

ISSN 1819-3161

ПРОБЛЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ

1/2021

CONTROL  SCIENCES

РЕДАКЦИОННЫЙ СОВЕТ

С. Н. Васильев, академик РАН,
И. А. Каляев, академик РАН,
В. А. Левин, академик РАН,
Н. А. Махутов, чл.-корр. РАН,
А. Ф. Резчиков, чл.-корр. РАН,
Е. А. Федосов, академик РАН

РЕДКОЛЛЕГИЯ

Ф. Т. Алескеров, д-р техн. наук,
В. Н. Афанасьев, д-р техн. наук,
Н. Н. Бахтадзе, д-р техн. наук,
В. Н. Бурков, д-р техн. наук,
В. М. Вишневский, д-р техн. наук,
М. И. Гераськин, д-р экон. наук,
В. В. Клочков, д-р экон. наук,
С. А. Краснова, д-р техн. наук,
О. П. Кузнецов, д-р техн. наук,
В. В. Кульба, д-р техн. наук,
А. Г. Кушнер, д-р физ.-мат. наук,
А. А. Лазарев, д-р физ.-мат. наук,
В. Г. Лебедев, д-р техн. наук,
В. Е. Лепский, д-р психол. наук,
Н. Е. Максимова, канд. техн. наук
(ответственный секретарь),
А. С. Мандель, д-р техн. наук,
Р. В. Мещеряков, д-р техн. наук,
А. И. Михальский, д-р биол. наук,
Д. А. Новиков, чл.-корр. РАН
(гл. редактор),
Б. В. Павлов, д-р техн. наук,
Ф. Ф. Пашченко, д-р техн. наук
(зам. гл. редактора),
Л. Б. Рапопорт, д-р физ.-мат. наук,
С. В. Ратнер, д-р экон. наук,
Е. Я. Рубинович, д-р техн. наук,
В. Ю. Рутковский, д-р техн. наук,
М. В. Хлебников, д-р физ.-мат. наук,
А. Д. Цвиркун, д-р техн. наук,
П. Ю. Чеботарёв, д-р физ.-мат. наук,
И. Б. Ядыкин, д-р техн. наук

РУКОВОДИТЕЛИ РЕГИОНАЛЬНЫХ РЕДСОВЕТОВ

Владивосток – О. В. Абрамов, д-р техн. наук,
Волгоград – А. А. Воронин, д-р техн. наук,
Воронеж – С. А. Баркалов, д-р техн. наук,
Курск – С. Г. Емельянов, д-р техн. наук,
Липецк – А. К. Погодаев, д-р техн. наук,
Пермь – В. Ю. Столбов, д-р техн. наук,
Ростов-на-Дону – Г. А. Угольниковский,
д-р техн. наук,
Самара – В. Г. Засканов, д-р техн. наук,
Саратов – В. А. Твердохлебов, д-р техн. наук,
Уфа – Б. Г. Ильясов, д-р техн. наук

ADVISORY BOARD

E. A. Fedosov, Academician of RAS¹,
I. A. Kalyaev, Academician of RAS,
V. A. Levin, Academician of RAS,
N. A. Makhutov, Corr. Member of RAS,
A. F. Rezchikov, Corr. Member of RAS,
S. N. Vassilev, Academician of RAS

EDITORIAL BOARD

V. N. Afanasev, D. Sc. (Tech.),
F. T. Aleskerov, D. Sc. (Tech.),
N. N. Bakhtadze, D. Sc. (Tech.),
V. N. Burkov, D. Sc. (Tech.),
P. Yu. Chebotarev, D. Sc. (Phys.-Math.),
M. I. Geraskin, D. Sc. (Econ.),
V. V. Klochkov, D. Sc. (Econ.),
M. V. Khlebnikov, D. Sc. (Phys.-Math.),
S. A. Krasnova, D. Sc. (Tech.),
V. V. Kulba, D. Sc. (Tech.),
A. G. Kushner, D. Sc. (Phys.-Math.),
O. P. Kuznetsov, D. Sc. (Tech.),
A. A. Lazarev, D. Sc. (Phys.-Math.),
V. G. Lebedev, D. Sc. (Tech.),
V. E. Lepskiy, D. Sc. (Psych.),
N. E. Maximova, Ph. D. (Tech.),
Executive Editor-in-Chief,
A. S. Mandel, D. Sc. (Tech.),
R. V. Meshcheryakov, D. Sc. (Tech.),
A. I. Michalski, D. Sc. (Biol.),
D. A. Novikov, Corr. Member of RAS,
Editor-in-Chief,
F. F. Pashchenko, D. Sc. (Tech.),
Deputy Editor-in-Chief,
B. V. Pavlov, D. Sc. (Tech.),
L. B. Rapoport, D. Sc. (Phys.-Math.),
S. V. Ratner, D. Sc. (Econ.),
E. Ya. Rubinovitch, D. Sc. (Tech.),
V. Yu. Rutkovskii, D. Sc. (Tech.),
A. D. Tsvirkun, D. Sc. (Tech.),
V. M. Vishnevsky, D. Sc. (Tech.),
I. B. Yadykin, D. Sc. (Tech.)

LEADERS OF REGIONAL BOARDS

Kursk – S. G. Emelyanov, D. Sc. (Tech.),
Lipetsk – A. K. Pogodaev, D. Sc. (Tech.),
Perm – V. Yu. Stolbov, D. Sc. (Tech.),
Rostov-na-Donu, G. A. Ougolnitsky –
D. Sc. (Tech.),
Samara – V. G. Zaskanov, D. Sc. (Tech.),
Saratov – V. A. Tverdokhlebov, D. Sc. (Tech.),
Ufa – B. G. Ilyasov, D. Sc. (Tech.)
Vladivostok – O. V. Abramov, D. Sc. (Tech.),
Volgograd – A. A. Voronin, D. Sc. (Phys.-Math.),
Voronezh – S. A. Barkalov, D. Sc. (Tech.)

¹ Russian Academy of Sciences.



CONTROL SCIENCES

**Научно-технический
журнал**

6 номеров в год

ISSN 1819-3161

Издается с 2003 года

УЧРЕДИТЕЛЬ

Федеральное государственное
бюджетное учреждение науки
Институт проблем управления
им. В.А. Трапезникова РАН

Главный редактор
чл.-корр. РАН

Д.А. Новиков

Заместитель главного
редактора

Ф.Ф. Пащенко

Ответственный секретарь
Н.Е. Максимова

Выпускающий редактор
Л.В. Петракова

Издатель
ООО «Сенсидат-Плюс»

Адрес редакции
117997, ГСП-7, Москва,
ул. Профсоюзная, д. 65, к. 410.
Тел./факс (495) 334-92-00
E-mail: pu@ipu.ru
Интернет: <http://pu.mtas.ru>

Оригинал-макет и электронная версия
подготовлены
ИП Кишенкова Т. В.

Отпечатано в ООО «Авансед солюшнз»

Заказ № PB121

Подписано в печать
4.02.2021 г.

Журнал зарегистрирован
в Министерстве Российской
Федерации по делам печати,
телерадиовещания и средств
массовых коммуникаций

Свидетельство о регистрации
ПИ № ФС 77-49203 от 30 марта 2012 г.

Журнал входит в RSCI на платформе
Web of Science и Перечень
рецензируемых научных изданий ВАК

Журнал включен в Российский индекс
научного цитирования (РИНЦ).
На сайте Научной электронной
библиотеки (www.elibrary.ru) доступны
полные тексты статей.

Подписные индексы:
80508 и **81708** в каталоге Роспечати;
38006 в объединенном каталоге
«Пресса России»

Цена свободная

© Федеральное государственное
бюджетное учреждение науки
Институт проблем управления
им. В.А. Трапезникова РАН

ПРОБЛЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ

1.2021

СОДЕРЖАНИЕ

Обзоры

Деменков Н.П., Микрин Е.А., Мочалов И.А. Методы оценки состояний нечетких интегральных моделей. Обзор.
Ч. 1. Аппроксимационные методы 3

Губанов Д.А., Петров И.В. Информационные сообщества в социальных сетевых структурах. Ч. 1. От основного понятия к математическим моделям формирования 15

Анализ и синтез систем управления

Афанасьев В.Н., Семион А.А. Дифференциальные игры преследования с несколькими преследователями и одним уклоняющимся 24

Гусев В.Б. Метод безусловной оптимизации для задачи с нестационарной целевой функцией, заданной на дискретной шкале времени 36

Управление в социально-экономических системах

Белов М.В., Новиков Д.А. Модели опыта 43

Афонькин В.А. Налоговые схемы стимулирования просоциального голосования в модели ViSE 61

Информационные технологии в управлении

Барабанова Е.А., Выговтов К.А., Подлазов В.С. Двухкаскадные дуальные фотонные коммутаторы в расширенном схемном базисе 69



CONTROL SCIENCES

Scientific Technical Journal

6 issues per year

ISSN 1819-3161

Published since 2003

FOUNDER

V. A. Trapeznikov Institute
of Control Sciences
of Russian Academy of Sciences

Editor-in-Chief

D. A. Novikov, Corr. Member of RAS

Deputy Editor-in-Chief

F. F. Pashchenko

Executive Editor-in-Chief

N. E. Maximova

Editor

L. V. Petrakova

Publisher Sensidat-Plus LLC

Editorial address

65 Profsoyuznaya st., office 410,

Moscow 117997, Russia

☎/✉ +7 (495) 334-92-00

✉ pu@ipu.ru

URL: <http://pu.mtas.ru>

Design layout and electronic version
prepared by SP Kishenkova T. V.

Printed by Advanced Solutions LLC

Order No. PB121

Approved for print on 4.02.2021

The Journal is registered by the Ministry
of Press, Broadcasting and Mass Media
of the Russian Federation
Registration certificate of
ПИ № ФС 77-49203 of 30 March 2012

The Journal is included in RSCI
(Russian Science Citation Index)
on the platform Web of Science
and in the list of peer-reviewed
scientific publications of the HAC

On the website of the Scientific electronic
library (www.elibrary.ru) full texts of articles
are available.

Subscription indexes:

80508 and **81708** in the catalogue
of Rospechat;

38006 in the joint catalogue
«Press of Russia»

Free price

© V. A. Trapeznikov Institute of Control
Sciences of Russian Academy of Sciences

CONTROL SCIENCES

1.2021

CONTENTS

Reviews

Demenkov, N.P., Mikrin, E.A., and Mochalov, I.A. State Estimation
Methods for Fuzzy Integral Models. Part I: Approximation
Methods 3

Gubanov, D.A. and Petrov, I.V. Information Communities
in Social Networks. Part I: From Concept to Mathematical
Models 15

Analysis and Synthesis of Control Systems

Afanas'ev, V.N. and Semion, A.A. Differential Games of Pursuit
with Several Pursuers and One Evader 24

Gusev, V.B. Unconstrained Optimization of a Time-Varying Objective
Function on a Discrete Time Scale 36

Control in Social and Economic Systems

Belov, M.V. and Novikov, D.A. Models of Experience 43

Afonkin, V.A. Tax Incentives for Prosocial Voting in a Stochastic
Environment 61

Information Technologies in Control

Barabanova, E.A., Vytovtov, K.A. and Podlazov, V.S. Two-Stage Dual
Photon Switches in an Extended Scheme Basis 69

МЕТОДЫ ОЦЕНКИ СОСТОЯНИЙ НЕЧЕТКИХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ МОДЕЛЕЙ. ОБЗОР.

Ч. 1. Аппроксимационные методы

Н.П. Деменков, Е.А. Микрин, И.А. Мочалов

Аннотация. Представлен обзор различных методов, как существующих, так и вновь предлагаемых, оценивания интегральных моделей в условиях неопределенностей, которые описываются нечеткими моделями. На основе нечеткого интеграла, в котором предельный переход определяется в метрике Хаусдорфа, рассмотрены задача оценки состояния моделей, описываемых нечеткими интегральными уравнениями Фредгольма — Вольтерра, и нечеткие методы ее решения, а именно: нечеткое преобразование Лапласа, метод «вложения» моделей, суть которого состоит в преобразовании исходной системы в систему увеличенной размерности, решаемую традиционными методами линейной алгебры, тейлоровское оценивание вырожденных ядер, находящихся под знаком интеграла и представляемых степенными полиномами, оценивание невырожденных ядер вырожденными формами с помощью тейлоровской аппроксимации. Показано, что в некоторых случаях результаты оценивания связаны с решением нечетких систем линейных алгебраических уравнений. Для них решены тестовые примеры.

Ключевые слова: нечеткий интеграл Римана, нечеткая интегральная модель, нечеткие методы оценивания интегральных моделей.

ВВЕДЕНИЕ

Интегральные модели, под которыми в настоящей статье понимаются модели, описываемые интегральными уравнениями, широко применяются в различных разделах прикладной физики, механики, экономики и других областях, имеющих дело с математическими описаниями различных объектов. В теории дифференциальных уравнений утверждение о существовании и единственности решения доказывается с помощью принципа сжатых отображений, когда исходная начальная задача представляется в виде эквивалентной интегральной модели [1].

В теории управления интегральные модели обычно представляют системы управления, охваченные обратной связью [2]. Интегральные модели Винера — Хопфа используются при описании действующих на систему возмущений, которые представляют собой одну из математических моделей в описании неопределенности при обработке текущей информации от объекта [3]. Интеграль-

ные уравнения Фредгольма и Вольтерра используются в теории упругости, газовой динамике и электродинамике, экологии, т. е. везде, где действуют законы сохранения массы, импульса и энергии. Во всех перечисленных случаях неизвестные переменные находятся под знаком интеграла.

В реальных условиях системы управления находятся под воздействием различного рода возмущений. Для их представления используются различные математические модели, теория которых в настоящее время интенсивно разрабатывается и активно применяется в различных объектовых приложениях. Наиболее интенсивно для этих целей используется теория интервалов [4, 5], теория нечетких множеств [6], теория возможностей [7], гибридная вероятностная теория, теория нечеткой математической статистики и нечетких случайных процессов [8] и др.

Для описания неопределенностей в статье используется теория нечетких множеств, являющаяся наиболее адекватной и универсальной в представлении различного рода возмущений. Действительно, нетрудно показать, что перечисленные

выше модели следуют из модели теории нечетких множеств. Например, в статье [9] решается нечеткая система линейных уравнений (НСЛУ), одна из координат решения которой получается в виде нечеткой функции принадлежности. Однако, фиксируя у нее основание, получим решение для этой координаты в виде интервала.

Аналогичными рассуждениями можно получить интервалы решения для нечетких дифференциальных уравнений. В теории возможностей функция принадлежности трактуется как некая плотность распределения вероятностей, для которой, однако, не выполняются аксиомы вероятностей, принятые в традиционной статистической теории. Поэтому полагается, что теория возможностей описывает не массовые явления, а возможности индивидуального объекта.

Гибридная теория вероятностей представляет традиционное вероятностное пространство для случайных величин в виде традиционных плотностей вероятностей с начальными или центральными моментами в виде нечетких переменных с заданными функциями принадлежности, как правило, в виде треугольников. Применительно к традиционным случайным процессам гибридная теория для нечетких марковских случайных процессов оперирует нечеткими состояниями, получаемыми путем укрупнения четких состояний. Это позволяет уменьшить размерность переходной матрицы и, как следствие этого, соответствующие вычислительные трудности при ее обращении.

В целом можно констатировать, что теория нечетких множеств в нынешнем ее состоянии представляет собой некое ядро, вокруг которого группируются различные модели неопределенностей.

Исходя из сказанного, следует, что основная цель настоящей статьи заключается в представлении различных методов, как существующих, так и вновь предлагаемых, оценивания интегральных моделей в условиях неопределенностей, которые представляются нечеткими моделями.

Научная новизна предлагаемой статьи состоит в новых методах оценивания состояния интегральных моделей, разработанных авторами, — таких как оценивание состояния методом вырожденных ядер, нечеткий метод наименьших квадратов, нечеткий метод Галеркина. Кроме того, в тех случаях, когда в результате оценивания появляются нечеткие системы линейных алгебраических уравнений, авторами показано, что могут возникать «сильные/слабые» результаты оценивания. Впервые это было исследовано авторами ранее при решении НСЛУ и затем было применено для оценивания интегральных моделей.

Ниже вводятся нечеткие интегральные модели в виде уравнений Фредгольма — Вольтерра и приводятся некоторые методы их решения.

1. БАЗОВЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Основные определения теории нечетких множеств даны в работе [6]. Ниже приводятся определения, которые использованы в настоящей статье. Приняты следующие обозначения: нечеткие переменные (числа) имеют нижний индекс «н», например, x_n — нечеткая переменная (элемент), $y_n(x)$ — нечеткая функция многих переменных, где $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$, $y'_{nx_i}(x)$ — нечеткая производная по переменной x_i , $\dot{x}_n(t)$ — нечеткая производная вектора x_n по времени.

Принадлежность элемента x некоторому множеству X ($x \in X$) формализуется с помощью функции принадлежности $r(x)$, $r \in [0, 1]$, $x = x_n \in X$ для нечеткого элемента x_n :

$$r(x) = \begin{cases} \underline{r}(x) \in [0, 1], \\ \bar{r}(x) \in [0, 1], \end{cases}$$

где $r(x)$ — многозначная функция: $\underline{r}(x)$ — левая ветвь, $\bar{r}(x)$ — правая ветвь соответственно относительно $r(x) = 1$.

Для $r(x)$ часто используется его уровневое представление в виде обратного отображения $r^{-1}(x) = \{x(r) = (\underline{x}(r), \bar{x}(r)) \mid r \in [0, 1]\}$. Совокупность $\{x_n\}$ задает нечеткое множество X_n . Для обозначения x_n иногда используется цепочка эквивалентных представлений $x_n \Leftrightarrow r(x)$, $r \in [0, 1] \Leftrightarrow (\underline{r}(x), \bar{r}(x)) \mid \underline{r}, \bar{r} \in [0, 1] \Leftrightarrow (\underline{x}(r), \bar{x}(r)) \mid r \in [0, 1]$ и т. д.

Нечеткая функция (отображение) четких переменных $y_n(x)$. Пусть E — множество всех нечетких переменных с заданной функцией принадлежности $r(x)$, $r \in [0, 1]$, $x \in R$. Тогда $y_n(x): R \rightarrow E$ определяет нечетко-значимую функцию. В параметрической форме имеет место представление

$$y_n(x) = y(x, r) = (\underline{y}(x, r), \bar{y}(x, r)) \mid r \in [0, 1].$$

Банахово пространство нечетких переменных вводится в соответствии с подходом, принятым в функциональном анализе [10]. Совокупность $\{x_n\}$ с операциями сложения и умножения, с существованием противоположного элемента образует векторное (линейное) пространство E . В пространстве E определена метрика

$$d(x_{ni}, x_{nj}) = \sup_{r \in [0, 1]} \{\max[|\underline{x}_i(r) - \bar{x}_j(r)|, |\bar{x}_i(r) - \underline{x}_j(r)|]\}$$

и норма

$$\|x_{ni} - x_{nj}\| = d(x_{ni}, x_{nj}).$$

Далее определяется нечеткая последовательность Коши

$$\{x_{nm}\}: \{d(x_{nm}, x_{nm}) \rightarrow 0\}_{n, m \rightarrow \infty}$$

и полнота $E: x_{nm} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x_n, x_n \in E$.

Это приводит к банахову пространству нечетких переменных (E, d) . Пара (E, d) образует полное метрическое пространство.

Нечеткая непрерывность в точке определяется с помощью локального предельного перехода в этой точке, который трактуется относительно метрики Хаусдорфа. Нечеткая непрерывность в интервале определяется как нечеткая непрерывность для всех значений интервала.

Нечеткая производная функции по ее четкому аргументу согласно общему подходу находится путем определения для некоторой нечеткой функции, определенной ранее, операций: вычитания или существования противоположного элемента, умножения на константу, предельного перехода относительно заданной метрики. В статье используется два типа нечетких производных: $y_n^S(x)$ — Сейккала (Seikkala — S) и $y_n^{BF}(x)$ — Баклей-Фейринга (Buckley-Feuring — BF). Имеет место утверждение: если нечеткие производные существуют при $x = x_*$ и непрерывны в этой точке, то обе нечеткие производные при $x = x_*$ равны между собой.

Под *нечетким интегралом* понимается его римановско-нечеткая трактовка [11].

Пусть имеется нечеткое отображение $f_n: [a, b] \subset R \rightarrow E$, где E — нечеткое множество. Если для каждого разбиения $P = \{t_0, \dots, t_n\} \in [a, b]$ и $\forall \xi_i \in [t_{i-1}, t_i], i = \overline{1, n}$ допускается представление $R_p = \sum_{i=1}^n f_n(\xi_i)(t_i - t_{i-1}), \Delta = \max\{t_i - t_{i-1}, i = \overline{1, n}\}$, тогда нечеткий интеграл (Римана) для $f_n(t)$ представляет собой

$$\int_a^b f_n(t) dt = \lim_{\Delta \rightarrow 0} R_p, \quad (1)$$

где «lim» определяется в метрике $d(u, v)$ Хаусдорфа, т. е. для $u, v \in E \Rightarrow d(u, v) = \sup\{\max\{|\underline{u}(r) - \underline{v}(r)|, |\bar{u}(r) - \bar{v}(r)|\}, r \in [0, 1] \subset R, \underline{u}, \bar{u}, \underline{v}, \bar{v}$ — непараметрические представления нечетких переменных u, v .

Для нечеткой непрерывной в метрике Хаусдорфа функции $f_n(t) = f(t, r) = (\underline{f}(t, r), \bar{f}(t, r) | r \in [0, 1])$ при

выполнении соотношения (1) имеют место соотношения

$$\int_a^b \underline{f}(t, r) dt = \int_a^b \underline{f}(t, r) dt, \int_a^b \bar{f}(t, r) dt = \int_a^b \bar{f}(t, r) dt, \\ r \in [0, 1] \subset R,$$

где символы « $\underline{}$ » и « $\bar{}$ » — обозначают объекты нижнего и верхнего значений соответственно.

Если нечеткая переменная $z_n(t), t \in [a, b] \subset R$, находится под знаком нечеткого интеграла, то имеет место нечеткое интегральное уравнение

$$z_n(t) + \int_a^b K(t, \tau) z_n(\tau) d\tau = f(t).$$

По аналогии с традиционной классификацией различают *нечеткие интегральные модели*, описываемые уравнениями Фредгольма — Вольтерра I и II родов:

$\int_{t_1}^{t_2} K(t, \tau) z_n(\tau) d\tau = u_n(t)$ — нечеткая интегральная модель, описываемая уравнением Фредгольма I рода, $t \in [t_1, t_2] \subset R; K(t, \tau)$ — четкое или нечеткое ядро;

$z_n(t) - \lambda \int_{t_1}^{t_2} K(t, \tau) z_n(\tau) d\tau = u_n(t)$ — нечеткая интегральная модель, описываемая уравнением Фредгольма II рода; $\lambda \in K$ — параметр.

Пределы интегрирования могут быть как конечными, так и бесконечными. Переменные удовлетворяют неравенству: $t_1 \leq t, \tau \leq t_2$, а ядро $K(t, \tau)$ и свободный член $u_n(t)$ должны быть непрерывными либо удовлетворять условиям, называемым фредгольмовыми.

В общем случае из нечетких уравнений Фредгольма I, II родов следуют нечеткие уравнения Вольтерра I, II родов. Уравнения Вольтерра отличаются от уравнений Фредгольма тем, что один из пределов интегрирования в них — переменный:

$\int_{t_1}^t K(t, \tau) z_n(\tau) d\tau = u_n(t), t_1 \leq t \leq t_2$ — нечеткая интегральная модель, описываемая уравнением Вольтерра I рода; $K(t, \tau)$ — четкое или нечеткое ядро;

$z_n(t) - \lambda \int_{t_1}^t K(t, \tau) z_n(\tau) d\tau = u_n(t)$ — нечеткая интегральная модель, описываемая уравнением Вольтерра II рода.

Интегральное уравнение Вольтерра можно считать частным случаем уравнения Фредгольма, если соответствующим образом построить ядро. Учи-

тывая, что уравнения Вольтерра обладают рядом важных свойств, которые не присущи уравнениям Фредгольма и не выводятся из них, в дальнейшем будем использовать только общие свойства уравнений Фредгольма и Вольтерра.

Достаточные условия существования и единственности решения нечетких интегральных уравнений Фредгольма — Вольтерра второго рода приведены в работах [12–14]. Пусть для определенности имеем нечеткое уравнение Вольтерра II рода. Для существования нечеткого решения применяется метод последовательных нечетких приближений, при этом полагается, что нечеткие приближения определены в прямоугольнике $\Pi = [\tau, t]$, на котором они имеют нечеткую непрерывность и ограниченность нечеткой производной по Сейккала. Тогда последовательность нечетких приближений сходится в метрике Хаусдорфа к нечеткому решению и, кроме того, из-за ограниченности производной следует сходимость по t , т. е. последовательность нечетких приближений сходится равномерно к искомой нечеткой переменной, которая и принимается за нечеткое решение исходного нечеткого интегрального уравнения. Единственность нечеткого решения доказывается методом от противного.

Приведенные выше нечеткие уравнения Фредгольма — Вольтерра I и II рода соответственно можно представить в краткой (операторной) форме [15]:

$$\begin{aligned} \lambda(Kz_{\Pi})(t)z_{\Pi}(t) &= u_{\Pi}(t), \\ [I - \lambda(Kz_{\Pi})(t)]z_{\Pi}(t) &= u_{\Pi}(t), \end{aligned} \quad (2a)$$

где

$$(Kz_{\Pi})(t) = \int_{t_1}^{t_2} K(t, \tau)z_{\Pi}(\tau)d\tau \quad (2b)$$

— оператор для нечетких уравнений Фредгольма;

$$(Kz_{\Pi})(t) = \int_{t_1}^t K(t, \tau)z_{\Pi}(\tau)d\tau \quad (2c)$$

— оператор для нечетких уравнений Вольтерра I, II рода соответственно, I — единичный оператор.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Имеется нечеткая модель, описываемая интегральным уравнением, заданным в одной из форм — (2a), (2b) или (2c). Необходимо рассмотреть различные методы нечеткой оценки ее состояния.

3. МЕТОДЫ НЕЧЕТКОГО ОЦЕНИВАНИЯ

3.1. Оценивание методом нечеткого преобразования Лапласа

Определение нечеткого преобразования Лапласа и его свойства подробно изложены в статьях [16, 17]. Там же приведены примеры применения этого преобразования для нахождения решения различных нечетких интегральных уравнений Вольтерра типа свертки с четкими и нечеткими ядрами. Задача обобщена на случай наличия в нечетком интегральном уравнении нечеткой дифференциальной составляющей в частных производных. Это позволяет распространить методику применения нечеткого преобразования Лапласа на случай нечетких линейных уравнений в частных производных второго порядка параболического и гиперболического типов.

3.2. Оценивание методом «вложения (embedding)»

Рассматривается нечеткая модель в форме интегрального уравнения Фредгольма II рода

$$x_{\Pi}(s) = f_{\Pi}(s) + \int_a^b K(s, \tau)x_{\Pi}(\tau)d\tau, \quad (3)$$

существование и единственность решения которого, условия на функции f_{Π} и $K(s, \tau)$, определение решения для уравнения с нечеткими параметрами, пространство функций, в котором ищется решение, а также условия, при которых уравнение (3) существует, подробно изложены в работах [13, 14].

Точное нечеткое решение уравнения (4) ищется в виде бесконечной суммы [13]

$$x_{\Pi}(s) = \sum_{i=1}^{\infty} a_{\Pi i} h_i(s), \quad (4)$$

где $\{h_i(\cdot)\}$ — последовательность функций в пространстве $L_2(a, b)$, $a_{\Pi i}$ — нечеткие коэффициенты.

Приближенное решение уравнения (4) представим в виде аппроксимирующей конечной суммы

$$x_{\Pi}(s) \simeq \tilde{x}_{\Pi n}(s) = \sum_{i=1}^n \tilde{a}_{\Pi i} h_i(s),$$

где $\tilde{a}_{\Pi i}$ — нечеткие коэффициенты, подлежащие оценке, $h_i(s)$ — известные функции. Для их нахождения подставим выражение $\tilde{x}_{\Pi n}(s)$ в уравнении (3)



вместо x_n . В итоге получим уравнение вида (3), решением которого является

$$\sum_{i=1}^n \tilde{a}_{hi} h_i(s) = f_h(s) + \sum_{i=1}^n \tilde{a}_{hi} \int_a^b K(s_j, \tau) h_i(\tau) d\tau. \quad (5)$$

В результате имеем n неизвестных нечетких переменных $\tilde{a}_{h1}, \dots, \tilde{a}_{hn}$ в уравнении (5). Для их нахождения необходимо иметь n уравнений, поэтому используется n точек $s_1, \dots, s_n \in [a, b]$. Получим НСЛУ относительно $\tilde{a}_{hi}$:

$$\sum_{i=1}^n h_i(s_j) \tilde{a}_{hi} = f_h(s_j) + \sum_{i=1}^n \left(\int_a^b K(s_j, \tau) h_i(\tau) d\tau \right) \tilde{a}_{hi},$$

$$j = \overline{1, n},$$

или в матричной форме:

$$A \tilde{a}_h = f_h + B \tilde{a}_h, \quad (6)$$

где $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ — матрицы с четкими элементами; $a_{ij} = h_i(s_j)$; $b_{ij} = \int_a^b K(s_j, \tau) h_i(\tau) d\tau$, $i, j = \overline{1, n}$; $\tilde{a}_h = (\tilde{a}_{h1}, \dots, \tilde{a}_{hn})^T$; $f_h = (f_h(s_1), \dots, f_h(s_n))^T$ — вектор с нечеткими компонентами.

Матричное уравнение (6) приводится к стандартной форме

$$\tilde{A} a_h = f_h, \quad \tilde{A} = A - B, \quad (7)$$

и далее полученная система решается методом «вложения» [9, 18].

Согласно методу «вложения» уравнение (7) преобразуется к расширенной (вложенной) системе:

$$S_{(2n \times 2n)} \cdot X_{(2n \times 2n)} = Y_{(2n \times 2n)},$$

где $X_h = (\underline{\tilde{a}}_1, \dots, \underline{\tilde{a}}_n | \bar{\tilde{a}}_1, \dots, \bar{\tilde{a}}_n)^T$;

$Y_h = (\underline{f}_1, \dots, \underline{f}_n | \bar{f}_1, \dots, \bar{f}_n)^T$.

Матрица S имеет блочную структуру: $S = \begin{pmatrix} S_1 & S_2 \\ S_2 & S_1 \end{pmatrix}$. Матрица S_1 получается из матрицы $A - B$, если в ней все отрицательные элементы заменить нулями; чтобы построить матрицу S_2 , в матрице $A - B$ отрицательные элементы заменяют их модулями, остальные элементы — нулями:

$$s_{ij} = a_{ij} - b_{ij}, \quad s_{i+n, j+n} = a_{ij} - b_{ij}, \quad a_{ij} - b_{ij} > 0;$$

$$s_{i, j+n} = -(a_{ij} - b_{ij}), \quad s_{i+n, j} = -(a_{ij} - b_{ij}),$$

$$a_{ij} - b_{ij} < 0.$$

Если $|S| \neq 0$, т. е. S не вырождена, то

$$X_h = S^{-1} Y_h,$$

где $S^{-1} = \begin{pmatrix} U & V \\ V & U \end{pmatrix}$; $U = 0,5[(S_1 + S_2)^{-1} + (S_1 - S_2)^{-1}]$;
 $V = 0,5[(S_1 + S_2)^{-1} - (S_1 - S_2)^{-1}]$.

Случай, когда матрица S является вырожденной, подробно рассмотрен в статьях [19, 20].

Оценка точности приближенного решения получается из следующих соотношений.

Векторы остатков r_n и ошибки ε_n определяются посредством метрики Хаусдорфа:

$$r_h = D(f_h, L\tilde{x}_h) = (d(f_h, L\tilde{x}_{h1}), \dots, d(f_h, L\tilde{x}_{hn}))^T,$$

$$\varepsilon_n = D(\tilde{x}_h, x_h) = (d(\tilde{x}_h, x_{h1}), \dots, d(\tilde{x}_h, x_{hn}))^T,$$

где

$$L = I - K, \text{ а } K = (Kx_h)(s) = \int_a^b K(s, \tau) x_h(\tau) d\tau.$$

Оценка точности приближенного решения получена в работе [21]:

$$\|\varepsilon_n\| \leq \|r_n\| \cdot [1 - \|K\|]^{-1} \text{ при } \|K\| < 1.$$

Пример 1. Имеем

$$x_h(s) = f_h(s) + \int_{-1}^1 (s+1)x_h(\tau) d\tau,$$

где $a = -1$, $b = 1$, а

$$f_h(s) = f(s, r) = (\underline{f}(s, r) = s^3(r^2 + r),$$

$$\bar{f}(s, r) = s^3(4 - r^3 - r) | r \in [0, 1], \quad -1 \leq s, \tau \leq 1.$$

Необходимо найти оценку состояния по методу «вложения».

Решение. Выбираем в качестве $h_1(s) = 1$, $h_2(s) = s^3$ и полагаем, что $s_1 = -1$; $s_2 = 1$, тогда элементы уравнения (5) будут иметь вид:

$$\underline{f}(s_1) = -(r^2 + r), \quad \underline{f}(s_2) = (r^2 + r),$$

$$\bar{f}(s_1) = -(4 - r^3 - r), \quad \bar{f}(s_2) = (4 - r^3 - r);$$

$$A = \begin{pmatrix} h_1(s_1) & h_2(s_1) \\ h_1(s_2) & h_2(s_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix};$$

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} = \int_{-1}^1 (-1+1)1 d\tau & b_{12} = \int_{-1}^1 (-1+1)(-1)^3 d\tau \\ b_{21} = \int_{-1}^1 (1+1)1 d\tau & b_{22} = \int_{-1}^1 (1-1)1^3 d\tau \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned}
 B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} &\Rightarrow \tilde{A} = A - B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \\
 \Rightarrow (S_1 + S_2)^{-1} &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = 0,5 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}, \\
 (S_1 - S_2)^{-1} &= \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = 0,5 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \\
 \Rightarrow \begin{bmatrix} \underline{a}_1 \\ \underline{a}_2 \\ -\bar{a}_1 \\ -\bar{a}_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -0,5 & 0 & 0 & 0,5 \\ 0 & -0,5 & 1,5 & 0 \\ 0 & 0,5 & -0,5 & 0 \\ 1,5 & 0 & 0 & -0,5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -(r^2 + r) \\ (r^2 + r) \\ -(4 - r^3 - r) \\ (4 - r^3 - r) \end{bmatrix}; \\
 V = 0,5[(S_1 + S_2)^{-1} - (S_1 - S_2)^{-1}] &= \begin{bmatrix} 0 & 0,5 \\ 1,5 & 0 \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

На основании этого получим:

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} \underline{a}_1 \\ \underline{a}_2 \\ -\bar{a}_1 \\ -\bar{a}_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -0,5 & 0 & 0 & 0,5 \\ 0 & -0,5 & 1,5 & 0 \\ 0 & 0,5 & -0,5 & 0 \\ 1,5 & 0 & 0 & -0,5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -(r^2 + r) \\ (r^2 + r) \\ -(4 - r^3 - r) \\ (4 - r^3 - r) \end{bmatrix}, \\
 \begin{cases} a_{n1} = (\underline{a}_1(r), \bar{a}_1(r)) = (0,25r^3 + 0,25r^2 + 0,5r - 1, \\ -0,25r^3 - 0,25r^2 - 0,5r + 1 | r \in [0, 1]), \\ a_{n2} = (\underline{a}_2(r), \bar{a}_2(r)) = (0,25r^3 + 0,75r^2 + 0,5r + 1, \\ -0,75r^3 + 0,25r^2 - 0,5r + 3 | r \in [0, 1]). \end{cases} & (8)
 \end{aligned}$$

Приближенная оценка состояния

$$\begin{aligned}
 x_n(s) \simeq x_{nn} = z(s) &= a_{n1}h_1(s) + a_{n2}h_2(s) \Big|_{\substack{h_1(\cdot) = 1 \\ h_2(\cdot) = s^3}} = \\
 &= a_{n1} + a_{n2}s^3,
 \end{aligned}$$

где a_{n1}, a_{n2} были получены ранее в системе уравнений (8).

