проблемы управления. — 2016. — № 4. — С. 2—9. [Myachin, A.L. Pattern analysis: diffusion-in-



- variant pattern clustering // Control Sciences. — 2016. — No. 4. — P. 2—9. (In Russian)]
14. *Мячин А.Л.* Анализ паттернов: порядково-инвариантная паттерн-кластеризация // Управление большими системами // Управление большими системами — 2016. — Т. 61. — С. 41—59. [*Myachin, A.L.* Pattern analysis: ordinal-invariant patternclustering // Large-Scale Systems Control. — 2016. — Vol. 61. — S. 41—59. (In Russian)]
  15. *Алескеров Ф.Т., Гохберг, Л.М., Мячин, А.Л.* и др. Анализ данных науки, образования и инновационной деятельности с использованием методов анализа паттернов // Высшая школа экономики. — Серия WP7. — 2012. — № 07. [*Aleskerov, F.T., Gokhberg, L.M., Myachin, A.L., et al.* Analiz dannykh nauki, obrazovaniya i innovatsionnoi deyatel'nosti s ispol'zovaniem metodov analiza patternov // Vysshaya shkola ekonomiki. — Seriya WP7. — 2012. — No. 07. (In Russian)]
  16. *Алескеров Ф.Т., Белоусова В.Ю., Миркин Б.Г.* и др. Анализ паттернов в статике и динамике. Часть 1: Обзор литературы и уточнение понятия // Бизнес-информатика. — 2013. — № 3 (25). — С. 3—18. [*Aleskerov, F.T., Belousova, V.Yu., Mirkin, B.G., et al.* Analiz patternov v statike i dinamike. Chast' 1: Obzor literatury i utochnenie ponyatiya // Biznes-informatika. — 2013. — No. 3 (25). — S. 3—18. (In Russian)]
  17. *Алескеров Ф.Т., Бородин А.Д., Каспэ С.И.* и др. Анализ электоральных предпочтений в России в 1993—2003 гг.: динамика индекса поляризованности // Экономический журнал Высшей школы экономики. — 2005. — Т. 9. — № 2. — С. 173—184. [*Aleskerov, F., Borodin, A., Kaspe, S.* et al. Analysis of polarization of electoral preferences in Russia 1993—2003: Working paper WP7/2005/02. — Moscow: State University — Higher School of Economics, 2005. — 28 p. (In Russian)]
  18. *Алескеров Ф.Т., Солодков В.М., Челнокова Д.С.* Динамический анализ паттернов поведения коммерческих банков России // Экономический журнал Высшей школы экономики. — 2006. — Т. 10. — № 1. [*Aleskerov, F.T., Solodkov, V.M., Chelnokova, D.S.* Dinamicheski analiz patternov povedeniya komercheskikh bankov Rossii // Higher School of Economics Economic Journal. — 2006. — Vol. 10. — No. 1. (In Russian)]
  19. *Ахременко А.С., Мячин А.Л.* Паттерн-анализ и кластеризация в исследовании государственной состоятельности: «адаптивная оптика» для политической науки // Политическая наука. — 2019. — № 3. — С. 112—139. [*Akhremenko, A.S., Myachin, A.L.* Pattern Analysis and Clustering in the Study of State Capacity: «Adaptive Optics» // Political Science. — 2019. — No. 3. — P. 112—139. (In Russian)]
  20. *Соловьев А.А.* Концепция проекта Спортивного кодекса Российской Федерации / Комиссия по спортивному праву Ассоциации юристов России. — М., 2009. — 55 с. [*Solov'ov, A.A.* Konceptsiya proekta Sportivnogo kodeksa Rossijskoj Federacii / Komissiya po sportivnomu pravu Associacii yuristov Rossii. — M., 2009. — 55 s. (In Russian)]
  21. *Ананишнев В.В., Корепова В.В.* Проблемы формирования спортивных кластеров в России // Кластеры. Исследования и разработки. — 2016. — № 2 (3). [*Ananishnev, V.V., Korepova, V.V.* Problemy formirovaniya sportivnykh klasterov v Rossii // Klasteri. Issledovaniya i razrabotki. — 2016. — No. 2 (3).] URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/problemy-formirovaniya-sportivnyh-klasterov-v-rossii>.

Статья представлена к публикации членом редколлегии П.Ю. Чеботаревым.

Поступила в редакцию 30.07.2020, после доработки 16.03.2021.  
Принята к публикации 06.04.2021.

**Прокофьев Вадим Николаевич** — канд. филос. наук, Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики», г. Москва, ✉ [vprokofiev@hse.ru](mailto:vprokofiev@hse.ru),

**Мячин Алексей Леонидович** — канд. техн. наук, Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН; Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики», г. Москва, ✉ [amyachin@hse.ru](mailto:amyachin@hse.ru),

**Акимова Ксения Витальевна** — студент, Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики», г. Москва, ✉ [Aksenia1998@yandex.ru](mailto:Aksenia1998@yandex.ru).

## STUDYING THE INDICATORS OF REGIONAL SPORTS DEVELOPMENT IN RUSSIAN FEDERATION

V.N. Prokofiev<sup>1</sup>, K.V. Akimova<sup>1</sup>, and A.L. Myachin<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup> National Research University Higher School of Economics, Moscow, Russia

<sup>2</sup> Trapeznikov Institute of Control Sciences, Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia

<sup>1</sup> ✉ [vprokofiev@hse.ru](mailto:vprokofiev@hse.ru), <sup>2</sup> ✉ [Aksenia1998@yandex.ru](mailto:Aksenia1998@yandex.ru), <sup>3</sup> ✉ [amyachin@hse.ru](mailto:amyachin@hse.ru)

**Abstract.** The indicators of regional sports development in the Russian Federation are analyzed to find regions with a similar sports development strategy (according to the chosen methodology and measures of closeness) and to identify dynamic groups in a four-year period. Some clustering and pattern analysis methods are described, and their use in the study is validated. The results obtained by classical clustering and ordinal-invariant pattern clustering methods are compared. The main state programs in the field of sports in the Russian Federation are highlighted and analyzed. The key aspects and problems of the state regulation of sports activities in the Russian Federation are indicated. Some ways for improving the existing regulatory and legal acts based on the dynamic analysis of regional patterns are proposed.

**Keywords:** sports, sport life, physical education, state regulation, cluster analysis, pattern analysis, ordinal-invariant pattern clustering.

# РАЗРАБОТКА МЕТОДА ОБНОВЛЕНИЯ МНОГОМЕРНОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ УПРАВЛЯЕМОГО ТЕХНОЛОГИЧЕСКОГО ОБЪЕКТА

М.А. Работников

**Аннотация.** Рассмотрена проблема деградации многомерных моделей, описывающих поведение управляемых непрерывных технологических процессов. Предложен метод решения задачи нелинейного программирования для целевой функции, сформированной с помощью метода наименьших квадратов по данным эксплуатации объекта. В основу разработанного метода заложены алгоритмы моделирования динамических процессов, базирующиеся на методе наложения переходных характеристик процесса. Преимущество предлагаемого метода заключается в возможности использования данных пассивного эксперимента для построения актуальной многоканальной модели объекта. Приведены результаты применения разработанного метода для обновления модели многопараметрического контроллера системы усовершенствованного управления технологическим процессом получения масляных альдегидов методом оксосинтеза. Применение разработанного метода для реальных управляемых технологических объектов позволяет повысить точность моделирования процесса и качество автоматического управления, снижая влияние человеческого фактора и повышая общую экономическую эффективность производственного процесса.

**Ключевые слова:** многомерный объект, передаточная функция, управление с прогнозирующей моделью, система усовершенствованного управления технологическим процессом.

## ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время для обеспечения максимальной эффективности производства на современных предприятиях активно внедряется множество высокотехнологичных решений, позволяющих оптимизировать процессы на всех этапах производства готовой товарной продукции, а также обеспечивающих высокую адаптивность производственного узла под текущие экономическую и технологическую ситуации [1–4]. Одно из таких решений — системы усовершенствованного управления технологическими процессами (СУУТП, advanced process control) [5].

Концепция усовершенствованного управления непрерывными технологическими процессами в подавляющем числе случаев подразумевает применение динамических моделей, прогнозирующих поведение контролируемых параметров процесса.

На основании полученных расчетов реализуются алгоритмы предиктивного управления, позволяющие стабилизировать технологический процесс, компенсируя влияние возмущающих воздействий на контролируемые параметры, и вывести установку на оптимальный режим по экономическому критерию в рамках заданных технологических ограничений [6–8].

## 1. ПОСТАНОВКА ПРОБЛЕМЫ ДЕГРАДАЦИИ ДИНАМИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ

Ключевым требованием, предъявляемым к системам многомерного управления, является точность проводимой структурной и параметрической идентификации задействованных в управлении каналов передачи [9, 10]. Классическим методом для описания исследуемой динамики является система линейных дифференциальных уравнений, за-



писанная в форме матричной передаточной функции размерности  $p \times q$ , где  $p$  — количество контролируемых параметров процесса,  $q$  — суммарное количество управляющих параметров и наблюдаемых возмущающих воздействий. Входными сигналами модели служат управляющие параметры процесса (Manipulated Variables, MV) и регистрируемые возмущающие воздействия (Disturbance Variables, DV), на выходе модель прогнозирует поведение контролируемых параметров процесса (Controlled Variables, CV). В общем случае такая модель имеет вид:

$$W(s) = \frac{A(s)}{B(s)} e^{-\tau s} = \frac{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0}{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0} e^{-\tau s}, \quad (1)$$

где  $s$  — оператор Лапласа;  $A(s)$  — полиномиальная запись числителя;  $B(s)$  — полиномиальная запись знаменателя;  $n$  — степень полинома  $A(s)$ ;  $m$  — степень полинома  $B(s)$ ;  $n \leq m$  — условие физической реализуемости.

Одной из проблем приведенного выше подхода к описанию управляемого объекта является деградация используемой многомерной модели объекта (1), вызванная нелинейностью протекающего физико-химического процесса [11]. По этой причине модели, задействованные в задачах управления непрерывными технологическими процессами, нуждаются в периодической подстройке под текущий технологический режим [12]. Типовым решением для этого является проведение активного эксперимента (пошагового тестирования) с целью снятия переходных характеристик процесса и построения актуальной версии многоканальной модели управляемого объекта. Один из недостатков такого подхода заключается в применении сильных управляющих воздействий на непрерывно функционирующий объект, способных нарушить устойчивость технологического режима, а также вывести контролируемые параметры процесса и ключевые показатели качества выпускаемой продукции за допустимые регламентные пределы.

## 2. ОПИСАНИЕ РАЗРАБОТАННОГО МЕТОДА

С учетом сформированной проблематики для решения задачи обновления многомерной динамической модели разработан метод, основанный на анализе данных пассивного эксперимента. В основе предлагаемого метода лежит задача нелинейного программирования для целевой функции, сфор-

мированной с помощью метода наименьших квадратов по данным эксплуатации объекта:

$$\min_{k, a, b, \tau} \sum_{i=1}^N (y_i^e - y_i^{ap}(k, a, b, \tau))^2 \rightarrow k^0, a^0, b^0, \tau^0, \quad (2)$$

где  $N$  — объем выборки исходных данных;  $y_i^e$  — реальные значения контролируемого параметра;  $y_i^{ap}(k, a, b, \tau)$  — прогнозируемые моделью значения;  $k$  — матрица коэффициентов усиления размерности  $1 \times q$ ;  $a$  — матрица коэффициентов полинома  $A(s)$  размерности  $n \times q$ ;  $b$  — матрица коэффициентов полинома  $B(s)$  размерности  $m \times q$ ;  $\tau$  — матрица временного запаздывания размерности  $1 \times q$ ;  $k^0, a^0, b^0, \tau^0$  — оценки параметров рассматриваемой передаточной функции.

Расчет прогнозного значения осуществляется с применением метода наложения переходных характеристик процесса:

$$y_i^{ap} = \sum_{j=1}^{i-1} \Delta x_j^T h(\Delta T[i-j]) + y_1^e, \quad i = \overline{2, N},$$

где  $\Delta x = x_j - x_{j-1}$  — матрица ступенчатых воздействий входных сигналов размерности  $q \times 1$ ;  $h(t)$  — переходные характеристики исследуемых каналов передачи;  $\Delta T$  — период дискретизации рассматриваемой выборки.

Согласно теореме о вычетах переходная характеристика исследуемого канала имеет вид:

$$h(t) = \sum_{r=1}^n \text{Res}_{s=s_r} [W(s_r) e^{s_r t}],$$

где  $s_r$  — полюс функции  $W(s)$ .

В общем случае для  $n$  простых полюсов, отличных от нуля (передаточная функция имеет один нулевой полюс и  $n$  простых полюсов), переходная характеристика может быть рассчитана, как

$$h(t) = \frac{B(0)}{A(0)} + \sum_{r=1}^n \frac{B(s_r) e^{s_r t}}{s_r A'(s_r)}, \quad (3)$$

где  $A'(s_r)$  — производная от характеристического полинома  $A(s)$ , вычисленная для полюса  $r$  [13].

В рамках решения задачи усовершенствованного управления технологическим процессом для описания динамики исследуемых каналов передачи достаточным является ограничение дифференциальным уравнением второго порядка, описываемым передаточной функцией [14]

$$W(s) = k \frac{a_1 s + 1}{b_2 s^2 + b_1 s + 1} e^{-\tau s}. \quad (4)$$

Для рассматриваемого случая (4) формула для расчета переходной характеристики исследуемого процесса (3) преобразуется к виду:

$$h(t) = k \left( 1 + \frac{(c_1 - a_1)e^{-\frac{t-\tau}{c_1}} - (c_2 - a_1)e^{-\frac{t-\tau}{c_2}}}{c_2 - c_1} \right),$$

где  $c_1 = -s_1^{-1}$ ,  $c_2 = -s_2^{-1}$ ,  $s_{1,2}$  — полюса передаточной функции (4).