Можно показать, что эта оценка может быть сильной/слабой по методике, изложенной авторами в статьях [19, 20]. ♦

3.3. Тейлоровское оценивание

В общем виде этот метод обычно рассматривается для нечеткой системы интегральных уравнений [21]. Для простоты ниже будет реализован частный случай этой системы, когда она задается в виде одного уравнения Фредгольма II рода:

$$x_n(s) = f_n(s) + \int_a^b K(s, \tau)x_n(\tau)d\tau, \quad (9)$$

где $a \leq s, \tau \leq b$; $K(s, \tau)$ — заданное четкое ядро, дифференцируемое по своим аргументам на отрезке $[a, b] \subset R$; $x_n(s)$ — нечеткое неизвестное, подлежащее нахождению из уравнения (9).

Далее полагаем, что $f_n(s), x_n(s)$ представлены в параметрической форме:

$$f_n(s) = f(s, r) = (\underline{f}(s, r), \bar{f}(s, r) | r \in [0, 1]),$$

$$x_n(s) = x(s, r) = (\underline{x}(s, r), \bar{x}(s, r) | r \in [0, 1]).$$

Тогда уравнение (9) в параметрической форме будет иметь вид:

$$\begin{cases} \underline{x}(s, r) = \underline{f}(s, r) + \int_a^b \underline{U}(\tau, r)d\tau, \\ \bar{x}(s, r) = \bar{f}(s, r) + \int_a^b \bar{U}(\tau, r)d\tau, \\ r \in [0, 1], \end{cases} \quad (10)$$

в котором

$$\underline{U}(\tau, r) = \begin{cases} K(s, \tau)\underline{x}(\tau, r), & K(s, \tau) \geq 0, \\ K(s, \tau)\bar{x}(\tau, r), & K(s, \tau) < 0; \end{cases}$$

$$\bar{U}(\tau, r) = \begin{cases} K(s, \tau)\bar{x}(\tau, r), & K(s, \tau) \geq 0, \\ K(s, \tau)\underline{x}(\tau, r), & K(s, \tau) < 0. \end{cases}$$

Пусть далее на отрезке $[a, b] \subset R$ выполнены неравенства:

$$\begin{cases} K(s, \tau) \geq 0, & a \leq \tau \leq c, \\ K(s, \tau) < 0, & c < \tau \leq b. \end{cases}$$

Тогда система уравнений (10) может быть преобразована к виду:

$$\begin{cases} \underline{x}(s, r) = \underline{f}(s, r) + \int_a^c K(s, \tau)\underline{x}(\tau, r)d\tau + \\ + \int_c^b K(s, \tau)\bar{x}(\tau, r)d\tau, \\ \bar{x}(s, r) = \bar{f}(s, r) + \int_a^c K(s, \tau)\bar{x}(\tau, r)d\tau + \\ + \int_c^b K(s, \tau)\underline{x}(\tau, r)d\tau. \end{cases} \quad (11)$$

Теперь представим функции $\underline{x}(\tau, r), \bar{x}(\tau, r)$, которые находятся под знаком интегралов в системе уравнений (11), в виде тейлоровских полиномов



по степеням n , тогда для фиксированной точки $\tau = z$ получим:

$$\begin{cases} \underline{x}(s, r) = \underline{f}(s, r) + \int_a^c K(s, \tau) \sum_{i=0}^N \frac{1}{i!} \underline{x}_\tau^{(i)}(\tau, r)(\tau - z)^i d\tau + \\ + \int_c^b K(s, \tau) \sum_{i=0}^N \frac{1}{i!} \bar{x}_\tau^{(i)}(\tau, r)(\tau - z)^i d\tau, \\ \bar{x}(s, r) = \bar{f}(s, r) + \int_a^c K(s, \tau) \sum_{i=0}^N \frac{1}{i!} \bar{x}_\tau^{(i)}(\tau, r)(\tau - z)^i d\tau + \\ + \int_c^b K(s, \tau) \sum_{i=0}^N \frac{1}{i!} \underline{x}_\tau^{(i)}(\tau, r)(\tau - z)^i d\tau, \end{cases} \quad (12)$$

$$\text{где } \underline{x}_\tau^{(i)}(\tau, r) = \left. \frac{\partial^i \underline{x}(\tau, r)}{\partial \tau^i} \right|_{\tau=z}, \quad \bar{x}_\tau^{(i)}(\tau, r) = \left. \frac{\partial^i \bar{x}(\tau, r)}{\partial \tau^i} \right|_{\tau=z}.$$

Дифференцируя оба уравнения (12) $p = \overline{0, n}$ раз по переменной s , получим:

$$\begin{aligned} \underline{x}_s^{(p)}(s, r) &= \underline{f}_s^{(p)}(s, r) + \sum_{i=0}^N \frac{1}{i!} \int_a^c K_s^{(p)}(s, \tau) \underline{x}_\tau^{(i)}(\tau, r) \times \\ &\times (\tau - z)^i d\tau + \sum_{i=0}^N \frac{1}{i!} \int_c^b K_s^{(p)}(s, \tau) \bar{x}_\tau^{(i)}(\tau, r)(\tau - z)^i d\tau, \\ \bar{x}_s^{(p)}(s, r) &= \bar{f}_s^{(p)}(s, r) + \sum_{i=0}^N \frac{1}{i!} \int_a^c K_s^{(p)}(s, \tau) \bar{x}_\tau^{(i)}(\tau, r) \times \\ &\times (\tau - z)^i d\tau + \sum_{i=0}^N \frac{1}{i!} \int_c^b K_s^{(p)}(s, \tau) \underline{x}_\tau^{(i)}(\tau, r)(\tau - z)^i d\tau, \end{aligned} \quad (13)$$

$$\text{где } \underline{x}_s^{(p)}(s, r) = \left(\frac{\partial^p \underline{x}(s, r)}{\partial s^p} \right), \quad \bar{x}_s^{(p)}(s, r) = \left(\frac{\partial^p \bar{x}(s, r)}{\partial s^p} \right),$$

$$K_s^{(p)}(s, \tau) = \left(\frac{\partial^p K(s, \tau)}{\partial s^p} \right), \quad p = \overline{0, n}.$$

После перемены мест символов интеграла и суммы систему уравнений (13) можно представить в виде:

$$\begin{aligned} \underline{x}_s^{(p)}(s, r) &= \underline{f}_s^{(p)}(s, r) + \sum_{i=0}^N \frac{1}{i!} \int_a^c K_s^{(p)}(s, \tau) \underline{x}_\tau^{(i)}(\tau, r) \times \\ &\times (\tau - z)^i d\tau + \sum_{i=0}^N \frac{1}{i!} \int_c^b K_s^{(p)}(s, \tau) \bar{x}_\tau^{(i)}(\tau, r)(\tau - z)^i d\tau, \\ \bar{x}_s^{(p)}(s, r) &= \bar{f}_s^{(p)}(s, r) + \sum_{i=0}^N \frac{1}{i!} \int_a^c K_s^{(p)}(s, \tau) \bar{x}_\tau^{(i)}(\tau, r) \times \\ &\times (\tau - z)^i d\tau + \sum_{i=0}^N \frac{1}{i!} \int_c^b K_s^{(p)}(s, \tau) \underline{x}_\tau^{(i)}(\tau, r)(\tau - z)^i d\tau, \end{aligned} \quad (14)$$

или, введя обозначения

$$S_{pi}^1 = \frac{1}{i!} \int_a^c K_s^{(p)}(s, \tau)(\tau - z)^i d\tau,$$

$$S_{pi}^2 = \frac{1}{i!} \int_c^b K_s^{(p)}(s, \tau)(\tau - z)^i d\tau,$$

запишем уравнение (14) в виде:

$$\begin{aligned} \underline{x}_s^{(p)}(s, r) &= \underline{f}_s^{(p)}(s, r) + \sum_{i=0}^N S_{pi}^1(s, \tau) \underline{x}_\tau^{(i)}(\tau, r) + \\ &+ \sum_{i=0}^N S_{pi}^2(s, \tau) \bar{x}_\tau^{(i)}(\tau, r), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{x}_s^{(p)}(s, r) &= \bar{f}_s^{(p)}(s, r) + \sum_{i=0}^N S_{pi}^1(s, \tau) \bar{x}_\tau^{(i)}(\tau, r) + \\ &+ \sum_{i=0}^N S_{pi}^2(s, \tau) \underline{x}_\tau^{(i)}(\tau, r), \quad p = \overline{0, n}. \end{aligned} \quad (15)$$

Введя в уравнение (15) векторы

$$\underline{X}(s, r) = (\underline{x}_s^{(0)}, \dots, \underline{x}_s^{(n)})^T, \quad \bar{X}(s, r) = (\bar{x}_s^{(0)}, \dots, \bar{x}_s^{(n)})^T,$$

$$\underline{F}(s, r) = (\underline{f}_s^{(0)}, \dots, \underline{f}_s^{(n)})^T, \quad \bar{F}(s, r) = (\bar{f}_s^{(0)}, \dots, \bar{f}_s^{(n)})^T,$$

и матрицы

$$S^1 = (S_{pi}^1), \quad S^2 = (S_{pi}^2), \quad (p, i) = \overline{0, n},$$

получим при $s, z = a^* \in [a, b]$ уравнение (15) в матричной форме:

$$X = F + (S^1 + S^2)X, \quad X = (\underline{X}, \bar{X})^T, \quad F = (\underline{F}, \bar{F})^T, \quad (16)$$

откуда получим решение:

$$\begin{aligned} X &= F + SX, \quad S = \begin{pmatrix} S^1 & S^2 \\ S^2 & S^1 \end{pmatrix} \Rightarrow (S - I)X = -F \Rightarrow \\ &\Rightarrow X^* = -(S - I)^{-1}F, \quad |S - I| \neq 0. \end{aligned}$$

Сходимость решения X^* к точному решению $\tilde{X}(X^* \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \tilde{X})$ доказывается в работе [22].

Пример 2. Рассмотрим интегральное уравнение

$$x_H(s) = f_H(s) + \int_0^2 s^2(1 + \tau)x_H(\tau)d\tau, \quad (17)$$

в котором

$$\begin{aligned} f_H(s) &= f(s, r) = \left(\underline{f}(s, r) = sr, \quad \bar{f}(s, r) = \left(\frac{14}{3}\right)s^2(r - 2) \right); \\ r &\in [0, 1] \subset R_1. \end{aligned}$$

Необходимо найти $x_{\text{н}}(s) = x(s, r) = (\underline{x}(s, r), \bar{x}(s, r))$.

Чтобы найти решение, представим уравнение (17) в параметрической форме:

$$\begin{aligned}\underline{x}(s, r) &= sr + \int_0^2 s^2(1 + \tau)\underline{x}(\tau, r)d\tau, \\ \bar{x}(s, r) &= \left(\frac{14}{3}\right)s^2(r-2) + \int_0^2 s^2(1 + \tau)\bar{x}(\tau, r)d\tau.\end{aligned}\quad (18)$$

В этих выражениях ядро $K(s, \tau) = s^2(1 + \tau) \geq 0 \forall \tau \in [0, 2]$, где промежуток $[0, 2]$ определяет пределы интегрирования в уравнении (18), поэтому этот промежуток не имеет точки разбиения c , которая представлена в системе уравнений (12).

Представим неизвестные функции $\underline{x}(\tau, r)$, $\bar{x}(\tau, r)$, которые в уравнении (17) находятся под знаком интеграла в виде тейлоровского полинома по степеням n , положив при этом для простоты вычислений $n = 1$. Тогда при $\tau = z \in [0, 2]$ получим:

$$\underline{x}(\tau, r) = 1 + \left(\frac{\partial \underline{x}}{\partial \tau}\right)\bigg|_{\tau=z} (\tau - z),$$

$$\bar{x}(\tau, r) = 1 + \left(\frac{\partial \bar{x}}{\partial \tau}\right)\bigg|_{\tau=z} (\tau - z), \quad 0 \leq \tau, z \leq 2, r \in [0, 1].$$

Так как $n = 1$, число дифференцирований p по s каждого из уравнений (18) дает значения $p = 0, 1$, следовательно,

$$p = 0 \Rightarrow \frac{\partial^0}{\partial s^0} \Rightarrow \begin{cases} \underline{x}(s, r) = sr + \int_0^2 s^2(1 + \tau)\underline{x}(\tau, r)d\tau, \\ \bar{x}(s, r) = \frac{14}{3}s^2(r-2) + \int_0^2 s^2(1 + \tau)\bar{x}(\tau, r)d\tau, \end{cases}$$

$$p = 1 \Rightarrow \frac{\partial^1}{\partial s^1} \Rightarrow \begin{cases} \dot{\underline{x}}_s(s, r) = r + \int_0^2 2s(1 + \tau)\underline{x}(\tau, r)d\tau, \\ \dot{\bar{x}}_s(s, r) = \frac{28}{3}s(r-2) + \int_0^2 s^2(1 + \tau)\bar{x}(\tau, r)d\tau. \end{cases}$$

Далее рассматриваются векторы X, F и элементы матрицы S :

$X = (\underline{x}|s = a^*, r), \dot{\underline{x}}_s(s = a^*, r); (\bar{x}|s = a^*, r), \dot{\bar{x}}_s(s = a^*, r)^T$ — вектор нечетких переменных, подлежащий определению; $a^* \in [a, b]$;

$F = \left(\underline{f}(s = a^*, r) = a^*r, \dot{\underline{f}}_s = 1 \cdot r; \bar{f}(s = a^*, r) = \frac{14}{3}a^{*2}(r-2), \dot{\bar{f}}_s = \frac{28}{3}a^*(r-2) \right)^T$ — заданный вектор нечетких переменных.

Элементы S_{pi}^2 матрицы S^2 равны нулю, так как промежуток $[0, 2]$ не имеет точки разбиения c . Это дает

$S^2 = (S_{pi}^2 = 0)$. Элементы S_{pi}^1 матрицы S^1 представляют собой

$$\begin{aligned}S_{pi}^1 &= \frac{1}{i!} \int_0^2 K_s^{(p)}(s, \tau)(\tau - z)^i d\tau = \\ &= \frac{1}{i!} \int_0^2 [(s = a^* = 0)^2(1 + \tau)]_s^{(p)} (\tau - z = a^* = 0)^i d\tau = 0,\end{aligned}$$

$$p, i = 0, 1,$$

поэтому $S^1 = (S_{pi}^1) = 0$. Это означает, что

$$S = \begin{pmatrix} S^1 = 0 & S^2 = 0 \\ S^2 = 0 & S^1 = 0 \end{pmatrix},$$

откуда из уравнения (16) получим:

$$S - I|_{s=0} = -I.$$

В результате матричное уравнение

$$(S - I)|_{s=0} \cdot X = -F \Rightarrow IX = F$$

будет иметь вид:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{x} \\ \dot{\underline{x}}_s \\ \bar{x} \\ \dot{\bar{x}}_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ar \\ 1 - r \\ \left(\frac{14}{3}\right)a^2(r-2) \\ \left(\frac{28}{3}\right)a(r-2) \end{pmatrix} \Rightarrow x_{\text{н}} = x(s, r) =$$

$$= \left(\underline{x}(s, r)|_{a=s} = sr, \bar{x}(s, r) = \left(\frac{14}{3}\right)s^2(r-2) | r \in [0, 1] \right).$$

В общем случае задается нечеткая система интегральных уравнений [22, 23]

$$x_{\text{н}i}(s) = f_{\text{н}i}(s) + \sum_{j=1}^m \int_a^b K_{ij}(s, \tau)x_{\text{н}j}(\tau)d\tau, \quad i = \overline{1, m}. \quad (19)$$

Здесь полагается $a \leq s, \tau \leq b$, $K_{ij}(s, \tau)$, $i, j = \overline{1, m}$, — заданные четкие ядра, дифференцируемые по своим аргументам на промежутке $[a, b]$; $f_{\text{н}i}$ — заданные нечеткие функции; $x_{\text{н}i}(s) = (x_{\text{н}1}(s), \dots, x_{\text{н}m}(s))^T$ — нечеткий вектор, подлежащий определению. Нечеткие переменные $f_{\text{н}i}(s)$, $x_{\text{н}i}(s)$ представляются в параметрической форме

$$f_{\text{н}i}(s) = f_i(s, r) = (\underline{f}(s, r), \bar{f}(s, r) | r \in [0, 1]),$$

$$x_{\text{н}i}(s) = x_i(s, r) = (\underline{x}_i(s, r), \bar{x}_i(s, r) | r \in [0, 1]), \quad i = \overline{1, m},$$

и далее применяется методика преобразований, которая была реализована в одномерном случае: разбиение пределов интегрирования промежутка $[a, b]$ с помощью точек c_{ij} , $i, j = \overline{1, m}$; представление неизвестных переменных $\underline{x}_i(s, r)$, $\bar{x}_i(s, r)$ в виде тейлоровских полиномов по степеням n в произвольной точке $\tau = z \in [a, b] \subset R$; дифференцирование $p = \overline{0, n}$ раз по s каждого из уравнений (19), представленных в параметрической форме; пере-



мена местами символов $\int$ и $\sum$; введение соответствующих обозначений для векторов и матриц.

В результате перечисленных преобразований появляются НСЛУ типа (16):

$$SX = F, \quad (20)$$

где $X(\cdot) = (\underline{x}_1^{(n)}(\cdot), \bar{x}_1^{(n)}(\cdot), \dots, \underline{x}_m^{(n)}(\cdot), \bar{x}_m^{(n)}(\cdot))^T$ — неизвестный вектор нечетких переменных; символ $(\cdot)$ обозначает $(s = a, r)$; (n) — номер производной и степень тейлоровского разложения; $\underline{x}_k^{(n)}(\cdot) = (\underline{x}_k^{(n)}(\cdot), \dots, \underline{x}_k^{(n)}(\cdot))^T$; $\bar{x}_k^{(n)}(\cdot) = (\bar{x}_k^{(n)}(\cdot), \dots, \bar{x}_k^{(n)}(\cdot))^T$, $k = \overline{1, m}$, — компоненты вектора X ;

$F(\cdot) = (\underline{f}_1^{(n)}(\cdot), \bar{f}_1^{(n)}(\cdot), \dots, \underline{f}_m^{(n)}(\cdot), \bar{f}_m^{(n)}(\cdot))^T$ — заданный вектор нечетких переменных;

$$\underline{f}_k^{(n)} = -(\underline{f}_k(\cdot), \dots, \underline{f}_k^{(n)}(\cdot))^T;$$

$$\bar{f}_k^{(n)} = -(\bar{f}_k(\cdot), \dots, \bar{f}_k^{(n)}(\cdot))^T;$$

$$S = \begin{pmatrix} S^{(1,1)} & \dots & S^{(1,m)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ S^{(m,1)} & \dots & S^{(m,m)} \end{pmatrix} \text{ — матрица с матричными элементами}$$

ментами

$$W^{(i,j)} = \begin{pmatrix} S_{11}^{(ij)} & S_{12}^{(ij)} \\ S_{21}^{(ij)} & S_{22}^{(ij)} \end{pmatrix};$$

$$S_{11}^{(ij)} = S_{22}^{(ij)} = \begin{pmatrix} S_{00}^{(ij)} - 1 & \dots & S_{0n}^{(ij)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ S_{n0}^{(ij)} & \dots & S_{nn}^{(ij)} - 1 \end{pmatrix};$$

$$S_{12}^{(ij)} = S_{21}^{(ij)} = \begin{pmatrix} S_{00}^{*(ij)} & \dots & S_{0n}^{*(ij)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ S_{n0}^{*(ij)} & \dots & S_{nn}^{*(ij)} \end{pmatrix}. \quad \blacklozenge$$

Пример 3. Имеем

$$\underline{f}_1(s, r) = s \cdot r - \frac{27}{4}s^2(r^3 - 2) - \frac{14}{3}s^2r - \frac{1}{4}s^2r(r^4 + 2);$$

$$\begin{aligned} \bar{f}_1(s, r) = & \frac{14}{3}s^2(r - 2) + \frac{3}{4}s^2(r^3 - 2) - s(r - 2) + \\ & + \frac{9}{4}s^2r(r^4 + 2); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \underline{f}_2(s, r) = & s(s^5 + 2r) - 14,1(s - 2)^2(r^3 - 2) - \frac{8}{3}(s^2 + 1)r - \\ & - 0,3(s - 2)^3r(r^4 + 2); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{f}_2(s, r) = & \frac{8}{3}(s^2 + 1)(r - 2) - s(3r^3 - 6) + \\ & + 0,9(s - 2)^2(r^3 - 2) + 4,7(s - 2)r(r^4 + 2); \end{aligned}$$

$$K_{11}(s, \tau) = s^2(1 + \tau); \quad K_{12}(s, \tau) = s^2(1 - \tau^2);$$

$$K_{21}(s, \tau) = (1 + s^2)\tau; \quad K_{22}(s, \tau) = (s - 2)(1 - \tau^3),$$

$0 \leq s, \tau \leq 2$, — совокупность ядер.

Решение. В этих условиях при $z = 0$ (z — точка тейлоровского разложения) получим:

$$W^{(1,1)} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}; \quad W^{(1,2)} = (0)_{i,j}; \quad i, j = \overline{1, 4};$$

$$W^{(2,1)} = \begin{pmatrix} 2 & \frac{8}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \frac{8}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad W^{(2,2)} = \begin{pmatrix} 2 & 1,2 & -11 & -\frac{94}{5} \\ -3 & -2,2 & 11 & \frac{94}{5} \\ -11 & -\frac{94}{5} & 2 & 1,2 \\ 11 & \frac{94}{5} & -3 & -2,2 \end{pmatrix}.$$

Решение НСЛУ (20) дает:

$$X = S^{-1}F,$$

где

$$X = X(a = 0, r) = (\underline{x}_1, \underline{x}_1^*, \bar{x}_1, \bar{x}_1^*, \underline{x}_2, \underline{x}_2^*, \bar{x}_2, \bar{x}_2^*)^T;$$

$$S^{-1}F = (0, r, 0, 2 - r, 0, r^5 + 2r, 0, 6 - r^3)^T. \quad \blacklozenge$$

3.4. Оценивание нечеткого состояния методом вырожденных ядер

Полагается, что если ядро уравнения представляется в виде конечной суммы произведений функций от τ на функцию от s , тогда уравнение (19) с

ядром $K(s, \tau) = \sum_{i=1}^n a_i(s)b_i(\tau)$ представляет собой

нечеткое интегральное уравнение Фредгольма с четким вырожденным ядром [22, 23]. Здесь, как и ранее (см. п. 3.2) для существования и единственности нечеткого решения по методу последовательных приближений полагается, что $a_i(s)$ определено, кусочно-непрерывно по Хаусдорфу и ограничено первой производной по Сейккала на $s \in [a, b] \subset R$, $b_i(\tau)$ имеет аналогичное ограничение на $\tau \in [0, t] \subset R$.

Модифицируем известный метод решения традиционного уравнения с вырожденным ядром для решения соответствующего нечеткого уравнения [24].

Пусть имеем нечеткое интегральное уравнение (19), ядро которого

$$K(s, \tau) = \sum_{i=1}^n a_i(s)b_i(\tau),$$

и на промежутке интегрирования $[a, b]$ выполнены такие типы неравенств:

$$(i): \begin{cases} \sum_{i=1}^n a_i(s)b_i(\tau) \geq 0, \\ a \leq \tau \leq b; \end{cases} \quad (ii): \begin{cases} \sum_{i=1}^n a_i(s)b_i(\tau) < 0, \\ a \leq \tau \leq b; \end{cases}$$

$$(iii): \begin{cases} \sum_{i=1}^n a_i(s)b_i(\tau) \geq 0, \\ a \leq \tau \leq c, \\ \sum_{i=1}^n a_i(s)b_i(\tau) < 0, \\ c \leq \tau \leq b. \end{cases}$$

Тогда в случае (i) для системы уравнений (19) будут справедливы соотношения

$$\begin{aligned} x_H(s) &= f_H(s) + \int_a^b K(s, \tau)x_H(\tau)d\tau \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \underline{x}(s, r) = \underline{f}(s, r) + \sum_{i=1}^n a_i(s)\underline{x}_i, \\ \bar{x}(s, r) = \bar{f}(s, r) + \sum_{i=1}^n a_i(s)\bar{x}_i, \\ \underline{x}_i = \int_a^b b_i(\tau)\underline{x}(\tau)d\tau, \bar{x}_i = \int_a^b b_i(\tau)\bar{x}(\tau)d\tau. \end{cases} \quad (21) \end{aligned}$$

Умножив соотношения (21) на $b_i(\tau)$ и затем проинтегрировав их на промежутке $[a, b]$, получим соотношения

$$\underline{x}_i = \underline{f}_i + \sum_{i=1}^n a_{ij}^1 \underline{x}_i, \quad \underline{f}_i = \int_a^b \underline{f}(\tau)b_i(\tau)d\tau,$$

$$a_{ij}^1 = \int_a^b b_i(\tau)a_j(\tau)d\tau,$$

$$\bar{x}_i = \bar{f}_i + a_{ij}^1 \bar{x}_i, \quad \bar{f}_i = \int_a^b \bar{f}(\tau)b_i(\tau)d\tau, \quad i = \overline{1, n}.$$

Эти соотношения приводят к НСЛУ

$$X_H = AX_H + F_H,$$

где

$$X_H = (\underline{X}|\bar{X})^T; \quad \underline{X} = (\underline{x}_1, \dots, \underline{x}_n); \quad \bar{X} = (\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n);$$

$$F_H = (\underline{F}|\bar{F})^T,$$

$$F_H = (\underline{F}|\bar{F}); \quad \underline{F} = (\underline{f}_1, \dots, \underline{f}_n), \quad \bar{F} = (\bar{f}_1, \dots, \bar{f}_n);$$

$$A = \begin{pmatrix} A^1 & 0 \\ 0 & A^1 \end{pmatrix}; \quad A^1 = (a_{ij}^1), \quad a_{ij}^1 = \int_a^b b_i(\tau)a_j(\tau)d\tau, \\ i, j = \overline{1, n},$$

и которое можно представить в традиционной форме, принятой в теории нечетких вычислений [19, 20]:

$$(I - A)X_H = F_H, \quad I - \text{единичная матрица.} \quad (22)$$

В статьях [19, 20] рассмотрен случай, когда $|I - A| = 0$.

Пример 4. Рассмотрим интегральное уравнение вида (21):

$$x_H(s) = f_H(s) + \int_0^{0.5} s\tau x_H(\tau)d\tau, \quad s \in [0, 0.5],$$

в котором

$$f_H(s) = f(s, r) = (\underline{f}(s, r), \bar{f}(s, r) | r \in [0, 1]);$$

$$K(s, \tau) = s\tau \geq 0, \quad a_i(s) = s, \quad b_i(\tau) = \tau.$$

Решение находится из нечеткого матричного уравнения (22), в котором элементы матриц представляют собой

$$X_H = X(s, r) = (\underline{x}|\bar{x}_1)^T;$$

$$F_H = F(s, r) = \left(\underline{f}_1 = \int_0^{0.5} \underline{f}(\tau)\tau d\tau \middle| \bar{f}_1 = \int_0^{0.5} \bar{f}(\tau)\tau d\tau \right)^T;$$

$$a_{ij}^1 = \int_0^{0.5} \tau^2 d\tau = \frac{\tau^3}{3} \bigg|_0^{0.5} = \frac{1}{24};$$

$$I - A = 1 - a_{11}^1 = 1 - \frac{1}{24} = \frac{23}{24}.$$

Следовательно,

$$\underline{x}_1 = \frac{24}{23} \int_0^{0.5} \underline{f}(\tau)\tau d\tau, \quad \bar{x}_1 = \frac{24}{23} \int_0^{0.5} \bar{f}(\tau)\tau d\tau$$

и решение уравнения имеет вид:

$$x_H(s) = (\underline{x}(s, r), \bar{x}(s, r) | r \in [0, 1]),$$

в котором

$$\underline{x}(s, r) = \underline{f}(s, r) + s\underline{x}_1, \quad \bar{x}(s, r) = \bar{f}(s, r) + s\bar{x}_1.$$

В случае (ii) после вычислений, аналогичных (i), с учетом свойства умножения для нечетких переменных x

$$kx = \begin{cases} (k\underline{x}, k\bar{x}), & k \geq 0, k \in R, \\ (k\bar{x}, k\underline{x}), & k < 0, \end{cases}$$



получим

$$(\bar{X}|\underline{X})^T = (-I\underline{X}|-I\bar{X})^T,$$

откуда после преобразований будем иметь:

$$\begin{pmatrix} \underline{X} \\ \bar{X} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{X} \\ \bar{X} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \underline{F} \\ \bar{F} \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \underline{X} \\ \bar{X} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -I\underline{X} \\ -I\bar{X} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -I\underline{F} \\ -I\bar{F} \end{pmatrix} \Leftrightarrow (I + A)X_H = -F_H. \blacklozenge$$

3.5. Оценка нечеткого состояния методом невырожденного ядра, аппроксимируемого вырожденным

Пусть в соотношении (21) ядро имеет вид $K(s, \tau) = K(s \cdot \tau)$, тогда в соответствии с теилоровским разложением при $(s \cdot \tau) \simeq 0$ получим:

$$K(s \cdot \tau) \sum_{i=1}^n e_i(s \cdot \tau)^i = \sum_{i=1}^n a_i(s)b_i(\tau).$$

Следовательно, для уравнения

$$x_H(s) = f_H(s) + \int_a^b K(s, \tau)x_H(\tau)d\tau$$

может быть применен метод из п. 3.4.

Пример 5. Имеем

$$x_H(s) = f_H(s) + \int_0^{0.5} \sin(s \cdot \tau)x_H(\tau)d\tau.$$

Используем теилоровскую аппроксимацию ядра $K(s \cdot \tau) \simeq s \cdot \tau$, тогда далее применяются результаты примера 4.

При аппроксимации

$$K(s \cdot \tau) \simeq s \cdot \tau - \frac{1}{3}(s \cdot \tau)^3 = a_1 b_1 \Big|_{a_1=3}^{a_1=s} + a_2 b_2 \Big|_{a_2=3^3}^{a_2=s^3} \Big|_{b_1=\tau}^{b_1=s \cdot \tau} + b_2 = -\frac{1}{3}\tau^3$$

интегральное уравнение также решается методом, описанным в п. 3.4. $\blacklozenge$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

На основе определения нечеткого интеграла Римана сформулирована постановка задачи об оценивании состояний моделей, описываемых нечеткими интегральными уравнениями Фредгольма — Вольтерра в предположении существования и единственности их решений.

Рассмотрены различные методы оценивания нечетких интегральных уравнений, а именно: нечеткое преобразование Лапласа, метод «вложения» моделей, теилоровское оценивание вырожденных ядер, оценивание невырожденных ядер вырожденными формами. Для них решены тестовые приме-

ры и показано, что некоторые решения связаны с решением нечетких систем линейных алгебраических уравнений.

В части 2 статьи будут рассмотрены другие нечеткие методы оценивания состояний линейных и нелинейных моделей интегральных уравнений, связанные с методом наименьших квадратов и его модификациями, оцениванием по методам Галеркина, Чебышева и функциям sinc.

ЛИТЕРАТУРА

1. Агафонова С.А., Герман А.Д., Муратова Т.В. Дифференциальные уравнения. — М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2011. — 347 с. [Agafonova, S.A., German, A.D., Muratova, T.V. Differencial'nye uravneniya. — M.: Izd-vo MGTU im. N.E. Baumana, 2011. — 347 s. (In Russian)]
2. Волков И.К., Канатников А.Н. Интегральные преобразования и операционное исчисление. — М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2015. — 228 с. [Volkov, I.K., Kanatnikov, A.N. Integral'nye preobrazovaniya i operacionnoe ischislenie. — M.: Izd-vo MGTU im. N.E. Baumana, 2015. — 228 s. (In Russian)]
3. Волков И.К., Зуев С.М., Цветкова Г.М. Случайные процессы. — М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2006. — 447 с. [Volkov, I.K., Zuev, S.M., Cvetkova, G.M. Sluchajnye processy. — M.: Izd-vo MGTU im. N.E. Baumana, 2006. — 447 s. (In Russian)]
4. Левин В.И. Интервальные уравнения в задачах исследования неопределенных систем // Информационные технологии. — 2018. — Т. 24, № 3. — С. 147—153. [Levin, V.I. Interval Equations in Problems of Research of Uncertain Systems / Information Technologies. — 2018. — Vol. 24, no. 3. — P. 147—153. (In Russian)]
5. Алтунин А.Е., Семухин М.В. Модели и алгоритмы принятия решений в нечетких условиях. — Тюмень: Изд-во Тюменского госуниверситета, 2000. — 352 с. [Altunin, A.E., Semuhin, M.V. Modeli i algoritmy prinyatiya reshenij v nechetkikh usloviyah. — Tyumen': Izd-vo Tyumenskogo gosuniversiteta, 2000. — 352 s. (In Russian)]
6. Методы робастного, нейро-нечеткого и адаптивного управления / Под редакцией Пупкова К.А. — М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2001. — 743 с. [Metody robastnogo, nejro-nechetkogo i adaptivnogo upravleniya / Pod redakciej Pupkova K.A. — M.: Izd-vo MGTU im. N.E. Baumana, 2001. — 743 s. (In Russian)]
7. Дюбуа Д., Праде А. Теория возможностей: приложения и представление знаний в информатике. — М.: Радио и связь, 1990. — 287 с. [Dyubua, D., Prade, A. Teoriya vozmozhnostej: prilozheniya i predstavlenie znanij v informatike. — M.: Radio i Svyaz', 1990. — 287 s. (In Russian)]
8. Мочалов И.А., Петрунин Н.Г., Редькин А.С., Цегельский С.В. Нечеткие вероятностно-статистические методы // Приложение № 4 к журналу «Информационные технологии». — 2003. — С. 1—24. [Mochalov, I.A., Petrunin, N.G., Red'kin, A.S., Cegelskij, S.V. Nchetkie veroyatnostno-statisticheskie metody // Prilozhenie No. 4 k zhurnalu «Informacionnye Tekhnologii». — 2003. — S. 1—24. (In Russian)]
9. Мочалов И.А., Хрисат М.С. Оценивание параметров модели по нечетким случайным данным // Информационные технологии. — 2014. — № 2 (210). — С. 14—22. [Mochalov, I.A., Khrisat, M.S. Estimation Parameter Model Using Fuzzy Random Data / Information Technologies. — 2014. — No. 2 (210). — S. 14—22. (In Russian)]
10. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. — М.: Наука, 1981. — 544 с. [Kolmogorov, A.N., Fomin, S.V. Elementy teorii funkcij i funk-

- cional'nogo analiza. — M.: Nauka, 1981. — 544 s. (In Russian)]
11. *Hochstadt, H.* Integral Equations. Pure and Applied Mathematics // New York-London-Sydney: John Wiley & Sons, 1973. — 282 p.
 12. *Congxin, W., and Ming, M.* On the Integrals, Series and Integral Equations of Fuzzy Set-Valued Functions // Journal of Harbin Institute of Technology. — 1990. — Vol. 21. — P. 9–11.
 13. *Park, J.Y., Jeong, J.V.* On Existence and Uniqueness of Solution of Fuzzy Volterra — Fredholm Integral Equations // Fuzzy Sets & Systems. — 2000. — No. 115. — P. 425–431.
 14. *Friedman, M., Ma, M. and Kandel, A.* Numerical Solutions of Fuzzy Differential and Integral Equations // Fuzzy Sets and Systems. — 1999. — Vol. 106, no. 1. — P. 35–48.
 15. *Лизоркин П.И.* Курс дифференциальных и интегральных уравнений с дополнительными главами анализа. — М.: Наука, 1981. — 384 с. [*Lizorkin, P.I.* Kurs differencial'nyh i integral'nyh uravnenij s dopolnitel'nyimi glavami analiza. — M.: Nauka, 1981. — 384 s. (In Russian)]
 16. *Деменков Н.П., Микрин Е.А., Мочалов И.А.* Нечеткое преобразование Лапласа в задачах математического моделирования. Ч. 1. Нечеткое математическое моделирование // Информационные технологии. — 2017. — Т. 23. — № 4. — С. 251–257. [*Demenkov, N.P., Mikrin, E.A., Mochalov, I.A.* Fuzzy transformation of laplace in tasks of fuzzy mathematical modelling. Part 1. / Information Technologies. — 2017. — Vol. 23, no. 4. — S. 251–257. (In Russian)]
 17. *Деменков Н.П., Микрин Е.А., Мочалов И.А.* Нечеткое преобразование Лапласа в задачах нечеткого математического моделирования. Ч. 2. Нечеткое управление // Информационные технологии. — 2017. — Т. 23. — № 5. — С. 362–369. [*Demenkov, N.P., Mikrin, E.A., Mochalov, I.A.* Fuzzy Transformation of Laplace in Tasks of Fuzzy Mathematical Modelling. Part II / Information Technologies. — 2017. — Vol. 23, no. 5. — S. 362–369. (In Russian)]
 18. *Friedman, M., Ming, M., Kandel, A.* Fuzzy Linear Systems // Fuzzy Sets and Systems. — 1998. — No. 96. — P. 201–209.
 19. *Деменков Н.П., Микрин Е.А., Мочалов А.И.* Методы решения нечетких систем линейных уравнений. Ч. 1. Полные системы // Проблемы управления. — 2019. — № 4. — С. 3–14. DOI: <http://doi.org/10.25728/ru.2019.4.1>. [*Demenkov, N.P., Mikrin, E.A., Mochalov, E.A.* Methods of Solving Fuzzy Systems of Linear Equations. Part 1. Complete Systems / Control Sciences. — 2019. — No. 4. — P. 3–14. (In Russian)]
 20. *Деменков Н.П., Микрин Е.А., Мочалов А.И.* Методы решения нечетких систем линейных уравнений. Ч. 2. Неполные системы // Проблемы управления. — 2019. — № 5. — С. 19–28. DOI: <http://doi.org/10.25728/ru.2019.5.2>. [*Demenkov, N.P., Mikrin, E.A., Mochalov, E.A.* Methods of Solving Fuzzy Systems of Linear Equations. Part 2. Incomplete Systems / Control Sciences. — 2019. — No. 5. — P. 19–28. (In Russian)]
 21. *Jahaniagh, M., Allahvianloo, T., and Otadi, M.* Numerical Solution of Fuzzy Integral Equations // Applied Mathematical Sciences. — 2008. — Vol. 2, no. 1. — P. 33–46.
 22. *Jafarian, A., Measoomy Nia, S., Tavan, S. and Banifazel, M.* Solving Linear Fredholm Fuzzy Integral Equations Systems by Taylor Expansion Method // Applied Mathematical Sciences. — 2012. — Vol. 6, no. 83. — P. 4103–4117.
 23. *Jafarian, A., Measoomy Nia, S., and Tavan, S.* A Numerical Scheme to Solve Fuzzy Linear Volterra Integral Equations Systems // Journal of Applied Mathematics. — 2012. — Article ID 216923. — 17 p.
 24. *Тихонов А.Н., Арсенин В.Я.* Методы решения некорректных задач. — М.: Наука, 1979. — 285 с. [*Tihonov, A.N., Arsenin, V.Ya.* Metody resheniya nekorrektnykh zadach. — M.: Nauka, 1979. — 285 s. (In Russian)]

Статья представлена к публикации членом редколлегии
Ф.Ф. Пашенко.

Поступила в редакцию 21.02.2020, после доработки 18.11.2020.
Принята к публикации 24.11.2020.

Деменков Николай Петрович — канд. техн. наук,
Московский государственный технический университет
им. Н.Э. Баумана, ✉ dnep@bmstu.ru,

Микрин Евгений Анатольевич — академик РАН,
ПАО «РКК “Энергия” им. С.П. Королева»;
Московский государственный технический университет
им. Н.Э. Баумана,

Мочалов Иван Александрович — д-р техн. наук,
Московский государственный технический университет
им. Н.Э. Баумана, ✉ mochalov2501@yandex.ru.

STATE ESTIMATION METHODS FOR FUZZY INTEGRAL MODELS.

Part I: Approximation methods

N.P. Demenkov¹, E.A. Mikrin, and I.A. Mochalov²

^{1,2} Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia

¹✉ dnep@bmstu.ru, ²✉ mochalov2501@yandex.ru

Abstract. The existing and newly proposed methods for estimating the state of integral models with fuzzy uncertainty are reviewed. A fuzzy integral model with the limit transition defined in the Hausdorff metric is introduced. This model is used to formulate the state estimation problem for the models described by fuzzy Fredholm—Volterra integral equations. Several fuzzy methods for solving this problem are considered as follows: the fuzzy Laplace transform, the method of “embedding” models (transforming an original system into a higher dimension system and solving the resulting problem by traditional linear algebra methods), the Taylor estimation of the degenerate nuclei under the integral sign that are represented by power polynomials, and the estimation of the nondegenerate nuclei by degenerate forms using the Taylor approximation. As shown below, in some cases, the estimation results are related to the solution of fuzzy systems of linear algebraic equations. Test examples are solved for them.

Keywords: fuzzy Riemann integral, fuzzy integral model, fuzzy methods for estimating integral models.

ИНФОРМАЦИОННЫЕ СООБЩЕСТВА В СОЦИАЛЬНЫХ СЕТЕВЫХ СТРУКТУРАХ.

Ч. 1. От основного понятия к математическим моделям формирования¹

Д.А. Губанов, И.В. Петров

Аннотация: Представлен обзор исследований, связанных с информационными сообществами во взаимодополняющих направлениях: модели формирования информационных сообществ в социальных сетевых структурах и прикладные аспекты выявления и анализа информационных сообществ в социальных сетевых структурах. В рамках первого направления рассматриваются математические модели формирования информационных сообществ в условиях неопределенности, в которых индивиды стремятся прийти к истинному представлению относительно интересующего их вопроса. Наиболее релевантными здесь являются модели динамики представлений, в которых представления узлов изменяются под влиянием других узлов сети и учитываются факторы (в частности, топология сети и ограничения рациональности индивидов сети), ведущие к формированию информационных сообществ. В первой части обзора дано понятие информационного сообщества, изложен процесс обработки информации и принятия решений агентом в социальной сети в условиях внешней неопределенности, выделены факторы, влияющие на формирование информационных сообществ в сети. Исследованы базовые модели динамики представлений с байесовскими агентами и их расширения.

Ключевые слова: социальные сетевые структуры, информационное сообщество, формирование информационных сообществ, выявление информационных сообществ, формирование представлений.

ВВЕДЕНИЕ

Интернет и онлайн-социальные сети открыли большие возможности для эффективного производства, распространения и потребления информации в обществе, и, следовательно, возможности для рационального обсуждения различных вопросов и формирования взвешенных мнений по ним. Однако, как оказалось, доступность и разнообразие источников информации и представленных в них альтернативных точек зрения не приводит автоматически к повышению качества получаемой информации и компетентности людей в общественно важных вопросах. Напротив, по многим вопросам в обществе происходит расхожде-

ние представлений и формирование отдельных сообществ с различными, нередко диаметрально противоположными точками зрения на одни и те же вопросы. Объясняется это тем, что участники социальной сети не являются полностью рациональными агентами, эффективно агрегирующими информацию по интересующим их вопросам, поскольку на обработку информации индивидами оказывают существенное воздействие социально-психологические факторы.

Во многих предметных областях выявление и исследование в социальных сетях *информационных сообществ* — множеств индивидов, обладающих близкими и устойчивыми представлениями по некоторому вопросу — является важной задачей. Например, в социологии и политологии считается, что формирование изолированных сообществ (информационных пузырей и эхо-камер) представляет угрозу для общества. Эмпирические исследо-

¹ Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 19-17-50225.

вания показывают наличие самых разнообразных информационных сообществ в социуме (например, поляризованных сообществ республиканцев и демократов в США). В этих исследованиях изучаются различные аспекты: получение пользователем альтернативной информации в зависимости от предпочтений его контактов в сети и алгоритмов онлайн-социальной сети [1], взаимодействие сообществ с разными представлениями [2], информационные роли пользователей [3] и др. Для исследования чаще всего применяются статистические методы и методы машинного обучения (например, методы корреляционного и кластерного анализа), а также методы социально-сетевого анализа, опирающиеся на феномен гомофилии² [1–5]. Применение таких методов требует предварительной обработки данных и последующей интерпретации полученных результатов, т. е. исследователь должен иметь представление о закономерностях динамики мнений в социальных сетях и о существовании в них информационных сообществ. Особенности обработки информации индивидом исследуются в области когнитивистики, психологии и социальной психологии (см., например, работу [8]), а для моделирования динамики представлений в сетях с учетом этих особенностей разрабатываются формальные микроуровневые модели ограниченного рациональных агентов (см., например, работы [9–13]). На практике применять эти модели для выявления сообществ непросто из-за принятых упрощений и предположений, сложности идентификации параметров моделей и отсутствия четко сформулированного понятия информационного сообщества.

Цель настоящего обзора состоит в рассмотрении моделей формирования информационных сообществ в социальных сетях (имеющих как микроэкономические, так и когнитивные и социально-психологические основания) и методов их выявления. Обзор состоит из трех частей. Структура первой части обзора такова: в § 1 дано определение информационного сообщества; в § 2 кратко рассмотрен процесс обработки информации и принятия решений агентом в социальной сети в условиях внешней неопределенности, выделены факторы, влияющие на динамику представлений в социальной сети и — в итоге — на формирование информационных сообществ в сети; в § 3 кратко рассмотрены формальные модели динамики представлений с байесовскими агентами, которые ведут к формированию информационных сообществ.

² Исследования гомофилии активно ведутся в социологии (в частности, изучение свидетельств ее наличия и причин возникновения — см., например, работы [6, 7]). В настоящей статье мы не претендуем на обзор результатов, полученных в социологии.

1. О ПОНЯТИИ ИНФОРМАЦИОННОГО СООБЩЕСТВА

Понятие сообщества (community) является довольно нечетким, оно часто используется неформально. Приведем некоторые из имеющихся определений. Сообщество — «объединение людей, народов, государств, имеющих общие интересы, цели» [14]. Сообщество можно рассматривать:

- как объединение индивидов:
 - как группу людей с общими характеристиками или интересами, живущих вместе в пределах большего общества,
 - как совокупность индивидов с общими интересами, распределенных по всему обществу,
 - как объединение людей или наций, имеющих общую историю или общие социальные, экономические и политические интересы;
- как общество в целом [15].

В качестве примеров сообществ можно привести научное сообщество и языковое сообщество.

Из определений сообщества прежде всего следует общность характеристик индивидов, входящих в него. Этот эффект тесно связан с *гомофилией* — склонностью индивидов формировать связи на основании общности характеристик [6, 7]. С этой точки зрения существует прямая связь с определением в теории сложных сетей, в котором сообществом называют множество узлов, преимущественно связанных друг с другом, нежели с узлами других сообществ [16]. В рамках данной работы авторы интересуются такими характеристиками индивидов, как их представления относительно тех или иных вопросов (проблем). Поэтому будем понимать *информационное сообщество* как совокупность индивидов, являющихся участниками социальной сети и объединенных общими устойчивыми представлениями³ относительно заданных вопросов (см. введенное нами формальное определение сообщества в докладе [17]).

Для описания и объяснения динамики формирования информационных сообществ в социальных сетях необходимы соответствующие модели динамики представлений индивидов. Здесь можно выделить два типа значимых динамических процессов в социальных сетях (рис. 1): процесс изменения представлений индивидов сети (состояния сети) в рамках фиксированной топологии и процесс изменения топологии сети, когда состояние сети «воздействует» на топологию (единомышленники начинают чаще взаимодействовать друг с другом). Обычно считается, что динамика топологии происходит в медленном времени, а динамика состояний — в быстром. Наиболее интересными и

³ Термины «представление», «мнение» и «убеждение» рассматриваются как синонимы.

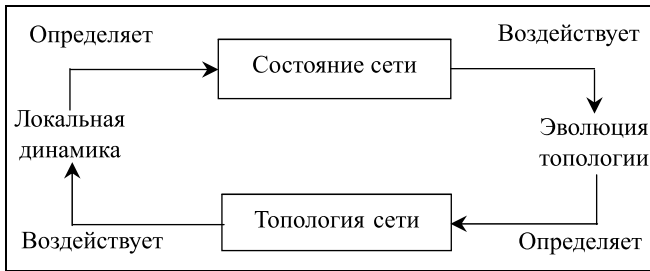


Рис. 1. Взаимовлияние состояния сети и ее топологии

сложными представляются ситуации, когда оба процесса влияют друг на друга, воздействуя, в свою очередь, на формирование информационных сообществ в социальной сети.

В настоящем обзоре рассмотрены модели динамики представлений индивидов в сетях с фиксированной структурой (в некоторых случаях с изменяющимися весами связей), в которых индивиды в процессе социальных взаимодействий пытаются разрешить неопределенность относительно рассматриваемого вопроса. Общность итоговых представлений индивидов и представляет собой условие формирования информационных сообществ в сети. Эти модели рассмотрены далее в первой и во второй частях обзора.

2. ФОРМИРОВАНИЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ В СОЦИАЛЬНОЙ СЕТИ

Участники социальных сетей обмениваются информацией и пытаются устранить неопределенность относительно некоторого вопроса (который при построении моделей обычно формализуется в виде значения некоторого параметра), формируя относительно него свое представление. В теории управления социально-экономическими системами обычно предполагается, что рациональные индивиды (агенты) обладают представлениями (beliefs) о состоянии природы (state of nature) $\theta \in \Theta$. Индивидуальные предпочтения агента определены на множестве результатов деятельности, которые зависят, в частности, от действия агента и состояния природы. В соответствии с гипотезой рационального поведения агент выбирает действие, которое приводит к наилучшему для него результату. И здесь существенна та информация, которой он обладает относительно состояния природы. Рациональный агент стремится устранить существующую неопределенность и принимать решения в условиях полной информированности (гипотеза детерминизма) [18]. В настоящей работе речь идет прежде всего об устранении внешней объективной неопределенности — неопределенности состояния природы. Предполагается, что рациональный агент

пытается устранить неопределенность при помощи внешней информации о состоянии природы и в процессе взаимодействия с соседями (действия которых раскрывают имеющуюся у них частную информацию), изменяя свои представления в соответствии с некоторыми механизмами обновления представлений (или правилами обработки информации) (рис. 2). Рациональные агенты при расчете апостериорных представлений применяют правило Байеса.

Однако индивиды не являются полностью рациональными. Психологи отмечают (см., например, работы [19—21]), что индивиды обладают *ограниченной рациональностью* в силу различных когнитивных ограничений (прежде всего, ограниченного объема памяти и ограниченных вычислительных возможностей) и психических особенностей (см. на рис. 2 психические компоненты, детальное описание которых приведено в работе [22]) и допускают систематические ошибки, влияющие на обработку информации (когнитивные искажения). Поэтому здесь могут быть рассмотрены эвристические способы обновления, которые основываются на эмпирических закономерностях и демонстрируют наблюдаемые на практике социально-психологические эффекты. В частности, социальное влияние на убеждения индивида рассматривается в классической модели ДеГроота [9], в которой агент обновляет свое представление на основе информации о представлениях его доверенного окружения в социальной сети. В содержательно более богатых моделях (например, рассмотренных в работах [10—12]) сила влияния соседей зависит от того, насколько их представления согласуются с представлением агента (учитывается склонность индивида к подтверждению своей точки зрения), и это может привести к возникновению в сети сообществ агентов, внутри которых поддерживаются одинаковые представления.

В целом на динамику представлений индивидов в социальной сети влияют такие факторы (см. рис. 2), как:

- *Состояние природы* $\theta \in \Theta$, относительно которого формируют представления индивиды (например, относительно формы Земли или курса валют на завтра).
- *Представление индивида относительно состояния природы*. Представление может быть задано, в частности, при помощи некоторой точечной оценки или распределения субъективных вероятностей на множестве Θ . Представления индивида ограничены памятью и могут зависеть от его представлений по иным вопросам.
- *Механизм обновления представлений*. Отправной точкой в теории управления социально-экономическими системами служит предположение о том, что агенты рациональны и действуют по

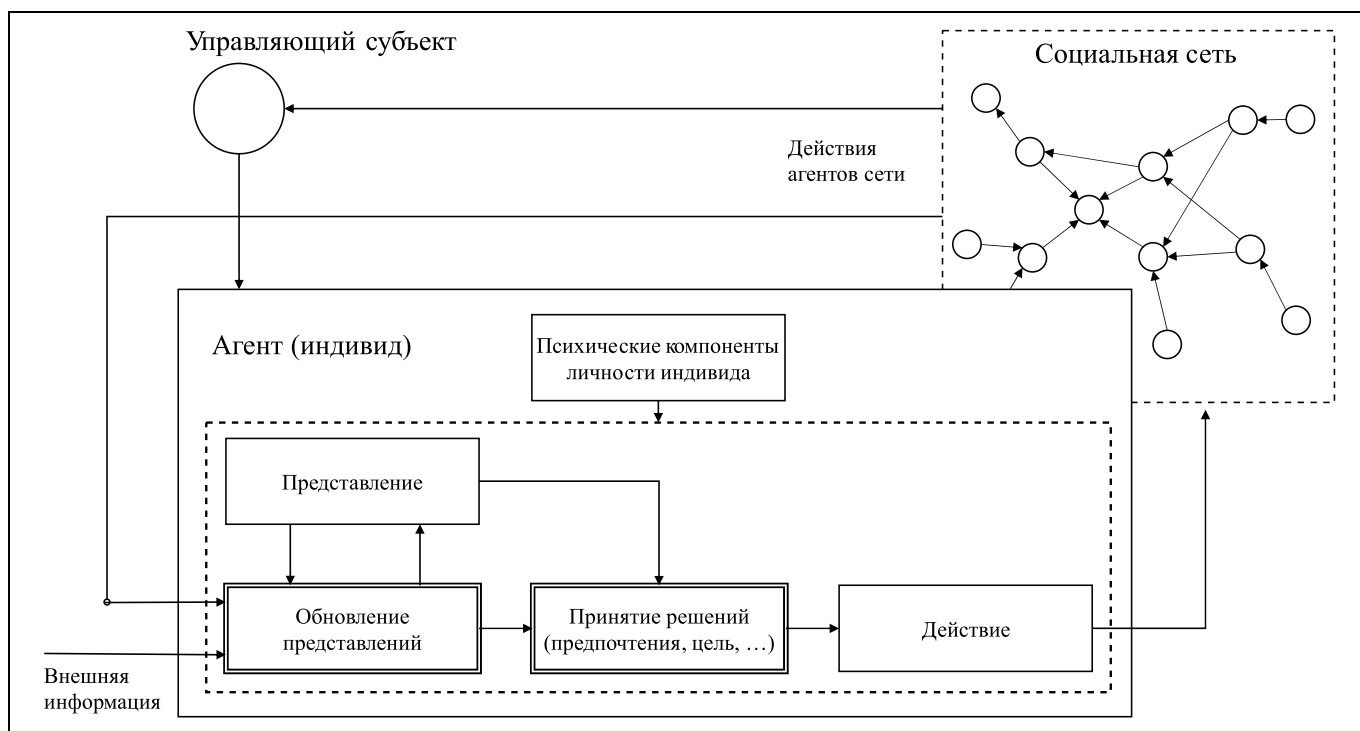


Рис. 2. Процесс обработки информации и принятия решений агентом в социальной сети

правилу Байеса, однако ограниченно рациональные индивиды могут применять эвристические правила.

- *Действие индивида*, которое отражает его представление. Действие из дискретного множества обычно менее информативно, чем действие из континуального, поскольку недостаточно хорошо отражает представления агента.
- *Предпочтения индивида*, задаваемые на результатах его деятельности, или индуцированная предпочтениями целевая функция, которая зависит от действий индивидов и состояния природы.
- *Структура социальной сети*. Очевидно, что структура сети влияет на формирование представлений индивидов. Приведем примеры сетевых эффектов: несвязные сети редко приводят к согласованным представлениям индивидов; индивиды, занимающие выгодное положение в структуре связей сети, обычно оказывают существенное влияние на мнение остальных; и др.

Перечисленные факторы (с учетом в каждом из них психических особенностей индивидов) обуславливают различные информационные эффекты в социальной сети, рассматриваемые в моделях динамики представлений:

— *возникновение истинного или ложного консенсуса представлений в сети* и, как следствие, — формирование глобального информационного со-

общества (с учетом приведенного выше определения);

— *возникновение разногласий в сети* и, как следствие, — формирование различных информационных сообществ в сети.

Далее рассматриваются математические модели динамики представлений агентов в сети, которые учитывают перечисленные факторы и демонстрируют указанные информационные эффекты, и, следовательно, возможность формирования информационных сообществ в сети. Первичным является разделение моделей по интеллектуальным возможностям агентов сети и способу обновления представлений агентов на модели с рациональными байесовскими агентами и модели с ограниченно-рациональными агентами, которые руководствуются эвристическими правилами обновления представлений.

3. ФОРМИРОВАНИЕ ИНФОРМАЦИОННЫХ СООБЩЕСТВ В МОДЕЛЯХ С БАЙЕСОВСКИМИ АГЕНТАМИ

3.1. Формирование представлений индивида

В моделях с байесовскими агентами рассматривается в основном вопрос о возможности формирования агентами в сети истинных представлений о состоянии природы. Множество возможных значений состояния природы Θ задано, как и мно-



жество агентов, у которых имеются представления относительно состояния природы в виде распределения вероятностей. Научение происходит в процессе обработки доступной агенту информации относительно состояния природы: *частного/закрытого сигнала* (private signal) и, возможно, действий его соседей (если агент получает информацию о действиях соседей, то научение называется *социальным*, social learning). Для того, чтобы быть информативным, сигнал s должен зависеть от состояния природы θ , но в то же время он, вообще говоря, не полностью раскрывает состояние природы, т. е. представляет собой случайную величину. Обработка информации происходит при помощи правила Байеса — поступающая информация используется для обновления априорных убеждений индивида и формирования апостериорных убеждений:

$$f(\theta|s) = \frac{\phi(s|\theta)f(\theta)}{\int \phi(s|\theta')f(\theta')d\theta'},$$

где $f(\theta)$ — априорная плотность распределения θ ; $\phi(s|\theta)$ — условная плотность распределения параметра s при условии θ ; $f(\theta|s)$ — апостериорная плотность распределения параметра θ при условии s .

В классических моделях научения все агенты знают структуру модели: априорные вероятности значений состояния природы и то, как заданы частные сигналы (их распределения при условии тех или иных значений состояния природы). Эта информация — *общее знание* (common knowledge):

- 1) каждому агенту известна эта структура;
- 2) всем агентам известно 1;
- 3) всем агентам известно 2 и т. д. до бесконечности.

Однако агентам неизвестна реализация состояния природы и реализация чужих частных сигналов. Предположение об общем знании структуры модели является довольно сильным, в ряде исследований оно ослабляется (см., например, работы [23, 24]).

Далее рассматриваются две базовые модели обновления представлений индивида, в которых принимаются конкретные предположения о структуре информированности индивида, а информационное взаимодействие между индивидами отсутствует.

3.2. Базовые модели обновления представлений индивида

Рассмотрим две базовые модели обновления представлений индивида. Кратко их можно описать так: в простой бинарной модели состояние природы принимает два значения (состояние является дискретным) и каждый агент получает бинарный сигнал о состоянии природы, а в гауссовской модели состояние природы и частные сигна-

лы являются реализациями гауссовских случайных величин.

В *бинарной модели* множество значений состояния $\theta \in \{\theta_0, \theta_1\}$, где $\theta_0 < \theta_1$, в простом случае $\theta \in \{0, 1\}$. Распределение вероятностей характеризуется одним числом — вероятностью состояния 1. Частные сигналы принимают значение 1 или 0 в соответствии с вероятностями $P(s = 1 | \theta = 1) = q$ и $P(s = 0 | \theta = 0) = q'$. Частный сигнал называется *симметричным*, если $q = q'$. В этом случае параметр q называется точностью сигнала (обычно считается, что $q > 1/2$).

Правило Байеса в случае бинарной модели удобно представить в виде отношения правдоподобия:

$$\frac{P(\theta = 1|s)}{P(\theta = 0|s)} = \frac{P(s|\theta = 1)}{P(s|\theta = 0)} \cdot \frac{P(\theta = 1)}{P(\theta = 0)}.$$

В бинарной модели сигнал приводит к ограниченному изменению представлений. Если субъективным представлением состояния 1 является μ , то его дисперсия равна $\mu(1 - \mu)$, т. е. новая информация может увеличить дисперсию и уменьшить уверенность в полученной оценке. В случае последовательности сигналов $\{s_t\}$ с одинаковой точностью q правило Байеса применяется последовательно. При $t \rightarrow \infty$ представление агента $\mu_t \rightarrow \theta$, причем дисперсия оценки стремится к нулю.

В *гауссовской модели* состояние природы является реализацией случайной величины, имеющей нормальное распределение (нормальной случайной величины или нормально распределенного случайного вектора). В простом случае $\theta \sim N(m, \sigma_\theta^2)$. Точность распределения обозначается как $\rho_\theta = 1/\sigma_\theta^2$. Частный сигнал $s = \theta + \epsilon$ имеет нормальное распределение, где шум $\epsilon \sim N(0, 1/\rho_\epsilon)$. После получения сигнала s обновленное распределение θ остается нормальным $N(m', 1/\rho')$, его параметры определяются как

$$\rho' = \rho + \rho_\epsilon,$$

$$m' = \alpha s + (1 - \alpha)m, \text{ где } \alpha = \rho_\epsilon/\rho'.$$

Следовательно, в простой гауссовской модели научения наблюдения приводят к повышению точности представлений индивида (уменьшению дисперсии), а апостериорное ожидание θ представляет собой взвешенную сумму сигнала и априорного ожидания (с отражающими точность весами).

Таким образом, в базовых моделях научения агент, получая последовательность информативных сигналов, приходит к истинной оценке состояния природы. Рассмотрим теперь вопросы формирования различных информационных сообщений в приведенных моделях.

3.3. Формирование различных информационных сообществ

Возникает вопрос: могут ли байесовские агенты⁴ прийти к разным убеждениям, если они получают одну и ту же информацию (одинаковую последовательность сигналов) о состоянии природы?

Наличие когнитивных ограничений

Агенты могут прийти к разным убеждениям, если *априорные представления агентов различны и их память ограничена*. В работе [25] некоторые из получаемых агентами сигналов относительно состояния природы могут быть неоднозначными и могут быть истолкованы по-разному в зависимости от текущих представлений. В частности, агент в момент времени t может получить информативные относительно состояния природы сигналы a или b , или неоднозначный сигнал ab , который он вынужден из-за ограничений памяти интерпретировать и сохранять в памяти как a или b . Агент формирует убеждение λ относительно состояния природы по правилу Байеса и интерпретирует поступающий сигнал ab как a , если $\lambda_{t-1} > 1/2$, или как b , если $\lambda_{t-1} < 1/2$ (проявляя тем самым склонность к подтверждению своей точки зрения). Если вероятность появления неоднозначных сигналов существенна, то агенты, придерживающиеся разных априорных представлений (например, первый агент считает более вероятным состояние A , а второй — B), в итоге с положительной вероятностью придут к противоположным убеждениям относительно состояния природы.

Наличие когнитивных искажений

В работе [26] моделируется эффект склонности агента к подтверждению своей точки зрения на базе бинарной модели. Для моделирования склонности к подтверждению своей точки зрения вводится предположение: если агент получает сигнал, противоречащий его убеждению о состоянии мира, то он с вероятностью $q > 0$ неверно интерпретирует (воспринимает) этот сигнал как подтверждающий его убеждение. При этом он не подозревает о неправильной интерпретации сигнала и действует как обычный байесовский агент. Доказано, что в случае склонности к подтверждению своего мнения (выражаемого параметром q) агент может в итоге прийти к неверному убеждению, несмотря на воспринимаемую им бесконечную последовательность информативных сигналов. Соответственно, индивидуальные вероятности q могут привести к разногласиям агентов в обществе.

Сложная модель представлений: дополнительные факторы и вопросы

В работе [27] показано, что в некоторых случаях усиление разногласий индивидов при наблюдении одних и тех же данных является рациональным, если индивиды делают *разные предположения о дополнительных факторах, влияющих на зависимости между рассматриваемыми величинами: состоянием мира и полученным сигналом* (т. е. представления индивида о проблемной ситуации являются более богатыми, чем индивидов в классических моделях научения). С этим же аспектом связана работа [28], в которой рассматривается роль убеждений относительно «вспомогательного» вопроса, не имеющего прямого отношения к «основному» вопросу, но влияющего на интерпретацию сигналов, связанных с основным вопросом. Эти убеждения могут привести к поляризации представлений по основному вопросу. С некоторой натяжкой (в силу специфичности функции полезности агентов) к этому классу моделей можно отнести модель [29], в которой состояние природы $\theta = (\alpha, \beta)$ является реализацией случайной величины $\tilde{\theta} = (\tilde{\alpha}, \tilde{\beta})$, $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta} \in \{0, 1\}$, а агенты с разными частными сигналами об α , получая общие сигналы о β , приходят к различным представлениям относительно оптимальных действий.

Различные априорные представления

В работе [30] рассматривается поляризация представлений байесовских индивидов в ситуации коллективного выбора: существует некоторая проблема, зависящая от состояния мира и требующая решения (выбора некоторой политики). Избиратели в зависимости от своих представлений о состоянии мира голосуют за ту или иную альтернативу, после чего наблюдают степень успешности результата выбора (результат выбранной политики) и корректируют свои представления относительно состояния природы. Поляризация исключена, если и только если условная плотность результата выбора (относительно состояния мира и выбранной политики) обладает свойством монотонности отношения правдоподобия (англ. *Monotone Likelihood Ratio Property*, MLRP). В противном случае поляризацию исключить нельзя даже в случае небольших *различий в априорных представлениях*: показаны соответствующие примеры для дискретных и непрерывных индикаторов успешности выбранной политики.

Различные априорные представления относительно условных распределений сигналов

Агенты также могут прийти к разногласиям, если различны их априорные представления относительно состояния природы, а также *представления*

⁴ Хотя в этом подразделе рассматриваются ситуации с двумя агентами, рассуждения применимы и для множества агентов двух типов.



относительно условных распределений сигналов. Рассмотрим подробнее этот аспект.

В работе [31] рассматривается модель научения с двумя байесовскими агентами, с номерами 1 и 2, которые наблюдают последовательность сигналов внешней среды $\{s_t\}_{t=0}^n$, где $s_t \in \{a, b\}$. Состояние природы задается параметром $\theta \in \{A, B\}$ (истинным является состояние A), а априорное представление агента i относительно вероятности того, что $\theta = A$, задается параметром $\pi^i \in (0, 1)$. Агенты считают, что для заданного параметра θ поступающие сигналы являются независимыми и одинаково распределенными: $P(s_t = a | \theta = A) = p_A$ и $P(s_t = b | \theta = B) = p_B$. Обычно эти вероятности считаются известными, но в действительности возможна неопределенность относительно значения вероятности p_θ ($\theta \in \{A, B\}$), которая задается для каждого агента i его распределением субъективных вероятностей F_θ^i .

Рассмотрим бесконечную последовательность сигналов $s \equiv \{s_t\}_{t=1}^\infty$, и пусть S — множество всех таких последовательностей. Апостериорное убеждение агента i относительно значения параметра θ при условии наблюдения последовательности сигналов $\{s_t\}_{t=1}^n$

$$\phi_n^i(s) \equiv P^i(\theta = A | \{s_t\}_{t=1}^n).$$

Апостериорная вероятность в силу того, что сигналы независимы и одинаково распределены, зависит от числа сигналов $s_t = a$ к моменту времени n :

$$r_n(s) \equiv \#\{t \leq n | s_t = a\}.$$

Согласно усиленному закону больших чисел $r_n(s)/n$ сходится с вероятностью, равной единице, к некоторому значению частоты $\rho(s) \in [0, 1]$ для всех агентов. Определим множество $\bar{S} \equiv \{s \in S : \exists \lim_{n \rightarrow \infty} r_n(s)/n\}$. Тогда

$$\phi_n^i(s) = \frac{1}{1 + \frac{1 - \pi^i P^i(r_n | \theta = B)}{\pi^i P^i(r_n | \theta = A)}},$$

где $P^i(r_n | \theta)$ — вероятность наблюдения ровно r_n сигналов $s_t = a$ в последовательности из n первых сигналов согласно F_θ^i .

Оказывается [31], что если для каждого F_θ^i вероятность некоторого $\hat{p}_\theta > 1/2$ равна единице, т. е. $F_\theta^i(\hat{p}_\theta) = 1$ и для $p < \hat{p}_\theta$ $F_\theta^i(p) = 0$, то для каждого

$i = 1, 2$: $P^i(\lim_{n \rightarrow \infty} \phi_n^i(s) = 1 | \theta = A) = 1$ (асимптотическое научение); $P^i(\lim_{n \rightarrow \infty} |\phi_n^1(s) - \phi_n^2(s)| = 0) = 1$ (асимптотическое согласие). Таким образом, если индивиды знают условные распределения сигналов (которые одинаковы для них), то они узнают истинное состояние природы из наблюдений (почти, наверное, при $n \rightarrow \infty$) и придут к консенсусу относительно состояния θ в случае наблюдения одинаковой последовательности сигналов. Если предельная частота сигнала a равна $\hat{p}_A$, то индивид считает, что $\theta = A$, если она равна $1 - \hat{p}_B$, то $\theta = B$. Вероятность всех остальных случаев для агента равна нулю, и если индивиды для достаточно больших $n < \infty$ наблюдают ρ (частоту сигналов a), отличающуюся от $\hat{p}_A$ и $1 - \hat{p}_B$, то они приписывают это отклонение изменчивости выборки (sampling variation). Однако по мере роста выборки (при $n \rightarrow \infty$) становится сложно объяснить изменчивостью выборки частоту сигнала, отличающуюся от $\hat{p}_A$ и $1 - \hat{p}_B$. Поэтому естественно разрешить индивидам задавать положительные (хотя и небольшие) вероятности всем возможным значениям p_θ . Такое допущение ведет к самым различным последствиям, что иллюстрирует

Теорема 1. Предположим, что для каждого агента i и значения параметра θ функция распределения F_θ^i имеет непрерывную, ненулевую и конечную плотность f_θ^i на отрезке $[0, 1]$, тогда (для $s \in \bar{S}$): асимптотическое научение отсутствует, т. е. $P^i(\lim_{n \rightarrow \infty} \phi_n^i(s) \neq 1 | \theta = A) = 1$; асимптотическое согласие отсутствует (есть разногласия между агентами), т. е. $P^i(\lim_{n \rightarrow \infty} |\phi_n^1(s) - \phi_n^2(s)| \neq 0) = 1$ всякий раз, когда $\pi^1 \neq \pi^2$ и $F_\theta^1 = F_\theta^2$ для каждого значения $\theta \in \{A, B\}$ [31, 32].

Фактически научение в условиях такого типа неопределенности может привести к усилению разногласий двух байесовских агентов после получения одной и той же бесконечной последовательности сигналов, что невозможно в рамках стандартной модели. Этот результат сформулирован в следующей теореме.

Теорема 2. Предположим, что для каждого агента i и значения параметра θ функция распределения F_θ^i имеет непрерывную, ненулевую и конечную плотность f_θ^i на отрезке $[0, 1]$, тогда существует такое $\epsilon > 0$, что $|R^1(\rho) - R^2(\rho)| > \epsilon$ для каждого значения

частоты $\rho \in [0, 1]$ ($R^1(\rho) \equiv f_B^1(1 - \rho)/f_A^1(\rho)$ — отношение правдоподобия). Тогда существует такое открытое множество априорных представлений π^1 и π^2 , что для всех сигналов $s \in \bar{S}$ выполняется неравенство $\lim_{n \rightarrow \infty} |\phi_n^1(s) - \phi_n^2(s)| > |\pi^1 - \pi^2|$, в частности, $P(\lim_{n \rightarrow \infty} |\phi_n^1(s) - \phi_n^2(s)| > |\pi^1 - \pi^2|) = 1$ [31].