Конечный вид задачи нелинейного программирования (2) по результатам преобразования целевой функции будет таким:

$$\min_{k, a_1, c_1, c_2, \tau} \sum_{i=2}^N \left( y_i^e - y_i^e - \sum_{j=1}^{i-1} \Delta x_j^T h(\Delta T[i-j]) \right)^2 \rightarrow k^0, a_1^0, c_1^0, c_2^0, \tau^0, \quad (5)$$

где  $h_r(\Delta T[i-j]) =$

$$= k_r \left( 1 + \frac{(c_{1r} - a_{1r})e^{-\frac{\Delta T(i-j) - \tau_r}{c_{1r}}} - (c_{2r} - a_{1r})e^{-\frac{\Delta T(i-j) - \tau_r}{c_{2r}}}}{c_{2r} - c_{1r}} \right),$$

$r = \overline{(1, q)}$ .

При необходимости от полюсов  $c_1, c_2$  не сложно перейти к искомому первоначально коэффициентам полинома  $B(s)$ :

$$b_{1r} = c_{1r} + c_{2r}, \quad b_{2r} = c_{1r}c_{2r}, \quad r = \overline{(1, q)}.$$

Начальной точкой для идентификации объекта может служить как текущая параметрическая конфигурация используемой многоканальной модели, так и заданный набор параметров, сформированный исходя из аппроприации данных пассивного эксперимента.

С учетом объема требуемых вычислений и параметрической размерности целевой функции для решения поставленной задачи (5) необходимо применять методы, обладающие высокой скоростью сходимости. В частности, выбран класс квазиьютоновских методов с вычислением гессиана по схеме BFGS (англ. *Broyden — Fletcher — Goldfarb — Shanno algorithm*) [15].

Практическая реализация метода предполагает как автоматическую подстройку модели объекта по заданному количественному критерию, так и ручную по запросу обслуживающего технологического персонала.

### 3. ПРАКТИЧЕСКОЕ ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА

Разработанный метод обновления многомерной модели управляемого объекта протестирован на реальном технологическом объекте — отделении получения масляных альдегидов методом оксосинтеза производства бутиловых спиртов. Отделение запроектировано по непрерывной схеме; его ключевым узлом является блок гидроформилирования, предназначенный для получения нормальномасляного и изомасляного альдегидов из пропилена и синтез-газа в присутствии гидрокарбонила кобальта в последовательных реакторах Р-3, Р-4 с предварительным приготовлением катализатора из 2-этилгексаната кобальта и синтез-газа в реакторе Р-1. Полученная на выходе каталитическая смесь проходит очистку в сепараторах высокого и низкого давления (Е-1 и Е-2 соответственно) от топливных газов и поступает в узел окислительной декобальтизации для дальнейшей переработки ключевых компонентов катализата.

Управление производством бутиловых спиртов реализовано с использованием системы усовершенствованного управления технологическим процессом, фрагмент которой для рассматриваемого блока гидроформилирования с указанием задействованных параметров процесса представлен на общей технологической схеме узла (рис. 1, табл. 1).

Для рассматриваемой части контроллера СУУТП блока гидроформилирования с применением разработанного метода проведена идентификация его многоканальной модели с целью актуализации ее параметрической и структурной конфигурации под текущий технологический режим. В табл. 2 представлены результаты обновления динамической модели контроллера.

Таблица 1

Описание параметров контроллера СУУТП

Тэг	Описание
1. Контролируемые параметры	
cv1	Конверсия пропилена
cv2	Потери пропилена в сдвухах
2. Управляющие параметры	
mv1	Расход пропан-пропиленовой фракции
mv2	Температура в реакторе Р-3
mv3	Температура в реакторе Р-4
mv4	Давление газа в сепараторе высокого давления Е-1
mv5	Расход каталитической смеси
mv6	Давление газа в сепараторе низкого давления Е-2
3. Возмущающие воздействия	
dv1	Содержание окиси углерода СО в синтез-газе
dv2	Концентрация водорода в синтез-газе

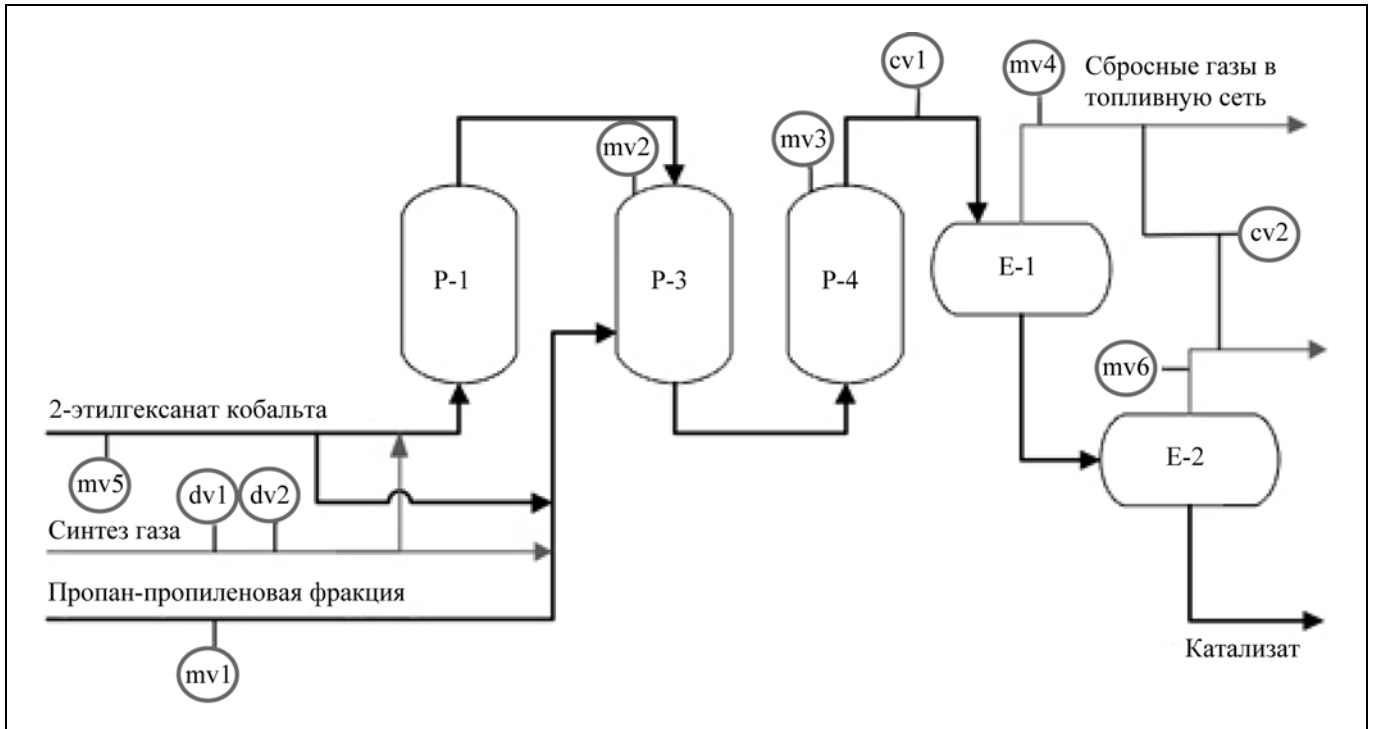


Рис. 1. Блок гидроформирования

Таблица 2

## Обновление динамической модели блока гидроформирования

		Модель до обновления		Обновленная модель	
		Выходной сигнал			
		cv1	cv2	cv1	cv2
Входной сигнал	mv1	$0,0353 \frac{1}{20s+1}$	$8,82 \frac{1}{20s+1}$	$0,0353 \frac{1}{20s+1}$	$12,36 \frac{1}{18,93s+1}$
	mv2	$0,0678 \frac{1}{15s+1}$	$-13 \frac{0,51s+1}{3,89s^2+2,36s+1}$	$0,0348 \frac{1}{18,82s+1}$	$-4,5 \frac{1,41s+1}{3,76s^2+1,54s+1}$
	mv3	$0,0025 \frac{1}{15s+1} e^{-4s}$	$-15,3 \frac{1}{130s^2+22,8s+1}$	$0,0016 \frac{1}{11,34s+1} e^{-6s}$	$-7,01 \frac{0,21s+1}{130s^2+23s+1}$
	mv4	$0,007 \frac{1}{5s+1} e^{-3s}$	—	$0,009 \frac{1}{5s+1} e^{-3s}$	—
	mv5	$0,021 \frac{1}{6,25s^2+5s+1}$	$-68,2 \frac{1}{10,1s+1} e^{-6s}$	$0,021 \frac{1}{6,25s^2+5s+1}$	$-68,2 \frac{1}{10,1s+1} e^{-6s}$
	mv6	—	$-86,1 \frac{1}{15s+1}$	—	$-83 \frac{1}{15s+1}$
	dv1	$0,0021 \frac{1}{12s+1} e^{-2s}$	$19,4 \frac{1}{22,4s+1} e^{-24s}$	$0,0021 \frac{1}{12s+1} e^{-2s}$	$19,19 \frac{1}{22,4s+1} e^{-23s}$
	dv2	$0,01 \frac{2,57s+1}{9,22s^2+6,72s+1}$	$0,659 \frac{1}{12s+1} e^{-2s}$	$0,01 \frac{2,57s+1}{9,22s^2+6,72s+1}$	$1,132 \frac{1}{12s+1} e^{-2s}$



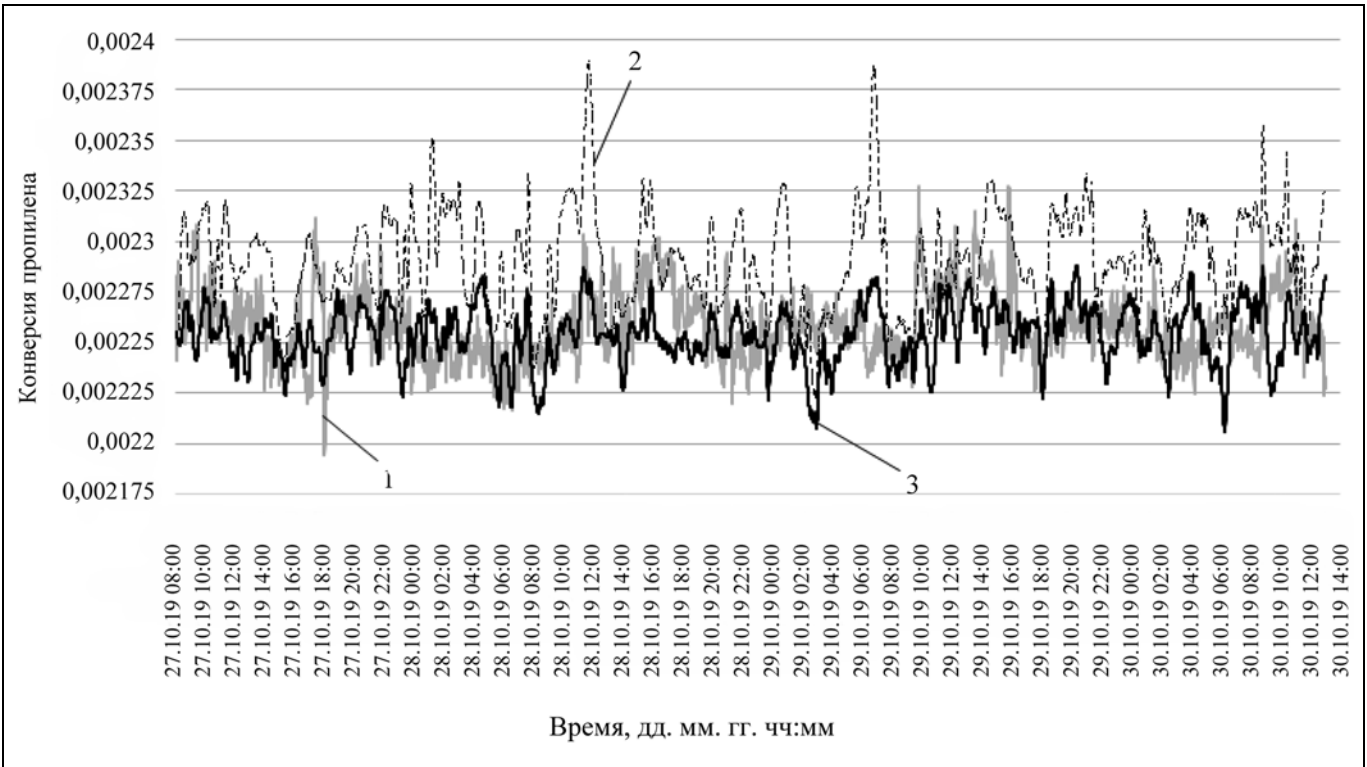


Рис. 2. Конверсия пропилена: 1 — реальные значения, 2 — модель до обновления, 3 — обновленная модель

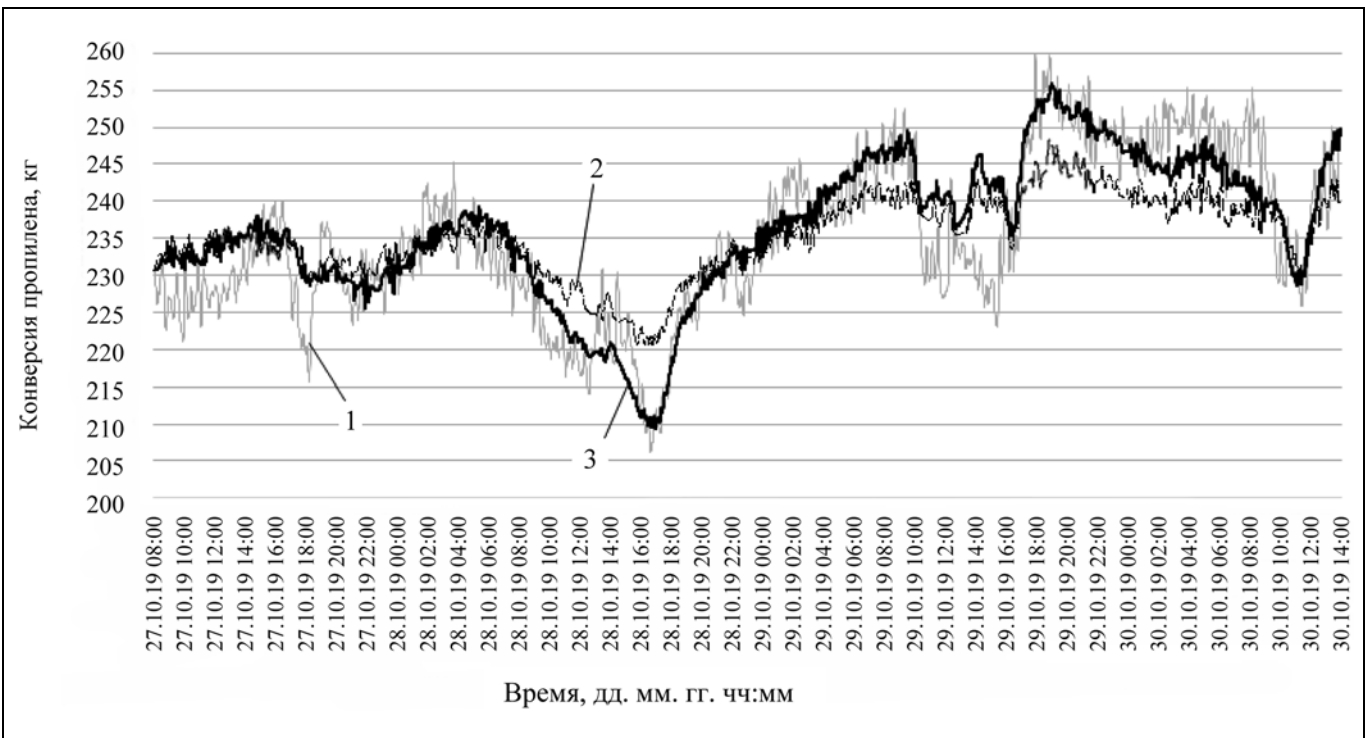


Рис. 3. Потери пропилена в сдвухах: 1 — реальные значения, 2 — модель до обновления, 3 — обновленная модель



Для оценки эффектов проведенной идентификации рассматриваемая модель проверена на тестовой выборке исторических данных технологического процесса. По результатам модельных испытаний получены тренды конверсии пропилена (рис. 2) и потери пропилена в сдвухах (рис. 3), прогнозируемые моделью до и после ее обновления на одинаковом наборе исходных данных.