Таким образом, даже небольшие различия в априорных представлениях агентов приводят к различным интерпретациям сигналов, и если первоначальное несоответствие является небольшим, то после почти любой последовательности сигналов разногласия между агентами будут нарастать.

В рассмотренных выше моделях научения и формирования информационных сообществ сетевое взаимодействие между агентами отсутствует. В общем же случае индивиды — члены социума — взаимодействуют между собой в рамках социальной сети, соответственно, действия соседей в сети могут предоставить агенту дополнительную информацию о состоянии природы. Такой вид взаимодействия будет рассмотрен во второй части обзора.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В первой части обзора кратко изложена концепция информационного сообщества и рассмотрены релевантные модели формирования представлений индивидов, которые стремятся устранить неопределенность относительно заданного(-ых) вопроса(-ов), формируя в итоге информационные сообщества. Описаны подходы к моделированию обновления представлений индивидов и влияние различных факторов на достижение истинных представлений и формирование в сети одного или нескольких различных информационных сообществ. В обществе с байесовскими агентами, как правило, достигается истинное представление относительно исследуемого вопроса, и для возникновения различных информационных сообществ необходимо ослабить требование рациональности индивидов и/или ввести допущения о различной информированности индивидов.

Во второй части обзора будут рассмотрены вопросы формирования информационных сообществ в сетевых моделях с байесовскими агентами, а также с наивными («эвристическими») индивидами. Эмпирическим исследованиям, связанным с вопросами существования информационных сообществ в реальных социальных сетях, и их особенностям, будет посвящена третья, заключительная часть обзора.

ЛИТЕРАТУРА

1. Bakshy, E., Messing, S., Adamic, L.A. Exposure to ideologically diverse news and opinion on Facebook // Science. — 2015. — Vol. 348, no. 6239. — P. 1130—1132.
2. Kumar, S., Hamilton, W.L., Leskovec, J., Jurafsky, D. Community interaction and conflict on the web // Proceedings of the 2018 World Wide Web Conference. — 2018. — P. 933—943.
3. Garimella, K., De Francisci Morales, G., Gionis, A., Mathioudakis, M. Political Discourse on Social Media: Echo Chambers, Gatekeepers, and the Price of Bipartisanship // ArXiv180101665 Cs. — 2018.
4. Barberá, P., Jost, J.T., Nadler, J., et al. Tweeting from Left to Right: Is Online Political Communication More than an Echo Chamber? // Psychological Science. — 2015. — Vol. 26, iss. 10. — P. 1531—1542.
5. Бызов Л.Г., Губанов Д.А., Козицин И.В., Чхартишвили А.Г. Идеальный политик для социальной сети: подход к анализу идеологических предпочтений пользователей // Проблемы управления. — 2020. — № 4. — С. 15—26. [Byzov, L.G., Gubanov, D.A., Kozitsin, I.V., Chkhartishvili, A.G. Perfect Politician for Social Network: An Approach to Analysis of Ideological Preferences of Users // Control Sciences. — 2020. — No. 4. — P. 15—26 (In Russian)]
6. McPherson, M., Smith-Lovin, L., Cook, J.M. Birds of a Feather: Homophily in Social Networks // Annu. Rev. Sociol. — 2001. — Vol. 27, no. 1. — P. 415—444.
7. Kadushin, C. Understanding social networks: theories, concepts, and findings. — New York: Oxford University Press, 2012. — 252 p.
8. Myers, D.G. Social Psychology. — N.-Y.: McGraw-Hill. — 1999.
9. De Groot, M.H. Reaching a Consensus // Journal of American Statistical Association. — 1974. — No. 69. — P. 118—121.
10. Deffuant, G., Neau, D., Amblard, F., Weisbuch, G. Mixing Beliefs among Interacting Agents // Advances in Complex Systems. — 2000. — Vol. 03. — P. 87—98.
11. Hegselmann, R., Krause, U. Opinion Dynamics under the Influence of Radical Groups, Charismatic Leaders, and Other Constant Signals: A Simple Unifying Model // Networks and Heterogeneous Media. — 2015. — Vol. 10, no. 3. — P. 477—509.
12. Губанов Д.А., Новиков Д.А., Чхартишвили А.Г. Социальные сети: модели информационного влияния, управления и противоборства. 3-е изд., перераб. и дополн. — М.: МЦНМО, 2018. — 224 с. [Gubanov, D.A., Novikov, D.A., Chkhartishvili, A.G. Social Networks: Models of information influence, control and confrontation. — Cham, Switzerland: Springer International Publishing, 2019. — 158 p.]
13. Губанов Д.А., Петров И.В., Чхартишвили А.Г. Многомерная модель динамики мнений в социальных сетях: индексы поляризации // Проблемы управления. — 2020. — № 3. — С. 26—33. [Gubanov, D.A., Petrov, I.V., Chkhartishvili, A.G. Multidimensional Model of Opinion Dynamics in Social Networks: Polarization Indices // Control Sciences. — 2020. — No. 3. — S. 26—33 (In Russian)]
14. Ожегов С.И., Шведова Н.Ю. Толковый словарь русского языка. — М.: ИТИ Технологии. — 2006. — 944 с. [Ozhegov, S.I., Shvedova, N.Yu. Tolkovyi slovar' russkogo yazyka. — M.: ITI Tekhnologii. — 2006. — 944 s. (In Russian)]
15. Merriam-Webster Dictionary (<https://www.merriam-webster.com/dictionary/community>).
16. Girvan, M., Newman, M.E.J. Community structure in social and biological networks // Proceedings of the national academy of sciences. — 2002. — Vol. 99, no. 12. — P. 7821—7826.
17. Губанов Д.А., Чхартишвили А.Г. О понятии информационного сообщества в социальной сети // Матер. 13-й мультиконференции по проблемам управления. — 2020. [Gubanov, D.A., Chkhartishvili, A.G. O ponyatii informatsionnogo soobshchestva v sotsial'noi seti // Materialy 13-i mul'tikonferentsii po problemam upravleniya. — 2020 (In Russian)].



18. Новиков Д.А. Теория управления организационными системами. — Москва: МПСИ. — 2005. — 584 с. [Novikov, D.A. Teoriya upravleniya organizatsionnymi sistemami. — Moskva: MPSI, 2005. — 584 s. (In Russian)]
19. Simon, H.A. Rationality as Process and as Product of Thought // American Economic Review. — 1978. — Vol. 68, no. 2. — P. 1—16.
20. Tversky, A., Kahneman, D. Judgement Under Uncertainty: Heuristics and Biases // Science. — 1974. — No. 185. — P. 1124—1131.
21. Kahneman, D., Tversky, A. Prospect Theory: An Analysis of Decision under Risk // Econometrica. — 1979. — Vol. XLVII. — P. 263—291.
22. Новиков Д.А. Модели динамики психических и поведенческих компонент деятельности в коллективном принятии решений // Управление большими системами. — М.: ИПУ РАН. — 2020. — Вып. 85. — С. 206—237. — DOI: <https://doi.org/10.25728/ubs.2020.85.9> [Novikov, D.A. Dynamics models of mental and behavioral components of activity in collective decision-making // Large-Scale Systems Control. — 2020. — Iss. 85. — P. 206—237 (In Russian)]
23. Dasaratha, K., He, K. Network Structure and Naive Sequential Learning // arXiv:1703.02105 [q-fin.EC]. — 2019.
24. Li, W., Tan, X. Locally Bayesian learning in networks // Theoretical Economics. — 2020. — No. 1 (15). — P. 239—278.
25. Fryer, R., Harms, P., Jackson, M. National Bureau of Economic Research. Updating Beliefs with Ambiguous Evidence: Implications for Polarization. — Cambridge, MA. — 2013.
26. Rabin, M., Schrag, J.L. First Impressions Matter: A Model of Confirmatory Bias // The Quarterly Journal of Economics. — 1999. — No. 1 (114). — P. 37—82.
27. Jern, A., Chang, K.K., Kemp, C. Belief polarization is not always irrational // Psychological Review. — 2014. — No. 2 (121). — P. 206—224.
28. Benoot, J., Dubra, J. Apparent bias: what does attitude polarization show? // International Economic Review. — 2019. — No. 4 (60). — P. 1675—1703.
29. Andreoni, J., Mylovanov, T. Diverging Opinions // American Economic Journal: Microeconomics. — 2012. — No. 1 (4). — P. 209—232.
30. Dixit, A.K., Weibull, J.W. Political Polarization // Proceedings of the National Academy of Sciences. — 2007. — No. 18 (104). — P. 7351—7356.
31. Acemoglu, D., Ozdaglar, A. Opinion Dynamics and Learning in Social Networks // Dynamic Games and Applications. — 2011. — No. 1 (1). — P. 3—49.
32. Acemoglu, D., Chernozhukov, V., Wold, M. Fragility of Asymptotic Agreement Under Bayesian learning: Fragility of Asymptotic Agreement // Theoretical Economics. — 2016. — No. 1 (11). — P. 187—225.

Статья представлена к публикации членом редколлегии чл.-корр. РАН Д.А. Новиковым.

Поступила в редакцию 26.08.2020, после доработки 09.11.2020.
Принята к публикации 24.11.2020.

Губанов Дмитрий Алексеевич — канд. техн. наук,
✉ dmitry.a.g@gmail.com,

Петров Илья Владимирович — аспирант,
✉ zyxzy@protonmail.ch,

Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН,
г. Москва.

INFORMATION COMMUNITIES IN SOCIAL NETWORKS. Part I: From Concept to Mathematical Models

D.A. Gubanov¹ and I.V. Petrov²

V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences, Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia

¹✉ dmitry.a.g@gmail.com, ²✉ zyxzy@protonmail.ch

Abstract. This survey covers the literature related to information communities in mutually complementary areas: the formation of information communities in social networks and some applied aspects of identifying and analyzing information communities in social networks. First, mathematical models describing the formation of information communities under uncertainty are considered. Among these models, the most relevant ones are the mathematical models of opinion/belief dynamics reflecting any changes in the beliefs of nodes under the influence of other network nodes and significant effects (in particular, the preservation of differences in beliefs and the divergence of beliefs) that lead to the formation of information communities. In part I of the survey, the concept of an information community is first presented. Then information processing and decision-making by an agent in a social network under external uncertainty are outlined. The factors influencing the formation of information communities in the network are highlighted, and the basic models of Bayesian agents and their extensions are investigated.

Keywords: social networks, information community, formation of information communities, analysis of information communities, belief formation.

Funding: This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research, project no. 19-17-50225.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ИГРЫ ПРЕСЛЕДОВАНИЯ С НЕСКОЛЬКИМИ ПРЕСЛЕДОВАТЕЛЯМИ И ОДНИМ УКЛОНЯЮЩИМСЯ¹

В.Н. Афанасьев, А.А. Семион

Аннотация. Рассматривается дифференциальная игра, в которой участвуют несколько игроков. Предполагается, что имеется некоторое пространство, в которое проникает некий игрок-злоумышленник, одновременно с этим появляются несколько игроков, задача которых заключается в том, чтобы перехватить злоумышленника. Злоумышленник при обнаружении преследователей пытается уклониться от встречи с ними. Динамика каждого объекта описывается стационарной линейной системой. С введением квадратического функционала и при рассмотрении задачи дифференциальной игры как проблемы оптимального управления решаются две подзадачи: первая — построение стратегии преследования злоумышленника с несколькими игроками, имеющими равную полную информацию об игре, вторая — при неполной информации о злоумышленнике, активно противодействующем получению преследователями полной информации о себе. Приведены результаты моделирования. Полученные результаты рассмотренной задачи дифференциальной игры с нулевой суммой могут быть полезными для исследования конечной стадии преследования, в которой участвуют несколько преследующих и один уклоняющийся.

Ключевые слова: дифференциальные игры, линейная динамика, оптимальное управление с обратной связью, функции Ляпунова, уравнение Риккати.

ВВЕДЕНИЕ

Теория дифференциальных игр как направление математической теории управления тесно связана с математической теорией оптимальных процессов, теорией игр, вариационным исчислением и теорией дифференциальных уравнений. Проблемы теории дифференциальных игр имеют своим источником такие актуальные прикладные задачи, как преследование одного управляемого объекта другим, приведение управляемого объекта в заданное состояние при неизвестных заранее возмущающих силах, задачи военного характера, экономические задачи и др. Становление теории дифференциальных игр связано с именами R.P. Isaacs [1, 2], J.V. Breakwell [3], Л.С. Понтрягина [4, 5], Е.Ф. Мищенко [6], Б.Н. Пшеничного [7] и многих

других зарубежных и советских ученых. С конца 70-х годов прошлого века появилась своего рода самостоятельная часть прикладной теории дифференциальных игр, в которой рассматриваются задачи преследования, задачи убегания, задачи защиты цели [8—19]. В работах Л.С. Понтрягина и Е.Ф. Мищенко [4—6] получены достаточные условия завершения преследования в линейных дифференциальных играх. В исследованиях Н.Н. Красовского, А.И. Субботина [8], их учеников и сотрудников изучаются позиционные дифференциальные игры, для которых сформулированы задачи сближения и уклонения, предложены реализуемые на ЭВМ процедуры управления. Некоторое подведение итогов развития теории дифференциальных игр в приложении к конфликтно-управляемым системам на середину 70-х годов прошлого века содержится в книге Л.А. Петросяна [9]. Существенное развитие теория дифференциальных игр в приложении к задачам «преследования» претерпела вследствие работ А.А. Меликяна, Л.С. Вишневецкого, Н.В. Овакимян [10—13], В.С. Пацко,

¹ Работа выполнена при поддержке Российского Фонда Фундаментальных исследований (Проект 19-8-00535).



С.С. Кумкова [14, 15]. На 18-м и 19-м международных конгрессах по автоматическому управлению (International Federation of Automatic Control World Congress, IFAC WC) имелись отдельные секции, на которых рассматривались доклады, связанные с теорией дифференциальных игр и практикой применения этой теории к задачам управления в конфликтных состояниях [15–19].

В настоящей статье рассматривается дифференциальная игра, в которой участвуют несколько игроков. Предполагается, что имеется некоторое пространство, в которое проникает игрок-злоумышленник, одновременно с этим появляются несколько игроков, задача которых заключается в том, чтобы перехватить злоумышленника. Злоумышленник при обнаружении преследователей пытается уклониться от встречи с ними. Динамика каждого объекта описывается стационарной управляемой линейной системой. Отметим, что такая постановка задачи игры достаточно популярна. Так, например, в публикациях [19, 20] представлены разработанные и проанализированные распределенные игровые стратегии для подобных задач. Предлагаемые решения основаны на интеграции кооперативной теории управления и дифференциальной теории игр. В этих работах показано, что предлагаемые игровые стратегии с нулевой суммой представляют собой решения Нэша по отношению к введенным функционалам качества, оценивающим действия игроков. В настоящей статье с введением квадратического функционала качества задача дифференциальной игры рассматривается как проблема оптимального управления [21], т. е. дифференциальной игры с нулевой суммой. Решаются подзадачи построения стратегии преследования злоумышленника с несколькими игроками, имеющими равную полную информацию об игре, и при неполной информации о злоумышленнике, активно противодействующем получению преследователям полной информации о себе. Приведены результаты моделирования. Исследуемая игра с нулевой суммой может быть полезна для исследования конечной стадии преследования, в которой участвуют несколько преследующих объектов и один уклоняющийся.

Материал статьи структурирован следующим образом. В § 1 осуществлена постановка задачи, в которой несколько преследователей и один злоумышленник. Преследователи пытаются поймать злоумышленника, в то время как последний пытается скрыться от них. Каждый из игроков способен обнаружить другого игрока в своем радиусе чувствительности. Таким образом, игра представляет собой игру с распределенной информацией. Сделаны предположения, исключающие случаи, когда злоумышленник не наблюдает ни одного пре-

следователя, или преследователи не наблюдают ни один объект в своем радиусе чувствительности.

Для оценки действий преследователей и злоумышленника, уклоняющегося от встречи с преследователями, в задаче с нулевой суммой водится общий функционал качества, который преследователи стремятся минимизировать, а уклоняющийся злоумышленник — максимизировать.

В § 2 рассматривается классическая дифференциальная игра, представляющая собой дифференциальную игру с глобальной информацией. Результат такой игры основан на теории оптимального управления. Доказывается теорема об условиях существования решений дифференциальной игры с нулевой суммой. В этом же разделе рассматривается дифференциальная игра с распределенной информацией.

В § 3 рассматривается ситуация, когда уклоняющийся злоумышленник создает искусственные помехи с целью помешать преследователям и получить преимущество в игре. Это означает, что преследователи будут получать информацию о положении уклоняющегося с шумами. А значит, и управления, построенные для преследователей, будут содержать этот шум. Таким образом, траектории, по которым преследователи будут наступать уклоняющегося, являются субоптимальными. К тому же, злоумышленник строит свою стратегию относительно всех преследователей, которых он «видит», т. е. старается убежать от центра масс всех преследователей, а так как их положения являются следствием воздействия шумов, то и траектория злоумышленника будет содержать шумовую составляющую.

В § 4 представлены результаты математического моделирования задач дифференциальной игры «преследования» в различных постановках, рассмотренных в предыдущих разделах статьи.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В рассматриваемой задаче число игроков равно $n + 1$: n преследователей и один злоумышленник, уклоняющийся от преследователей. Каждый из игроков способен обнаружить другого игрока в своем радиусе чувствительности. Таким образом, игра является игрой с распределенной информацией. Сделаем несколько предположений.

Предположение 2.1. Пусть наблюдение между любой парой «преследователь — злоумышленник» взаимное, а наблюдение между двумя преследователями не обязательно взаимное.

Предположение 2.2. Пусть существует по крайней мере одна пара «преследователь — злоумышленник», такая что каждый член этой пары наблюдает другого и каждый преследователь наблюдает

по крайней мере одного другого партнера по преследованию.

Без этих предположений в рассматриваемой задаче возможны следующие нежелательные случаи: злоумышленник не наблюдает ни одного преследователя, или преследователи не наблюдают ни злоумышленника, ни одного из преследователей.

Предположим, что дифференциальная игра «задача преследования» имеет место в m -мерном Евклидовом пространстве, где положения игроков могут быть записаны через векторы: $y(t) = [y_1(t), y_2(t), \dots, y_m(t)]^T$, т. е. $y(t) \in R^m$, — для злоумышленника и $x_j(t) = [x_{j1}(t), x_{j2}(t), \dots, x_{jm}(t)]^T$, т. е. $x_j(t) \in R^m$, где $j = 1, 2, \dots, n$, — для преследователей соответственно. Введем вектор $z_j(t) \in R^m$

$$z_j(t) = x_j(t) - y(t), \quad j = 1, 2, 3, \dots, n,$$

значение которого соответствует расстоянию между злоумышленником и j -м преследователем. Этот вектор определяет «радиус чувствительности» каждого из игроков.

В более компактном виде, если $x^T = [x_1^T, x_2^T, \dots, x_n^T]$ и $z^T = [z_1^T, z_2^T, \dots, z_n^T]$, то

$$z(t) = x(t) - \mathbf{1}_n \otimes y(t).$$

Здесь $\mathbf{1}_n$ — вектор-столбец размера $n \times 1$ с элементами, равными 1, и символ $\otimes$ обозначает произведение Кронекера. В рассматриваемых далее задачах $t \in [t_0, t_f]$.

Предположение 2.3. Сформулируем цели дифференциальной игры. Пусть имеется некоторое положительное число $\varepsilon < 1$ такое, что:

— если в некоторый момент t_1 , $t_0 \leq t_1 \leq t_f$, в силу действий одного или нескольких преследователей выполняется условие $\|z_j(t_1)\|^2 \leq \varepsilon$, то игра останавливается, так как в результате преследования осуществлен перехват злоумышленника. Это является целью игры для преследователей;

— если же при любом t , где $t_0 \leq t \leq t_f$, $\|z(t)\|^2 > \varepsilon$, т. е. условие перехвата не выполняется, то при $t = t_f$ игра останавливается по истечении назначенного времени окончания игры. Это является целью игры для злоумышленника.

Пусть динамика дифференциальной игры описывается обыкновенным линейным дифференциальным уравнением [9, 10]

$$\frac{d}{dt} z(t) = u_p(t) - \mathbf{1}_n \otimes u_e(t), \quad (1)$$

где $u_p(t) = \frac{d}{dt} x(t)$ — вектор скоростей преследователей и $u_e(t) = \frac{d}{dt} y(t)$ — вектор скорости злоумышленника.

В случае игры с ненулевой суммой для системы (1) можно записать два функционала качества [19] — преследователи минимизируют первый, а злоумышленник максимизирует второй функционал качества:

$$J_p(z(\cdot), u_p(\cdot)) = \frac{1}{2} k_{pf} z^T(t_f) z(t_f) + \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} \begin{bmatrix} z(t) \\ u_p(t) \\ \mathbf{1}_n \otimes u_e(t) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} q_p I & 0 & 0 \\ 0 & r_p I & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z(t) \\ u_p(t) \\ \mathbf{1}_n \otimes u_e(t) \end{bmatrix} dt \quad (2)$$

— для группы из n преследователей,

$$J_e(z(\cdot), u_e(\cdot)) = -\frac{1}{2} k_{ef} z^T(t_f) z(t_f) + \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} \begin{bmatrix} z(t) \\ u_p(t) \\ \mathbf{1}_n \otimes u_e(t) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} -q_e I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r_e I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z(t) \\ u_p(t) \\ \mathbf{1}_n \otimes u_e(t) \end{bmatrix} dt \quad (3)$$

— для уклоняющегося злоумышленника, где k_{pf} , k_{ef} , q_p , q_e , r_p , r_e — положительные.

Так как первое слагаемое функционала (2) характеризует конечную «стоимость» дифференциальной игры, а параметр ε определяет момент успешного перехвата, т. е. выполнение условия $\|z(t_1)\|^2 \leq \varepsilon$, $t_0 \leq t_1 \leq t_f$ то с позиции преследователей невыполнение задачи перехвата должно оцениваться высоко. Учитывая последнее, в случае если $\varepsilon < 1$, параметр k_{pf} может быть назначен в виде $k_{pf} = 1/\varepsilon$. Для убегающего злоумышленника значение первого слагаемого функционала (3) оценивающего «стоимость» его игры в конечный момент времени, должно быть низким, т. е. параметр k_{ef} может быть назначен из условия $k_{ef} = \varepsilon$.

Функционалы качества, записанные выше, означают, что преследователи пытаются минимизировать взвешенные расстояния между ними и убегающим злоумышленником с минимальной затраченной энергией, в то время как убегающий злоумышленник стремится максимизировать взвешенные расстояния между ним и преследователями, затрачивая как можно меньшую энергию.

В отличие от работ [19, 20], в настоящей статье рассматривается дифференциальная игра с нулевой суммой. Предполагается, что существует общий функционал качества, такой что n преследователей стремятся минимизировать его, а злоумыш-



ленник, убегающий от преследования, — максимизировать его. Рассматривая дифференциальную игру как проблему оптимального управления [21], объединим функционалы (2) и (3):

$$J_{\Sigma}(z(\cdot), u_p(\cdot), u_e(\cdot)) = J_p(z(\cdot), u_p(\cdot)) - J_e(z(\cdot), u_e(\cdot)) = \\ = \frac{1}{2} z^T(t_f) F z(t_f) + \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} \{z^T(t) Q z(t) + u_p^T(t) R u_p(t) - \\ - (\mathbf{1}_n \otimes u_e(t))^T P (\mathbf{1}_n \otimes u_e(t))\} dt, \quad (4)$$

где $F = [k_{pf} + k_{ef}] I_n$, $Q = [q_p + q_e] I_n$, $R = r_p I_n$, $P = r_e I_n$, k_{pf} , k_{ef} , q_p , q_e , r_p , r_e — положительные, I_n — единичная матрица размерности $n \times n$.

Существование оптимальных управлений рассматриваемой дифференциальной игры устанавливается положительной определенностью матриц F , Q , R и P [22]. Как будет показано ниже, назначение параметров r_p и r_e таких, чтобы выполнялось условие $r_p < nr_e$, соответствует случаю «сильных» преследователей, когда преследователи превосходят убегающего по своим динамическим возможностям.

Если игра представляется игрой с распределенной информацией, то для математического описания ситуаций или этапов дифференциальной игры введем, по аналогии с работой [19], «матрицу чувствительности»

$$S(t) = \begin{bmatrix} 1 & s_{01}(t) & s_{02}(t) & \dots & s_{0n}(t) \\ s_{10}(t) & 1 & s_{12}(t) & \dots & s_{1n}(t) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{n0}(t) & s_{n1}(t) & s_{n2}(t) & \dots & 1 \end{bmatrix}, \quad (5)$$

где индекс 0 соответствует уклоняющемуся злоумышленнику, а индекс $1 \sim n$ соответствует n преследователям. Параметр $s_{ij}(t)$, $t \in [t_0, t_f]$, $i, j = 0, 1, 2, \dots, n$ ($0 \leq s_{ij}(t) \leq 1$), означает степень важности для i -го игрока информации, используемой им при выполнении задачи дифференциальной игры, о состоянии j -го игрока в момент времени t . В случае, если $0 < s_{ij}(t) \leq 1$, то i -й игрок наблюдает j -го игрока, и если $s_{ij}(t) = 0$, то i -й игрок не наблюдает j -го игрока. Поскольку каждый из игроков всегда наблюдает самого себя, то диагональные элементы матрицы (5) всегда постоянны и равны единице. Таким образом, на отдельных этапах информация, используемая игроками для выполнения задачи дифференциальной игры, может меняться, что отображается в соответствующих управляющих воздействиях злоумышленника и преследователей. Способы «определения степени важности», т. е. задача нахождения параметров матрицы $S(t)$ в зависимости от условий игры, в данной статье не

рассматриваются. Функционал (4) для дифференциальной игры с нулевой суммой и распределенной информацией будет записан в п. 2.2.

В случае игры с глобальной информацией матрица чувствительности будет постоянной, а ее элементы — равны единице.

2. КЛАССИЧЕСКАЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ИГРА И ИГРА С РАСПРЕДЕЛЕННОЙ ИНФОРМАЦИЕЙ

2.1. Классическая дифференциальная игра

Классическая дифференциальная игра представляет собой дифференциальную игру с глобальной информацией. Результат такой игры основан на теории оптимального управления, задачей которой является синтез таких управлений $u_p^0(t)$ и $u_e^0(t)$, при которых

$$J_{\Sigma}(z, u_p^0(t), u_e(t)) \leq J_{\Sigma}(z, u_p^0(t), u_e^0(t)) \leq \\ \leq J_{\Sigma}(z, u_p(t), u_e^0(t)).$$

Для классической дифференциальной игры с несколькими преследователями и линейной обратной связью результат представляется следующей теоремой.

Теорема 3.1. *Дана дифференциальная игра с n преследователями и одним уклоняющимся от преследования злоумышленником с динамикой (1) и функционалом (4). Игра имеет цену при условии $r_p < nr_e$, если стратегии игроков определяются выражениями*

$$u_p^0(t) = -\frac{1}{r_p} K(t) z(t),$$

$$u_e^0(t) = -\frac{1}{nr_e} (\mathbf{1}_n^T \otimes I_m) K(t) z(t), \quad (6)$$

где

$$\frac{d}{dt} K(t) = -K(t) \left[-\frac{1}{r_p} I_n + \frac{1}{nr_e} (\mathbf{1}_n \otimes \mathbf{1}_n^T \otimes I_m) \right] K(t) - \\ - [q_p + q_e] I_n, \\ K(t_f) = [k_{pf} + k_{ef}] I_n. \quad (7)$$

Доказательство этого утверждения содержится в Приложении.

Как видно из уравнения (7), матрица $K(t)$ симметрическая. Из двух возможных решений уравнения (7) выбирается положительно определенная матрица $K(t)$. Последнее устанавливается при определении условий существования оптимальных управлений в классической дифференциальной игре. Для этого введем в рассмотрение функцию

Ляпунова с положительно определенной симметрической матрицей $K(t)$:

$$V(z(t)) = z^T(t)K(t)z(t).$$

В соответствии с теоремой Ляпунова, устойчивое решение матричного уравнения (7) будет, если выполняется условие

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} V(z(t)) &= z^T(t) \left\{ \frac{d}{dt} K(t) \right\} z(t) + \left\{ \frac{d}{dt} z(t) \right\}^T K(t) z(t) + \\ &+ z^T(t) K(t) \left\{ \frac{d}{dt} z(t) \right\} \leq -z^T(t) [q_p + q_e] z(t). \end{aligned} \quad (8)$$

Уравнение (1) с управлениями (6) имеет вид:

$$\frac{d}{dt} z(t) = \left[-\frac{1}{r_p} I_n + \frac{1}{nr_e} (\mathbf{1}_n^T \otimes I_m) \right] K(t) z(t). \quad (9)$$

Перепишем неравенство (8) с учетом уравнения (9):

$$\begin{aligned} z^T(t) \left[\frac{d}{dt} K(t) + K(t) \left[-\frac{1}{r_p} I_n + \frac{1}{nr_e} (\mathbf{1}_n^T \otimes I_m) \right]^T K(t) + \right. \\ \left. + [q_p + q_e] I_n \right] z(t) - \\ - z^T(t) K(t) \left[\frac{1}{r_p} I_n - \frac{1}{nr_e} (\mathbf{1}_n \otimes \mathbf{1}_n^T \otimes I_m) \right] K(t) z(t) \leq 0. \end{aligned}$$

Учитывая уравнение (7), получим условие существования оптимальных управлений дифференциальной игры:

$$z^T(t) K(t) \left[\frac{1}{r_p} I_n - \frac{1}{nr_e} (\mathbf{1}_n \otimes \mathbf{1}_n^T \otimes I_m) \right] K(t) z(t) \geq 0.$$

Очевидно, что это условие выполняется, если матрица, стоящая в квадратных скобках, будет положительно определенной, т. е.

$$\frac{1}{r_p} > \frac{1}{nr_e}, \quad (10)$$

что можно получить соответствующим назначением параметров r_p и r_e , или матриц штрафа $R = r_p I_n$ и $P = nr_e I_n$.

Последнее сформулируем в виде следующей теоремы.

Теорема 3.2. Дифференциальная игра (1), (4) имеет цену, если матрицы штрафа функционала качества (4) R и P связаны соотношением $R < P$.

Отметим, что при выполнении условия (10) управления (6) обеспечивают достижение функционала качества седловой точки, т. е.

$$\begin{aligned} J_\Sigma(z(\cdot), u_p^0(\cdot), u_e(\cdot)) &\leq \\ &\leq J_\Sigma(z^0(\cdot), u_p^0(\cdot), u_e^0(\cdot)) \leq J_\Sigma(z(\cdot), u_p(\cdot), u_e^0(\cdot)). \end{aligned}$$

Из условия (10) следует логичный с точки зрения игры вывод, что чем больше игроков-преследователей, тем успешнее для них может оказаться исход игры.

Теорема 3.3. Дана дифференциальная игра с n преследователями и одним уклоняющимся от преследования с динамикой (1) и функционалом (4).

Обозначим через $J_\Sigma^0(t, z(\cdot))$ минимаксную величину, достигаемую функционалом $J_\Sigma(z(\cdot), u_p^0(\cdot), u_e(\cdot))$ при оптимальных управлениях, реализованных с использованием обратной связи. Эта величина равна

$$J_\Sigma^0(t, z(t)) = \frac{1}{2} z^T(t) K(t) z(t), \quad t_0 \leq t \leq t_f,$$

где $K(t)$ — симметрическая положительно определенная матрица, являющаяся решением уравнения (7) с краевым условием, заданным на правом конце.

Доказательство этого утверждения содержится в Приложении.

В случае, когда $n = 1$, т. е. преследователь один, управления (6) становятся равными

$$u_p^0(t) = -\frac{k_p(t)}{r_p} z(t), \quad u_e^0(t) = -\frac{k_e(t)}{r_e} z(t),$$

где параметры $k_p(t)$ и $k_e(t)$ находятся из решений уравнений (7), когда $K(t) = [k_p(t) + k_e(t)] I_m$ и $n = 1$:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} k_p(t) - \left[\frac{r_e - r_p}{r_e r_p} \right] k_p^2(t) - \frac{2}{r_p} k_p(t) k_e(t) + q_p &= 0, \\ k_p(t_f) &= k_{pf}, \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} k_e(t) - \left[\frac{r_e - r_p}{r_e r_p} \right] k_e^2(t) + \frac{2}{r_e} k_p(t) k_e(t) + q_e &= 0, \\ k_e(t_f) &= k_{ef}. \end{aligned} \quad (12)$$

2.2. Дифференциальная игра с распределенной информацией

Основной идеей построения стратегий для дифференциальной игры с распределенной информацией является то, что каждый игрок принимает решение на основе лишь той информации, которая доступна ему в данный момент времени. Динамика изменения информации, которой располагают игроки относительно друг друга и которая используется при формировании соответствующих



управляющих воздействий злоумышленника и преследователей, отображается «матрицей чувствительности» (5).

Запишем в общем виде формулу для вектора, обозначающего расстояние между j -м преследователем, злоумышленником и остальными преследователями:

$$\tilde{z}_{pj}(t) = x_j(t) - \sum_{i=1}^n d_{ij}(t)x_i(t) - f_j(t)y(t). \quad (13)$$

Если убегающий злоумышленник наблюдает действия нескольких преследователей, то ему может быть доступна информация

$$\tilde{z}_e(t) = \sum_{i=1}^n e_i(t)x_i(t) - y(t). \quad (14)$$

В выражениях (13) и (14), так же, как и в работе [20], $d_{ij}(t)$, $f_j(t)$, $e_i(t)$ — коэффициенты, составленные из элементов матрицы (5), характеризующие соответствующую ситуацию наблюдений игроков относительно друг друга:

$$d_{ij}(t) = [1 - s_{0j}(t)] \frac{s_{ij}(t)}{\sum_{l=1}^n s_{jl}(t)}, \quad f_j(t) = s_{0j}(t),$$

$$e_j(t) = \frac{s_{0j}(t)}{\sum_i s_{0i}(t)}.$$

Стратегии для преследователей будут выглядеть так:

$$u_{pj}^0(t) = -\frac{k_p(t)}{r_p} \tilde{z}_{pj}(t) =$$

$$= -\frac{k_p(t)}{r_p} \left[x_j(t) - \sum_{i=1}^n d_{ij}(t)x_i(t) - f_j(t)y(t) \right] \quad (15)$$

для $j = 1, 2, \dots, n$.

Убегающий злоумышленник формирует управление, используя доступную информацию (14):

$$u_e^0(t) = -\frac{k_e(t)}{r_e} \tilde{z}_e(t) =$$

$$= -\frac{k_e(t)}{r_e} \left[\sum_{i=1}^n e_i(t)x_i(t) - y(t) \right]. \quad (16)$$

Параметры $k_p(t)$ и $k_e(t)$ в выражениях (15) и (16) находятся из решений уравнений (11), (12), когда $K(t) = [k_p(t) + k_e(t)]I_n$ и $n = 1$.

Отметим, что приведенные выражения для управляющих воздействий получены соответствующим синтезом с использованием динамики сис-

темы (1) и соответствующими квадратическими функционалами (2) и (3).

Перепишем выражения (15) и (16) в более компактной форме с помощью произведения Кронекера:

$$u_p^0(t) = -R^{-1}K(t)\{x(t) - [D(t) \otimes I_m]x(t) - F(t) \otimes y(t)\}, \quad (17)$$

$$u_e^0(t) = -P^{-1}(\mathbf{1}_n^T \otimes I_m) \times$$

$$\times K(t)\{[E^T(t) \otimes I_m]x(t) - y(t)\}. \quad (18)$$

Здесь $K(t)$ — решение уравнения (7), $E(t) = [e_1(t) \dots e_n(t)]^T$, $F(t) = [f_1(t) \dots f_n(t)]^T$, $D(t) = [d_{ij}(t)] \in R^{n \times n}$.