По результатам обновления модели среднее квадратичное отклонение значений, прогнозируемых моделью, от соответствующих им реальных значений снизилось для конверсии пропилена с  $4,159 \times 10^{-5}$  до  $2,045 \times 10^{-5}$ , для потери пропилена в сдвухах — с 6,483 до 5,112 кг.

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе представлены результаты разработки метода обновления многоканальной динамической модели управляемого технологического объекта. Предложенный метод предполагает решение задачи нелинейного программирования для целевой функции, сформированной с помощью метода наименьших квадратов. Отличительной особенностью разработанного метода является возможность построить актуальные модели переходных процессов исследуемых каналов передачи, основываясь на предыдущей структурной и параметрической идентификации. Преимущество метода заключается в отсутствии потребности в проведении активного эксперимента на технологическом объекте: для обновления модели используются исторические данные технологического процесса.

Разработанный метод применен для многоканальной модели СУУТП блока гидроформирования отделения получения масляных альдегидов методом оксосинтеза производства бутиловых спиртов. Актуализация модели позволила снизить среднее квадратичное отклонение значений, выдаваемых моделью, от реальных значений более чем в 2,033 и 1,268 раз для конверсии пропилена и потери пропилена в сдвухах соответственно.

Предложенный метод позволяет повысить точность моделирования протекающего физико-химического процесса. В задачах усовершенствованного управления это позволяет улучшить качество автоматического управления технологическим процессом, стабилизируя ключевые контролируемые параметры процесса и снижая разброс показаний лабораторного анализа, тем самым повышая общую экономическую эффективность производства и уменьшая влияние человеческого фактора на управление производственным процессом.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Владов Р.А., Дозорцев В.М., Шайдуллин Р.А. и др. Практические аспекты четвертой промышленной революции // Автоматизация в промышленности. — 2017. — № 7. — С. 7—13. [Vladov, R.A., Dozortsev, V.M., Shaidullin R.A., et al. Practical Aspects of the Fourth Industrial Revolution // Automation in Industry. — 2017. — No. 7. — P. 7—13. (In Russian)]
2. Kueppers, S., Haider, M. Process Analytical Chemistry — Future Trends in Industry // Analytical and Bioanalytical Chemistry. — 2003. — Vol. 376. — P. 313—315.
3. Бахтадзе Н.Н., Лотоцкий В.А. Современные методы управления производственными процессами // Проблемы управления. — 2009. — № 3. — С. 56—63. [Bakhtadze, N.N., Lototskii, V.A. Contemporary Methods of Production Process Control // Control Sciences. — 2009. — No. 3. — P. 56—63. (In Russian)]
4. Селезнев А.Ю. Возможные внедрения на НПЗ для повышения операционной эффективности // Нефть. Газ. Новации. — 2020. — № 4. — С. 35—42. [Seleznev, A.Yu. Vozmozhnye vnedreniia na NPZ dlia povysheniia operatsionnoi effektivnosti // Neft'. Gaz. Novatsii. — 2020. — No. 3. — P. 35—42. (In Russian)]
5. Lehman, K.A. Implement Advanced Process Control // Chemical Engineering Progress. — 2018. — Vol. 114, no. 1. — P. 60—66.
6. Домбровский В.В., Пашина Т.Ю. Прогнозирующее управление стохастическими нелинейными системами с сериально коррелированными параметрами при ограничениях // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. — 2018. — № 42. — С. 4—11. [Dombrovskii, V.V., Pashinskaya, T.Yu. Model Predictive Control for Nonlinear Stochastic Systems with Serially Correlated Parameters under Constraints // Tomsk State University Journal of Control and Computer Science. — 2018. — No. 42. — P. 4—11. (In Russian)]
7. Торгашов А.Ю., Гончаров А.А., Самотылова С.А. Современные методы построения систем усовершенствованного управления технологическими процессами // Вестник Дальневосточного отделения РАН. — 2016. — № 4 (133). — С. 102—107. [Torgashov, A.Yu., Goncharov, A.A., Samotylova, S.A. Modern Methods of Evaluation of Advanced Process Control Systems // Vestnik of the Far East Branch of the Russian Academy of Sciences. — 2016. — No. 4 (133). — P. 102—107. (In Russian)]
8. Работников М.А., Вялых И.А., Немтин А.М. Техническое проектирование системы усовершенствованного управления установки каталитического риформинга // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Электротехника, информационные технологии, системы управления. — 2019. — № 2. — С. 119—132. [Rabotnikov, M.A., Vialykh, I.A., Nemtin, A.M. Technical Design Advanced Control System of the Catalytic Reforming Unit // Bulletin of the Perm National Research Polytechnic University Electrotechnics, Information Technologies, Control Systems. — 2019. — No. 2. — P. 119—132. (In Russian)]
9. Berlik, S., Nasiri, M. An Adaptive Fuzzy Model Predictive Control System for the Textile Fiber Industry // Communications in Computer and Information Science. — 2010. — Vol. 81. — P. 729—736.
10. Pan, J., Jiang, X., Wan, X.K., et al. A Filtering Based Multi-Innovation Extended Stochastic Gradient Algorithm for Multivariable Control System // International Journal of Control Automation and Systems. — 2017. — Vol. 15, no. 3. — P. 1189—1197.
11. Cannon, M., Kouvaritakis, B. Continuous-Time Predictive Control of Constrained Nonlinear Systems // Progress in Systems and Control Theory. — 2000. — Vol. 26. — P. 205—215.

12. *Le Lann, M.V., Cabassud, M., Casamatta, G.* Adaptive Model Predictive Control // NATO ASI Series (Series E: Applied Sciences). — 1995. — Vol. 293. — P. 427–457.
13. *Коновалов Б.И., Лебедев М.Ю.* Теория автоматического управления. — Томск: ТУСУР, 2011. — 162 с. [*Konovalev, B.I., Lebedev, M.Iu.* Theory of Automatic Control. — Tomsk: TUSUR, 2011. — 162 s. (In Russian)]
14. *Tyatyushkin, A.I., Zarodnyuk, T.S., Gornov, A.Yu.* Algorithms for Nonlinear Optimal Control Problems Based on the First and Second Order Necessary Conditions // Journal of Mathematical Sciences. — 2019. — Vol. 239. — P. 185–196.
15. *Захарова Е.М., Минашина И.К.* Обзор методов многомерной оптимизации // Информационные процессы. —

2014. — Т. 14, № 3. — С. 256–274. [*Zakharova, E.M., Minashina, I.K.* Review of Multidimensional Optimization Techniques // Information Processes. — 2019. — Vol. 14, no. 3. — P. 256–274. (In Russian)]

*Статья представлена к публикации членом редколлегии Н.Н. Бахтадзе.*

*Поступила в редакцию 11.01.2021, после доработки 09.02.2021. Принята к публикации 10.03.2021.*

**Работников Михаил Алексеевич** — ООО «ЗапСибНефтехим», г. Тобольск, ✉ [robotnikovma@tobolsk.sibur.ru](mailto:robotnikovma@tobolsk.sibur.ru).

## AN UPDATING METHOD FOR THE DYNAMIC MIMO MODEL OF A CONTROLLED TECHNOLOGICAL OBJECT

M.A. Robotnikov

ООО ЗапСибНефтехим, Tobolsk, Russia

✉ [robotnikovma@tobolsk.sibur.ru](mailto:robotnikovma@tobolsk.sibur.ru)

**Abstract.** This paper considers the degradation of MIMO models of controlled industrial processes. We propose a method for solving a nonlinear programming problem with an objective function formed by the least squares method according to technological object data. The method involves dynamic process modeling algorithms based on the imposition of the step response of the process. The advantage of this method is the possibility of using passive experiment data to construct an appropriate multichannel model of a technological object. The method is applied to update the multiparameter controller model for the Advanced Process Control system of butyraldehydes oxo synthesis. For real controlled technological objects, this method allows improving the accuracy of process modeling and the performance of automatic control, reducing the human factor, and increasing the overall economic efficiency of the production process.

**Keywords:** MIMO system, transfer function, Model Predictive Control, Advanced Process Control.



### КОНКУРСЫ НА СОИСКАНИЕ ЗОЛОТЫХ МЕДАЛЕЙ И ПРЕМИЙ ИМЕНИ ВЫДАЮЩИХСЯ УЧЕНЫХ, ПРОВОДИМЫЕ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИЕЙ НАУК В 2022 году

В целях поощрения ученых за научные труды, научные открытия и изобретения, имеющие важное значение для науки и практики, Российская академия наук присуждает золотые медали и премии имени выдающихся ученых.

Золотые медали присуждаются за выдающиеся научные работы, открытия и изобретения или по совокупности работ большого научного и практического значения.

Премии присуждаются за отдельные выдающиеся научные работы, открытия, изобретения, а также за серии научных работ по единой тематике.

На соискание премий могут быть представлены работы или серии работ единой тематике, как правило, отдельных авторов. При представлении работ выдвигаются лишь ведущие авторы, причем не более трех человек.

Справки по телефону: (499) 237-99-33

Подробная информация, в том числе сроки приема заявок на каждый конкурс, размещена на сайте Российской академии наук <http://www.ras.ru>.

# ПРИМЕНЕНИЕ СРЕДСТВ КОМПЬЮТЕРНОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ДЛЯ АНАЛИЗА ФУНКЦИОНИРОВАНИЯ МАГНИТОГРАДИЕНТНЫХ СИСТЕМ

А.К. Волковицкий, А.И. Гладышев, Д.А. Гольдин, Е.В. Каршаков,  
Б.В. Павлов, М.Ю. Тхоренко

**Аннотация.** Представлен компьютерный имитационный макет магнитоградиентной измерительной системы. Данный макет предназначен для моделирования процесса оценивания параметров дипольного магнитного момента подвижных объектов по данным магнитоградиентных измерений. Рассматривается как структура всего макета в целом, так и предназначение, и алгоритмы работы отдельных модулей, составляющих данный макет, в том числе модуля определения навигационных параметров, модуля вычисления различных составляющих магнитного поля (собственное магнитное поле подвижного объекта, нормальная составляющая магнитного поля Земли, поле магнитных аномалий и промышленных помех), модуля оценивания параметров дипольного магнитного момента. В заключение приводится краткое описание численных экспериментов, проведенных авторами с использованием данного макета. Разработанный макет может применяться при разработке систем управления магнитным полем подвижных объектов.

**Ключевые слова:** математическое моделирование, магнитная градиентометрия, дипольный магнитный момент.

## ВВЕДЕНИЕ

Ряд важных для практики задач требуют активного управления магнитным полем подвижных объектов. К числу таких задач, например, относятся: задача подавления влияния поля аппарата-носителя на показания бортового магнитоизмерительного оборудования при аэромагнитной съемке [1], задача уменьшения собственного поля подводного аппарата для обеспечения скрытности от магнитных средств обнаружения [2]. Отметим, что если в первом случае компенсация поля аппарата-носителя может осуществляться аналитически, при обработке полученной измерительной информации, то решение второй задачи требует наличия на борту подвижного объекта специальной размагничивающей системы, представляющей собой набор обмоток с током и способной в определенной мере компенсировать собственное магнитное поле подвижного объекта. Ясно, что качество функционирования такой размагничивающей системы

сильно зависит от выбора законов управления током в обмотках. В работе [3] предложена оригинальная схема управления компенсирующими токами, основанная на оценивании параметров дипольного магнитного момента (ДММ) подвижного объекта с использованием измерений градиента магнитного поля, проводимых в реальном времени с помощью специальной измерительной системы, с последующим учетом полученных оценок ДММ при управлении токами размагничивающего устройства.

Магнитоградиентная измерительная система может быть реализована в очень компактном исполнении, размером от 20 см до 2 м в зависимости от выбранных магниточувствительных элементов. Это позволяет реализовать ее не только в стационарном варианте на стенде, как в настоящее время работают все имеющиеся средства определения ДММ, но и в мобильном или буксируемом варианте. Внедрение подобных систем, которые позволяют оценить ДММ в реальном времени в процессе движения и организовать управление токами в

обмотках, дает возможность существенно повысить качество и надежность размагничивания подвижного объекта (ПО). Преимущества очевидны: вместо компенсации поля ПО на основе данных, полученных когда-то на стенде, появляется возможность построить систему управления с замкнутой обратной связью по величине ДММ. При этом отслеживается не только медленное изменение намагниченности ПО, но и его перемагничивание, связанное с движением ферромагнитных масс в магнитном поле Земли.

Для оценки работоспособности данной схемы компенсации в задаче управления магнитным полем ПО необходимо было разработать комплексный макет функционирования магнитоградиентной измерительной системы, учитывающий как особенности движения ПО и измерителя, так и различные помехи от естественных и искусственных источников, возникающие в процессе измерений градиента магнитного поля. Таким образом, разработанный макет находит свое применение при анализе работы системы управления магнитным полем ПО. Описанию данного макета и посвящена настоящая статья.

## 1. СТРУКТУРА МАКЕТА

Макет, предназначенный для моделирования работы магнитоградиентной измерительной системы, представляет собой совокупность компьютерных программных модулей, объединенных в единую информационную сеть, функционирующую в режиме имитационного моделирования взаимодействия ферромагнитных объектов с естественным магнитным полем Земли (МПЗ), функционирования магнитоградиентных измерительных систем различного типа в условиях движения как объекта, так и измерительной установки, а также алгоритмов дистанционного определения параметров вектора дипольного магнитного момента. Имитационное моделирование может выполняться в реальном масштабе времени.

Информационное взаимодействие в структуре макета осуществляется в режиме «клиент — сервер». Центральным элементом (сервером) в данной схеме является специальный программный модуль, управляющий и координирующий работу всей структуры макета, а также записывающий модельные данные в файлы для последующего анализа.

Кроме сервера в составе макета имеются служебные модули (клиенты) двух принципиально разных типов:

— модули, реализующие алгоритмы математического моделирования виртуальных объектов, систем и процессов (виртуальные устройства);

— модули пользовательского интерфейса, предоставляющие специалисту-исследователю возможность визуализации необходимых параметров, а также осуществления управления параметрами виртуального эксперимента в режиме реального времени (индикаторы).

В состав виртуальных модулей — устройств макета входят модуль определения навигационных параметров подвижного объекта и измерителя, модуль вычисления магнитного поля и его градиента, модуль оценивания параметров ДММ.

Состав модулей-индикаторов зависит от целей виртуального эксперимента и может подбираться оператором-исследователем индивидуально.

Режим имитационного моделирования осуществляется под контролем системного таймера. При этом каждый модуль из состава виртуальных устройств работает самостоятельно, извещая сервер о поступлении новой порции данных. Сервер же, в свою очередь, извещает соответствующие индикаторы о возможности визуализации новых данных, а виртуальные устройства — о получении соответствующих управляющих команд от оператора-исследователя. Информация, вырабатываемая каждым из виртуальных устройств, хранится и обрабатывается в области данных этого устройства; сервер осуществляет передачу этой информации модулям-индикаторам. Индикаторы и виртуальные устройства в процессе визуализации могут быть однозначно связаны (индикатор отражает виртуальное поведение конкретного виртуального устройства), но в общем случае данные всех виртуальных устройств доступны для единого контроля визуализации. Управление работой виртуальных устройств всегда осуществляется индивидуально.

## 2. МОДУЛЬ ОПРЕДЕЛЕНИЯ НАВИГАЦИОННЫХ ПАРАМЕТРОВ

Задачей модуля определения навигационных параметров является выработка данных о положении, скорости и ориентации ПО и измерителя в различные моменты времени. Отметим что, так как требуется определять два набора параметров движения (для ПО и для измерительной системы), то модуль определения навигационных параметров состоит из двух частей, каждая из которых вырабатывает параметры для одного объекта (ПО или измерителя); при этом есть возможность задавать как независимые, так и зависимые законы движения ПО и измерителя. Последний случай реализуется, если определение параметров ДММ осуществляется по схеме с буксируемым за ПО магнитоградиентометром, как описано в работе [3]. Заметим, что анализ результатов имитационного моделирования, с одной стороны, требует точного задания навигационного плана (сценария) для



каждого из вычислительных экспериментов и, соответственно, точного следования этому плану. С другой стороны, необходимо ориентироваться на максимальную степень соответствия модели реальным физическим процессам, в том числе управлять виртуальным ПО так, чтобы его движение было подобно тому, что происходит в реальности. Для удовлетворения этим требованиям авторами был разработан модуль определения навигационных параметров, в котором управление виртуальным движением осуществляется в соответствии с навигационным планом (заданием), причем управление движением в значительной мере сходно с управлением, осуществляемым экипажем судна — штурманом и рулевым.

Навигационный план представляется в форме последовательности заданных линий пути, каждая из которых, в свою очередь, задается набором точек с известными географическими координатами (широтой, долготой, высотой), а также заданной линейной скоростью подвижного объекта. Описание навигационного плана представляет собой структурированную последовательность точек и сохраняется в виде текстового файла. Предполагается, что навигационный план подготавливается для каждого вычислительного эксперимента отдельно и загружается перед его началом; вместе с тем, после загрузки навигационный план может быть изменен по решению оператора в интерактивном режиме с использованием специальных индикаторов.

Имитационное моделирование процесса проводки виртуального объекта по траекториям, заданным навигационным планом, в структуре макета может осуществляться в двух режимах — ручном (движением объекта управляет оператор с клавиатуры) и автоматическом (работу оператора выполняет программа, имитируя действия оператора).

Для удобства управления проводкой предусмотрено формирование вспомогательной управляющей информации, которая служит подсказкой для оператора при ручном управлении и составляет основу для работы виртуального авторулевого. Эта управляющая информация представляет собой скалярный сигнал курсового уклонения (коррекции) как для оператора, так и для авторулевого. Для успешного исполнения навигационного задания от оператора (авторулевого) требуется удерживать такой режим движения, при котором параметр коррекции близок к нулю. Если объекту для следования заданной траектории необходимо отклониться вправо, то показатель коррекции примет положительное значение, влево — отрицательное. Ориентация вычисляется исходя из параметров траектории подвижного объекта с учетом синусоидального возмущения от естественного волнения морской среды. Подробно алгоритм вычисления

навигационных параметров описывается в работах [4, 5].

### 3. МОДУЛЬ ВЫЧИСЛЕНИЯ МАГНИТНОГО ПОЛЯ

При вычислении магнитного поля вблизи подвижного объекта предполагается, что это поле создается:

- постоянной составляющей магнитного поля ПО, вызванной «жестким» (постоянным) намагничиванием материалов корпуса и работой бортового электрооборудования;
- переменной составляющей магнитного поля ПО, вызванной «мягким» (переменным) намагничиванием корпуса;
- нормальной составляющей МПЗ;
- вариационной составляющей МПЗ;
- полем магнитных аномалий;
- индустриальными помехами (что актуально при береговом расположении магнитоизмерительной системы).

Результирующее магнитное поле вычисляется как сумма полей этих источников. Рассмотрим процесс вычисления каждой из описанных составляющих более подробно.

При вычислении постоянной составляющей магнитного поля ПО предполагается, что внутри корпуса ПО находятся виртуальные источники постоянного (жесткого) намагничивания, представляемые в форме системы локальных дипольных излучателей в системе координат, жестко связанной с корпусом ПО. Модельными параметрами являются их дипольные магнитные моменты  $M_i$  (здесь и в дальнейшем мы будем обозначать векторы как трехмерные вектор-столбцы) и координаты центров  $r_i$ , суммарное поле вычисляется так [6]:

$$B_p = \sum_i \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3(M_i^T R_i)R_i - M_i R_i^2}{R_i^5}, \quad R_i = r_i - r, \quad (1)$$

где  $r$  — радиус-вектор точки наблюдения.

Для определения намагничивания корпуса, представляемого эллипсоидальной оболочкой, заметим, что магнитное поле, создаваемое оболочкой, может быть представлена в виде градиента некоторого скалярного потенциала [7]:

$$B_s = -\nabla u. \quad (3)$$

Можно показать, что введенная таким образом скалярная функция  $u$  удовлетворяет уравнению Лапласа как внутри оболочки, так и вне ее; кроме того, на поверхностях оболочки выполняются краевые условия для уравнений Максвелла. Это позволяет записать решение для функции  $u_1$  снаружи

от оболочки,  $u_2$  в стенках оболочки,  $u_3$  внутри оболочки в виде [8]:

$$\begin{aligned} u_1 &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n D_{mn} Q_n^m(\eta) Y_n^m(\theta, \phi), \\ u_2 &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n (B_{mn} Q_n^m(\eta) + C_{nm} P_n^m(\eta)) Y_n^m(\theta, \phi), \\ u_3 &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n A_{mn} P_n^m(\eta) Y_n^m(\theta, \phi), \end{aligned} \quad (4)$$

где  $n$  — максимальный порядок разложения,  $\eta, \theta, \phi$  — вытянутые сфероидальные координаты,  $P_n^m(\eta), Q_n^m(\eta)$  — присоединенные функции Лежандра 1-го и 2-го рода соответственно,  $Y_n^m(\theta, \phi)$  — сферические функции [9]. Здесь  $A_{mn}, B_{mn}, C_{nm}, D_{mn}$  — константы, определяемые как решение системы линейных уравнений

$$\begin{aligned} B_{mn} Q_n^m(\eta) + (C_{nm} - A_{nm}) P_n^m(\eta) &= 0, \quad \eta = \eta_2, \\ (B_{mn} - D_{nm}) Q_n^m(\eta) + C_{nm} P_n^m(\eta) &= u_{nm}, \quad \eta = \eta_1, \\ \mu B_{mn} Q_n^m(\eta) + (\mu C_{nm} - \mu_0 A_{nm}) P_n^m(\eta) &= 0, \quad \eta = \eta_2, \\ (\mu B_{mn} - \mu_0 D_{nm}) Q_n^m(\eta) + \mu C_{nm} P_n^m(\eta) &= \mu_0 w_{nm}, \quad \eta = \eta_1, \end{aligned} \quad (5)$$

где  $\eta_1, \eta_2$  — геометрические параметры, определяющие наружную и внутреннюю эллипсоидальные поверхности, а коэффициенты  $u_{nm}, w_{nm}$  определяются так:

$$\begin{aligned} u_{nm} &= \frac{1}{\|Y_n^m\|^2} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} d\theta \sin\theta u_e(\eta, \theta, \phi) Y_n^m(\theta, \phi), \\ w_{nm} &= \frac{1}{\|Y_n^m\|^2} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} d\theta \sin\theta \frac{\partial u_e(\eta, \theta, \phi)}{\partial \eta} Y_n^m(\theta, \phi), \end{aligned} \quad (6)$$

где  $u_e$  — скалярный потенциал внешних источников (МПЗ, магнитного поля системы постоянных диполей). В описываемом компьютерном макете интегралы (6) могут вычисляться двумя способами: с помощью метода Гаусса–Лежандра [10] и с помощью обобщения теоремы отсчетов, данного в работе [11]. После того, как получены коэффициенты  $A_{nm}, B_{nm}, C_{nm}, D_{nm}$  из системы уравнений (5), скалярный потенциал и магнитное поле могут быть вычислены с использованием формул (4), (3). Таким образом, магнитное поле оболочки может

быть вычислено как разложение по сферическим функциям, при этом входными параметрами являются геометрические размеры оболочки и магнитная проницаемость ее материала, а коэффициенты разложения зависят от МПЗ и перевычисляются на каждом шаге алгоритма.

Для вычисления нормальной составляющей МПЗ в данном макете используется модель IGRF 13 [12]. Аналогично полю оболочки, нормальная составляющая МПЗ представляется в виде градиента скалярного потенциала, вычисляемого по формуле

$$\begin{aligned} u &= a \sum_{n=1}^N \sum_{m=0}^n \left(\frac{a}{r}\right)^{n+1} (g_{nm} \cos m\phi + h_{nm} \sin m\phi) \times \\ &\quad \times P_n^m(\cos\theta), \\ g_{mn} &= g_{mn}^0 + \dot{g}_{mn}(t - t_0), \\ h_{mn} &= h_{mn}^0 + \dot{h}_{mn}(t - t_0), \end{aligned} \quad (7)$$

где  $r, \theta, \phi$  — сферические координаты точки наблюдения,  $t$  — время. Компоненты вектора магнитной индукции вычисляются по формуле вида (3). Постоянные  $a, t_0, g_{mn}^0, \dot{g}_{mn}, h_{mn}^0, \dot{h}_{mn}$ , входящие в выражение (7), известны и загружаются из файла перед началом работы макета.

Вариационная составляющая магнитного поля представляется в виде суммы синусоидальных составляющих

$$B_v = \sum_i (C_i \cos \omega_i t + S_i \sin \omega_i t). \quad (8)$$

Значения  $C_i, S_i, \omega_i$  в формуле (8) являются входными параметрами и задаются в файле настроек.

В качестве модели аномального поля применяется синтетическая модель, построенная как потенциал случайно распределенных в квадрате  $10 \times 10$  км диполей, палитра которых периодически повторяется. При моделировании задается глубина слоя, в котором распределены диполи, равная 1 км, а также максимальная амплитуда дипольного момента в диапазоне  $\pm 25$  МАм<sup>2</sup>. Аномальное поле не отражает истинной картины строения МПЗ указанного района, а лишь имитирует наличие характерных магнитовозмущающих объектов и неоднородностей намагничивания геологических структур. Тем не менее, поведение модели адекватно, по мере увеличения высоты (глубокая вода) амплитуда аномалий уменьшается, а характерный период увеличивается. При вычислении суммарного поля аномалий используется формула, аналогичная выражению (1). Наличие или отсутствие соответствия модели аномального МПЗ истинной картине распределения магнитного поля для работы алгоритмов определения ДММ несущественно, существ-



венным является само присутствие или отсутствие аномальной составляющей, оказывающей влияние на работу алгоритма. Применение синтетической модели аномального МПЗ позволяет в имитационном режиме оценить меру этого влияния и, соответственно, определить условия, при которых дистанционное определение ДММ в процессе плавания можно считать корректным. Модель не эволюционирует, стабильна во времени. Параметры модели «жестко вмонтированы» в программный код единственной доступной функции, вызов которой и обеспечивает получение параметров модельного поля.

Наконец, для моделирования промышленных помех используется поле системы бесконечно тонких нитей, питаемых синусоидальным током промышленной частоты (50, 60 Гц). Для магнитного поля нити с током имеется простое аналитическое выражение [6]; поле системы нитей является просто векторной суммой полей отдельных нитей. Входными данными, необходимыми для моделирования, служат геометрические параметры системы и частоты и амплитуды токов, текущих в нитях.