Подстановкой оптимальных управлений (15) и (16) в функционал (4) найдем выражение для этого функционала. После ряда преобразований получим:

$$J_\Sigma^0(z(t), x(t), y(t)) = \frac{1}{2} z(t_p) F z(t_p) +$$

$$+ \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} \{x^T(t) H(D(t), E(t)) x(t)\} dt +$$

$$+ \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} \{x^T(t) L(D(t), E(t)) y(t) +$$

$$+ y^T(t) W(F(t)) y(t)\} dt, \quad (19)$$

где

$$H(D(t), E(t), K(t)) = Q + K(t)R^{-1}K(t) -$$

$$- K(t)R^{-1}K(t)D(t) \otimes I_m - [D(t) \otimes I_m]^T K(t)R^{-1}K(t) +$$

$$+ [D(t) \otimes I_m]^T K(t)R^{-1}K(t)D(t) \otimes I_m -$$

$$- n[F(t) \otimes I_m]^T [(\mathbf{1}_n^T \otimes I_m)K(t)]^T \times$$

$$\times P^{-1}[(\mathbf{1}_n^T \otimes I_m)K(t)]F(t) \otimes I_m,$$

$$L(D(t), E(t), F(t)) = 2[D(t) \otimes I_m]^T K(t)R^{-1}K(t) \times$$

$$\times [F(t) \otimes I_m] - 2K(t)R^{-1}K(t)[F(t) \otimes I_m] -$$

$$- 2(\mathbf{1}_n^T \otimes I_m)^T Q + 2n[E^T(t) \otimes I_m]^T \times$$

$$\times [(\mathbf{1}_n^T \otimes I_m)K(t)]^T P^{-1}[(\mathbf{1}_n^T \otimes I_m)K(t)],$$

$$W(F(t), K(t)) = nQ + [F(t) \otimes I_m]^T K(t)R^{-1}K(t) \times$$

$$\times F(t) \otimes I_m - n[(\mathbf{1}_n^T \otimes I_m)K(t)]^T P^{-1}(\mathbf{1}_n^T \otimes I_m)K(t).$$

Из представленного выше видно, что подынтегральное выражение функционала (19) учитывает как положения преследователей и уклоняющегося, так и взаимное расположение преследователей и уклоняющегося. Отметим, что значение этого функционала при оптимальных управлениях за-

висит от количества игроков, а также от элементов $d_{ij}(t)$, $f_i(t)$, $e_i(t)$ соответствующих матриц $D(t)$, $F(t)$, $E(t)$, т. е. от того, как и какая информация доступна игрокам на протяжении игры.

В случае игры с одним преследователем и одним убегающим злоумышленником и с глобальной информацией (т. е. в случае классической дифференциальной игры, см. п. 2.1) параметры $n = 1$, $D(t) = 0$, $E(t) = 1$, и тогда управления (17) и (18) становятся такими же, как и (6). Функционал в этом случае принимает вид

$$J_{\Sigma}^0(z(t)) = \frac{1}{2} z(t_p) F z(t_p) + \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} z^T(t) \{Q + K(t) R^{-1} K(t) - K(t) P^{-1} K(t)\} z(t) dt$$

и $J_{\Sigma}^0(t, z(t))$, в соответствии с теоремой 3.3, равен

$$J_{\Sigma}^0(t, z(t)) = \frac{1}{2} z^T(t) K(t) z(t), \quad t_0 \leq t \leq t_f.$$

Рассмотрим частный случай, возникающий в дифференциальной игре с распределенной информацией и бинарной матрицей чувствительности (5). Выражение $s_{ij}(t)$ в этой матрице означает наблюдение игроком i игрока j в момент времени t . Так как матрица бинарная, то если $s_{ij}(t) = 1$, то игрок i наблюдает игрока j , и если $s_{ij}(t) = 0$, то игрок i не наблюдает игрока j . Поскольку каждый из игроков всегда наблюдает самого себя, то диагональные элементы матрицы (5) всегда постоянны и равны единице.

Случай 1. Пусть j -й игрок-преследователь не наблюдает убегающего злоумышленника, т. е. $s_{0j} = 0$, $f_j = 0$, и из выражения (17) имеем:

$$u_{pj}^0(t) = -\frac{k_p(t)}{r_p} \left[x_j(t) - \sum_{i=1}^n d_{ij}(t) x_i(t) \right].$$

Это означает, что в этом случае j -й игрок-преследователь будет следовать за наблюдаемыми ближайшими преследователями.

Случай 2. Если j -й игрок-преследователь наблюдает убегающего злоумышленника, т. е. $s_{0j} = 1$, $f_j = 1$, и допустим, что этот игрок не имеет информации о других преследователях, т. е. $d_{ij} = 0$, то из выражения (16) имеем:

$$u_{pj}^0(t) = -\frac{k_p(t)}{r_p} [x_j(t) - y(t)].$$

Это означает, что j -й игрок будет преследовать убегающего злоумышленника самостоятельно.

При рассмотрении стратегии для убегающего злоумышленника (18) отметим, что в случае, если

убегающий будет наблюдать нескольких преследователей в своем радиусе чувствительности, то он сформирует такое управление, чтобы попытаться «убежать» от центра масс всех обнаруженных преследователей.

3. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ИГРА С ПОМЕХАМИ

Рассмотрим ситуацию в дифференциальной игре преследования, когда злоумышленник создает искусственные помехи с целью помешать преследователю и получить преимущество в игре. Это будет означать, что преследователи будут получать информацию о положении уклоняющегося злоумышленника с шумами. А значит и управления, построенные для преследователей, будут содержать этот шум. Таким образом, траектории, по которым преследователи будут настигать злоумышленника, являются субоптимальными. Кроме того, уклоняющийся злоумышленник строит свою стратегию относительно всех преследователей, которых он «видит», т. е. старается убежать от центра масс всех преследователей, а так как их положения являются следствием воздействия шумов, то и сам злоумышленник будет иметь траекторию, имеющую шумовую составляющую. Отметим, что на самого уклоняющегося злоумышленника не будут воздействовать создаваемые им помехи, и его стратегия управления по-прежнему зависит только лишь от положений самих преследователей.

Управления для преследователя и злоумышленника в дифференциальной игре с глобальной информацией будут определяться соответствующими выражениями

$$u_p(t) = -\frac{k_p(t)}{r_p} z(t), \quad u_e(t) = \frac{d}{dt} y(t).$$

Пусть $n(t)$ — помеха, создаваемая уклоняющимся злоумышленником. Пусть эта помеха является «белым шумом» с характеристиками $M[n(t)] = 0$, $M[n^T(t)n(\tau)] = N(t)\delta(t - \tau)$. С новыми условиями в дифференциальной игре преследователи будут «видеть» уклоняющегося по траектории $y^*(t) = y(t) + n(t)$. Следует отметить, что при наличии шумов может возникнуть проблема с выполнением условия задачи перехвата, сформулированного в Предположении 2.3. Введем для рассматриваемого случая новое условие выполнения задачи перехвата:

$$E[\|z_j^*(t_1)\|^2] \leq \varepsilon,$$

где $E[\|z_j^*(t_1)\|^2]$ — среднеквадратическое расстояние между злоумышленником и j -м преследователем,



или $E[\|z_j(t) - n(t)\|^2] \leq \varepsilon$. Учитывая тот факт, что шум, выставляемый злоумышленником, «белый», поэтому $E[n^T(t)z_j(t)] = 0$, условие перехвата будет иметь вид:

$$E[\|z(t)\|^2] \leq \varepsilon - N.$$

Из последнего выражения видно, что при $N > \varepsilon$ задача перехвата невыполнима.

Запишем вид стратегий управления в случае классической дифференциальной игры:

$$u_p(t) = -\frac{k_p(t)}{r_p} z^*(t) = -\frac{k_p(t)}{r_p} [z(t) - n(t)].$$

Запишем уравнения стратегий игроков для случая дифференциальной игры с распределенной информацией:

$$u_e(t) = -\frac{k_e(t)}{r_e} \left[\sum_{i=1}^n e_i(t)x_i(t) - y(t) \right],$$

$$u_{pf}(t) = -\frac{k_p(t)}{r_p} \left[x_f(t) - \sum_{i=1}^n d_{ij}(t)x_i(t) - f_j(t)y^*(t) \right].$$

Заметим, что в случае, когда преследователь «не видит» уклоняющегося злоумышленника, а значит, строит свою стратегию управления на основе тех преследователей, которые видят уклоняющегося злоумышленника, то его траектория все же будет иметь зашумленный вид вследствие зашумленности траекторий преследователей, на которые ориентируется этот преследователь.

4. ПРИМЕР

4.1. Классическая дифференциальная игра

Смоделируем дифференциальную игру, в которой каждый игрок имеет полную информацию, т. е. игру с глобальной информацией. Пусть имеется один злоумышленник, три преследователя. Тогда динамика дифференциальной игры при использовании синтезированных управлений описывается обыкновенным линейным дифференциальным уравнением

$$\frac{d}{dt} x_1(t) = -\frac{k_p(t)}{r_p} (x_1(t) - y(t)), \quad x_1(t_0) = [-3, 0]^T,$$

$$\frac{d}{dt} x_2(t) = -\frac{k_p(t)}{r_p} (x_2(t) - y(t)), \quad x_2(t_0) = [3, 0]^T,$$

$$\frac{d}{dt} x_3(t) = -\frac{k_p(t)}{r_p} (x_3(t) - y(t)), \quad x_3(t_0) = [4, 1]^T,$$

$$\frac{d}{dt} y(t) = -\frac{k_e(t)}{r_e} \left\{ \frac{1}{3} [x_1(t) + x_2(t) + x_3(t)] - y(t) \right\},$$

$$y(t_0) = [0, 3]^T.$$

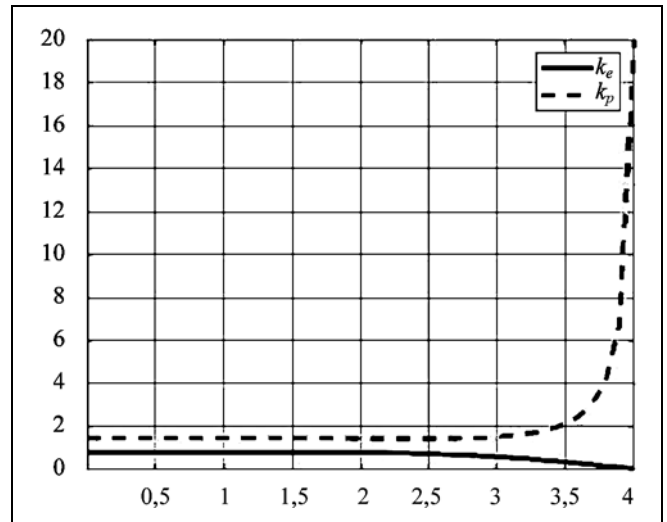


Рис. 1. Процессы изменения параметров $k_p(t)$ и $k_e(t)$

Здесь параметры $k_p(t)$ и $k_e(t)$ определяются решениями уравнений

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} k_p(t) &= -q_p + \frac{1}{r_p} k_p^2(t) - \frac{2}{r_e} k_p(t) k_e(t), \\ k_p(t_f) &= k_{pf} = 1/\varepsilon, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} k_e(t) &= -q_e - \frac{1}{r_e} k_e^2(t) + \frac{2}{r_p} k_p(t) k_e(t), \\ k_e(t_f) &= k_{ef} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Параметры $r_p = 1$, $r_e = 2$, $q_p = 1$, $q_e = 2$, $k_{pf} = 20$, $k_{ef} = 0,05$ — коэффициенты функционала качества вида (4); параметр, определяющий условие прекращения преследования, $\varepsilon = 0,04$; $t \in [0, 4]$.

На рис. 1. Представлены процессы изменения параметров $k_p(t)$ и $k_e(t)$.

На последующих рисунках представлены графики переходных процессов различных рассмотренных выше задач. На рис. 2 показаны траектории преследователей и уклоняющегося в классической игре без шумов и с шумами. Обе игры закончились перехватом злоумышленника, т. е. выполняется условие $\|z(t_1)\| \leq \varepsilon$, $t_1 < 4$ с (на рис. 2, а $t_1 = 3,58$ с, на рис. 2, б $t_1 = 3$ с, где с — условное машинное время).

При моделировании классической дифференциальной игры с центрированными шумами применяется исходная модель с теми же начальными условиями.

4.2. Дифференциальная игра с распределенной информацией

Предположим, что начальное положение игроков не изменилось и является таким же, как в п. 4.1. Проведем моделирование дифференциальной игры, в которой каждый игрок имеет ограниченную информацию о других игроках, участвующих в той же игре. Пусть мат-

рица чувствительности изменяется три раза во времени, что можно выразить таким образом:

$$S_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad S_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad S_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

В первый период времени злоумышленника «видит» только один возможный преследователь, двое других преследователей, не «видя» злоумышленника, «видят» первого преследователя и следуют за ним; в следующий период времени уклоняющегося злоумышленника видят

уже два преследователя и пытаются «поймать» его, в то время как оставшийся преследователь следует за другими преследователями. В конечный период времени каждый из игроков «видит» друг друга и сама дифференциальная игра становится игрой с глобальной информацией, т. е. классической дифференциальной игрой.

Как и в п. 4.1, воспользуемся случаем дифференциальной игры с распределенными стратегиями, взятым в качестве базового, и добавим шумы. Все операции по получению решения проводятся аналогично операциям в предыдущем разделе. На рис. 3 показаны траектории преследователей и уклоняющегося в игре с распределенными стратегиями без шумов и с шумами.

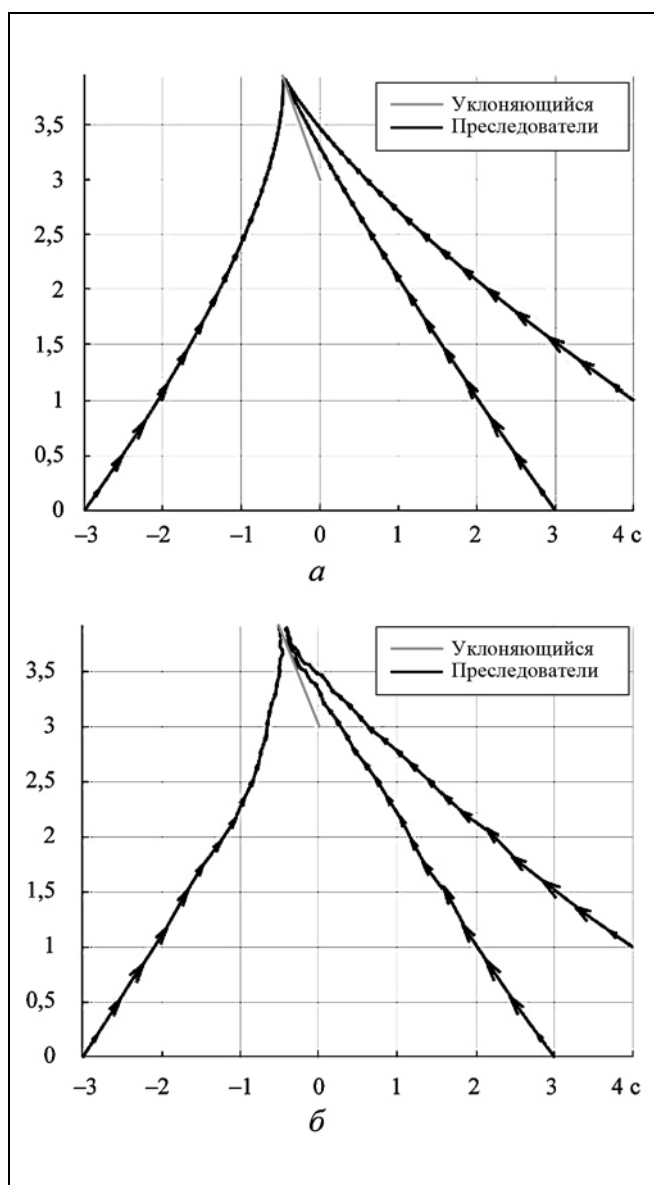


Рис. 2. Переходные процессы «задачи преследования» в простой игре: а — без шумов (время окончания игры — 3,58 с); б — с шумами (время окончания игры — 3 с)

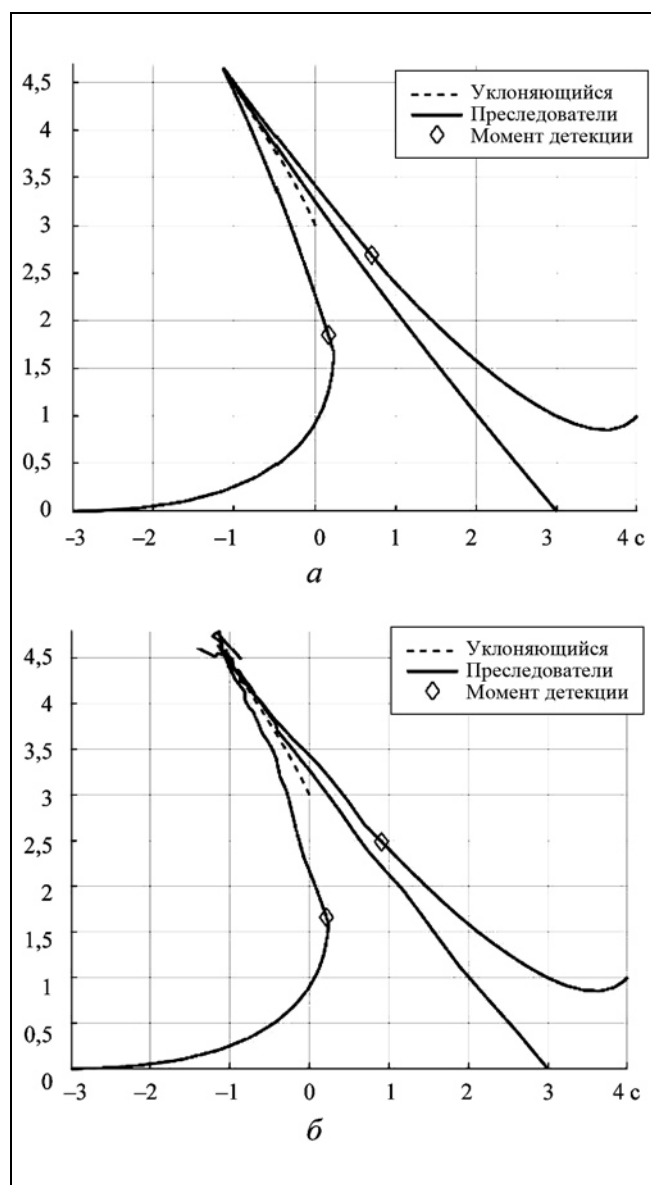


Рис. 3. Переходные процессы «задачи преследования» в игре с распределенной информацией: а — без шумов (время окончания игры — 3,88 с); б — с шумами (время окончания игры — 4 с)



На представленных графиках рис. 3 показаны моменты подключения к преследованию уклоняющегося злоумышленника при вхождении в зоны чувствительности преследователей, т. е. в моменты его обнаружения. Графики, помещенные на рис. 3, а, показывают успешное выполнение задачи перехвата, т. е. выполняется условие $\|z_j(t_1)\|^2 \leq \varepsilon$, $t_1 < 4$ с, $t_1 = 3,88$ с. На рис. 3, б демонстрируется неуспешное выполнение задач перехвата, т. е. условия $\|z(t)\|^2 > \varepsilon$, $t_0 \leq t \leq t_f$ и игра останавливается по истечении назначенного времени игры $t = t_f = 4$ с.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В статье рассмотрена дифференциальная игра «преследование», в которой участвуют несколько игроков. Предполагается, что в некотором пространстве имеется игрок-злоумышленник, который при обнаружении других игроков, выполняющих роли преследователей, предпринимает попытки уклониться от встречи с последними. Динамика каждого объекта описывается стационарной линейной системой общего типа. В статье представлены решения построения стратегий для нескольких преследователей и одного уклоняющегося злоумышленника для двух подзадач — стратегии в ситуации, когда все игроки имеют полную информацию о состоянии всех участников игры, и при неполной информации об уклоняющемся злоумышленнике, активно противодействующем получению защитниками полной информации о себе. Рассмотрены также распределенные стратегии и некоторые частные случаи дифференциальной игры «преследования». Основной идеей построения стратегий для этой игры является то, что каждый игрок принимает решение на основе лишь той информации, которая доступна ему в данный момент времени. Полученные в работе теоретические положения проиллюстрированы результатами математического моделирования.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство Теоремы 3.1. Запишем гамильтониан системы

$$H(z, u_p, u_e, \lambda) = \frac{1}{2} \{z^T(t)[q_p + q_e]z(t) + r_p u_p^T(t)u_p(t) - nr_e(\mathbf{1}_n \otimes u_e(t))^T(\mathbf{1}_n \otimes u_e(t))\} + \lambda^T(t)[u_p(t) - \mathbf{1}_n \otimes u_e(t)].$$

Здесь $\lambda(t)$ — сопряженная переменная [22], которая определяется как решение уравнения

$$\frac{d}{dt} \lambda(t) = - \left\{ \frac{\partial H(z, u_p, u_e, \lambda)}{\partial z} \right\}^T = -[q_p + q_e]z(t) \quad (\text{П.1})$$

с краевым условием

$$\lambda(t_f) = \frac{1}{2} \frac{\partial z^T(t_f)[k_{pf} + k_{ef}]z(t_f)}{\partial z} = [k_{pf} + k_{ef}]z(t_f).$$

Оптимальные управления и являются точками стационарности гамильтониана, т. е.

$$\frac{\partial H(z, u_p, u_e, \lambda)}{\partial u_p} = 0, \quad \frac{\partial^2 H(z, u_p, u_e, \lambda)}{\partial u_p^2} = r_p > 0, \quad (\text{П.2})$$

$$\frac{\partial H(z, u_p, u_e, \lambda)}{\partial u_e} = 0, \quad \frac{\partial^2 H(z, u_p, u_e, \lambda)}{\partial u_e^2} = -nr_e < 0. \quad (\text{П.3})$$

Условия (П.2) и (П.3) определяют вид оптимальных управлений

$$u_p^0(t) = -\frac{1}{r_p} \lambda(t), \quad u_e^0(t) = -\frac{1}{nr_e} (\mathbf{1}_n^T \otimes \lambda(t)). \quad (\text{П.4})$$

С учетом полученного, переменная $\lambda(t)$ определяется из решения двухточечной краевой задачи (уравнения Эйлера — Лагранжа)

$$\frac{d}{dt} z(t) = \left[-\frac{1}{r_p} I_m + \frac{1}{nr_e} (\mathbf{1}_n^T \otimes I_m) \right] \lambda(t),$$

$$z_0(t) = z_0,$$

$$\frac{d}{dt} \lambda(t) = -[q_p + q_e]z(t),$$

$$\lambda(t_f) = [k_{pf} + k_{ef}]z(t_f).$$

Поиск вспомогательной переменной $\lambda(t)$ будем выполнять, применяя метод прогонки [22]. Определим $\lambda(t)$ с точностью до матрицы $K(t)$ в виде

$$\lambda(t) = K(t)z(t). \quad (\text{П.5})$$

Полная производная выражения (П.5) будет иметь вид

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \lambda(t) &= \left\{ \frac{d}{dt} K(t) \right\} z(t) + K(t) \left\{ \frac{d}{dt} z(t) \right\} = \left[\left\{ \frac{d}{dt} K(t) \right\} + \right. \\ &\quad \left. + K(t) \left[-\frac{1}{r_p} I + \frac{1}{nr_e} (\mathbf{1}_n \otimes \mathbf{1}_n^T \otimes I_m) \right] K(t) \right] z(t). \end{aligned} \quad (\text{П.6})$$

Приравняв выражения (П.1) и (П.6), будем иметь:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} K(t) &= -K(t) \left[-\frac{1}{r_p} I_m + \frac{1}{nr_e} (\mathbf{1}_n \otimes \mathbf{1}_n^T \otimes I_m) \right] K(t) - \\ &\quad - [q_p + q_e] I_m, \\ K(t_f) &= [k_{pf} + k_{ef}] I_m. \end{aligned}$$

Учитывая выражения (П.4) и (П.5), управления принимают вид:

$$u_p^0(t) = -\frac{1}{r_p} K(t)z(t), \quad u_e^0(t) = -\frac{1}{nr_e} (\mathbf{1}_n^T \otimes I_m) K(t)z(t). \quad \blacklozenge$$

Доказательство Теоремы 3.3. Подставим в подинтегральную часть функционала

$$J_{\Sigma}(z(\cdot), u_p(\cdot), u_e(\cdot)) = \frac{1}{2} z^T(t_f) F z(t_f) + \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} \{z^T(t) Q z(t) + u_p^T(t) R u_p(t) - (\mathbf{1}_n \otimes u_e(t))^T P (\mathbf{1}_n \otimes u_e(t))\} dt$$

выражение $d[z^T(t) K(t) z(t)]/dt$, компенсировав его вне интеграла соотношением $0,5[z^T(t) K(t) z(t) - z^T(t_f) K(t_f) z(t_f)]$. Будем иметь:

$$J_{\Sigma}(z(\cdot), u_p(\cdot), u_e(\cdot)) = \frac{1}{2} z^T(t_f) F z(t_f) + \frac{1}{2} [z^T(t) K(t) z(t) - z^T(t_f) K(t_f) z(t_f)] + \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} \{z^T(t) Q z(t) + u_p^T(t) R u_p(t) - (\mathbf{1}_n \otimes u_e(t))^T P (\mathbf{1}_n \otimes u_e(t))\} dt + \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} \left\{ z^T(t) \left\{ \frac{dK(t)}{dt} \right\} z(t) + \left\{ \frac{dz(t)}{dt} \right\}^T K(t) z(t) + z^T(t) K(t) \left\{ \frac{dz(t)}{dt} \right\} \right\} dt. \quad (\text{П.7})$$

Заметим, что при оптимальных управлениях

$$u_p^0(t) = -R^{-1} K(t) z(t), \\ u_e^0(t) = -P^{-1} (\mathbf{1}_n^T \otimes K(t) z(t)), \quad (\text{П.8})$$

где

$$\frac{d}{dt} K(t) + K(t) [-R^{-1} + P^{-1} (\mathbf{1}_n^T \otimes \mathbf{1}_n^T)] K(t) + Q = 0, \\ K(t_f) = F, \quad (\text{П.9})$$

уравнение динамики системы описывается выражением

$$\frac{d}{dt} z(t) = [-R^{-1} + P^{-1} (\mathbf{1}_n^T \otimes I_m)] K(t) z(t), \\ z(t_0) = z_0. \quad (\text{П.10})$$

Так как через $J_{\Sigma}^0(t, z(t))$ была обозначена минимаксная величина функционала $J_{\Sigma}(z(t), u_p(t), u_e(t))$, то выражение (П.7) при соответствующей подстановке выражений (П.8) и (П.10) с учетом уравнения (П.9) принимает вид:

$$J_{\Sigma}^0(t, z(t)) = \frac{1}{2} z^T(t) K(t) z(t), \quad t_0 \leq t \leq t_f. \quad \blacklozenge$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Айзекс Р. Дифференциальные игры. — М.: Мир, 1967. — 480 с. [Isaacs, R. Differential Games. — N.-Y.: John Wiley and Sons, 1965.]
2. Isaacs, R.P. Games of Pursuit, Paper P-257. — RAND Corporation, Santa Monica, California. — 1951.
3. Breakwell, J.V., and Merz, A.W. Toward a Complete Solution of the Homicidal Chauffeur Game / Proceedings of the 1st International Conference on the Theory and Applications of Differential Games. — Amherst, Massachusetts, 1969.

4. Понтрягин Л.С. О линейных дифференциальных играх. 1 // Доклады Академии наук СССР. — 1967. — Т. 174. — № 6. — С. 1278—1280. [Pontryagin, L.S. O lineynykh differentsial'nykh igrakh. 1 // Doklady Akademii nauk SSSR. — 1967. — Vol. 174, no. 6. — S. 1278—1280. (In Russian)]
5. Понтрягин Л.С. О линейных дифференциальных играх. 2 // Доклады Академии наук СССР. — 1967. — Т. 175. — № 4. — С. 764—766. [Pontryagin, L.S. O lineynykh differentsial'nykh igrakh. 2 Doklady Akademii nauk SSSR. — 1967. — T. 175, no. 4. — S. 764—766. (In Russian)]
6. Мищенко Е.Ф. О некоторых игровых задачах преследования и уклонения от встречи / Автоматика и телемеханика. — 1972. — № 9. — С. 24—30. [Mishchenko, Ye.F. On Certain Game Problems of Pursuit and Evasion / Automation and Remote Control. — 1972. — Vol. 33, no. 9. — 1424—1429.]
7. Пишеничный Б.Н. Необходимые условия экстремума. — М.: Наука, 1969. — 150 с. [Pshenichnyi, B.N. Neobhodimye usloviya ekstremuma. — M.: Nauka, 1969. — 150 s. (In Russian)]
8. Красовский Н.Н., Субботин А.И. Позиционные дифференциальные игры. — М.: Наука, 1974. — 455 с. [Krasovskij, N.N., Subbotin, A.I. Pozitsionnye differentsial'nye igrы. — M.: Nauka, 1974. — 455 s. (In Russian)]
9. Петросян Л.А. Дифференциальные игры преследования. — Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1977. — 224 с. [Petrosyan, L.A. Differentsial'nye igrы presledovaniya. — L.: Izd-vo Leningr. Un-ta, 1977. — 224 s. (In Russian)]
10. Вишневецкий Л.С., Меликян А.А. Оптимальное преследование на плоскости при наличии препятствия // Прикладная математика и механика. — 1982. — Т. 46, вып. 4. — С. 613—620. [Vishnevetskij, L.S., Melikyan, A.A. Optimal Pursuit on a Plane in the Presence of an Obstacle / Journal of Applied Mathematics and Mechanics. — 1982. — Vol. 46, no. 4. — P. 485—490.]
11. Меликян А.А., Овакимян Н.В. Игровая задача простого преследования на двумерном конусе // Прикладная математика и механика. — 1991. — Т. 55, вып. 5. — С. 741—751. [Melikyan, A.A., Ovakimyan, N.V. A Simple Pursuit-and-Evasion Game on a Two-Dimensional Cone / Journal of Applied Mathematics and Mechanics. — 1991. — T. 55, no. 5. — P. 607—618.]
12. Melikyan, A.A. Geometry of Pursuit-Evasion Games on Two-Dimensional Manifolds // S. Jorgensen, M. Quincampoix (eds.) Annals of the International Society of Dynamic Games. — Boston: Birkhauser, 2007. — Vol. 9.
13. Hovakimyan, N., Melikyan, A.A. Geometry of Pursuit-Evasion on Second Order Rotation Surfaces // Dynamics and Control. — 2000. — No. 10. — P. 297—312.
14. Кумков С.С., Пацко В.С., Ле Менек Два слабых преследователя в игре против одного убегающего // Автоматика и телемеханика. — 2014. — № 10. — С. 73—96. [Kumkov, S.S., Patsko, V.S., Le Menec, S. Two Weak Pursuers in a Game Against a Single Evader / Automation and Remote Control. — 2014. — Vol. 75, no. 10. — P. 1770—1789.]
15. Kumkov, S.S., Le Menec, S., Patsko, V.S. Solvability Sets in Pursuit Problem with Two Pursuers and One Evader // Preprints of the 19th World Congress IFAC, Cape Town, South Africa. August 24—29, 2014. — P. 1543—1549.
16. Rusnak, I., Weiss, H., Hexner, G. Guidance Laws in Target—Missile—Defender Scenario with an Aggressive Defender // Preprints of the 19th World Congress IFAC, Milano (Italy), August 28. — September 2, 2011. — P. 9349—9354.
17. Lin, W., Qu, Z., Simaan, M.A. A Design of Entrapment Strategies for the Distributed Pursuit-Evasion Game // Preprints of the 18th World Congress IFAC, Milano (Italy), August 28 — September 2, 2011. — P. 9334—9339.
18. Kornev, D.V., Lukoyanov, N.Y. On Numerical Solution of Differential Games in Classes of Mixed Strategies // Preprints of the 18th World Congress IFAC. — Cape Town, South Africa, August 24—29, 2014. — P. 1569—1555.
19. Basar, T., Moon, J. Riccati Equations in Nash and Stackelberg Differential and Dynamic Games // Preprints of the 19th



- World Congress IFAC, Toulouse, France, July 9—14, 2017. — P. 9957—9964.
20. Qu, Z., Simaan, M. A design of distributed game strategies for networked agents / Proceedings of the 1st IFAC Workshop on Estimation and Control of Networked Systems (NecSys'09), Venice, Italy, 2009. — P. 270—275.
 21. Ho, Y.C., Bryson, A.E., and Baron, S. Differential Games and Optimal Pursuit-Evasion Strategies / IEEE Trans. Automatic Control. — 1965. — Vol. AC-10. — P. 385—389.
 22. Афанасьев В.Н., Колмановский В.Б., Носов В.Р. Математическая теория конструирования систем управления. — М.: Высш. шк., 2003. — 614 с. [Afanas'ev, V.N., Kolmanovskij, V.B., Nosov, V.R. Matematicheskaya teoriya konstruirovaniya sistem upravleniya. — M.: Vyssh. shk., 2003. — 614 s. (In Russian)]

Статья представлена к публикации членом редколлегии Е.Я. Рубиновичем.

Поступила в редакцию 6.05.2020, после доработки 13.01.2021.
Принята к публикации 13.01.2021.

Афанасьев Валерий Николаевич — д-р техн. наук, Московский институт электроники и математики им. А.Н. Тихонова Национального исследовательского университета «Высшая школа экономики», ✉ afanval@mail.ru,

Семин Александр Александрович — Московский институт электроники и математики им. А.Н. Тихонова Национального исследовательского университета «Высшая школа экономики», ✉ spin7ion@gmail.com.

DIFFERENTIAL GAMES OF PURSUIT WITH SEVERAL PURSUERS AND ONE EVADER

V.N. Afanas'ev and A.A. Semion

Higher School of Economics Tikhonov Moscow Institute of Electronics and Mathematics, Moscow, Russia
✉ afanval@mail.ru, ✉ spin7ion@gmail.com

Abstract. A differential game of several players is considered as follows. One player (attacker) penetrates some space, and several other players (pursuers) appear simultaneously to intercept the attacker. Upon detecting the pursuers, the attacker tries to evade them. The dynamics of each player are described by a time-invariant linear system of a general type with scalar control. A quadratic functional is introduced, and the differential game is treated as an optimal control problem. Two subproblems are solved as follows. The first subproblem is to construct a strategy for pursuing the attacker by several players who have complete equal information about the game. The second subproblem is to construct such a strategy under incomplete information about the attacker who is actively opposing the pursuers. The simulation results are presented. The zero-sum differential game solution can be used for studying the final stage of pursuit, in which several pursuers and one evader participate.

Keywords: differential games, linear dynamics, optimal feedback control, Nash equilibrium, Lyapunov functions, Riccati equation.

Funding. This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research, project no. 19-8-00535.



Новые издания ИПУ РАН

Вишневский В.М. Математические модели и методы исследования гибридных сетей связи на основе лазерной и радиотехнологий: препринт / В.М. Вишневский, О.В. Семёнова, Д.В. Ефросинин. — М.: ИПУ РАН, 2020. — 120 с. — ISBN 978-5-91450-249-9.

Кульба В.В. Научно-организационная деятельность академика Е.А. Микрина в Институте проблем управления РАН / В.В. Кульба, Б.В. Павлов; [под общ. ред. чл.-корр. РАН Новикова Д.А.]. — М.: ИПУ РАН, 2020. — 52 с. — 200 экз. — ISBN 978-5-91450-250-5.