#### 4. МОДУЛЬ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ДИПОЛЬНОГО МАГНИТНОГО МОМЕНТА

Данный модуль отвечает как за моделирование процесса магнитных измерений, так и за определение ДММ по данным этих измерений. Рассмотрим сначала процесс моделирования измерений.

В структуре макета осуществляется моделирование работы измерителя, построенного по пространственно разнесенной схеме компоновки датчиков (рис. 1). Виртуальная установка представлена в виде правильной четырехгранной пирамиды, в четырех вершинах которой установлены магниточувствительные датчики (обозначены Д1 — Д4). Кроме того, предполагается, что установка в своем составе имеет блоки системы ориентации (обозначена ГИС), позволяющие определить пространственное и угловое положение.

В структуре макета предусмотрена возможность моделирования работы измерительной установки с использованием магнитных датчиков трех различных типов:

- скалярные датчики (квантовые датчики) [13],
- векторные трехкомпонентные датчики высокой чувствительности и точности (СКВИД) [14],
- векторные трехкомпонентные датчики низкой чувствительности и точности (феррозондовые магнитометры) [13].

Первый тип соответствует векторному магнитоградиентометру, второй и третий — тензорному магнитоградиентометру.

Имитационная модель работы магниточувствительных датчиков всех трех типов производится по

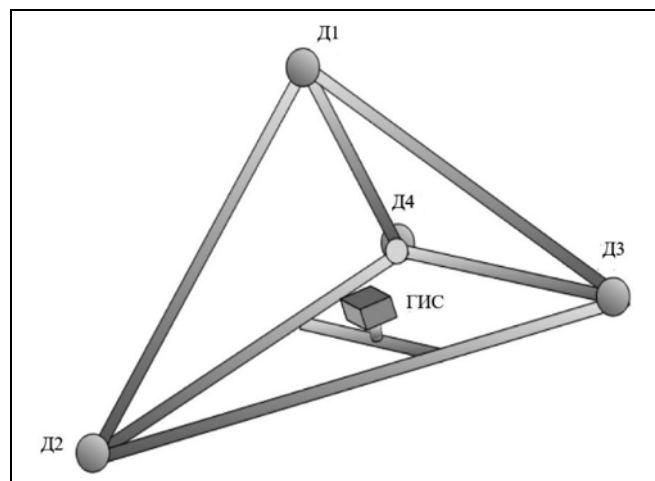


Рис. 1. Магнитоградиентная измерительная установка на разнесенных датчиках

одной и той же схеме — на каждый квант системного времени выполняются следующие действия.

- С использованием процедур модуля навигации измерительной установки вычисляются модельные (так называемые «истинные») параметры положения (координат и угловой ориентации) каждого из датчиков виртуальной магнитоизмерительной установки.
- Вычисляются новые «искаженные» значения пространственных координат измерителей (моделируется ошибка формы платформы магнитоградиентной установки).
- Для новых «искаженных» параметров положения в системе координат, связанной с каждым из датчиков, вычисляются значения компонент модельного (так называемые «истинного») вектора магнитного поля.
- Параметры «истинного» вектора поля подвергаются процедуре виртуального измерения в соответствии с параметрами модели измерительных свойств датчика: вычисляются параметры нового «измеренного» трехкомпонентного вектора поля, искаженного относительно «истинного». Искажения вводятся как влияние систематических ошибок сдвига нуля, отклонения от единицы масштабного коэффициента для каждой из компонент, неортогональности чувствительных осей и шума измерений.
- Если в рамках сценария предполагается моделирование измерительной установки с использованием скалярных магниточувствительных датчиков, то параметры «измеренного» вектора для каждого датчика преобразуются к скалярным значениям путем взятия абсолютной величины.
- В зависимости от типа датчиков автоматически определяется тип магнитоградиентной установ-



ки — установка будет «измерять» вектор градиента абсолютной величины поля при использовании скалярных датчиков и тензор второй производной потенциала поля при использовании векторных датчиков.

- Значения углов ориентации блока «истинных» параметров положения также подвергаются процедуре виртуального измерения, т. е. вычисляются «измеренные» параметры вектора угловой ориентации, отличающиеся от «истинных» влиянием систематических искажений в соответствии с заданными параметрами точности виртуальной системы ориентации измерительной установки.

Совокупность вычисленных «измеренных» параметров образует набор входных данных для алгоритма определения параметров ДММ.

Отметим также, что в макете предусмотрена возможность работы данного модуля в режимах калибровки и измерений. В режиме калибровки включается алгоритм вычисления корректирующих поправок для данных виртуальных измерений. Поправки вводятся на основе «измерения» переменного поля, «возбуждаемого» виртуальным эталонным источником. Режим измерений отличается от режима калибровки тем, что результаты виртуальных измерений не содержат влияния эталонного поля (источник эталонного поля выключен).

Кратко изложим алгоритм оценивания параметров ДММ по измерениям магнитного поля. Рассмотрим для определенности тензорный измеритель. Получим из формулы (1) выражение для случая единственного диполя (в предположении, что диполь находится в начале системы координат):

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi r^5} (3rr^T - r^2 I)M. \quad (9)$$

Здесь  $M$  — дипольный магнитный момент;  $I$  — единичная матрица  $3 \times 3$ ;  $rr^T$  — матрица диадного произведения векторов. Покажем, как можно определить  $r$  и  $M$ , если известны значения левой части выражения (9) в нескольких точках измерения, а также расстояния между этими точками. Если имеются четыре векторных датчика поля, для каждого из них можно вычислить

$$B_i = \frac{\mu_0}{4\pi |\tilde{r} + \delta r_i|^3} \left( 3 \frac{(\tilde{r} + \delta r_i)(\tilde{r} + \delta r_i)^T}{(\tilde{r} + \delta r_i)^T (\tilde{r} + \delta r_i)} - I \right) \tilde{M}, \quad (10)$$

Здесь  $M$  и  $r$  — оценки векторов  $M$  и  $r$ ;  $\delta r_i$  — известные векторы смещения векторных магнитных датчиков относительно измерительного центра системы;  $B_i$  — расчетное значение вектора поля для текущей гипотезы для  $i$ -го датчика.

Поскольку измерение вектора поля подвержено воздействию вариаций, необходимо работать с разностями компонент поля. Вариации магнитного поля достаточно пространственно однородны, чтобы пренебречь их пространственными изменениями на расстояниях до нескольких километров.

Введем вектор оцениваемых параметров

$$x = (r_1, r_2, r_3, m_1, m_2, m_3),$$

где  $r_i$  — компоненты вектора поправок к некоей априорной оценке радиус-вектора  $r$  точки расположения диполя;  $m_i$  — компоненты вектора поправок к априорной оценке вектора  $M$  дипольного момента

$$X = X_0 + x, X_0 = (\tilde{r}_1, \tilde{r}_2, \tilde{r}_3, \tilde{M}_1, \tilde{M}_2, \tilde{M}_3).$$

Введем вектор измерений покомпонентных разностей показаний векторных датчиков

$$z = (z_{121}, z_{122}, z_{123}, z_{231}, z_{232}, z_{233}, z_{241}, z_{242}, z_{243}),$$

где первый индекс соответствует номеру датчика — уменьшаемого, второй индекс — номер датчика — вычитаемого, третий индекс — номер оси чувствительности, вдоль которой измеряется разность. Несмотря на то, что всего измеряется 18 таких разностей для четырех датчиков, только 9 можно считать независимыми, поскольку любая другая компонента разностей может быть выражена через параметры вектора  $z$ . Введем вектор, содержащий параметры градиента (разностей компонент поля):

$$G = (G_{121}, G_{122}, G_{123}, G_{231}, G_{232}, G_{233}, G_{241}, G_{242}, G_{243}),$$

$$G_{ijk} = B_{ik} - B_{jk},$$

причем  $G_{ijk}$  выражаются через  $r$  и  $M$  с помощью формулы (10). Таким образом, требуется найти значения  $r$  и  $M$  такие, что удовлетворяются соотношения

$$G_{ijk} = f_{ijk}(r, M),$$

где  $f_{ijk}$  — нелинейные функции  $r$  и  $M$ , выражающиеся через формулу (10). Для решения данного класса задач можно применить нелинейное обобщение фильтра Калмана — (Iterated Extended Kalman Filter — IEKF) [15—18].

Аналогичный подход можно применить и при решении задачи об определении параметров ДММ по данным измерений вектора градиента. Единственное отличие будет заключаться в том, что в уравнение для измерений войдут не разности компонент векторов поля, а разности их модулей. Отметим, однако, что в рассматриваемой конфигурации измерительной системы (четыре датчика), число независимых измерений в случае векторного градиентометра равно трем, т. е. возможно оп-

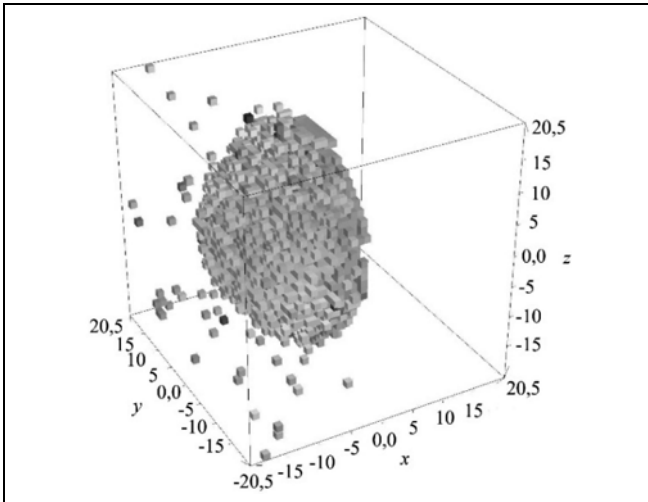


Рис. 2. Область сходимости итерационного алгоритма

ределение только параметров ДММ, но не радиуса-вектора до него.

Численные эксперименты показывают, что при не слишком больших ошибках априорных значений  $r$  и  $M$  и шумах измерений описанный алгоритм всегда сходится к истинным значениям параметров ДММ. Область сходимости алгоритма показана на рис. 2. Начальные условия брались из куба размером 40 на 40 м: от  $-20$  до  $+20$  по каждой из координат, модельная точка положения диполя —  $(5; 0; 0,306)$ . Дипольный момент брались равным  $100 \text{ Ам}^2$ , шум измерений компонент поля —  $1 \text{ нТл}$ . Отенок серого соответствует количеству итераций, затраченных на достижение точки, отвечающей решению. В силу особенностей конструкции градиентометра плоскость, проходящая через его центр с нормалью, направленной на диполь, представляет собой границу области сходимости для данного алгоритма, как видно из рис. 2.

## 5. ПРИМЕРЫ ЧИСЛЕННЫХ ЭКСПЕРИМЕНТОВ, ПРОВОДИМЫХ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ МАКЕТА

Для демонстрации работоспособности описанных алгоритмов определения ДММ по параметрам градиента магнитного поля в точке расположения детектора авторами проведен ряд численных экспериментов с использованием рассматриваемого макета; результаты некоторых экспериментов излагаются далее. Для контроля точности определения ДММ детектором нами был применен такой подход: задаваясь параметрами модели объекта, вычислялась асимптотика магнитного поля на бесконечности, соответствующая полю точечного магнитного диполя (убывающего не быстрее, чем  $1/r^3$ );

при этом моделируемые нормальная и аномальная составляющая МПЗ, а также промышленные помехи в выражение для модельного поля не включались.

В ходе первого эксперимента моделировалась простейшая возможная ситуация: движение объекта с буксируемым за ним на гибком тросе детектором по прямолинейному маршруту; при этом в качестве поля объекта выступало поле точечного магнитного диполя, поля магнитных аномалий и промышленных помех не учитывались. Результаты данного эксперимента отражены на рис. 3—5 (на рис. 5 на правой шкале значения умножаются на  $10^6$ ).

Видно, что алгоритм вычисления ДММ достаточно быстро сходится к истинному значению ди-

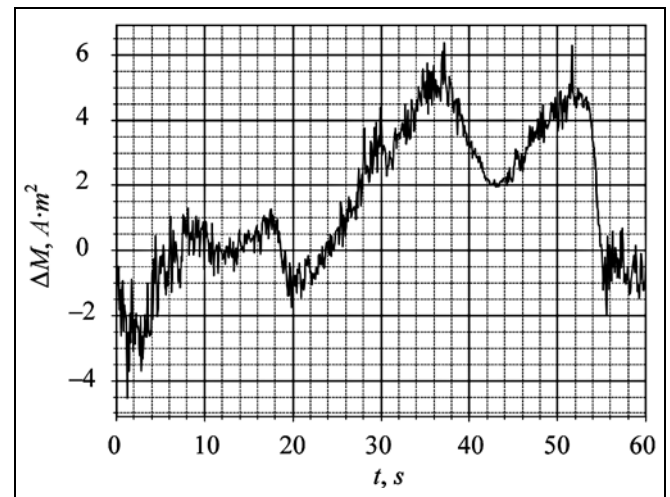


Рис. 3. Ошибка оценивания модуля ДММ

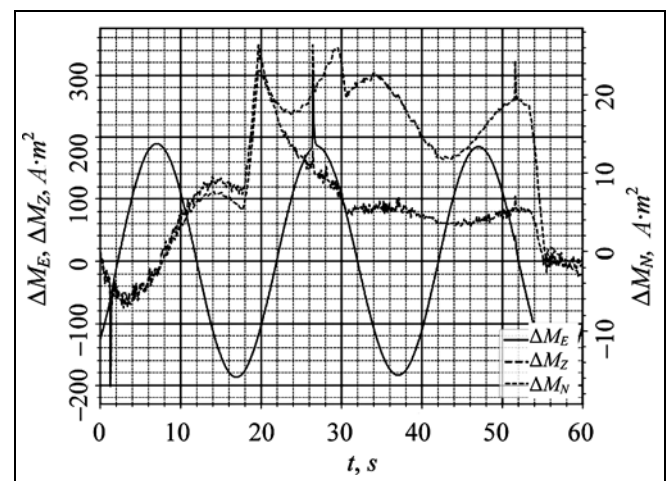


Рис. 4. Ошибка оценивания компонент вектора ДММ

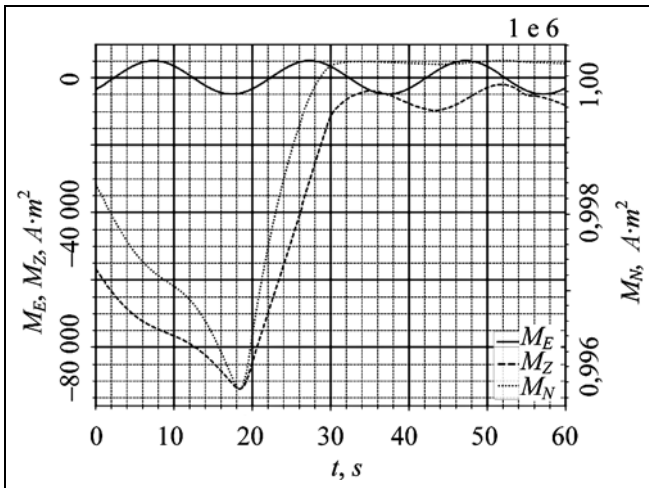


Рис. 5. Компоненты вектора ДММ

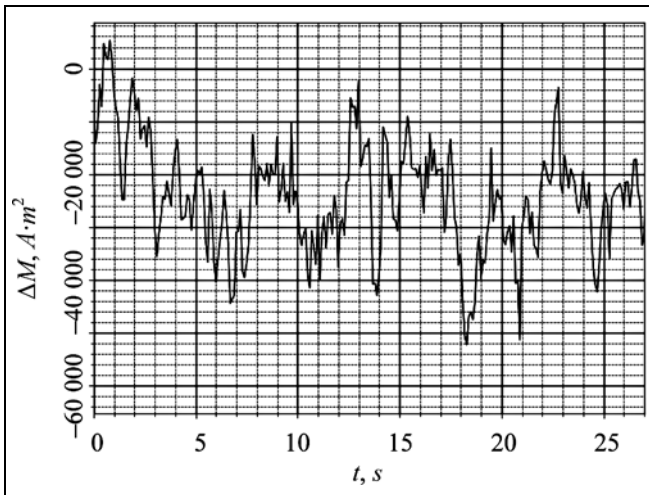


Рис. 6. Ошибка оценивания модуля ДММ

экспериментом качество оценивания, как и ожидалось, ухудшилось.