Проблемы управления безопасностью сложных систем: материалы XXVIII Международной конференции, 16 декабря 2020 г., Москва / Под общей редакцией А.О. Калашникова, В.В. Кульбы; Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН Минобрнауки РФ [и др.]. — Москва: ИПУ РАН. — 2020. — 517 с. — 100 экз. — ISBN 978-5-91450-251-2.

Акинфиев В.К. Методы и инструментальные средства управления развитием компаний со сложной структурой активов: монография / В.К. Акинфиев, А.Д. Цвиркун; Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова, Минобрнауки РФ. — Москва: ИПУ РАН, 2020. — 307 с. — ISBN 978-5-91450-243-7.

МЕТОД БЕЗУСЛОВНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ ДЛЯ ЗАДАЧИ С НЕСТАЦИОНАРНОЙ ЦЕЛЕВОЙ ФУНКЦИЕЙ, ЗАДАННОЙ НА ДИСКРЕТНОЙ ШКАЛЕ ВРЕМЕНИ

В.Б. Гусев

Аннотация. Разрабатывается метод приближения к экстремуму нестационарной целевой функции, заданной на дискретной шкале времени. Метод должен обеспечивать допустимую (контролируемую) величину погрешности. Также требуется определить условия, которым должны удовлетворять шкала времени, используемый целевой показатель, параметры влияния на него внешней среды. Рассмотрена задача поиска безусловного экстремума для нестационарной целевой функции, когда ее значения, зависящие от компонент вектора управления, заданы на дискретном наборе моментов времени. Для поиска решения предложен дискретный градиентный метод безусловной оптимизации. Сформулированы условия его работоспособности. Получена оценка нижней границы погрешности решения, обусловленной величиной шага по времени, скоростью изменения целевой функции и оценками ее производных до второго порядка по компонентам вектора управления. Применение метода демонстрируется на численной модели экстремального регулятора, предназначенного для управления нестационарным объектом с нелинейной целевой функцией. Численные эксперименты показали, что варьирование параметров регулятора в достаточно широком диапазоне не оказывает существенного влияния на качественное поведение расчетной траектории. Разработанный метод может быть применен для расчета управляющей функции экстремального регулятора системы, информация о которой представлена только значениями целевой функции в дискретные моменты времени.

Ключевые слова: нестационарная система, экстремальный регулятор, безусловная оптимизация, нижняя граница погрешности.

ВВЕДЕНИЕ

Целенаправленные развивающиеся системы, такие как национальная и региональная экономика, крупное многоотраслевое хозяйство, применяют механизмы экстремального управления, нацеленного на максимизацию целевого показателя [1]. Таким показателем может быть, например, валовой выпуск, добавленная стоимость, прибыль и др. В кризисной ситуации, при наличии мало предсказуемого внешнего окружения (экономические санкции, финансовые катастрофы, форс-мажорные обстоятельства) методы управления, основанные на знаниях о регулярных хозяйственных процессах, не дают желаемого результата. Так, международное разделение труда, обычно играющее положительную роль, в условиях санкций становится бесполезным. В такой ситуации успешное

ведение хозяйства должно преимущественно ориентироваться на его внутренние возможности, замкнутые внутри экономической системы технологические циклы, т. е. в определенном смысле быть автономным [2].

Математические модели, применяемые в кризисные периоды при управлении развивающимися системами, могут иметь малую точность или вообще отсутствовать. В таких случаях для управления приходится ограничиваться только значениями набора целевых показателей. Кроме того, в имеющейся статистической отчетности обычно приводятся показатели хозяйственной деятельности только для определенных периодов (месяц, квартал, год). Все это ограничивает возможности применения методов, предполагающих использование гладкой целевой функции, и требует учета при разработке соответствующих методов управления и принятия решений.



В условиях неопределенности в отношении законов поведения объекта управления наиболее подходящим методом представляется экстремальное регулирование, состоящее в установлении и поддержании такого режима работы, при котором достигается экстремальное (минимальное или максимальное) значение некоторого критерия, характеризующего качество функционирования объекта. Задача построения механизмов управления для моделей автономных систем имеет много общего с проблемой экстремального регулятора, осуществляющего автоматический поиск и поддержание экстремального значения регулируемой величины. Это обеспечивает определенную устойчивость регулируемого объекта. Ограничением применимости экстремального регулятора является то, что при его функционировании невозможно контролировать долгосрочные последствия управления. Кроме того, в случае ограниченного объема информации об объекте его инерционные свойства могут не учитываться.

В 1960-х гг. экстремальное регулирование оформилось в самостоятельное направление в теории нелинейных систем автоматического управления [3], а экстремальные регуляторы получили широкое применение. Например, они применялись в релейных экстремальных системах [4], импульсных самонастраивающихся и экстремальных системах автоматического управления [5], при настройке резонансных контуров и автоматических измерительных устройств, при отыскании оптимальных параметров настраиваемых моделей, при управлении химическими реакторами, нагревательными установками процессов флотации, дробления [6].

Для построения методов поиска управления в экстремальных регуляторах в зависимости от степени информированности об объекте применяются различные подходы, отличающиеся обоснованностью метода и характером сходимости результата к экстремуму. Так, в работе [7] для моделирования процесса метаболизма предложен эвристический алгоритм экстремального регулирования, осуществляющий случайный поиск лучшего отклика на каждом шаге итераций. Сходимость процесса демонстрировалась на примере для конкретного объекта. В работе [8] управление подачей воздуха u в топку на основе экстремального регулирования статической характеристики f инерционного объекта предложен метод вида

$$\Delta u(i+1) = h \text{sign}[\Delta f(i+1) \Delta u(i)],$$

где u — скалярный управляющий параметр; f — измеряемый параметр отклика (критерий управления); i — момент времени. Сходимость процесса регулирования в этой работе также демонстрировалась экспериментально. Частный случай экстремального регулятора с нелинейной целевой функ-

цией описан в работе [9] для конкретной линейной динамической системы, описываемой обыкновенным дифференциальным уравнением первого порядка; величина шага регулирования здесь выбиралась постоянной, а его знак — обратен знаку производной по управлению. В упомянутой публикации доказывалась сходимость процесса регулирования в предположении точного знания динамики системы и значений производных целевой функции по времени и управлению. Предлагаемый ниже алгоритм этого не требует.

Пусть в модели нестационарной автономной системы для поиска управления применяется критерий безусловной оптимизации вида

$$F(y, u) \rightarrow \underset{u}{\text{extr}}$$

в каждой точке t , где $u(t)$ — вектор управления; $F(y, u)$ — целевая функция, гладкая и выпуклая по u ; $y(t, p, x, u)$ — вектор состояния системы; p — вектор параметров; $x(t)$ — вектор состояния внешней среды. Если такое оптимальное управление существует, оно зависит от текущего состояния системы и может определяться, например, с помощью градиентного метода безусловной оптимизации, исходя из необходимого условия экстремума

$$\frac{dF}{du} = 0.$$

Если в соответствующие моменты времени известны только значения целевой функции и текущее состояние системы учитывается в них неявно, для поиска управления по значению этой функции будем использовать такую запись:

$$f(t, u) = F(y(t, p, x(t), u), u).$$

Проблема сходимости градиентного метода безусловной оптимизации для нестационарных задач такого типа рассматривалась в работе [10]. В ней предполагалось точное знание градиента целевой функции, что позволило доказать сходимость итерационного процесса для дискретного времени

$$u(t_{k+1}) = u(t_k) - \gamma_k \nabla_u f(t_k, u(t_k)),$$

где условия сходимости содержат требование:

$$a > 0 : \|u^*(t_{k+1}) - u^*(t_k)\| \leq a,$$

$u^*(t)$ — точка экстремума функции $f(t, u)$ в момент t ; a определяет отклонение предельного значения $u(t_k)$ от точки экстремума $u^*(t_k)$ при $k \rightarrow \infty$; величина шага γ_k определяется исходя из свойств матрицы $\nabla_{uu} f$. Результаты, полученные в работе [10], развиваются в статье [11] путем ослабления условия сходимости итерационного процесса:

$$\|\nabla_u f(t_{k+1}, u) - \nabla_u f(t_k, u)\| \leq a, \quad a > 0.$$

При рассмотрении нестационарных задач безусловной оптимизации в работах [10, 11] контролировалось как отклонение решения от точного значения в текущий момент t , так и отклонение в пределе при $t \rightarrow \infty$. В качестве недостатка чисто градиентных методов отметим относительно медленную сходимость к точному решению. Возможным объяснением этого является тот факт, что при приближении к точке экстремума целевой функции с гладкими производными норма градиента $\|\nabla_u f(t_k, u)\|$ может стремиться к нулю быстрее, чем растет шаг γ_k . Поэтому приближенное решение «отстает» от точного на каждом шаге. Методы, предложенные в работах [8, 9], допускают «опережение» точного решения, что не уменьшает их погрешности, но уменьшают время приближения к нему.

В случае, когда замеры значений целевой функции производятся в дискретные моменты времени, оценка производной $\nabla_u f(t, u)$ может быть получена только приближенно, например, с помощью сплайн-представления функции $f(t, u)$, которое не является однозначным. Ожидаемое следствие таких предположений — увеличение погрешности решения по сравнению с методами, использующими точные оценки производных целевой функции. Более того, погрешность решения с течением времени не будет убывать до нуля, т. е. неустранима. Можно ожидать, что ее величина должна увеличиваться с ростом интервала дискретизации временного интервала и скорости изменения целевого показателя. В такой ситуации понятие «отклонение решения от точного значения» (ввиду неоднозначности последнего) некорректно и может быть заменено на «отклонение решения от одного из точных значений» или на «отклонение решения от множества точных значений».

Цель настоящей статьи заключается в разработке метода приближения к экстремуму нестационарной целевой функции, заданной на дискретной шкале времени, обеспечивающего допустимую (контролируемую) величину погрешности. Также требуется определить условия, которым должны удовлетворять шкала времени, используемый целевой показатель, параметры влияния на него внешней среды. Такой метод может быть применен для построения экстремального регулятора системы, определенной в дискретные моменты времени.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть целевая функция $f(t, u)$ имеет непрерывные производные по аргументам и выпукла по u , где t — скаляр, $u \in R^n$ — вектор, и задана вместе

с вектором $u(t)$ на дискретном ряде значений $t_1 < t_2 < \dots < t_i$.

Рассматривается задача поиска безусловного экстремума целевой функции в момент времени t_{i+1} :

$$f(t_{i+1}, u) \rightarrow \underset{u}{\text{extr.}}$$

А именно, требуется определить значение вектора управляющей функции $u = u(t_{i+1})$, обеспечивающее приближение целевой функции $f(t_{i+1}, u)$ к экстремальному значению, используя значения $u(t_j), f(t_j, u(t_j)), j \leq i$, и оценить погрешность полученного результата.

2. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Пусть функция $f(t, u)$ имеет непрерывные частные производные первого порядка по аргументам. Обозначим k -ю компоненту вектора $u_i^k = u^k(t_i)$, $k = 1, \dots, n$, $f_i = f(t_i, u_i)$, $i = 1, 2, \dots$. Приближения частных производных первого порядка для данных по двум точкам имеют вид:

$$\left. \frac{\partial f}{\partial u^k} \right|_i \cong \frac{f_{i+1} - f_i}{u_{i+1}^k - u_i^k} = \frac{\Delta f_i}{\Delta u_i^k},$$

или в векторной форме

$$\nabla_u f_i \cong \bar{\nabla}_u f_i.$$

Здесь градиент и его приближения относятся к значениям аргументов t_i, u_i . Обозначим также $\bar{\nabla}_f u_i$ вектор с компонентами $\frac{\Delta u_i^k}{\Delta f_i}$.

Утверждение 1. Пусть функция $f(t, u)$ непрерывно дифференцируема по аргументам, известны ее значения на дискретном наборе значений t_i с шагом Δt , при каждом t_i $\left. \frac{\partial f}{\partial t} \right|_{t_i} \neq 0$ и существует точка стационарности функции по аргументу u .

Найдется величина h_i такая, что метод расчета

$$u_{i+1} = u_i + h_i \bar{\nabla}_f u_i / (\|\bar{\nabla}_u f_i\| + \alpha_i)$$

$$\text{при } 0 \leq \alpha_i \leq h / \left(\left. \frac{\partial f_i}{\partial t} \right|_{t_i} \Delta t \right) - (\|\bar{\nabla}_u f_i\|)$$

реализует последовательность значений u_i , отклоняющихся от точки стационарности $\tilde{u}$ так, что знаки разностей компонент $u_i^k - \tilde{u}^k$ и $u_{i+1}^k - \tilde{u}^k$, $k = 1, \dots, n$, противоположны. Таким образом, ре-



зультат u_i колеблется вокруг точек стационарности $\nabla_u f|_{\bar{u}, t_i} = 0$.

Утверждение 2. Пусть в дополнение к условиям Утверждения 1 существуют вторые производные функции $f(t, u)$ по аргументу u , которые образуют матрицу $\nabla_{uu} f$, для которой выполняется условие сильной выпуклости по u в каждой точке t_i, u_i : $\|\nabla_{uu} f\| > 0$.

При коэффициенте $|h_i| \geq \left| \frac{\partial f}{\partial t} \|\bar{\nabla}_u f\| \Delta t \right|_i$ и при $0 \leq \alpha_i \leq h_i \left(\frac{\partial f_i}{\partial t} \Delta t_i \right) - \|\bar{\nabla}_u f_i\|$, где приближение градиента относится к значениям аргументов t_i, u_i , метод расчета

$$u_{i+1} = u_i + h_i \bar{\nabla}_f u_i / (\|\bar{\nabla}_u f_i\| + \alpha_i)$$

реализует последовательность значений u_i , отклоняющихся от точек стационарности поочередно по каждой координате в противоположных направлениях на величину Δu_i , нижняя граница нормы которой $\inf \|\Delta u_i\| = \left| \frac{h_i \Delta t \|\bar{\nabla}_f u_i\|}{\|\nabla_{uu} f_i\|} \right|^{1/2}$ достигается

при $|h_i| = \left| \frac{\partial f}{\partial t} \|\bar{\nabla}_u f\| \Delta t \right|_i$.

Утверждение 3. Если решается задача на поиск максимума, выбор знака шага h_i подчиняется правилу: знак h_i совпадает со знаком величины $\left(\Delta f(t_i, u_i) - \Delta t_i \frac{\partial f}{\partial t} \right)_{\hat{t} \in [t_i, t_{i+1}]}$ при $\Delta f(t_i, u_i) \geq 0$ и имеет противоположный знак при $\Delta f(t_i, u_i) < 0$.

Доказательства всех трех утверждений приведены в приложении.

Замечание 1. Если задана допустимая погрешность решения δ , то допустимый класс функций $f(t, u)$, для которых $\|\Delta u_i\| \leq \delta$, должен удовлетворять

$$\text{условию } \left| \frac{\frac{\partial f}{\partial t} \Delta t \|\bar{\nabla}_f u_i\| \|\bar{\nabla}_u f_i\|}{\|\nabla_{uu} f_i\|} \right|^{1/2} \leq \delta \text{ на рассматриваемом отрезке времени (или, если необходимо, всей области определения). Из этого следует, что чем}$$

больше величина $\left| \frac{\partial f}{\partial t} \right|_i$ и Δt , тем больше погрешность.

Замечание 2. Из Утверждения 1 следует, что колебательный процесс обеспечивает приближение к экстремуму уже на первом шаге метода, а из Замечания 1 — что процесс не выходит за пределы трубки $\|\Delta u_i\| \leq \delta$.

Замечание 3. Утверждение 3 применимо при условии, когда производная $\frac{\partial f}{\partial t}$ изменяется в интер-

вале Δt_i так, что знак величины $\left(\Delta f(t_i, u_i) - \Delta t_i \frac{\partial f}{\partial t} \right)$

постоянный при $t \in [t_i, t_{i+1}]$. Для оценки $\Delta t_i \frac{\partial f}{\partial t} \Big|_{\hat{t}}$

можно использовать такую оценку приближения по трем точкам, если интервал времени Δt постоянный:

$$\Delta t_i \frac{\partial f}{\partial t} \Big|_{\hat{t}} \cong \frac{(f_i - f_{i-1})(u_{i+1} - u_i) - (f_{i+1} - f_i)(u_i - u_{i-1})}{u_{i+1} - 2u_i - u_{i-1}}.$$

Эта оценка может быть получена из системы уравнений

$$f_{i+1} - f_i \cong \frac{\partial f}{\partial u} (u_{i+1} - u_i) + \Delta t_i \frac{\partial f}{\partial t} \Big|_{\hat{t}},$$

$$f_i - f_{i+1} \cong \frac{\partial f}{\partial u} (u_i - u_{i+1}) + \Delta t_i \frac{\partial f}{\partial t} \Big|_{\hat{t}}$$

в предположении, что производная $\frac{\partial f}{\partial t}$ мало изменяется за время Δt .

Замечание 4. Полагая в методе расчета управления величину α такой, что $\alpha_i \geq \alpha = \text{const} \geq 0$, получим более широкий размах приращения

$$\Delta u_{i+1}(\alpha) = h \bar{\nabla}_f u_i / (\|\bar{\nabla}_u f_i\| + \alpha) \geq \Delta u(\alpha_i),$$

для которого знаки разностей $u_i^k - \hat{u}_i^k$ и $u_{i+1}^k - \hat{u}_i^k$ также противоположны. Чем больше разность $\alpha_i - \alpha$, тем больше размах колебаний $u_i - \hat{u}_i$.

Допустимую величину параметров α_i и h_i можно выбирать в довольно широком диапазоне, не имея

точных оценок величин $\frac{\partial f}{\partial t} \Big|_i, \|\nabla_{uu} f_i\|$. Чем ближе

значение параметра α_i к нулю, тем разброс Δu_i будет больше. Уменьшение параметра h_i уменьшает разброс Δu_i , но при слишком малом h_i алгоритм расходится (суммарная погрешность нарастает в процессе итераций).

Замечание 5. Поскольку влияние внешних факторов на целевую функцию отражается на величине производной $\frac{\partial f}{\partial t} \Big|_{t_i}$, то разброс значений уп-

равления прямо зависит от величины этого воздействия.

Замечание 6. Поскольку значения целевой функции $f(t, u)$ вычисляются (или измеряются) только

в узлах дискретной сетки времени и для соответствующих значений векторов управления, можно построить сплайн-приближение этой функции нужной гладкости и уже для нее применять точные методы градиентного спуска [10, 11]. Однако точность полученного результата останется конечной, поскольку такая сплайн-аппроксимация не единственна. К тому же вычислительная сложность этого метода будет значительно превышать сложность предложенного подхода.

3. ПРИМЕР РАСЧЕТА

В качестве иллюстрации метода приближенного поиска экстремума для нестационарной системы с дискретным временем используется численная реализация модели экстремального регулятора для упрощенной модели выпуска продукции. Она представлена приведенными ниже конечно-разностными соотношениями в дискретном времени. Однако при поиске решения, в соответствии с постановкой задачи, используются только значения целевой функции и управления в предыдущий и текущий моменты времени.

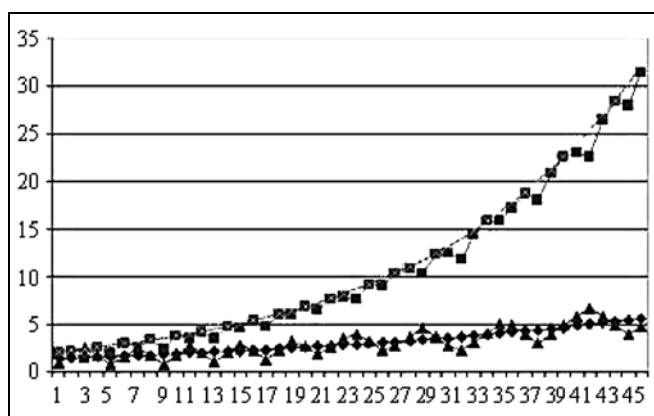
В качестве управления (и одновременно параметра состояния) выступает объем выпуска продукции $u(t)$. Целевая функция — прибыль

$$r(t) = f(t, u(t)) = p(t)u(t) - C_0 - cu^2(t) \rightarrow \max_u,$$

где $t = 0, 1, 2, \dots$; $p(t)u(t)$ — выручка; C_0 — постоянные издержки; $C_0 + cu^2$ — оценка полных издержек, включающая оценки затрат на фондообразование, оплаты труда и прямых затрат; $p(t)$ — цена единицы продукции (параметр внешней среды),

$$p(t) = dp(t-1), \quad p(0) = p_0.$$

Здесь d — коэффициент роста, p_0 — начальная цена.



Результаты расчетов для экстремального регулятора: $\blacklozenge$ — оптимальное решение; $\blacktriangle$ — расчетное решение; $\times$ — оптимальная прибыль; $\blacksquare$ — расчетная прибыль

Оценка предельной прибыли (градиента целевой функции по управлению) вычисляется так:

$$e(t) = (r(t) - r(t-1))/(u(t) - u(t-1)).$$

Управление на следующем шаге рассчитывается в соответствии с методом приближения к экстремуму:

$$u(t-1) = u(t) + h/((e(t)|e(t)| + \alpha)).$$

Здесь δ — параметр стабилизации, k — коэффициент связи.

На рисунке приведены результаты расчетов для модели выпуска продукции с параметрами $C_0 = 1$; $c = 1$ и экстремального регулятора с параметрами $\alpha = 0,1$; $h = 1$. Цена на продукцию с начальным значением $p_0 = 3$ изменяется с постоянным темпом $d = 1,03$. Точное оптимальное решение имеет вид:

$$u(t) = \frac{p(t)}{2c}.$$

Оптимизирующий регулятор выпуска продукции довольно быстро (за один шаг) приближает выпуск продукции к оптимальному и с течением времени отслеживает его оптимальный уровень в рамках погрешности метода.

Размах колебаний вокруг оптимального уровня выпуска обусловлен дискретным характером модели, нестационарным поведением цены на продукцию и неточностью подбора параметров регулятора. С ростом производной цены по времени погрешность решения возрастает, что соответствует приведенной оценке приближения. Величина h_i на начальных шагах имеет оценку

$$|h_i| = \left| \frac{\partial f}{\partial t} \right| \left\| \bar{\nabla}_u f_i \right\| \Delta t_i \approx 1, \text{ знак } +1; \text{ оценка коэффициента } \alpha_i$$

выбиралась из соображения устойчивости процесса так, чтобы $\left\| \bar{\nabla}_u f_i \right\| \gg \alpha_i > 0$. На траектории их можно уточнять, подбирая экспериментально так, чтобы уровень, достигаемый целевой функцией $f(t, u(t))$ в течение нескольких шагов дискретного алгоритма, был максимальным. В данном примере значения этих коэффициентов α_i , h_i на всей траектории были постоянными.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассматриваемый метод мало критичен к выбору параметров δ , k . Последние можно определять, исходя из условий применения метода в конкретной ситуации, соответствующей условиям прикладной задачи. Так, в приведенном выше примере величина параметров соответствует темпу прироста цены продукции. Кроме того, для оценки h могут быть применены конечно-разностные приближения производных функции $f(t, u)$. Параметр α тогда может выбираться в соответствии с оценкой $\alpha \approx \left\| \bar{\nabla}_u f_0 \right\|^2 h / \max_t \left| \frac{\partial f}{\partial t} \right|$. Численные эксперименты показали, что варьирование параметров регулятора в достаточно широком диапазоне не оказывает существенного влияния на качественное поведение расчетной траектории.



ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство Утверждения 1. Используя линейный отрезок ряда Тейлора — Лагранжа для функции $f(t, u)$ в точке t_{i+1}, u_{i+1} , где остаточный член задан в промежуточной точке $t_i \leq \hat{t} \leq t_{i+1}$; $\hat{u}^k \in [u_i^k, u_{i+1}^k]$, получим

$$\begin{aligned} f(t_{i+1}, u_{i+1}) - f(t_i, u_i) &= \\ &= \sum_k \frac{\partial f}{\partial u^k} \Big|_{\hat{t}, \hat{u}} (u_{i+1}^k - u_i^k) + \frac{\partial f}{\partial t} \Big|_{\hat{t}, \hat{u}} (t_{i+1} - t_i). \end{aligned}$$

По необходимому условию оптимальности положим $\frac{\partial f}{\partial u^k} \Big|_{\hat{t}, \hat{u}} = 0$. Тогда

$$\begin{aligned} \Delta u_i^k &= u_{i+1}^k - u_i^k = \\ &= (t_{i+1} - t_i) \frac{\partial f}{\partial t} \Big|_{\hat{t}, \hat{u}} / \frac{f(t_{i+1}, u_{i+1}) - f(t_i, u_i)}{u_{i+1}^k - u_i^k}. \end{aligned}$$

Или в векторном виде

$$\Delta u_i = \Delta t_i \frac{\partial f}{\partial t} \Big|_{\hat{t}, \hat{u}} \bar{\nabla}_f u_i. \quad (1)$$

Приведем метод вычисления, пригодный для численной реализации. Будем определять α_i и h_i из соотношения

$$\frac{\partial f_i}{\partial t} = h_i / (\Delta t_i (\|\bar{\nabla}_u f_i\| + \alpha_i)). \quad (2)$$

Тогда вблизи точки стационарности $\hat{u}_i \in [u_i, u_{i+1}]$ имеем

$$\Delta u_i = h_i \bar{\nabla}_f u_i / (\|\bar{\nabla}_u f_i\| + \alpha_i).$$

Поскольку $\hat{u}_i$ — внутренняя точка интервала $[u_i, u_{i+1}]$, знаки разностей $u_i^k - \hat{u}_i^k$ и $u_{i+1}^k - \hat{u}_i^k$ противоположны. Таким образом, результат u_i покоординатно колеблется вокруг точек стационарности $\nabla_u f|_{\hat{u}_i} = 0$.

Доказательство Утверждения 2. Обозначим $\bar{\Delta u}$ погрешность метода на текущем шаге, обусловленную дискретностью шкалы времени. Оценка градиента вблизи точки стационарности имеет вид:

$$\bar{\nabla}_u f_i = \nabla_{uu} f_i \bar{\Delta u}.$$

Если величина производной $\frac{\partial f}{\partial t}$ известна точно, то для величин h, α , удовлетворяющих соотношению (2), пользуясь условием (1), получим

$$\|\bar{\Delta u}\| = |h| \Delta t_i \|\bar{\nabla}_f u_i\| / (\|\nabla_{uu} f_i\| \|\bar{\Delta u}\| + \alpha),$$

откуда, решая квадратное уравнение относительно $\|\bar{\Delta u}\|$, получим

$$\|\bar{\Delta u}\| = -\frac{\alpha}{2\|\nabla_{uu} f_i\|} + \left(\frac{\alpha^2 + 4|h| \Delta t_i \|\bar{\nabla}_f u_i\| \|\nabla_{uu} f_i\|}{4\|\nabla_{uu} f_i\|^2} \right)^{1/2}.$$

Нетрудно видеть, что функция $\|\bar{\Delta u}\|$ (α) монотонно возрастающая.

Из соотношения (2) также следует:

$$\begin{aligned} h_i &= \frac{\partial f_i}{\partial t} (\|\bar{\nabla}_u f_i\| + \alpha_i) \Delta t_i, \\ |h_i| &\geq \left| \frac{\partial f}{\partial t} \Big|_{\hat{t}} \bar{\nabla}_u f_i \Delta t_i \right|. \end{aligned} \quad (3)$$

При $\alpha = 0$ из выражений (2) и (3) следует:

$$\|\bar{\Delta u}\|(\alpha = 0) = \left(\frac{|h| \Delta t_i \|\bar{\nabla}_f u_i\|}{\|\nabla_{uu} f_i\|^2} \right)^{1/2} = \left| \frac{\frac{\partial f}{\partial t} \Big|_{\hat{t}} \Delta t_i \|\bar{\nabla}_f u_i\| \|\bar{\nabla}_u f_i\|}{\|\nabla_{uu} f_i\|} \right|^{1/2}.$$

Из последнего равенства тогда следует, что полученная оценка

$$\|\bar{\Delta u}\| = \left| \frac{\frac{\partial f}{\partial t} \Big|_{\hat{t}} \Delta t_i \|\bar{\nabla}_f u_i\| \|\bar{\nabla}_u f_i\|}{\|\nabla_{uu} f_i\|} \right|^{1/2}$$

представляет собой нижнюю границу погрешности решения.

Доказательство Утверждения 3. Как следует из утверждения 1, интервал $[u_i, u_{i+1}]$ не содержит точку стационарности, если для каких-либо или всех координат разности $u_{i+1} - u_i$ имеют одинаковый знак. В этом

случае можно предположить $\frac{\partial f}{\partial u^k} \Big|_{\hat{t} \in [t_i, t_{i+1}]} \neq 0$, тогда

$$\Delta u_i^k = u_{i+1}^k - u_i^k = \frac{f(t_{i+1}, u_{i+1}) - f(t_i, u_i) - (t_{i+1} - t_i) \frac{\partial f}{\partial t} \Big|_{\hat{t}}}{\frac{\partial f}{\partial u^k} \Big|_{\hat{t}}}.$$

Или в векторном виде

$$\Delta u = \left(\Delta f(t_i, u_i) - \Delta t_i \frac{\partial f}{\partial t} \Big|_{\hat{t}} \right) \nabla_{f_i} u \Big|_{\hat{t}}.$$

Если решается задача на максимум, при фиксированной абсолютной величине шага h направление спуска выбирается из условия

$$\text{sign}(h) = \text{sign} \left(\Delta f(t_i, u_i) - \Delta t_i \frac{\partial f}{\partial t} \Big|_{\hat{t}} \right), \text{ если } \Delta f(t_i, u_i) > 0,$$

$$\text{sign}(h) = -\text{sign} \left(\Delta f(t_i, u_i) - \Delta t_i \frac{\partial f}{\partial t} \Big|_{\hat{t}} \right), \text{ если } \Delta f(t_i, u_i) < 0.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Гусев В.Б. Согласование критериев принятия решений при целевом планировании // Сибирский журнал промышленной математики. — 2005. — Т. VIII. — № 2 (22). — С. 32—45. [Gusev, V.B. Soglasovanie kriteriev prinyatiya reshenij pri celevom planirovanii / Sibirskij zhurnal industrial'noj matematiki. — 2005. — T. VIII. — No. 2 (22). — P. 32—45. (In Russian)]

2. Гусев В.Б. Модели автономного управления в развивающихся системах // Проблемы управления. — 2018. — № 6. — С. 2—17. [Gusev, V.B. Models of autonomous control in the developing systems / Control Sciences. — 2018. — No. 6. — P. 2—17. (In Russian)]
 3. Красовский А.А. Динамика непрерывных самонастраивающихся систем. — М., 1963. — 468 с. [Krasovskij, A.A. Dinamika nepreryvnyh samonastroyayushchih sistem. — M., 1963. — 468 s. (In Russian)]
 4. Моросанов И.С. Релейные экстремальные системы. — М., 1964. — 267 с. [Morosanov, I.S. Relejnye ekstremal'nye sistemy. — M., 1964. — 267 s. (In Russian)]
 5. Кунцевич В.М. Импульсные самонастраивающиеся и экстремальные системы автоматического управления. — Киев: Техника, 1966. — 282 с. [Kuncevich, V.M. Impul'snye samonastroyayushchiesya i ekstremal'nye sistemy avtomaticheskogo upravleniya. — Kiev: Tekhnika, 1966. — 282 s. (In Russian)]
 6. Растринин Л.А. Системы экстремального управления. — М., 1974. — 630 с. [Rastrigin, L.A. Sistemy ekstremal'nogo upravleniya. — M., 1974. — 630 s. (In Russian)]
 7. Xi, Y., Wang, F. Extreme pathway analysis reveals the organizing rules of metabolic regulation // PLOS ONE. — 2019. — Vol. 14, no. 2. — DOI: 10.1371/journal.pone.0210539.
 8. Селезнева С.В., Коновалова И.И. Моделирование алгоритма экстремального регулятора подачи воздуха в топку // Электронный научный журнал «APRIORI. Серия: естественные и технические науки». — 2014. — № 3. — 6 с. [Selezneva, S.V., Konvalova, I.I. Modelling of Algorithm the Extreme Supply Regulator of Air in the Firebox // Electronic scientific journal «APRIORI. Series: Natural and technical sciences». — 2014. — No. 3. — 6 p. (In Russian)]
 9. Егоров А.И. Основы теории управления. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. — 504 с. [Egorov, A.I. Osnovy teorii upravleniya. — M.: FIZMATLIT, 2004. — 504 s. (In Russian)]
 10. Поляк Б.Т. Введение в оптимизацию. — М.: Наука, 1983. — 384 с. [Polyak, B.T. Vvedenie v optimizaciyu. — M.: Nauka, 1983. — 384 s. (In Russian)]
 11. Попков А.Ю. Градиентные методы для нестационарных задач безусловной оптимизации // Автоматика и телемеханика. — 2005. — № 6. — С. 38—46. [Popkov, A.Yu. Gradient Methods for Nonstationary Unconstrained Optimization Problems // Automation and Remote Control. — 2005. — Vol. 66. — P. 883—891].
- Статья представлена к публикации членом редколлегии М.В. Хлебниковым.
- Поступила в редакцию 11.02.2020, после доработки 08.10.2020.
Принята к публикации 03.11.2020.
- Гусев Владислав Борисович — канд. физ.-мат. наук, Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, г. Москва, ✉ gusvbr@mail.ru.

UNCONSTRAINED OPTIMIZATION OF A TIME-VARYING OBJECTIVE FUNCTION ON A DISCRETE TIME SCALE

V.B. Gusev

V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences, Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia

✉ gusvbr@mail.ru

Abstract. This paper develops an approximate method to optimize a time-varying objective function on a discrete time scale. The method should provide an admissible (controllable) error value. The conditions to be satisfied by the time scale, the objective function, and the environment's parameters are established. The unconstrained optimization of a time-varying objective function that depends on the control vector components is considered on a discrete set of time instants. To find a solution, a discrete gradient constrained optimization method is proposed. Efficiency conditions for the gradient method are formulated. A lower bound on the solution error is obtained in terms of the time step, the rate of change of the objective function, and its first- and second-order derivatives with respect to the control vector components. The method is illustrated on a numerical example of an optimal controller design for a time-varying plant with a nonlinear objective function. According to the numerical experiments, the wide-range variations of the controller's parameters have no significant effect on the qualitative behavior of the resulting trajectory. The method can be used to calculate an optimal control function for a system with a discrete-valued objective function.

Keywords: time-varying system, optimal controller, unconstrained optimization, lower bound on error.

МОДЕЛИ ОПЫТА

М.В. Белов, Д.А. Новиков

Аннотация. Предложена общая вероятностная модель, единообразно описывающая формирование и освоение индивидуального, коллективного и общественного опыта на различных уровнях человеческой деятельности. Рассмотрен ряд ее частных случаев, охватывающих многие известные в математической психологии модели научения, а также модели разработки и освоения технологий, развиваемые в рамках методологии комплексной деятельности.

Ключевые слова: опыт, деятельность, знания, технология, культура, кривая опыта.

ВВЕДЕНИЕ

Активные системы. Выделим два класса систем, включающих в себя человека (такие системы, заимствуя терминологию [1, 2], будем называть *активными системами*):

— *естественные*, существующие или возникающие «самостоятельно», в отсутствие внешнего субъекта, формирующего или задающего цель их деятельности. Такие системы осуществляют целеполагание самостоятельно, их глобальная цель — развитие (для которого необходимы сохранение и, быть может, адаптация и воспроизводство). В терминах системотехники [3, 4] активные системы с внутренним целеполаганием являются *системами, состоящими из систем* (system of systems, SoS), относящимися к классам коллаборативных (collaborative) или виртуальных (virtual);

— *искусственные*, создаваемые некоторым субъектом для достижения его целей. В терминах системотехники [3, 4] активные системы с внутренним целеполаганием являются управляемыми (directed SoS) или оповещаемыми (acknowledged SoS) извне системами, состоящими из систем.

В зависимости от наличия выделяемого в явном виде субъекта, можно различать *субъектные* (осуществляющие собственную деятельность, единообразно описываемую *методологией комплексной деятельности* (МКД) [5] для любого вида этих систем) и *бессубъектные* системы (последние сами по себе деятельности не осуществляют; точнее говоря, их «деятельность» представляет собой совокупность деятельностей их составляющих).