В ходе третьего эксперимента магнитное поле объекта рассчитывалось как сумма полей системы точечных диполей и однородной оболочки, результаты представлены на рис. 9–11 (на рис. 11 на правой и левой шкалах все значения умножаются на  $10^6$ ). Качество оценивания ДММ хуже, чем в первом эксперименте, что объясняется как особенностями применяемого алгоритма оценивания дипольного момента, основанного на формуле для поля точечного диполя и определяющего ДММ более сложных систем только приближенно, так и наличием моделируемых шумов измерений. Кроме того, в этом случае предполагалось, что объект движется по криволинейному маршруту и совершает маневры. Отметим к тому же, что результаты

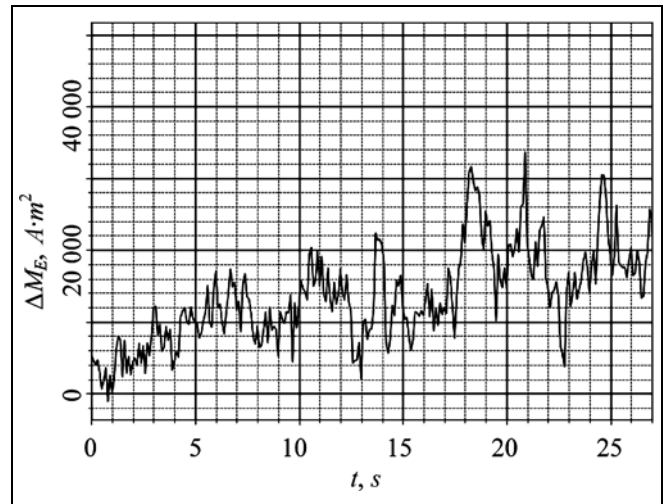


Рис. 7. Ошибки оценивания одной из компонент вектора ДММ

польного момента, определяемому как коэффициент при члене в разложении, убывающем как  $1/r^3$ .

Во втором эксперименте моделировалось оценивание ДММ с учетом помех датчиков и неточного знания геометрии измерителя, результаты приведены на рис. 6–8 (на рис. 8 все значения на правой шкале умножаются на  $10^6$ ). При проведении данного эксперимента предполагались такие значения среднеквадратических ошибок геометрических параметров: 10 см — для расстояния «объект–детектор», 2 мм — для расстояния между отдельными датчиками в составе детектора (при разnose датчиков в 2 м),  $10^{-4}$  рад — для ориентации осей чувствительности магнитоизмерительной системы. Видно, что по сравнению с первым

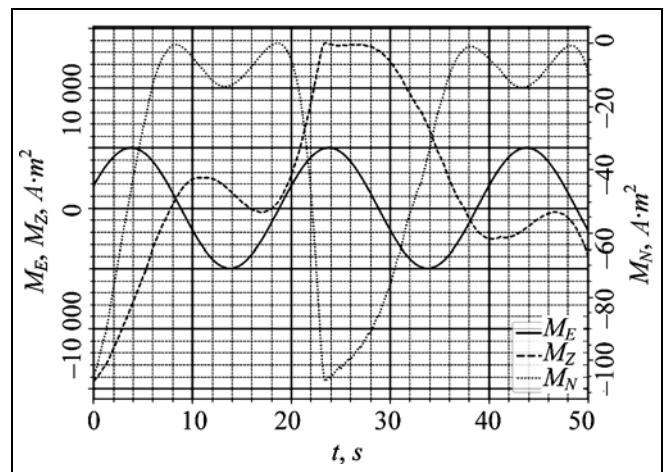


Рис. 8. Компоненты вектора ДММ

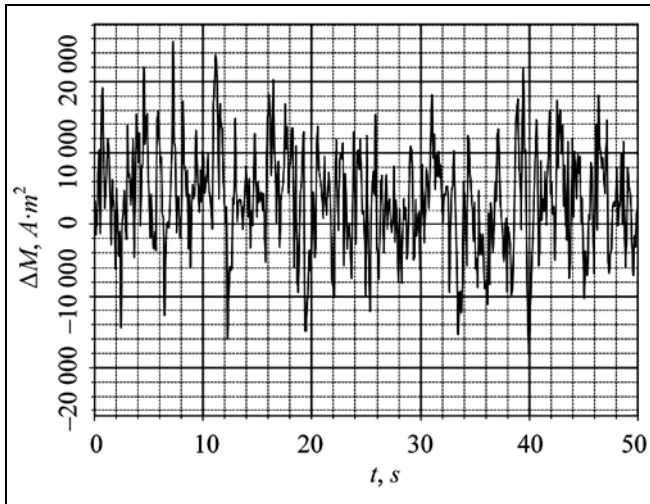


Рис. 9. Ошибка оценивания модуля ДММ

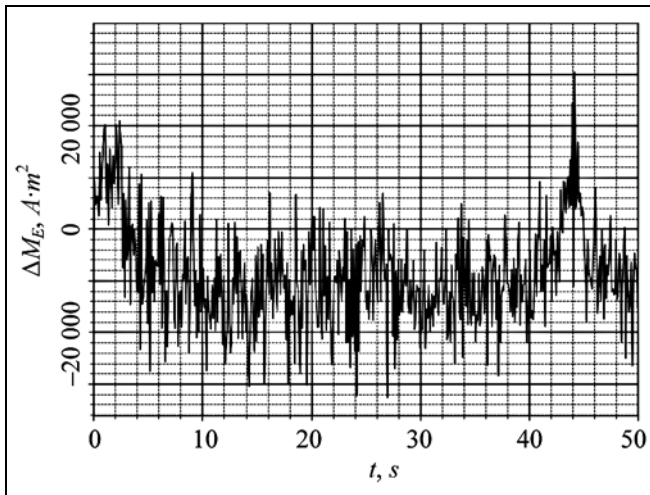


Рис. 10. Ошибка оценивания одной из компонент вектора ДММ

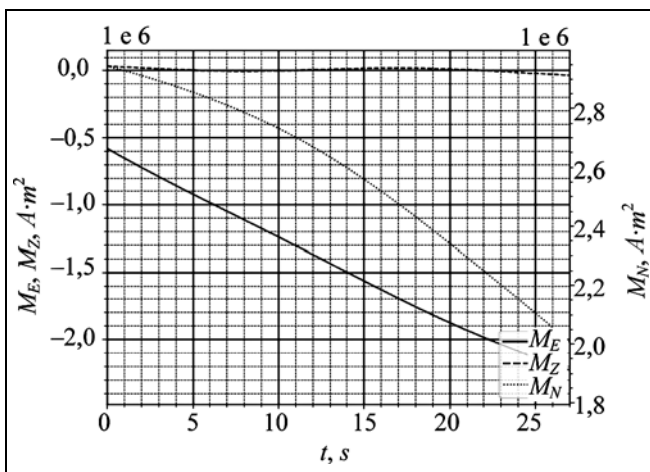


Рис. 11. Компоненты вектора ДММ

ошибки оценок в третьем эксперименте не сильно хуже, чем во втором эксперименте, что доказывает принципиальную возможность применения рассматриваемых алгоритмов оценивания ДММ для объектов с достаточно сложной структурой собственного магнитного поля.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей статье рассмотрен разработанный авторами макет, предназначенный для моделирования функционирования магнитоградиентного измерителя в процессе оценивания ДММ ПО. Подробно описаны структура макета, принципы его функционирования, назначение отдельных служебных модулей, входящих в состав данного макета. Кроме того, описаны алгоритм моделирования магнитного поля ПО, включающий в себя две составляющие (постоянной части поля, поля эллипсоидальной оболочки), алгоритм моделирования нормальной составляющей МПЗ и различных помех (индустриальной, поля аномалий, вариационной составляющей МПЗ), нелинейный алгоритм оценивания параметров ДММ по измерениям компонент вектора магнитного поля в нескольких точках с фиксированным разнесом. Наконец, приведены примеры численных экспериментов, выполненных с использованием данного макета.

Разработанный макет позволяет обрабатывать задачи оценивания ДММ ПО в стационарном, мобильном и буксируемом вариантах. На его основе можно оценивать эффективность внедрения описанных систем оценивания ДММ в реальном времени в процессе движения и обрабатывать управление токами в обмотках при размагничивании ПО, что позволяет значительно повысить его качество и надежность.

## ЛИТЕРАТУРА

1. *Noriega, G.* Aeromagnetic Compensation in Gradiometry — Performance, Model Stability, and Robustness // *IEEE Geoscience and Remote Sensing Letters*. — 2015. — Vol. 12, iss. 1. — P. 117–121.
2. *Bayens, T.M.* Analysis of the Demagnetisation Process and Possible Alternative Magnetic Treatments for Naval Vessels / A thesis submitted for the degree of Doctor of Philosophy in the School of Physics, Faculty of Science at The University of New South Wales. — 2002. — 275 p.
3. *Волковицкий А.К., Каршаков Е.В., Павлов Б.В., Тхоренко М.Ю.* Применение магнитоградиентометров для управления магнитным полем подвижного объекта // *Проблемы управления*. — 2017. — № 2. — С. 68–72. [*Volkovitskiy, A.K., Karshakov, E.V., Tkhorenko, M.Yu., Pavlov, B.V.* Magnetic gradiometry application for the moving object magnetic field control // *Control Sciences*. — 2017. — No. 2. — P. 68–72. (In Russian)]
4. *Волковицкий А.К., Каршаков Е.В., Павлов Б.В.* Структура алгоритмов управления проводкой летательного аппарата // *Известия ЮФУ. Технические науки*. — 2013. — № 3 (140). — С. 217–225. [*Volkovitskiy, A.K., Karshakov, E.V.*,

- Tkhorenko, M.Yu.* The structure of the control algorithms of aircraft navigating // IZVESTIYA SFedU. ENGINEERING SCIENCES. — 2013. — No. 3. — P. 217–225. (In Russian)]
5. *Karshakov, E.V., Shevchenko, A.M., Garakoev, A.M.* Formation of a director index to assist the pilot in conducting airborne geophysical survey // IOP Conference Series: Materials Science and Engineering — International Workshop on Navigation and Motion Control (NMC 2020). — 2020. — Vol. 984. — C. 012015 (1-10).
  6. *Парселл Э.* Электричество и магнетизм: учебное руководство / пер. с англ. под ред. А.И. Шальникова и А.О. Вайсенберга. — М.: Наука, 1983. — 415 с. [*Parsell, E.* Elektrichestvo i magnetizm: uchebnoe rukovodstvo / per. s angl. pod red. A.I. SHal'nikova i A.O. Vajsenberga. — М.: Nauka, 1983. — 415 s. (In Russian)]
  7. *Ландау Л.Д., Лившиц Е.М.* Теоретическая физика. Электродинамика сплошных сред // М.: Наука, гл. ред. физ.-мат. лит., 2-е изд., 1982. — 621 с. [*Landau, L.D., Livshic, E.M.* Teoreticheskaya fizika. Elektrodinamika sploshnyh sred // М.: Nauka, gl. red. fiz.-mat. lit., 2-e izd., 1982. — 621 s. (In Russian)]
  8. *Moon, P., Spencer, D.E.* Field Theory Handbook // Springer-Verlag. — 1988. — 236 p.
  9. *Abramowitz, M., Stegun, I.A.* Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs and Mathematical Tables // National Bureau of Standards. — 1964. — 1046 p.
  10. *Press, W.H., Teukolsky, S.A., Vetterling, W.T., Flannery, B.P.* Numerical Recipes: The Art of Scientific Computing // Cambridge University Press. — 2007. — 1235 p.
  11. *Dricsoll, J.R., Healy, D.M.* Computing Fourier Transforms and Convolutions on 2-Sphere // Advances in Applied Mathematics, 15, 1994. — P. 202–250.
  12. *Thebault, E., Finlay, C.C., Beggan, C.D., et al.* International Geomagnetic Reference Field: the 12th generation // Earth, Planets and Space. — 2015. — Vol. 67, article no. 79. — P. 1–19.
  13. *Telford, W.M., Geldart, L.R. and Sherif, R.E.* Applied Geophysics / Cambridge University Press, 2004. — 744 p.
  14. *Foley, C.P., Tilbrook, D.L., Leslie, K.E., et al.* Geophysical Exploration Using Magnetic Gradiometry Based on HTS SQUIDS // IEEE Trans. Appl. Superconductivity. — 2001. — Vol. 11, no. 1. — P. 1375–1378.
  15. *Ллойд Э., Ледерман У.* Справочник по прикладной статистике. Том 2. — М.: Финансы и статистика. — 1990. — 526 с. [*Lloyd, E., Lederman, U.* Spravochnik po prikladnoj statistike. Tom 2 // М.: Finansy i statistika. — 1990. — 526 s. (In Russian)]
  16. *Степанов. О.А.* Применение теории нелинейной фильтрации в задачах обработки навигационной информации / СПб: ГНЦ РФ — ЦНИИ «Электроприбор». — 2003. — 370 с. [*Stepanov, O.A.* Primenenie teorii nelinejnoj fil'tracii v zadachah obrabotki navigacionnoj informacii / SPb: GNC RF — CNII «Elektropribor». — 2003. — 370 s. (In Russian)]
  17. *Simon, D.* Optimal State Estimation. Kalman,  $H_\infty$  and Nonlinear Approaches. — 2006. — 550 p.
  18. *Xu, Y., Chen, X., Li, Q.* Adaptive Iterated Extended Kalman Filter and Its Application to Autonomous Integrated Navigation for Indoor Robot // The Scientific World Journal. — 2014. — Vol. 2014. — 7 p.
- Статья представлена к публикации членом редколлегии Л.Б. Рапопортом.*
- Поступила в редакцию 7.04.2021, после доработки 22.04.2021. Принята к публикации 13.05.2021.*

**Волковицкий Андрей Кириллович** — Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, г. Москва, ✉ avolkovitsky@yandex.ru,

**Гладышев Анатолий Иванович** — председатель Секции по оборонным проблемам МО при Президиуме РАН, г. Москва, ✉ tolyagladyshev@yandex.ru,

**Гольдин Дмитрий Алексеевич** — Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, г. Москва, ✉ goldind@ipu.ru,

**Каршаков Евгений Владимирович** — Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, г. Москва, ✉ karshak@mail.ru,

**Павлов Борис Викторович** — гл. науч. сотрудник, Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, г. Москва, ✉ pavlov@ipu.ru,

**Тхоренко Максим Юрьевич** — Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, г. Москва, ✉ tkhorenkom@mail.ru.

## A COMPUTER SIMULATION COMPLEX FOR ANALYSIS OF MAGNETIC GRADIOMETRY SYSTEMS

A.K. Volkovitskiy<sup>1</sup>, A.I. Gladyshev<sup>2</sup>, D.A. Goldin<sup>3</sup>, E.V. Karshakov<sup>4</sup>, B.V. Pavlov<sup>5</sup>, and M.Yu. Tkhorenko<sup>6</sup>

<sup>1,3-6</sup> Trapeznikov Institute of Control Sciences, Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia

<sup>2</sup> Chairman, the Defense Problems Section of the Ministry of Defense under the RAS Presidium, Moscow

<sup>1</sup> ✉ avolkovitsky@yandex.ru, <sup>2</sup> ✉ tolyagladyshev@yandex.ru, <sup>3</sup> ✉ goldind@ipu.ru, <sup>4</sup> ✉ karshak@mail.ru,

<sup>5</sup> ✉ pavlov@ipu.ru, <sup>6</sup> ✉ tkhorenkom@mail.ru

**Abstract.** A computer simulation complex for magnetic gradiometry systems is described. This complex simulates the estimation procedure for the magnetic dipole moment of a moving object according to the magnetic gradiometry data. The paper considers the software architecture and intended purpose of the complex and the algorithms of its modules, including the magnetic field module, the ambient magnetic field module (the object's magnetic field, the main magnetic field, the magnetic anomaly, and industrial magnetic noise), and the magnetic dipole moment module. Some numerical experiments with the simulation complex are briefly described. This complex can be used to design degaussing systems for the magnetic field of moving object magnetic field, the geomagnetic field, and industrial magnetic noise), and the magnetic dipole moment module. Some numerical experiments with the simulation complex are briefly described. This complex can be used to design control systems for the magnetic field of moving objects.

**Keywords:** numerical modeling, magnetic gradiometry, magnetic dipole moment.



## ТРИНАДЦАТАЯ МЕЖДУНАРОДНАЯ КОНФЕРЕНЦИЯ «УПРАВЛЕНИЕ РАЗВИТИЕМ КРУПНОМАСШТАБНЫХ СИСТЕМ» MLSD'2020

В период с 28 по 30 сентября 2020 г. с успехом прошла 13-я Международная конференция «Управление развитием крупномасштабных систем». Организатором этого мероприятия выступает Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН (ИПУ РАН) при поддержке IEEE Russia Section. В связи с особыми условиями, сложившимися из-за пандемии COVID—2019, заседания конференции проходили в онлайн-формате. Виртуальный формат позволил избежать перерыва в регулярной серии публикаций и представлении новых научных материалов ежегодно проводимой Международной конференции «Управление развитием крупномасштабных систем».

В работе конференции MLSD'2020 приняли участие 400 человек — работников учреждений Российской академии наук, вузов, управленческих и коммерческих организаций, а также ряда зарубежных научных учреждений (Франции, Норвегии, Бирмы, Вьетнама, Беларуси, Казахстана). По результатам работы 144 доклада были размещены в сборнике трудов конференции<sup>1</sup>.

По традиции, в первый день конференции прошло пленарное заседание, посвященное фундаментальным исследованиям теоретико-методологической платформы стратегического управления развитием крупномасштабных систем, с присутствием всех участников конференции. На пленарном заседании MLSD'2020 были представлены следующие доклады ведущих ученых.

• Новиков Д.А. «Исследовательские принципы теории управления организационно-техническими системами». В докладе рассматриваются «гносеологические» принципы теории управления. Автор выделяет принципы рациональности, согласования и декомпозиции, которые отражают специфику организационно-технических систем как объектов управления, имеющих сложную структуру (логическую, причинно-следственную, процес-

сную и др.), требующих согласования жизненных циклов своих элементов и включающих в себя субъекты с активным поведением.

• Цвиркун А.Д. «Управление развитием крупномасштабных систем в новых условиях». Доклад посвящен разработке методологии комплексного анализа и инструментальных средств управления развитием крупномасштабных систем, ориентированных на решение стратегических задач и проблем управления в России, в том числе в чрезвычайных условиях.

• Дранко О.И. «Многоуровневая система моделирования доходов регионального бюджета в условиях коронакризиса». В докладе предлагается экспресс-моделирование доходов регионального бюджета в зависимости от глубины кризиса. Рассматривается комплекс мер поддержки организаций с моделированием их влияния на доходы бюджета.

• Варнавский В.Г. «Новые формы государственно-частного партнерства в сфере научно-технического развития России». Особое внимание сосредоточено на крупномасштабных проектах. Приведен зарубежный опыт реализации концепции государственно-частного партнерства и анализируется нормативно-правовая база, появившаяся в последние годы в России. Сделан вывод о значительном потенциале, который несет с собой государственно-частное партнерство для развития научно-технологической сферы в России.

• Цыганов В.В. «К платформе управления развитием инфраструктуры крупномасштабного региона в экстремальных условиях». В докладе предложена теоретико-методологическая платформа стратегического управления развитием инфраструктуры крупномасштабного региона в экстремальных климато-географических условиях. Разработаны такие элементы платформы, как организационные системы и механизмы управления развитием инфраструктуры, методология «затраты — потенциал» решений о разработке месторождений и пространственного развития территорий, имитационная сценарная модель развития транспортной инфраструктуры в процессе эволюции социально-экономической системы региона.

<sup>1</sup> «PROCEEDINGS OF 2020 THIRTEENTH INTERNATIONAL CONFERENCE MANAGEMENT OF LARGE-SCALE SYSTEM DEVELOPMENT (MLSD)», RUSSIA, MOSCOW, V.A. TRAPEZNIKOV INSTITUTE OF CONTROL SCIENCES, SEPTEMBER 28—30, 2020 Edited by Anatoly Tsvirkun.

• Кульба В.В., Шелков А.Б., Чернов И.В., Богатырева Л.В. «Сценарный анализ проблем обеспечения общественной безопасности в условиях цифровизации». Данная работа посвящена исследованию проблем повышения эффективности процессов управления обеспечением общественной безопасности и трансформацией систем законодательного регулирования и правоприменения в условиях развитого информационного общества. Представлены результаты сценарного анализа целесообразности создания единого следственного органа, полученные на основе исследования разработанной мультиграфовой модели.

• Ядыкин И.Б., Исаков А.Б. «Новые методы оценивания устойчивости и управления в сложных электроэнергетических системах на основе спектрального и структурного анализа». В докладе рассмотрены новые методы мониторинга устойчивости и управления в крупномасштабных электроэнергетических системах, разрабатываемые в рамках проекта Российского научного фонда 19-19-00673. Основной теоретический результат выполнения проекта — разработка новой концепции модального анализа по Ляпунову (Lyapunov modal analysis, LMA), которая объединяет в себе два подхода для оценки устойчивости динамических систем, а именно, селективный модальный анализ и спектральные разложения функций Ляпунова.

• Ириков В.А. «Использование имеющихся инноваций в управлении достаточно для прорывного развития и перелома спада». Изложенные в докладе практические предложения представляют собой ответ на инициативу Президента РФ по переходу к прорывному развитию и достижению представленных целей, поставленных им в Послании от 1 марта 2018 г. Реализация описываемого применения прорывных технологий третьего поколения способна не только примерно в 1,5—2 раза ускорить получение конечных социально-экономических результатов, намеченных в Законе о бюджете на 2018—2020 годы, но и удвоить прирост темпов социального и экономического роста в ближайшие 2—3 года.

• Комков Н.И. «Перспективы согласования технологического развития с национальными проектами». Доклад акцентирован на повышении требований к конкурентоспособности отечественных инновационных решений и технологий, включая диверсификацию технологического потенциала по всему технологическому циклу, снижение потерь и экономического ущерба на всех этапах и технологических переделах, согласованность потенциала, качества и интересов все звеньев технологических цепочек и др.

• Полетыкин А.Г. «Новые функции для проектирования систем супервизорного управления АЭС». В докладе предлагается добавить несколько

функций, основанных на использовании современных видов вычислительной техники для верхнего уровня АСУТП АЭС новых поколений. Предусматривается перечень функций, их размещение на АЭС, задействованный персонал, методы реализации. Обсуждаются вопросы эргономики и кибербезопасности.

• Сухарев О.С. «Структурная динамика и макроэкономическая политика в России». В работе показано, что структурная политика является незаменимым способом создания новой модели роста в России и сводится к институциональным изменениям, уравнивающим доходность транзакционных, сырьевых и производственных секторов российской экономики. Предлагаемая методология исследования — структурный анализ, метод парной корреляции, позволяющий определить вклад макроэкономических инструментов в темпы роста компонентов ВВП России, а также степень их влияния на ВВП на рассматриваемом временном интервале.

Программа секционных заседаний конференции MLSD'2020 охватила 234 доклада, распределенных по следующим секциям.

Секция 1. Проблемы управления развитием крупномасштабных систем, включая ТНК, Госхолдинги и Госкорпорации.

Секция 2. Методы и инструментальные средства управления инвестиционными проектами и программами.

Секция 3. Управление развитием цифровой экономики, проектные офисы и ситуационные и прогнозно-аналитические центры, институты развития крупномасштабных систем.

Секция 4. Имитация и оптимизация в задачах управления развитием крупномасштабных систем.

Секция 5. Нелинейные процессы и вычислительные методы в задачах управления крупномасштабными системами.

Секция 6. Управление развитием банковских и финансовых систем.

Секция 7. Управление топливно-энергетическими, инфраструктурными и другими системами.

Секция 8. Управление транспортными системами.

Секция 9. Управление развитием авиационно-космических и других крупномасштабных организационно-технических комплексов.

Секция 10. Управление развитием региональных, городских и муниципальных систем.

Секция 11. Управление объектами атомной энергетики и другими объектами повышенной опасности.

Секция 12. Информационное и программное обеспечение систем управления крупномасштабными производствами.



Секция 13. Методология, методы и программно-алгоритмическое обеспечение обработки и интеллектуального анализа больших массивов информации.

Секция 14. Мониторинг в управлении развитием крупномасштабных систем.

Секция 15. Управление развитием крупномасштабных систем здравоохранения, медико-биологических систем и технологий.

Секция 16.1 Управление развитием социально-экономических систем сетевой структуры.

Секция 16.2 Механизмы управления развитием социально-экономических систем.

Работа секций проходила во второй и третий дни конференции. Анализ секционных докладов показывает, что наибольший интерес вызывает их группировка по актуальным для управления развитием крупномасштабных систем проблемам. Среди них выделим семь таких направлений.

Промышленное и коммерческое использование ресурсов (энергетических, транспортных, производственных и др.) ставит острые проблемы оптимального **инвестирования** в их развитие. Интересным решением проблем этого круга посвящены следующие доклады.

- Акинфиев В.К., Цвиркун А.Д. «Методы моделирования и оптимизации выбора инвестиционных решений». Авторы рассматривают модели выбора портфеля проектов промышленных компаний со сложной структурой активов, основанные на использовании имитационно-оптимизационного подхода. Описаны результаты отбора портфеля холдинговой компании по критерию максимизации ее рыночной стоимости.

- Лившиц В.Н., Миронова И.А., Тищенко Т.И., Фролова М.П. «Оценка эффективности крупномасштабных инвестиционных проектов в различных условиях». В работе предложена нетрадиционная модель оценки общественной эффективности крупномасштабного инфраструктурного проекта, направленная на максимизацию роста капитала инвестора в конце расчетного периода с учетом сценариев эффективного использования (реинвестирования) капитала, сформированного из прибыли, полученной от реализации проекта, и упущенной выгоды.

- Попова Е.В. в работе «Роль инвестиционных проектов для крупномасштабных систем в условиях кризиса и минимаксные способы их реализации» показывает возможность и эффективность применения при пересмотре крупных проектов и программ таких инструментов, как минимаксная стратегия, имущественная стратегия, методология реформирования, использование целевых моделей и драйверов стоимости.

- Сизых Д.С. «Сравнительный анализ показателей эффективности инвестиционных портфелей

акций при различных подходах к их формированию». В докладе представлен модифицированный вариант модели оптимизации портфеля Марковица с использованием индикатора стабильного роста курсов акций. Приведены результаты сравнительного анализа эффективности различных подходов к формированию инвестиционного портфеля на примере портфелей, состоящих из акций ведущих ИТ- и телекоммуникационных компаний за период 2015—2020 гг.