Получаем три варианта (из четырех возможных комбинаций один вариант логически противоречив), примеры реализаций которых приведены в табл. 1.

Естественные системы включают в себя в качестве своих составляющих естественные системы

Таблица 1

Классификация систем

	Естественные системы (внутреннее целеполагание)	Искусственные системы (внешнее целеполагание)
Субъектные системы	Индивид	Организация Предприятие Государство Частный случай: индивид-сотрудник, у которого внутренние мотивы согласованы с внешними целями
Бессубъектные системы	Социальные общности: Группа Семья Род Племя Общество Этнос Народ Экономические общности: Рынок Набор независимых взаимодействующих экономических субъектов	—

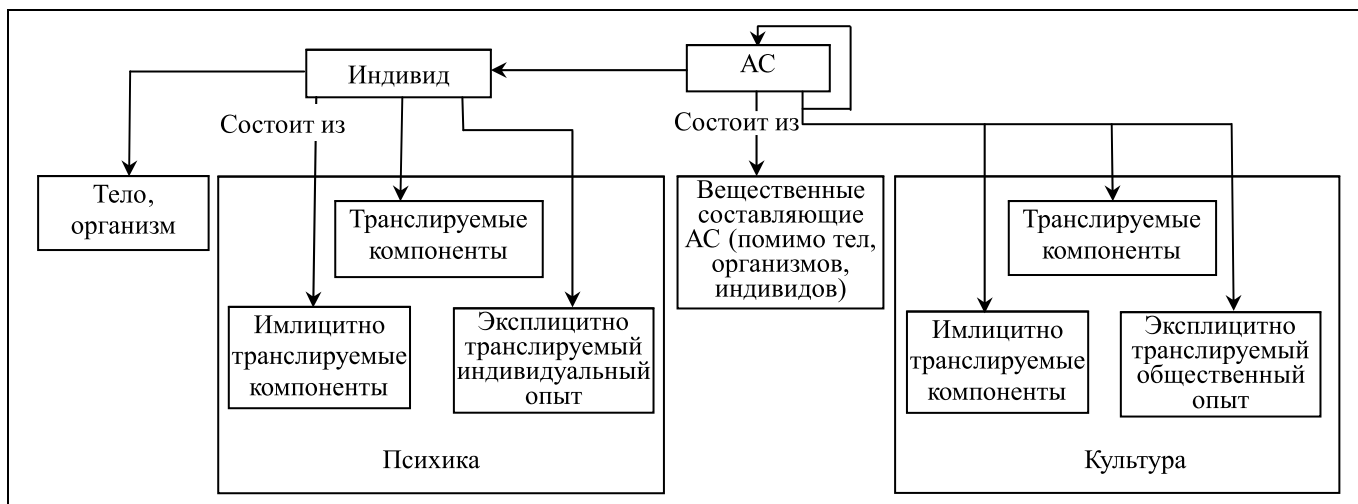


Рис. 1. Структура активной системы

(пример — любая социальная общность включает в себя индивидов) и искусственные системы (пример — рынок). Искусственные системы также могут включать в себя в общем случае в качестве своих составляющих и естественные системы (пример — индивиды и их группы, работающие на предприятии), и искусственные системы (пример — подсистемы предприятия). В общем же случае активная система (АС) может включать в себя индивидов и другие АС (рис. 1).

В качестве отступления отметим, что человеческая деятельность может рассматриваться в рамках АС разного уровня и масштаба (табл. 2), и перспективной задачей МКД является их единообразное описание (за исключением, наверное, двух нижних уровней).

Кроме того, отметим, что отнесение той или иной системы к конкретному классу зависит от аспекта ее рассмотрения. Так, например, социальная группа сама по себе является бессубъектной естественной системой. Но при исследовании про-

блематики управления такой группой со стороны других субъектов (индивида, другой группы или государства) ее вместе с субъектом управления необходимо рассматривать как субъектную искусственную систему.

Для естественных бессубъектных систем системообразующими факторами служат как механизмы функционирования (*механизм* — система, устройство, определяющие порядок какого-нибудь вида деятельности [2]) этих систем, т. е. условия, принципы, нормы, требования и критерии оценки как деятельности составляющих системы по отдельности, так и их взаимодействия [5, 6]. Механизмы функционирования образуют многоуровневую систему вложенных контуров обратной связи, определяющих зависимость условий, принципов, норм и т. д. (в том числе управляющих воздействий) от предыдущих и текущих результатов деятельности и факторов неопределенности. Механизмы функционирования бессубъектных систем, как правило, являются рефлексивными — приме-

Таблица 2

Человеческая деятельность

Уровень	Типовой объект	Доминирующая форма активности элементов
Культурный	Этнос, народ	Воспроизводство и развитие деятельности
Политический	Государство, институт	Институционализация деятельности
Экономический	Организация, предприятие	Коллективная практическая деятельность
Социальный	Общество	Коммуникативная деятельность
	Группа, коллектив; семья, род, племя	Коллективная практическая деятельность
Психический	Личность	Индивидуальная практическая деятельность
	Индивид	Внутренняя деятельность
Биологический	Организм	Жизнедеятельность
Физический	Тело	Движение

рами служат естественный отбор, конкуренция, конфликты, распространение идей и др. Эти механизмы обеспечивают (само)управление такими системами.

В подсистемах (АС или индивидах) выделим материальную составляющую (например, для индивида — его тело и материальные средства деятельности) и нематериальную (для индивида — *психика*, для коллективного субъекта — *культура*) (см. рис. 1). Значительную часть нематериальных компонентов составляет опыт.

Опыт. Под *опытом* понимают [7–9]:

1) совокупность практически усвоенных знаний, навыков, умений и привычек (индивидуальный опыт);

2) отражение в человеческом сознании объективного мира, общественной практики, направленной на изменение мира (и общественно-исторический опыт, и индивидуальный опыт каждого отдельного человека).

Категория опыта тесно связана с такими категориями, как образование, технологии и культура (рис. 2).

Действительно, *образование* представляет собой развитие опыта [10] и включает в себя научение (*научение* — процесс и результат приобретения индивидуального опыта [11]). Современный обзор математических моделей научения можно найти в работах [11, 12], обзор моделей научения в теории автоматического управления — в работе [13].

Технологии (в соответствии с работой [5], технология — система условий, критериев, форм, методов и средств последовательного достижения поставленной цели) являются операциональным отражением проверенного массовой практикой и систематизированного опыта практической деятельности [14].

Культура включает в себя [7]:

— объективные результаты деятельности людей (машины, технические сооружения, результаты познания (книги, произведения искусства, нормы права и морали и т. д.) — первый компонент культуры;

— субъективные человеческие силы и способности, реализуемые в деятельности (ощущения, восприятия, знания, умения, производственные и профессиональные навыки, уровень интеллектуального, эстетического и нравственного развития, мировоззрение, способы и формы взаимного общения людей и т. д.) — второй компонент культуры [15].

Предметные результаты деятельности человечества (первый компонент культуры) отражаются в таких формах общественного сознания, как язык (понимаемый в широком смысле — как естественный родной и иностранные языки, так и искусственные языки), обыденное сознание, политическая

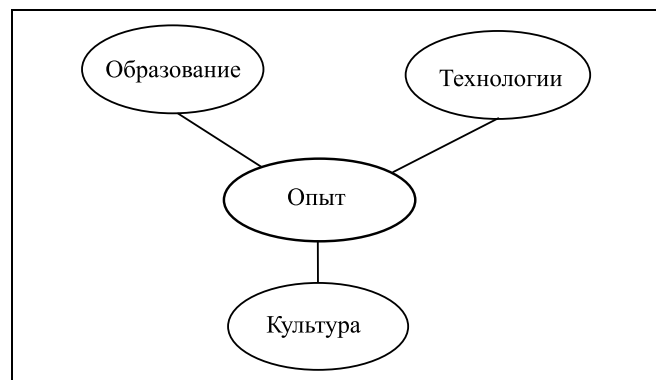


Рис. 2. Опыт и смежные категории

идеология, право, мораль, религия (или антирелигия — атеизм), искусство, наука, философия [15].

Второй компонент культуры — субъективные человеческие силы и способности. Они выражаются в личностных знаниях, в том числе в образных, чувственных знаниях, которые не передаются словами (понятиями), в умениях, навыках, в развитии тех или иных индивидуальных способностей, в мировоззрении каждого человека и т. д. [7].

Приведем несколько цитат и определений, характеризующих понятие культуры:

— «совокупность генетически ненаследуемой информации в области поведения человека» (Ю.М. Лотман);

— совокупность устойчивых форм человеческой деятельности (*организационная культура*);

— «Как зародыш в утробе матери повторяет в фантастически ускоренном масштабе времени всю эволюцию жизни на Земле протяженностью миллиард лет, так и растущий человек за 20 лет должен освоить культуру, которую человечество создавало 4 миллиона лет.» [7, с. 32];

— совокупность принятых типовых норм деятельности (способ стандартизации и регуляции поведения) и соответствующих результатов. Основная функция культуры — воспроизводство и конструирование/развитие деятельности.

Таким образом, культура может рассматриваться как обобщенный и проверенный общественной практикой опыт [7, 12, 16, 17] — см. рис. 1.

Формирование опыта может происходить путем его самостоятельного приобретения субъектом (индивидуальным или коллективным) в процессе своей деятельности или посредством освоения «чужого» опыта в процессе учебной деятельности (рис. 3).

В зависимости от способов и средств фиксации и трансляции опыта (или даже шире — в случае индивида — компонентов психики, если относить к широко трактуемому опыту представления, убеждения, отношения, мировоззрение личности и др.) можно различать:

— *эксплицитно транслируемый опыт* (explicit experience; формой передачи которого, как правило, является текст; пример — знания, технологии);

— *имплицитно транслируемый опыт* (tacit experience, tacit knowledge; который передается, как правило, в невербализуемых и нетекстуальных формах; пример — убеждения, мировоззрение);

— *нетранслируемые компоненты*, которые, может быть, и транслируются «биологически» (пример — биопсихические свойства личности; специфика физиологии индивидов, обусловленная климатом, ландшафтом и образом жизни), но настолько медленно, что в рамках настоящего рассмотрения могут считаться неизменными.

Виды опыта перечислены в табл. 3.

Субъект в процессе своей деятельности может участвовать (рис. 4) в:

1) освоении общественного опыта;

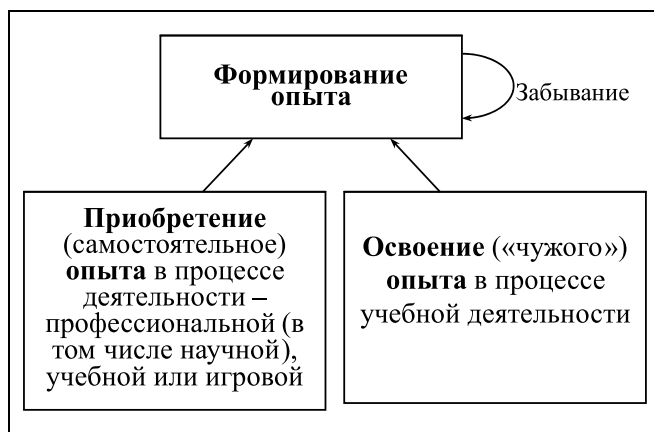


Рис. 3. Формирование опыта

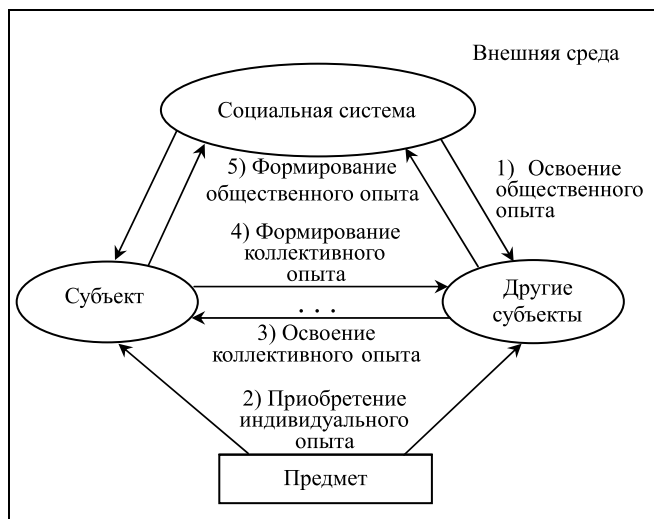


Рис. 4. Индивидуальный, коллективный и общественный опыт

Таблица 3

Виды опыта

Уровень	Опыт
Социальная система	Общественный
Группа	Коллективный
Личность	Индивидуальный

2) формировании/приобретении индивидуального опыта;

3) освоении коллективного опыта;

4) формировании коллективного опыта;

5) формировании общественного опыта.

Освоение общественного и/или коллективного опыта может условно рассматриваться как «обучение с учителем», а формирование индивидуально-го опыта — как «обучение без учителя».

Задачей настоящего исследования является создание общей модели формирования опыта, которая (или ее частные случаи) адекватно и единообразно описывала бы формирование и освоение индивидуального, коллективного и общественного опыта (см. рис. 4), транслируемого эксплицитно или имплицитно на различных уровнях деятельности (см. табл. 2) любых классов систем (см. табл. 1).

Структура изложения такова: в § 1 вводится общая модель опыта; в § 2 приводится система классификации моделей опыта; в § 3 и 4 рассматривается ряд частных моделей формирования/освоения соответственно индивидуального и коллективного/общественного опыта; заключение содержит перечисление перспективных направлений дальнейших исследований.

1. ОБЩАЯ МОДЕЛЬ ФОРМИРОВАНИЯ ОПЫТА

Расширим модель научения, приведенную в разделе 3.3.4 книги [18], дополнив ее эффектами изменчивости внешней среды, приводящими к устареванию опыта или, что эквивалентно, забыванию/утраты опыта, а также более сложного формирования опыта с учетом освоения опыта другими субъектами и взаимодействия субъектов¹.

¹ В предложенной модели эффект физиологического забывания опыта не будем отделять от эффекта отказа от ранее усвоенного опыта при появлении новых технологий. Разделение двух, вообще говоря, разноприродных и разноскоростных эффектов — объективного изменения технологий и вызванного этим жесткого или мягкого (с учетом распределения параметров АЭ) отказа от опыта и субъективного физиологического эффекта его забывания и, в общем виде, регулярной тенденции возрастных изменений параметров познавательных характеристик АЭ — позволит (при варьировании характеристик двух скоростей) анализировать ряд социальных эффектов (культурное взаимодействие поколений, снижение коллективного опыта (в том числе культуры) в революционные периоды и др. Эти эффекты могут стать предметом дальнейших исследований.

Пусть АС состоит из известного множества $N = \{1, \dots, n\}$ активных элементов (АЭ — элементов активной системы, которые могут быть индивидуальными, или АС нижестоящего уровня).

Будем считать, что в каждом периоде каждый из АЭ наблюдает одно из K возможных значений фактора неопределенности (ФН); в общем случае значения, наблюдаемые разными АЭ, отличаются друг от друга. Введем понятие «комплексного фактора неопределенности», его текущее состояние будем характеризовать совокупностью всех состояний, с которым сталкиваются все АЭ в периоде t .

Комплексный ФН представим матрицей $\omega(t) = \|\omega_{ik}(t)\|$ с бинарными элементами ($\omega_{ik}(t) \in \{0; 1\}$). Пусть в текущем периоде t ФН для i -го АЭ принял состояние $k(i)$, тогда единичные значения примут элементы $\omega_{ik(i)}(t)$, остальные элементы примут нулевые значения. Очевидно, матрица $\|\omega_{ik}(t)\|$ обладает свойством

$$\sum_{k=1}^K \omega_{ik}(t) = 1, i = \overline{1, n}.$$

Обозначим множество всех таких матриц через Ω (очевидно, его мощность равна K^n). Тогда на множестве Ω зададим распределение вероятностей состояний комплексного ФН среды $\{p_{\omega}(t)\}$, зависящее от времени, и будем считать, что текущее состояние $\omega(t)$ наступает независимо от предыдущих. Определим функцию $u(\omega)$ нумерации элементов множества: $u(\omega) = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^K kn^{i-1} \omega_{ik}$.

$$\text{Тогда } \sum_{\omega \in \Omega} p_{\omega}(t) = \sum_{\omega \in \Omega} p_{u(\omega)}(t) = 1.$$

Частным является случай, когда состояния, наблюдаемые каждым из АЭ, независимы друг от друга; обозначим $p_{ik}(t)$ вероятность наблюдения i -м

АЭ k -го состояния $\left(\sum_{k=1}^K p_{ik}(t) = 1, i = \overline{1, n} \right)$, также

обозначим $k(i)$ номер состояния, наблюдаемого i -м АЭ, тогда $p_{\omega}(t) = \prod_{i=1}^n p_{ik(i)}(t)$.

Опишем состояние АС матрицей $v(t) = \|v_{ik}(t)\|$, элементы которой — бинарные переменные, характеризующие формирование опыта (освоение технологии — дальше в рамках математической модели будем использовать этот термин) АЭ для различных состояний ФН. Элемент $v_{ik}(t)$ принимает значение 1, если после t -го периода i -й АЭ сформировал/освоил опыт при k -м состоянии ФН.

Предполагаем следующий механизм эволюции АС в течение периода $t + 1$.

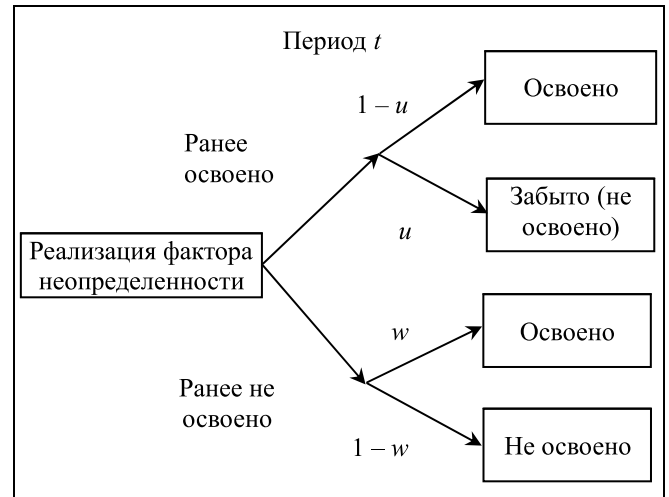


Рис. 5. Альтернативы в периоде t

Пусть комплексный ФН принял состояние $\omega(t + 1)$, при этом i -й АЭ сталкивается с k -м состоянием ФН. Тогда (см. рис. 3):

- для любого неосвоенного i -м АЭ состояния ФН l ($v_{il}(t) = 0$) происходит формирование опыта ($v_{il}(t + 1) = 1$) с вероятностью $0 \leq w_{ikl}(\{v(\cdot)\} | t - \tau; t) \leq 1$, зависящей в общем случае от времени, от текущего $v(t)$ и τ предыдущих состояний АС, а с вероятностью $1 - w_{ikl}(\{v(\cdot)\} | t - \tau; t)$ формирования опыта не происходит ($v_{il}(t + 1) = 0$). Здесь и ниже с помощью нотации $\{v(\cdot)\} | t_1; t_2$ будем обозначать *предысторию* — упорядоченный набор значений величин $v(\cdot)$ в течение промежутка от периода t_1 до t_2 включая граничные периоды (если $t_2 = t_1$, то зависимость от предыстории отсутствует);
- для любого освоенного i -м АЭ состояния ФН l ($v_{il}(t) = 1$) происходит забывание опыта ($v_{il}(t + 1) = 0$) с вероятностью $0 \leq u_{ikl}(\{v(\cdot)\} | t - \tau; t) \leq 1$, зависящей в общем случае от времени, от текущего $v(t)$ и τ предыдущих состояний АС, а с вероятностью $1 - u_{ikl}(\{v(\cdot)\} | t - \tau; t)$ забывания не происходит ($v_{il}(t + 1) = 1$).

Семантика рассматриваемой модели отражает возможность формирования опыта, в том числе — освоения активным элементом технологии, передачи знаний от одних элементов другим, забывания и/или устаревания знаний, в том числе благодаря эволюции внешней среды и повторной адаптации АС к изменениям внешней среды, отражаемым реализующимися значениями ФН.

При этом процесс формирования-забывания опыта для каждого состояния ФН каждым АЭ предполагается бинарным (состояния = $\langle \text{освоено} | \text{не}$

освоено) и случайным, что отражает его неопределенность. Сами переходы из одного состояния в другое для разных АЭ и разных состояний ФН происходят независимо друг от друга. Предполагается, что в течение одного периода не может происходить более одного события — формирования опыта или его забывания. Вместе с тем, зависимости вероятностей перехода из одного состояния в другое от текущего и предыдущего состояний всех АЭ в составе АС позволяют отражать достаточно сложные закономерности поведения АС. Например, наблюдая одно состояние, АЭ может в общем случае сформировать (путем передачи ему опыта другими АЭ) опыт, соответствующий другому состоянию ФН.

Запишем уравнения эволюции вероятностей освоения и математических ожиданий уровней сформированности опыта. Обозначим $\mathbf{q}(t) = \|q_{ik}(t)\|$, где вероятность того, что k -е состояние ФН освоено i -м АЭ после t -го периода $q_{ik}(t) = \Pr(v_{ik}(t) = 1) = E[v_{ik}(t)]$, тогда по формуле полной вероятности

$$q_{ik}(t+1) = \Pr(v_{ik}(t+1) = 1 | v_{ik}(t) = 0)$$

$$\Pr(v_{ik}(t) = 0) + \Pr(v_{ik}(t+1) = 1 | v_{ik}(t) = 1)$$

$$\begin{aligned} \Pr(v_{ik}(t) = 1) &= W_{ik}(\mathbf{q}(t))(1 - q_{ik}(t)) + \\ &+ (1 - U_{ik}(\mathbf{q}(t)))q_{ik}(t) = W_{ik}(\mathbf{q}(t)) + \\ &+ [1 - W_{ik}(\mathbf{q}(t)) - U_{ik}(\mathbf{q}(t))]q_{ik}(t), \end{aligned} \quad (1)$$

где функции $W_{ik}(\mathbf{v}(t))$ и $U_{ik}(\mathbf{v}(t))$ имеют смысл вероятностей $w_{ikl}\{\cdot\}$ освоения и $u_{ikl}\{\cdot\}$ забывания, усредненных по состояниям ФН с учетом их вероятностей $p_m(t)$ и вероятностей состояний АС в текущий и предыдущие периоды:

$$\begin{aligned} W_{ik}(\mathbf{q}(t)) &= \sum_{m=1}^{K^n} p_m(t) \sum_{\substack{\mathbf{z}(t) \dots \mathbf{z}(t-\tau) \\ z_{ik}(t) = 0}} w_{imk}(\{\mathbf{z}(t)|t-\tau; t\}) \times \\ &\times \pi(\{\mathbf{z}(\cdot), \mathbf{q}(\cdot)|t-\tau; t\}, i^-, k^-), \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} U_{ik}(\mathbf{q}(t)) &= \sum_{m=1}^{K^n} p_m(t) \sum_{\substack{\mathbf{z}(t) \dots \mathbf{z}(t-\tau) \\ z_{ik}(t) = 1}} u_{imk}(\{\mathbf{z}(t)|t-\tau; t\}) \times \\ &\times \pi(\{\mathbf{z}(\cdot), \mathbf{q}(\cdot)|t-\tau; t\}, i^-, k^-), \end{aligned} \quad (3)$$

где $\pi(\{\mathbf{z}(\cdot), \mathbf{q}(\cdot)|t-\tau; t\}, i^-, k^-)$ — условные вероятности того, что состояния АЭ после периодов $\{t-\tau; t\}$ принимали значения $\mathbf{z}(\cdot)$, а вероятности освоения были равны $\mathbf{q}(\cdot)$, при условии, что освоение технологии при k -м состоянии ФН после t -го периода приняло конкретное известное значение. Условные вероятности $\pi(\cdot)$ вычисляются по фор-

муле (4), где произведение берется по всем кортежам $\langle \alpha; \beta; \gamma \rangle$ кроме кортежа $\langle \alpha; \beta; \gamma \rangle = \langle i; k; t \rangle$:

$$\begin{aligned} &\pi(\{\mathbf{z}(\cdot), \mathbf{q}(\cdot)|t-\tau; t\}, i^-, k^-) = \\ &= \prod_{\substack{\alpha = 1 \dots n; \beta = 1 \dots K; \gamma = t-\tau \dots t; \\ \langle \alpha; \beta; \gamma; s \rangle \neq \langle i; k; t \rangle}} (y_{\alpha\beta}(\gamma)z_{\alpha\beta}(\gamma) + \\ &+ (1 - y_{\alpha\beta}(\gamma))(1 - z_{\alpha\beta}(\gamma))). \end{aligned} \quad (4)$$

Для частного случая независимости состояний ФН, наблюдаемых каждым из АЭ, выражения (2) и (3) примут вид:

$$\begin{aligned} W_{ik}(\mathbf{y}(t)) &= \sum_{\omega \in \Omega} \prod_{i=1}^n p_{ik(i)}(t) \sum_{\substack{\mathbf{z}(t) \dots \mathbf{z}(t-\tau) \\ z_{ik}(t) = 1}} w_{i(\omega)ik} \times \\ &\times (\{\mathbf{z}(t)|t-\tau; t\}) \pi(\{\mathbf{z}(\cdot), \mathbf{q}(\cdot)|t-\tau; t\}, i^-, k^-) \\ U_{ik}(\mathbf{q}(t)) &= \sum_{\omega \in \Omega} \prod_{i=1}^n p_{ik(i)}(t) \sum_{\substack{\mathbf{z}(t) \dots \mathbf{z}(t-\tau) \\ z_{ik}(t) = 1}} u_{i(\omega)ik} \times \\ &\times (\{\mathbf{z}(t)|t-\tau; t\}) \pi(\{\mathbf{z}(\cdot), \mathbf{q}(\cdot)|t-\tau; t\}, i^-, k^-). \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} q_{ik}(t+1) &= \\ &= W_{ik}(\mathbf{q}(t)) + (1 - W_{ik}(\mathbf{q}(t)) - U_{ik}(\mathbf{q}(t)))q_{ik}(t), \end{aligned} \quad (5)$$

или в разностной форме:

$$\begin{aligned} \Delta q_{ik}(t+1) &= \\ &= W_{ik}(\mathbf{q}(t)) - (W_{ik}(\mathbf{q}(t)) + U_{ik}(\mathbf{q}(t)))q_{ik}(t). \end{aligned} \quad (6)$$

Итак, получены рекуррентные соотношения, отражающие динамику математических ожиданий уровней сформированности опыта. Для возможности вычисления их значений в любой момент времени остается задать матрицу начальных значений $\mathbf{q}(0)$. По умолчанию будем подразумевать, что на начальный (нулевой) момент времени у АЭ не сформирован опыт ни для одного из состояний ФН.

Значением $L_i(t)$ критерия индивидуального опыта («уровня научения») i -го АЭ будем считать вероятность того, что реализуется уже встречавшееся ему ранее, успешно освоенное и не забытое им значение ФН (математическое ожидание доли освоенных значений):

$$L_i(t) = 1 - \sum_{k=1}^K p_{ik}(t)(1 - q_{ik}(t)), \quad i = \overline{1, n}. \quad (7)$$

В качестве значения критерия коллективного опыта будем считать либо вероятность $L_{\max}(t)$ того что, хотя бы для одного из АЭ реализуется уже



встречавшееся ему ранее, успешно освоенное и не забытое им значение ФН:

$$L_{\max}(t) = 1 - \prod_{i=1}^n (1 - L_i(t)), \quad (8)$$

либо вероятность $L_{\min}(t)$ того, что для каждого из АЭ реализуется уже встречавшееся ранее, успешно освоенное и не забытое значение ФН:

$$L_{\min}(t) = \prod_{i=1}^n L_i(t). \quad (9)$$

Последовательность значений критерия опыта по аналогии с кривой научения назовем *кривой опыта*.

Критерий коллективного опыта может рассматриваться как агрегированная характеристика результатов формирования опыта коллективом в целом.

Переход к непрерывному времени. Пусть АС и АЭ функционируют в непрерывном времени — формирование и забывание опыта происходят в виде независимых потоков элементарных событий, интенсивности $w_{ikl}(\{v(\cdot)|t - \tau; t\})$ и $u_{ikl}(\{v(\cdot)|t - \tau; t\})$ которых известным образом зависят от предыстории состояний АС в текущий и предыдущие моменты времени $\{v(\cdot) | t - \tau; t\}$.

Пусть ФН изменяет свои состояния каким-то образом (не важно, в дискретном или непрерывном времени), но независимо от АС, и мы знаем их эволюцию $\{p_{ik}(t)\}$.

Вместо системы разностных уравнений (5), описывающей динамику АС с известными начальными условиями, можно использовать систему дифференциальных уравнений вида

$$\begin{aligned} & dq_{ik}(t)/dt = \\ & = W_{ik}(q(t)) - (W_{ik}(q(t)) + U_{ik}(q(t)))q_{ik}(t). \end{aligned} \quad (10)$$

2. КЛАССИФИКАЦИЯ МОДЕЛЕЙ ОПЫТА

Выражения (1)–(10) описывают процесс и результат формирования индивидуального и коллективного опыта в максимально общем случае (при минимальных предположениях). Для возможности операционального описания и исследования необходимо введение упрощений (дополнительных предположений о структуре и свойствах модели). Поэтому введем систему классификаций, основаниями которых являются свойства компонентов модели (основания 1–9 являются независимыми).

1. Свойства состояний комплексного ФН, наблюдаемых АЭ в каждом периоде времени. По этому основанию будем пока выделять общий (рас-

смотренный выше) и частный случай, заключающийся в том, что в каждый момент времени все АЭ наблюдают одну и ту же реализацию состояния ФН. При этом свойства ФН будут описываться не nK -мерным распределением $\{p_{\omega}(t)\}$, а K -мерным

распределением $\{p_k(t)\}$, где $\sum_{k=1}^K p_k(t) = 1$.

2. Зависимость состояний комплексного ФН от времени. Здесь общим является рассмотренный выше случай произвольной известной зависимости распределения вероятностей состояний комплексного ФН от времени, а частным — стационарное (не зависящее от времени) распределение.

3. Зависимость вероятности освоения от времени. Общим является рассмотренный выше случай произвольной известной зависимости вероятности освоения от времени, а частным — отсутствие какой-либо зависимости.

4. Зависимость вероятности забывания от времени. Полностью аналогично п. 3.

5. Зависимость вероятности освоения от предыстории процесса. Общим является рассмотренный выше случай известной зависимости вероятности освоения от $\tau \leq t$ предыдущих состояний. Отдельно выделим случаи $\tau = 0$ (не зависящей от времени вероятности освоения) и $\tau = 1$ (вероятность освоения зависит только от предыдущего состояния).

6. Зависимость вероятности забывания от предыстории процесса. Полностью аналогично п. 5.

7. Зависимость вероятности освоения для i -го АЭ от состояний других АЭ. Общим является рассмотренный выше случай известной зависимости вероятности освоения от состояний всех АЭ. «Промежуточный» случай — когда вероятность освоения для i -го АЭ зависит от состояний его «соседей» — АЭ из известного множества $N_i(t)$. Частным является случай, когда для каждого АЭ его вероятности освоения зависят только от его собственных состояний.

8. Зависимость вероятности забывания для i -го АЭ от состояний других АЭ. Аналогично п. 7.

9. Возможность формирования опыта вне зависимости от реализовавшегося состояния ФН. Общим является случай, когда путем передачи опыта от других АЭ конкретный АЭ может сформировать опыт, соответствующий состоянию ФН, отличающемуся от наблюдаемого им его состояния. Частным является случай, когда у АЭ формируется опыт, соответствующий только тем состояниям ФН, которые он наблюдает.

10. Число АЭ. Общий случай — известное число АЭ $n > 1$, частный случай — $n = 1$.

Рассмотрим в порядке усложнения ряд моделей (модели 1–6 — индивидуального опыта, модели 7–12 — коллективного и общественного опыта).

3. МОДЕЛИ ИНДИВИДУАЛЬНОГО ОПЫТА

Модель 1 (рассмотрена в работе [14, раздел 2.2]), в которой имеется один АЭ, все параметры стационарны, формирование опыта, соответствующего наблюдаемому АЭ состоянию ФН, эффективно (вероятность освоения равна единице), а забывание отсутствует.

Обозначим через $p_k > 0$ вероятность того, что на очередном шаге АЭ будет предъявлено k -е состояние ФН (очевидно, что $\sum_{k=1}^K p_k = 1$). Вектор этих вероятностей обозначим через $P = (p_1, \dots, p_K)$.

В рассматриваемом случае $n = 1$ и $i = 1$, следовательно, $m = l$. Так как вероятность освоения тождественно равна единице, то принимаем $W_{mj}(\{v(\cdot) | t - \tau; t\}) = 1$ при $m = l$ и $W_{mj}(\{v(\cdot) | t - \tau; t\}) = 0$ при $m \neq l$ независимо от предыстории $\{v(\cdot) | t - \tau; t\}$, т. е. $W_{mj}(\{v(\cdot) | t - \tau; t\}) = \delta_{mj}$, где δ_m — символ Кронекера. Так как забывание отсутствует, то $u_{mj}(\{v(\cdot) | t - \tau; t\}) \equiv 0$, $U_j(q(t)) \equiv 0$. Из выражения (2) получаем:

$$\begin{aligned} U_j(q(t)) &= \sum_{m=1}^K p_m(t) \sum_{\substack{z(t) \dots z(t-\tau) \in X; \\ z_j(t) = 0}} W_{mj}(\{z(t) | t - \tau; t\}) \times \\ &\quad \times \pi(\{z(t) | t - \tau; t\}, j, q(t)) = \\ &= \sum_{m=1}^K p_m(t) \sum_{\substack{z(t) \dots z(t-\tau) \in X; \\ z_j(t) = 0}} \delta_{mj} = p_j(t). \end{aligned} \quad (11)$$

Действительно, в сумме $\sum_{\substack{z(t) \dots z(t-\tau) \in X; \\ z_j(t) = 0}} \delta_{mj}$ символ

Кронекера берется только один раз, так как присутствует условие $z_j(t) = 0$, и это условие сводит сумму к единственному элементу, для которого $m = j$. Получаем:

$$q_j(t+1) = p_j(t) + [1 - p_j(t)]q_j(t).$$

Так как вероятности стационарны, то $q_j(t+1) = p_j + (1 - p_j)q_j(t)$, или $\Delta q_j(t+1) = p_j(1 - q_j(t))$, или $1 - q_j(t+1) = (1 - p_j)(1 - q_j(t))$. Из выражения (8) получаем, что значение критерия опыта

$$\begin{aligned} L(t) &= 1 - \sum_{k=1}^K p_k(1 - q_k(t)) = 1 - \sum_{k=1}^K p_k(1 - p_k) \times \\ &\quad \times (1 - q_k(t-1)) = 1 - \sum_{k=1}^K p_k(1 - p_k)^t. \end{aligned} \quad (12)$$

Модель 2. Пусть в условиях модели 1 имеется единственное состояние ФН ($K = 1$), но вероят-

ность освоения $w \in (0; 1]$ может быть меньше единицы. Опуская индекс, соответствующий номеру состояния ФН, по аналогии с выражением (19) получаем: $W(q(t)) = w$,

$$q_j(t+1) = w + [1 - w]q_j(t),$$

или $1 - q_j(t+1) = (1 - w)(1 - q_j(t))$. Из выражения (11) получаем кривую опыта (ср. с выражением (12) при $w = p_k = 1/K$):

$$L(t) = 1 - (1 - w)^t. \quad (13)$$

Модель 3. Пусть в условиях модели 1 вероятность освоения $w(q) \in (0; 1]$ одинакова для всех состояний ФН и не зависит от времени в явном виде. По аналогии с выражением (11) получаем: $W_j(q(t)) = w(q(t))p_j(t)$. Так как вероятности стационарны, то из выражения (5) получаем: $q_j(t+1) = w(q(t))p_j + (1 - w(q(t))p_j)q_j(t)$, или $1 - q_j(t+1) = (1 - w(q(t))p_j)(1 - q_j(t))$. Пусть вероятность освоения представляет собой известную функцию $g(\cdot)$ от текущего значения критерия опыта, т. е. $w(q(t)) = g(L(q(t)))$. Тогда из $1 - q_j(t+1) = (1 - g(L(t))p_j)(1 - q_j(t))$ получим:

$$1 - q_j(t) = \prod_{\tau=0}^{t-1} (1 - p_j g(L(\tau))).$$

Обозначим $b_j(t) = 1 - q_j(t)$, тогда $b_j(t+1) = (1 - g(L(t))p_j)b_j(t)$, следовательно,

$$L(t) = 1 - \sum_{k=1}^K p_k b_k(t) = 1 - \sum_{k=1}^K p_k \prod_{\tau=0}^{t-1} (1 - p_k g(L(\tau))),$$

$$\Delta L(t) = g(L(t)) \sum_{k=1}^K p_k^2 \prod_{\tau=0}^{t-2} (1 - p_k g(L(\tau))).$$

Для случая равномерного распределения ($p_j = 1/K$, $i = \overline{1, n}$) имеем $b_j(t) = b(t)$ и

$$\begin{aligned} L(t) &= 1 - \sum_{k=1}^K p_k b_k(t) = 1 - \sum_{k=1}^K \frac{1}{K} b_k(t) = \\ &= 1 - b(t) = q(t). \end{aligned}$$

Получаем:

$$\begin{aligned} \Delta L(t) &= \sum_{k=1}^K p_k (b_k(t-1) - b_k(t)) = \\ &= \sum_{k=1}^K \frac{1}{K} \left(b_k(t-1) - \left(1 - \frac{1}{K} g(L(t-1)) \right) b_k(t-1) \right) = \\ &= \sum_{k=1}^K \frac{1}{K} \left(1 - 1 + \frac{1}{K} g(L(t-1)) b(t-1) \right) = \end{aligned}$$



$$= \sum_{k=1}^K \frac{1}{K} g(L(t-1))b(t-1) = \frac{1}{K} g(L(t-1))b(t-1) = \\ = \frac{1}{K} g(L(t-1))(1 - L(t-1)).$$

Откуда

$$\Delta L(t) = \frac{1}{K} g(L(t-1))(1 - L(t-1)). \quad (14)$$

В зависимости от $g(\cdot)$, в качестве решений разностного уравнения (14) получаем экспоненту, гиперболу или логисту (см. модели различных кривых научения и обзор в работе [14]):

Вероятность освоения $g(\cdot)$	Разностное уравнение	Кривая научения
$g(L) = \gamma K$	$\Delta L(t) = \gamma(1 - L(t-1))$	Экспоненциальная
$g(L) = \mu KL$	$\Delta L(t) = \mu L(t-1)(1 - L(t-1))$	Логистическая
$g(L) = \eta K(1 - L)^a$	$\Delta L(t) = \eta(1 - L(t-1))^{a+1}$	Степенная

Модель 4 (рассмотрена в работе [18, раздел 3.3.4]) является пересечением частных случаев по всем девяти вышеприведенным основаниям классификации. Она отличается от модели 1 наличием стационарных вероятностей освоения и забывания, отличных в общем случае соответственно от единицы и нуля.