- Сыроваткин А.С. «Смешанный инвестиционный портфель с ограниченным выбором активов». В работе отмечено, что современная экономическая реальность все больше отдалается от классического рыночного регулирования. Все реже и реже можно применять концепцию свободного рынка, а если такая возможность и возникает, то только в отдельных узких рыночных нишах. В других случаях, в той или иной форме существует внешнее влияние, нарушающее естественный баланс. Автор предлагает метод формирования и оптимизации смешанного инвестиционного портфеля в условиях ограничений, выражающихся в обязательстве запуска доли реальных проектов.

Важным инструментом управления развитием крупномасштабных систем представляется **интеллектуальное компьютерное моделирование**, связанное с приобретением знаний. Разным его аспектам посвящены следующие работы.

- Ерешко Ф.И., Меденников В.И., Флеров Ю.А. «Концепция формирования единого информационного интернет-пространства научно-образовательных ресурсов страны». Авторы предлагают методику оценки эффективности использования научно-академических информационных ресурсов в интернет-пространстве в контексте перехода к цифровой экономике и инновационного развития.

- Яндыбаева Н.В., Резчиков А.Ф., Горшков Е.А., Богомолов А.С., Кушников В.А., Цвиркун А.Д. «Математические модели и алгоритмы прогнозной оценки национальной безопасности в учебных ситуационных центрах». Представлена математическая модель, разработанная на основе модели системной динамики, для проведения экспресс-анализа состояния и прогнозирования национальной безопасности государств. Приведен алгоритм использования разработанного математического обеспечения при оценке состояния национальной безопасности государств. Показана методика подготовки специалистов в области национальной безопасности в учебных ситуационных центрах.

- Фомин Н.А., Мещеряков Р.В. «Особенности управления крупномасштабными кибер-физическими системами водоснабжения городов различных стран». В работе анализируются модели управления водоснабжением в городах различных



стран — Азии (Китай и Сингапур), США, Англии и Европы, а также России. Выявлены недостатки в моделях контроля, обусловленные существующими потенциальными угрозами дефицита воды, деградации водных источников, а также рисками химического и биологического загрязнения.

- Кульба В.В., Меденников В.И. «Оценка уровня цифровой трансформации сельского хозяйства России». В работе представлена математическая модель готовности сельского хозяйства России к цифровой трансформации, а также результаты расчета нескольких сценариев развития сектора цифровизации.

Проблеме **устойчивого развития** посвящены следующие доклады.

- Баранов В.В. «Принятие решений в системах управления развитием». В работе сформулированы фундаментальные основания осуществимости и устойчивости процессов управления развитием в деградирующей материальной и рефлексивной социальной среде. Устойчивость развития увязывается с разрешимостью конфликтов устойчивым компромиссом. С учетом ценностей среды определены структурные конфигурации систем. Сформированы структура, методология и конструктивный аппарат управления развитием циклами планирования стратегического обновления и реального управления.

- Соломатин А.Н. «Энтропийный подход к проблемам устойчивого регионального развития». В докладе предложены различные направления борьбы с ростом энтропии, формально определены необходимые условия устойчивого развития. Подробно анализируются технологические, экономические, экологические и управленческие аспекты противодействия росту энтропии.

- Глазунова В.В. в работе «Устойчивость экономической динамики крупномасштабных систем» вводит понятие устойчивости функционирования экономики и способы ее оценки. Под устойчивостью автор понимает способность системы вернуться к исходному состоянию или сохранить траекторию развития при оказываемых на нее возмущениях. Если система не может вернуться к прежнему состоянию или отклоняется от заданной траектории, то она явно неустойчивая. Для экономических систем наиболее важна способность сохранять траекторию развития при внешних воздействиях — так называемое динамическое равновесие.

Большой интерес представляют оригинальные работы, расширяющие существующий объем знаний об управлении **нелинейными системами**, связанные с отраслевыми и межотраслевыми приложениями. Отметим среди них следующие работы.

- Кушнер А.Г., Лычагин В.В., Рооп М.Д. «Оптимальные термодинамические процессы для иде-

альных газов». Решается задача оптимального управления в равновесной термодинамике идеальных газов. На Лежандровом многообразии идеального газа находится кривая термодинамического процесса, доставляющая максимум функционалу работы. Получены ограничения для управляющих параметров. Показано, что в случае идеального газа соответствующая гамильтонова система является интегрируемой в смысле Луивилля и доказана управляемость такой системы.

- Самохин А.В., Ахметзянов А.В., Крупина Е.И. в докладе «Сингулярный контроль для повышения нефтеотдачи природных нефтяных залежей» исследуют пилообразные волны с периодическими ударными фронтами, создаваемые в стволах скважин. Предлагаемый авторами подход позволяет адекватно прогнозировать динамику фазовых переходов и оптимизировать управление процессом добычи нефти.

- Бурков В.Н., Коргин Н.А., Сергеев В.А. в своей работе «Идентификация интегральных рейтинговых механизмов как задача оптимизации» показали, что представление любого интегрированного механизма ранжирования в однократно закодированном виде позволяет сформулировать такую задачу как оптимизационную задачу, которая может быть решена с помощью широкого спектра методов. Предлагаемый подход иллюстрируется несколькими примерами идентификации или аппроксимации обучающих множеств, порожденных несколькими булевыми функциями.

- Антипов А.С., Краснова С.А., Пивнева С.В. «Стабилизация двухроторной электромеханической системы на основе принципа декомпозиции». В качестве объекта управления рассмотрена двухроторная электромеханическая система при наличии в модели параметрических неопределенностей и перекрестных связей между винтами. Разработана процедура блочного синтеза нелинейных локальных связей и разрывных управлений, обеспечивающих стабилизацию угловых положений с учетом проектных ограничений. Приведены результаты моделирования.

Неизменный интерес вызывают доклады, посвященные **робототехнике** и связанным с ней технологиям компьютерного моделирования. По этому направлению можно выделить следующие работы.

- Семенов С.С., Полтавский А.В., Русяева Е.Ю. «Системы кибернетики: алгоритмизация в задачах первичной оценки объектов в сложном беспилотном летательном аппарате». В докладе рассматривается подход к обоснованию функции полезности для получения исходных оценок показателей качества сложных технических систем в виде формализованной информационной модели с учетом состоятельности экспертных оценок.



● Нгуен Ван Чонг, Буй Чыонг Ан, Пашенко Ф.Ф., Пашенко А.Ф., Кудинов Ю.И. «Некоторые методы классификации и распознавания целей в задачах моделирования целевой обстановки беспилотных летательных аппаратов». В работе рассмотрены вопросы моделирования беспилотных летательных аппаратов в условиях многофакторных неопределенностей. Предложены подходы к выбору целевых задач. Разработаны алгоритм классификации воздушных целей на основе габаритных признаков и алгоритм классификации воздушных целей на основе моментных инвариантов изображений. Данные алгоритмы позволяют решать задачи распознавания изображений объектов и принятия статистических решений по целевым задачам.

● Кокуныко Ю.Г., Краснова С.А. «Оценивание производных задающих воздействий в системе управления БПЛА». Разработана процедура синтеза динамической обратной связи, обеспечивающей отслеживание центром масс беспилотного летательного аппарата заданной траектории инвариантно по отношению к внешним возмущениям с заданной точностью в условиях неполной информации о переменных состоянии и производных задающих воздействий. Приведены результаты численного моделирования.

● Данилов В.А., Гончаренко В.И. «Разработка и изготовление прототипа шестиногой шагающей машины». В докладе представлена математическая модель шагающего робота-гексапода, которая позволяет получить визуальную информацию об особенностях его перемещения в окружающей среде и помогает разработать алгоритмы управления.

● Трефилов П.М., Мамченко М.В., Кулагин К.А. «Разработка имитатора полета в условиях группового управления БПЛА». Описан обобщенный процесс создания виртуального тренажера с интегрированной геоинформационной системой для моделирования полетных задач беспилотных летательных аппаратов. Возможности симулятора позволяют формировать полетные задания как для одиночных дронов, так и их групп, а также экспортировать данные выполненных миссий для проведения реальных полетов.

● Ткачева О.С., Уткин А.В., Виноградова М.С. «Логическое управление роботом-манипулятором на основе регулярных грамматик при наличии нестационарных препятствий в рабочей зоне». Работа посвящена синтезу логического управления роботом-манипулятором при появлении нестационарных препятствий в рабочей зоне. Для двузвеного манипулятора построена модель управления движением схвата на основе гибридного автомата с конечным множеством состояний. Методами численного моделирования проиллюстрирована

работа полученного алгоритма логического управления.

Многие исследования, посвященные анализу и программному обеспечению кибербезопасности, в совокупности намечают ключевые положения **теории управления рисками**. Среди них отметим следующие.

● Сакрутина Е.А., Калашников А.О. «Анализ кибербезопасности значимого объекта критической информационной инфраструктуры». В работе отмечается, что для эффективного анализа рисков крайне важно определить объекты, угрозы, уязвимости и понимать природу кибератак, а также как можно точнее определить риск, выявляя его причины, масштабы, ограничения и тип потенциальных угроз, которые могут повлиять на достижение целей объекта. В предлагаемом подходе выявление и управление потенциальными рисками рассматривается как непрерывный процесс упорядоченной последовательности событий, действий и решений типа «угрозы — уязвимости — последствия».

● Самошина А.И., Промыслов В.Г., Камешева С.Б., Галин Р.Р. «Применение технологии облачного сервиса в обеспечении кибербезопасности АСУТП». В докладе применяется математическая модель, основанная на теории графов, позволяющая описывать отношения доступа между объектами и субъектами политики безопасности. Проведен сравнительный анализ алгоритмов обхода вершин графа с целью выбора подходящего метода выделения зон безопасности. Реализованный алгоритм расчета зон безопасности был добавлен в облачный сервис omole.ws.

● Будынкova Е.Р., Байбулатов А.А. «Пример верификации исходных данных для проектирования Информационной базы АЭС». Представлен алгоритм полного разбора кода системы Kraftwerk Kennzeichen с изучением всех ее секторов. Также приводится список наиболее распространенных несоответствий.

● Калашников А.О., Аникина Е.В. «Арбитражная модель управления информационными рисками значимых объектов информационной инфраструктуры». В работе рассматривается один из методов эффективного распределения ограниченного ресурса для управления информационными рисками значимых объектов критической информационной инфраструктуры на основе теоретико-игровых моделей (арбитражных схем).

Значительный интерес для теории управления развитием крупномасштабных систем представляют также доклады по методам, моделям и средствам **интеллектуального анализа больших массивов информации**. Среди них выделим следующие.

● Агаев Р.П. «Методы кластеризации орграфов с помощью Лапласовской матрицы и ее собст-

венного проектора». Доклад посвящен актуальной проблеме «осмысленной» кластеризации ориентированных сетей. Отмечается, что игнорирование направленности ребер и рассмотрение графа как неориентированного не позволяет провести адекватную кластеризацию вершин орграфов.

• Салтыков С.А. «Алгоритм построения дерева решений регрессии с использованием дополнительных функций». В докладе рассматривается проблема построения точных, интуитивно правдоподобных аналитических моделей, понятных для аналитика. Представлен алгоритм построения дерева решений регрессии с дополнительными функциями. Описано условие достоверности двухуровневого дерева решений.

• Ильин Д.Ю., Никульчев Е.В. «Методики оценки эффективности интеграции программно-технологических решений в цифровые платформы». Здесь под цифровой платформой понимается технология сбора и обмена информацией между огромным количеством пользователей. Доклад посвящен разработке методик и виртуальных имитационных информационных инфраструктур для оценки эффективности интеграции программно-технологических решений в цифровые платформы (на примере цифровой платформы массовых исследований в системе образования). Применение концепции «инфраструктура как код» сокращает затраты на проведение вычислительных экспериментов на заданном стеке технологий и позволяет адекватно оценить технологическое решение в условиях интеграции в стек технологий, при этом учитывается инфраструктура и заданные условия функционирования разрабатываемой цифровой платформы. Предложенный подход позволяет на этапе выбора технологий оценить их эффективность и снизить затраты на вычислительные экс-

перименты. Результаты внедрения демонстрируют эффективность предложенных методик.

Приветственное и заключительное слово для участников конференции было произнесено заместителем председателя программного комитета А.Д. Цвиркуном. Анатолий Данилович подчеркнул неуклонно возрастающий научный потенциал конференции за 15 лет ее ежегодного проведения и выразил уверенность в актуальности ее дальнейшего проведения. Он отметил, что крупномасштабные системы (корпорации, финансово-промышленные группы) — это тот локомотив, который обеспечивает конкурентоспособность национальной и транснациональной экономики и дает ей возможность существовать в мировом рыночном пространстве. Государству и науке необходимо взять на себя разработку, обновление и взаимную увязку генеральных схем развития и размещения отраслей с учетом направлений мирового и регионального развития. Инвестиционные проекты должны осуществляться в рамках комплексной межотраслевой долгосрочной программы социально-экономического развития страны и территориального размещения производства. Государственные программы и крупные бизнес-проекты должны претворяться в жизнь после тщательной проработки.

*А.Д. Цвиркун, председатель Оргкомитета  
И.А. Степановская, секретарь Оргкомитета*

**Цвиркун Анатолий Данилович** — д-р техн. наук,  
✉ tsvirkun@ipu.ru,

**Степановская Ираида Александровна** — канд. техн. наук,  
✉ irstepan@ipu.ru,

Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН,  
г. Москва.

## 13th INTERNATIONAL CONFERENCE «MANAGEMENT OF LARGE-SCALE SYSTEM DEVELOPMENT» MLSD'2020

A.D. Tsvirkun, I.A. Stepanovskaya<sup>#</sup>

V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences, Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia

<sup>#</sup>✉ irstepan@ipu.ru

**Abstract.** We introduce scientific results of participants of the conference. The event took place online in September of 2020. Four hundred authors presented their theses and papers. The analysis of section papers showed that they can be grouped according to seven management directions of large-scale system development. These directions are optimal investments into resource development, intelligent computer modeling, sustainable development, nonlinear systems control, robotics, risk management theory, intelligent analysis of massive datasets.

**Keywords:** conference, large-scale systems, investments.