Предположим, что при первой реализации k -го состояния ФН формирование соответствующего опыта происходит с известной вероятностью $0 \leq w_k \leq 1$, где w_k — *вероятность освоения*, а с вероятностью $1 - w_k$ освоение не происходит. После того, как формирование k -го компонента опыта произошло, на каждом следующем периоде времени оно изменяется так:

— если реализовалось состояние ФН, отличное от k -го, то результат освоения k -го состояния не меняется;

— если повторно реализовалось k -е состояние ФН, то с *вероятностью забывания* $0 \leq u_k \leq 1$ k -й компонент опыта «забывается», а с вероятностью $1 - u_k$ не меняется.

Векторы вероятностей освоения и забывания обозначим соответственно через $W = (w_1, \dots, w_K)$, $U = (u_1, \dots, u_K)$. Отметим, что эти векторы в общем случае не удовлетворяют условию нормировки.

По аналогии с выражением (11), получаем: $W_j(q(t)) = w_j p_j$, $U_j(q(t)) = u_j p_j$. Подставляя в выражение (5), получим:

$$q_j(t+1) = p_j w_j + (1 - p_j(w_j + u_j))q_j(t). \quad (15)$$

Примем начальные условия $q_j(0) = \alpha_j \in [0; 1]$, тогда из выражения (15) получим последовательно по возрастанию t :

$$q_j(t) = \frac{w_j}{w_j + u_j} (1 - (1 - p_j(w_j + u_j))^t) + \\ + (1 - p_j(w_j + u_j))^t \alpha_j. \quad (16)$$

Подставляя сумму (16) в выражение (7), находим:

$$L(P, W, U, t) = \sum_{k=1}^K p_k \frac{w_k}{w_k + u_k} (1 - (1 - p_k(w_k + u_k))^t) + \\ + \sum_{k=1}^K \alpha_k (1 - p_k(w_k + u_k))^t = \sum_{k=1}^K p_k \frac{w_k}{w_k + u_k} + \\ + \sum_{k=1}^K \left(\alpha_k - p_k \frac{w_k}{w_k + u_k} \right) (1 - p_k(w_k + u_k))^t. \quad (17)$$

Если в случае успешного формирования k -го компонента опыта в некотором периоде АЭ получает в этом периоде вознаграждение h_k , то его суммарный по T_0 периодам ожидаемый выигрыш (от формирования опыта в процессе работы) равен

$$F(P, W, U, T) = \\ = \sum_{t=1}^{T_0} \sum_{k=1}^K p_k h_k \frac{w_k}{w_k + u_k} (1 - (1 - p_k(w_k + u_k))^t).$$

Вычисляя сумму геометрической (по времени) прогрессии, получим:

$$F(P, W, U, T_0) = \sum_{k=1}^K \frac{p_k h_k w_k}{w_k + u_k} \left(T_0 - (1 - p_k(w_k + u_k)) \times \right. \\ \left. \times \frac{1 - (1 - p_k(w_k + u_k))^{T_0}}{p_k(w_k + u_k)} \right).$$

В случае одинаковых для всех состояний вероятностей освоения $w_k = w$ и вероятностей забывания $u_k = u$ (будем называть этот случай *однородным*), из выражения (17) получим:

$$L(P, w, u, t) = \frac{w}{w + u} \left(1 - \sum_{k=1}^K p_k (1 - p_k(w + u))^t \right), \\ t = 0, 1, 2, \dots \quad (18)$$

Частный однородный случай ($w = 1, u = 1$) при равномерном распределении: $L(t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{2}{K} \right)^t$ (асимптота 0,5 содержательно объясняется тем, что факт забывания обнаруживается при повторной реализации освоенного состояния ФН).

Введем предположение (*условие обучаемости*) [18]: вероятности P , W и U таковы, что

$$p_k (w_k + u_k) < 1, \quad k = \overline{1, K}. \quad (19)$$

В работе [18] показано, что условие (19) может нарушаться не более чем для одного состояния ФН, а также, что в соответствии с предположениями I—VI:

— начальное значение (в нулевой момент времени) критерия опыта равно нулю;

— кривая опыта не убывает и асимптотически стремится к $\sum_{k=1}^K p_k \frac{w_k}{w_k + u_k}$, причем скорость ее роста монотонно убывает.

Введем параметр $\rho \in [0; 1/K]$. Обозначим через $P_{\rho, K} = \left\{ P = (p_1, \dots, p_K) \mid \sum_{k=1}^K p_k = 1, p_k \geq \rho, k = \overline{1, K} \right\}$ множество K -мерных распределений вероятностей, значение каждой из которых не менее порога ρ .

В работе [14] доказано, что максимум аналога выражения (17) по всевозможным распределениям вероятностей $P \in P_{\rho, K}$ достигается на равномерном распределении. Попробуем получить аналогичный результат для рассматриваемой модели.

Утверждение 1. Если

$$w_k \in (0; 1], u_k \in [0; 1), k = \overline{1, K}, \quad (20)$$

$$\text{то } \forall \rho \in (0; 1/K) \exists t(\rho, W, U) = \frac{2}{\rho \min_{k=\overline{1, K}} \{w_k + u_k\}} - 1$$

такое, что $\forall \tau > t(\rho, W, U)$ функция (17) строго возрастает по $\{p_k\} \in P_{\rho, K}$.

Доказательство. Обозначим

$$\alpha_k = \frac{w_k}{w_k + u_k} \in (0; 1], \beta_k = w_k + u_k \in (0; 2), k = \overline{1, K},$$

и запишем выражение (25) в виде:

$$x_t(P, W, U) = \sum_{k=1}^K \alpha_k p_k [1 - (1 - \beta_k p_k)^t]. \quad (21)$$

Двойным дифференцированием выражения (21) трудно проверить, что условие

$$t > \frac{2}{\rho \min_{k=\overline{1, K}} \{\beta_k\}} - 1$$

гарантирует строгую вогнутость функции (21) по всем переменным $\{p_k\} \in P_{\rho, K}$. ♦

Следствие. Если

$$u_k = \sqrt{w_k} - w_k, \quad k = \overline{1, K}, \quad (22)$$

то равномерное распределение $p_k = 1/K, k = \overline{1, K}$ представляет собой единственное решение задачи

$$x_t(P, W, U) \rightarrow \max_{P \in P_{\rho, K}}. \quad (23)$$

Справедливость следствия вытекает из результата утверждения 1 и того, что в рамках условия (22) функция (17) симметрична по всем переменным $\{p_k\} \in P_{\rho, K}$ (см. также доказательство утверждения 4 в работе [14]). Отметим, что в рамках условия (22) всегда имеет место условие обучаемости (19).

Таким образом, при наличии забывания и отличных от единицы вероятностях освоения равномерное распределение в общем случае не является оптимальным (в смысле задачи (23)); достаточным условием его оптимальности является условие (22), где $w_k \in (0; 1]$.

В однородном случае для оптимальности равномерного распределения (в смысле задачи (23)) достаточно выполнения условия $w + u = 1$, при котором всегда имеет место условие (19) и частным случаем которого является базовая модель (в которой $w = 1, u = 0$).

Подставляя в выражение (18) равномерное распределение $p_k = 1/K, k = \overline{1, K}$, получим:

$$x_t(K, w, u) = \frac{w}{w + u} \left(1 - \left(1 - \frac{w + u}{K} \right)^t \right) = \frac{w}{w + u} [1 - \exp(-\gamma(K, w, u)t)],$$

где $\gamma(K, w, u) = \ln(1 + 1/(K - (u + w)))$ — скорость формирования опыта. Так как $(w + u) \in (0; 2)$, то для выполнения условия обучаемости (19) достаточно, чтобы $K \geq 2$.

Модель 5 (обучение и продуктивная деятельность). Предположим, что АЭ обладает дальновидностью T_0 . Из этого горизонта первые $T \in \{0, 1, \dots, T_0\}$ периодов занимает обучение. В начальный момент субъект принимает решение $X = (X_1, \dots, X_K)$ о распределении (одном и том же для всех T будущих периодов времени) своего времени между K возможными видами деятельности, где X_k — доля времени, затрачиваемая им на формирование опыта в k -м виде деятельности, $X \in \Delta^K = \left\{ s \in \mathfrak{R}_+^K \mid \sum_{k=1}^K s_k = 1 \right\}$.

Пусть забывание отсутствует, тогда из выражения (16) получаем зависимость математического ожидания того, что k -й компонент опыта АЭ после периода t успешно сформирован:

$$q_k(X_k, t) = 1 - (1 - w_k X_k)^t, \quad k = \overline{1, K}. \quad (24)$$



Вектор $q = (q_1, \dots, q_K)$ в моделях обучения будем называть *квалификацией* АЭ.

Завершив обучение, АЭ приступает к продуктивной деятельности (считаем, что обучения в процессе продуктивной деятельности не происходит). В каждом ее периоде с вероятностью p_k реализуется k -е состояние ФН, что заставляет АЭ выполнять k -й вид комплексной деятельности. В случае, если к данному периоду опыт, соответствующий k -му виду деятельности сформирован, АЭ выполняет этот вид деятельности и получает выгоду h_k ; если опыт не сформирован, то АЭ не получает выгоду.

Таким образом, в каждый период времени $t \in \{T+1, \dots, T_0\}$ своей продуктивной деятельности k -го типа АЭ получает ожидаемый «доход» $h_k q_k(T)$, равный математическому ожиданию получения вознаграждения h_k в случае успешного достижения результата k -й деятельности (считаем, что, если соответствующий опыт у АЭ сформирован и не забыт им, то результат достигается). Значение целевой функции АЭ в момент времени t равно $f(X, t) = \sum_{k=1}^K h_k p_k q_k(X_k, T)$, $t \in \{T+1, \dots, T_0\}$

(так как считается, что обучения в процессе продуктивной деятельности не происходит, то вероятности успешного достижения результатов определяются результатами обучения, достигнутыми к моменту окончания обучения).

Рассмотрим задачу распределения АЭ своего времени с целью максимизации будущего ожидаемого «дохода» в единицу времени продуктивной деятельности

$$\sum_{k=1}^K h_k p_k q_k(X_k, T) \rightarrow \max_{X \in \Delta^K}. \quad (25)$$

Подставляя разность (24) в выражение (25), запишем последнюю задачу в виде:

$$\sum_{k=1}^K h_k p_k (1 - w_k X_k)^T \rightarrow \min_{X \in \Delta^K}. \quad (26)$$

$$h_k p_k w_k T (1 - w_k X_k)^{T-1} = \lambda;$$

$$X_k = \frac{1}{w_k} \left(1 - \left(\frac{\lambda}{h_k p_k w_k T} \right)^{\frac{1}{T-1}} \right);$$

$$\sum_{k=1}^K X_k = \sum_{k=1}^K \frac{1}{w_k} - \lambda^{\frac{1}{T-1}} \sum_{k=1}^K \frac{1}{w_k} \left(\frac{1}{h_k p_k w_k T} \right)^{\frac{1}{T-1}} = 1;$$

$$\lambda^{\frac{1}{T-1}} = \frac{\sum_{k=1}^K \frac{1}{w_k} - 1}{\sum_{k=1}^K \frac{1}{w_k} \left(\frac{1}{h_k p_k w_k T} \right)^{\frac{1}{T-1}}}.$$

Решая задачу условной оптимизации (26), получаем аналитическое выражение для оптимального распределения времени АЭ на обучение:

$$X_k^* = \frac{1}{w_k} \left(1 - \frac{\sum_{j=1}^K \frac{1}{w_j} - 1}{(h_k p_k w_k)^{\frac{1}{T-1}} \sum_{j=1}^K \frac{1}{w_j} (h_j p_j w_j)^{\frac{1}{1-T}}} \right), \quad k = \overline{1, K}. \quad (27)$$

В частном случае (при единичных вероятностях освоения и одинаковых «доходах» от различных видов деятельности) получаем:

$$X_k^* = 1 - \frac{K-1}{1 + (p_k)^{\frac{1}{T-1}} \sum_{j=1, j \neq k}^K (p_j)^{\frac{1}{1-T}}}. \quad (28)$$

Имея решение (27), (28) задачи (26) при фиксированном T , сформулируем задачу об оптимальной продолжительности обучения АЭ. Если в каждый момент времени в процессе обучения АЭ несет постоянные издержки $c \geq 0$, то задача заключается в выборе момента окончания обучения, при котором разность между ожидаемым доходом и затратами будет максимальна:

$$f(X^*, T+1)(T_0 - T) - cT \rightarrow \max_{T \in [0; T_0]}. \quad (29)$$

Подставляя разность (28) в выражение (29), получим задачу скалярной оптимизации:

$$\begin{aligned} & (T_0 - T) \sum_{k=1}^K h_k p_k \times \\ & \times \left(1 - \frac{\left(\sum_{j=1}^K \frac{1}{w_j} - 1 \right)^T}{(h_k p_k w_k)^{\frac{T}{T-1}} \left(\sum_{j=1}^K \frac{1}{w_j} (h_j p_j w_j)^{\frac{1}{1-T}} \right)^T} \right) - cT \rightarrow \\ & \rightarrow \max_{T \in [0; T_0]}. \end{aligned} \quad (30)$$

Решение задачи (30) даст ожидаемый выигрыш АЭ при последовательном обучении и продуктивной деятельности. Альтернативой является обучение во время работы, когда в течение всех T_0 пе-

риодов реализуются те или иные состояния ФН, и АЭ формирует на практике соответствующий опыт деятельности, достигая позитивного результата (и получая за него «вознаграждение») в случае успешного освоения. Будем считать, что при обучении в процессе работы АЭ несет затраты c в каждом периоде, тогда при отсутствии забывания в силу выражения (25) его суммарный ожидаемый выигрыш будет равен:

$$F(P, W, T_0) - cT_0 = \sum_{k=1}^K p_k h_k [T_0 - (1 - p_k w_k)(p_k w_k)^{T_0-1}] - cT_0. \quad (31)$$

Сравнение значений выражений (30) и (31) позволяет в каждом конкретном случае (при каждом наборе значений параметров модели) ответить на вопрос о том, какая стратегия — последовательное обучение и продуктивная деятельность или обучение во время работы — более выгодна для АЭ (в смысле суммарного ожидаемого выигрыша).

Пример 1. При единичных вероятностях освоения, одинаковых «доходах» от различных видов деятельности и равномерном распределении вероятностей из выраже-

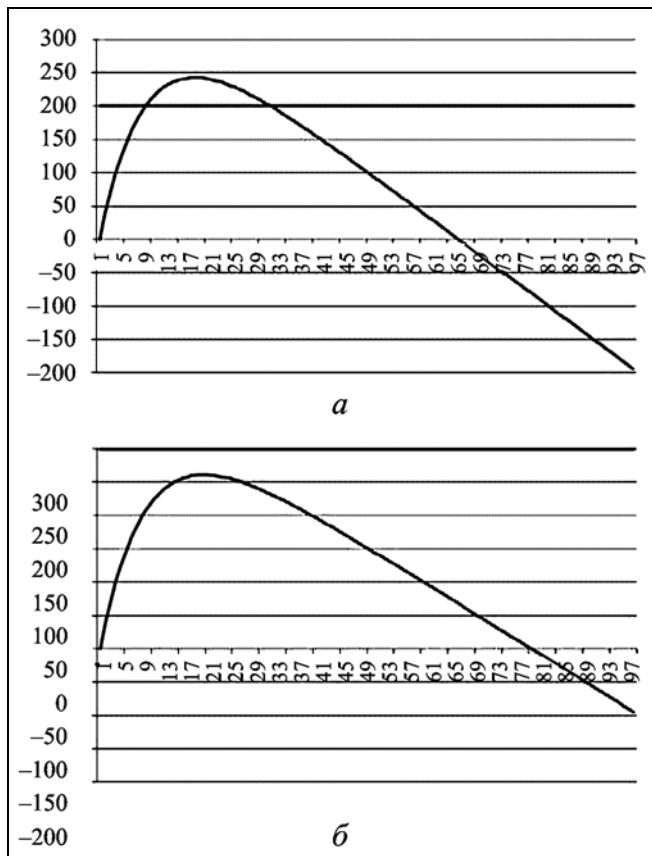


Рис. 6. Ожидаемые суммарные выигрыши АЭ в примере 1 при: а) $c = 2$, б) $c = 1$ (по горизонтали — время обучения T)

ния (28) находим: $X_k^* = \frac{1}{K}$. Из выражения (30) получаем

$$\text{задачу: } (T_0 - T)h \left(1 - \left(1 - \frac{1}{K}\right)^T\right) - cT \rightarrow \max_{T \in [0; T_0]} \quad (\text{см. вогнутую кривую на рис. 6, иллюстрирующую зависимость критерия этой задачи от } T).$$

Суммарный ожидаемый выигрыш АЭ при обучении в процессе работы (см. выражение (31)) в рассматриваемом случае равен $h \left[T_0 - \left(1 - \frac{1}{K}\right) \left(\frac{1}{K}\right)^{T_0-1}\right] - cT_0$ (см. горизонтальную прямую на рис. 6).

Пусть $K = 10$, $T_0 = 100$, $h = 4$, тогда при $c = 2$ существует оптимальное время обучения, равное 18 периодам времени, при котором последовательное обучение и продуктивная деятельность дают больший суммарный ожидаемый выигрыш (примерно 242,8), чем обучение во время работы (при котором суммарный ожидаемый выигрыш равен примерно 200,0). Если затраты в единицу времени уменьшаются — например, $c = 1$ — то оптимальным становится обучение во время работы (ср. рис. 6, а и б). ♦

Аналогичную модель можно построить и в случае ненулевых начальных условий для $\{q_j\}$, получив зависимость оптимального решения от начального опыта АЭ.

Модель 6 (детерминированная модель с одним субъектом). Пусть в условиях модели 1 имеется единственное состояние ФН ($K = 1$), которое реализуется с единичной вероятностью, а вероятность освоения $w(q, t) \in [0; 1]$ не зависит от предыстории в явном виде. По аналогии с выражением (11), опуская индекс, соответствующий номеру состояния ФН, получаем: $W(q(t), t) = w(q(t), t)$. Из выражения (5) получаем разностное уравнение

$$q(t+1) = w(q(t), t) + (1 - w(q(t), t))q(t),$$

которому, согласно выражению (10), соответствует дифференциальное уравнение

$$\dot{q}(t) = w(q, t)(1 - q). \quad (32)$$

Семейство дифференциальных уравнений (32) с начальным условием $q(0) \in [0; 1]$ и с параметром — липшицевой функцией $w(\cdot, \cdot) \in [0; 1]$ — обладает следующими свойствами:

— решение уравнения (32) существует и единственно;

— кривая опыта $q(t)$ является строго монотонно возрастающей и $\forall t \geq 0 \quad \dot{q}(t) \leq 1$, т. е. скорость ее роста ограничена;

— кривая опыта $q(t)$ является замедленно-асимптотической, т. е. $\lim_{t \rightarrow +\infty} q(t) = 1$, $\lim_{t \rightarrow +\infty} \dot{q}(t) = 0$.

Если допустить возможность забывания, то по аналогии получим семейство дифференциальных уравнений с начальным условием $q(0) \in [0; 1]$ и с



двумя параметрами — липшицевыми функциями $w(\cdot, \cdot) \in [0; 1]$ и $u(\cdot, \cdot) \in [0; 1]$:

$$\dot{q}(t) = w(q, t)(1 - q) - u(q, t)q. \quad (33)$$

Исследуем дифференциальное уравнение (33). В частности, охарактеризуем его семейство решений и ответим на вопрос, для каких функций времени $q(t) \in [0; 1]$ можно подобрать липшицевы функции $w(\cdot, \cdot) \in [0; 1]$ и $u(\cdot, \cdot) \in [0; 1]$, чтобы $q: [0, +\infty) \rightarrow [0; 1]$ было решением уравнений (33).

Утверждение 2². Для того, чтобы непрерывно дифференцируемая функция $q: [0, +\infty) \rightarrow [0; 1]$, такая, что функция $\dot{q}$ липшицева, была решением уравнений (33) при некоторых липшицевых функциях $w(\cdot, \cdot) \in [0; 1]$ и $u(\cdot, \cdot) \in [0; 1]$, необходимо и достаточно, чтобы имели место соотношения

$$\forall t \geq 0 - q(t) \leq \dot{q}(t) \leq 1 - q(t). \quad (34)$$

Доказательство. Условия (34) следуют из условия $q(t) \in [0; 1]$ и ограничений на значения функций $w(\cdot, \cdot)$ и $u(\cdot, \cdot)$. Обратно, пусть функция $q(t)$, удовлетворяющая условиям утверждения, является решением уравнений (33). Положим:

$$w(t) := \dot{q}(t) + q(t), u(t) := 1 - \dot{q}(t) - q(t), \quad t \geq 0. \quad (35)$$

Имеем: $w(t)(1 - q(t)) - u(t)q(t) \equiv (\dot{q}(t) + q(t))(1 - q(t)) - (1 - \dot{q}(t) - q(t))q(t) \equiv \dot{q}(t)$. Кроме того, из соотношения (35) следует, что $w(t) \in [0; 1]$ и $u(t) \in [0; 1]$ при всех $t \geq 0$ ♦

Охарактеризуем «положение равновесия»: правая часть выражения (33) обращается в ноль при

$$q(t) = \frac{w(q(t), t)}{w(q(t), t) + u(q(t), t)}.$$

Из выражения (35) следует, что, если $q(0) = 0$, то единственной кривой опыта с постоянной (не зависящей от времени) вероятностью освоения $\gamma > 0$ является экспоненциальная кривая $q(t) = \gamma(1 - \exp(-t))$.

4. МОДЕЛИ КОЛЛЕКТИВНОГО И ОБЩЕСТВЕННОГО ОПЫТА

Модель 7 (освоение общественного опыта — см. стрелку 1 на рис. 4). Освоение субъектом общественного опыта может быть описано общей моделью § 1 со следующей модификацией. Предположим, что забывание отсутствует. Условно можно считать, что «общественный опыт» содержит всю необходимую информацию об оптимальных действиях при любых значениях ФН и «управляет» обучением субъекта, которому состояния ФН

предъявляются последовательно (будем считать, что в соответствии с их нумерацией), причем одно и то же состояние повторяется до тех пор, пока вероятность того, что соответствующий компонент опыта сформирован (см. также выражение (13))

$$q_k^1(t) = 1 - (1 - w_k)^t, \quad t = 0, 1, 2, \dots,$$

не достигнет требуемого значения q^* . Необходимое для этого время (среднее число повторений) равно

$$t_k^1(q^*) = \frac{\ln(1 - q^*)}{\ln(1 - w_k)}.$$

Следовательно, для достижения требуемого значения q^* для всех K возможных значений ФН

потребуется время $t^1(q^*) = \sum_{k=1}^K \frac{\ln(1 - q^*)}{\ln(1 - w_k)}$. В одно-

родном случае $t^1(q^*) = \frac{\ln(1 - q^*)}{\ln(1 - w)}$.

Модель 8 (формирование индивидуального опыта — см. стрелку 2 на рис. 4). Вообще, формирование индивидуального опыта описывают все модели 1—6. Здесь рассмотрим частный случай: в отсутствии забывания в случае равномерного распределения вероятностей ($p_k = 1/K$) реализации различных состояний ФН формирование опыта будет описываться выражением (частный случай выражений (16), (17))

$$L_t^2(W) = 1 - \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \left(1 - \frac{w_k}{K}\right)^t, \quad t = 0, 1, 2, \dots$$

В однородном случае $L_t^2 = 1 - \left(1 - \frac{w}{K}\right)^t$. Следовательно, для достижения требуемого значения q^*

необходимо время $t^2(q^*) = \frac{\ln(1 - q^*)}{\ln\left(1 - \frac{w}{K}\right)}$.

Утверждение 3. Отношение $\frac{t^2(q^*)}{t^1(q^*)} = \frac{\ln(1 - w)}{\ln\left(1 - \frac{w}{K}\right)^K} \geq$

≥ 1 , характеризующее относительную эффективность освоения общественного опыта по сравнению с формированием индивидуального опыта, не зависит от q^* , монотонно по w и K .

Модель 9 (освоение коллективного опыта — см. стрелку 3 на рис. 4). Совместная деятельность субъектов в рамках коллективов (частный случай коллектива — команда [19]) подразумевает возможность обмена между субъектами опытом, приобретаемым в процессе деятельности.

Предположим, что забывание отсутствует; команда включает n АЭ, для каждого из которых в

² Данное утверждение принадлежит д-ру физ.-мат. наук С.Е. Жуковскому.

каждый период дискретного времени реализуется в соответствии с распределением P некоторое (одно для всех субъектов) состояние ФН, опыт деятельности в котором субъекты формируют независимо в рамках модели (17)), а затем обмениваются всей имеющейся у них информацией (т. е. формирования опыта для некоторого состояния ФН хотя бы одним членом команды достаточно, чтобы считать, что опыт деятельности в этом состоянии сформирован у всех членов команды). Элементы матрицы $\mathbf{W} = \|w_{ik}\|$ могут интерпретироваться как эффективности «обучения на своем и чужом опыте» различных субъектов при различных состояниях ФН.

Тогда k -е состояние ФН окажется неосвоенным i -м членом команды после t периодов с вероятностью $(1 - p_k w_{ik})^t$, а вероятность того, что оно окажется неосвоенным ни одним из членов команды, равна $\prod_{i=1}^n (1 - p_k w_{ik})^t$. Получаем выражение для кривой опыта команды в целом и каждого из ее членов (вероятности того, что ни один из членов команды не встретится с новым для команды состоянием ФН):

$$L_t^3(P, \mathbf{W}) = 1 - \sum_{k=1}^K p_k \prod_{i=1}^n (1 - p_k w_{ik})^t, \quad t = 0, 1, 2, \dots \quad (36)$$

В случае однородных АЭ и равномерного распределения вероятностей выражение (38) примет вид: $L_t^3 = 1 - \left(1 - \frac{w}{K}\right)^{nt}$. Для достижения требуемого

значения q^* необходимо время $t^3(y^*) = \frac{\ln(1 - q^*)}{n \ln\left(1 - \frac{w}{K}\right)}$.

Получили, что $t^3(q^*) = \frac{1}{n} t^2(q^*)$.

Утверждение 4. *Полный обмен опытом между субъектами сокращает время формирования индивидуального опыта во столько раз, сколько АЭ участвует в этом обмене.*

Сделанный вывод справедлив в рамках постоянной вероятности освоения w . Более реалистичной представляется убывающая зависимость вероятности освоения $w(n)$ от числа взаимодействующих субъектов. Также перспективным является рассмотрение моделей с коэффициентами w_{ij} , зависящими не от состояний ФН, а от пар АЭ — принимающего (i) и передающего (j) опыт.

Модель 10 (формирование коллективного опыта) — см. стрелку 4 на рис. 4). Предположим, что для n субъектов в каждый период дискретного времени реализуется в соответствии с распределени-

ем P некоторое (одно для всех субъектов) состояние ФН. Будем считать, что присутствует забывание, которое отразим матрицей $\mathbf{U} = \|u_{ik}\|$. Введем промежуточное обозначение π_{ikt} — вероятность того, что k -е состояние ФН будет освоено i -м членом команды после t периодов. Согласно выражению

$$(16), \pi_{ikt} = \frac{w_{ik}}{w_{ik} + u_{ik}} (1 - (1 - p_k(w_{ik} + u_{ik}))^t), \text{ откуда}$$

получим, что k -е состояние ФН окажется неосвоенным i -м членом команды после t периодов с вероятностью

$$1 - \pi_{ikt} = 1 - \frac{w_{ik}}{w_{ik} + u_{ik}} (1 - (1 - p_k(w_{ik} + u_{ik}))^t) = \frac{u_{ik}}{w_{ik} + u_{ik}} + \frac{w_{ik}}{w_{ik} + u_{ik}} (1 - p_k(w_{ik} + u_{ik}))^t.$$

Тогда вероятность того, что она окажется неосвоенной ни одним из членов команды, равна

$$\prod_{i=1}^n (1 - \pi_{ikt}) = \prod_{i=1}^n \left(\frac{u_{ik}}{w_{ik} + u_{ik}} + \frac{w_{ik}}{w_{ik} + u_{ik}} (1 - p_k(w_{ik} + u_{ik}))^t \right).$$

Получаем выражение для кривой опыта — математического ожидания вероятности того, что для очередного состояния ФН, реализующегося в $t + 1$ -м периоде, опыт будет сформирован хотя бы у одного субъекта (см. выражение (7)):

$$L_{\max}(P, \mathbf{W}, \mathbf{U}, t) = 1 - \sum_{k=1}^K p_k \prod_{i=1}^n \left(\frac{u_{ik}}{w_{ik} + u_{ik}} + \frac{w_{ik}}{w_{ik} + u_{ik}} (1 - p_k(w_{ik} + u_{ik}))^t \right), \quad t = 0, 1, 2, \dots \quad (37)$$

Как отмечалось выше, в качестве значения критерия группового/коллективного опыта можно рассматривать либо вероятность $L_{\max}(t)$ того что, **хотя бы одному** из АЭ будет предъявлено уже встречавшееся ранее, успешно освоенное и не забытое им состояние ФН (см. выражение (37)), либо вероятность $L_{\min}(t)$ того, что **каждому** из АЭ будет предъявлено уже встречавшееся ранее, успешно освоенное и не забытое им состояние ФН (см. выражение (8)):

$$L_{\min}(P, \mathbf{W}, \mathbf{U}, t) = \sum_{k=1}^K p_k \prod_{i=1}^n \left(\frac{w_{ik}}{w_{ik} + u_{ik}} (1 - (1 - p_k(w_{ik} + u_{ik}))^t) \right), \quad t = 0, 1, 2, \dots \quad (38)$$

Содержательно, формирование общественно-группового/коллективного опыта отличается от формирования индивидуального опыта тем, что для «закрепления» способов эффективной деятельности



при том или ином состоянии ФН множество субъектов должно столкнуться с этим состоянием многократно, что в рамках модели может быть отражено, в том числе низкой вероятностью освоения (см. модель 12 ниже).

Для однородного случая одинаковых АЭ ($u_{ik} = 0$, $w_{ik} = w$) и равномерного распределения вероятностей, предполагая, что вероятность освоения меньше единицы и считая, что забывание отсутствует, получим, что выражения (37) и (38) примут соответственно вид (см. также выражение (36)):

$$L_{\max}(n, w, t) = 1 - \left(1 - \frac{w}{K}\right)^{nt}, \quad t = 0, 1, 2, \dots,$$

$$L_{\min}(n, w, t) = \left(1 - \left(1 - \frac{w}{K}\right)^t\right)^n, \quad t = 0, 1, 2, \dots$$

Из выражения результатов модели 8 получаем выражение для кривой опыта одного АЭ с единичной вероятностью освоения при всех состояниях ФН при отсутствии забывания (см. также выражение (13)):

$$L_t^2(w = 1) = 1 - \left(1 - \frac{1}{K}\right)^t, \quad t = 0, 1, 2, \dots$$

Из условия $L_{\max}(n, w, t) = L_t^2$ после несложных преобразований получаем справедливость следующего утверждения.

Утверждение 5. В отсутствии забывания при $n(w) = K - K\left(1 - \frac{1}{K}\right)^{1/n}$ формирование коллективного опыта с вероятностью освоения $w(n)$ эквивалентно формированию индивидуального опыта АЭ с единичной вероятностью освоения.

Альтернативная формулировка утверждения 5: в отсутствии забывания при

$$n(w) = \frac{\ln\left(1 - \frac{1}{K}\right)}{\ln\left(1 - \frac{w}{K}\right)}$$

формирование индивидуального опыта АЭ с единичной вероятностью освоения эквивалентно формированию опыта коллективом из $n(w)$ АЭ с одинаковой вероятностью освоения w .

Модель 11 (детерминированная модель с несколькими взаимодействующими субъектами).

Пусть имеется единственное состояние ФН ($K = 1$), которое реализуется с единичной вероятностью, а вероятности освоения и забывания не зависят в явном виде от предыстории (см. также

модель 6). Тогда из выражения (1) получаем систему разностных уравнений:

$$q_i(t+1) = W_i(q(t), t) + [1 - W_i(q(t), t) - U_i(q(t), t)]q_i(t), \quad i = \overline{1, n}, \quad (39)$$

которым соответствует система дифференциальных уравнений

$$\dot{q}_i(t) = w_i(q, t)(1 - q_i) - u_i(q, t)q_i, \quad i = \overline{1, n},$$

с начальным условием $y(0) \in [0; 1]^n$ и с двумя параметрами — липшицевыми вектор-функциями $w: [0; 1]^n \times \mathbb{R}_+^1 \rightarrow [0; 1]^n$ и $u: [0; 1]^n \times \mathbb{R}_+^1 \rightarrow [0; 1]^n$.

Разностное уравнение (39) имеет вполне конкретную структуру (с заданными ограничениями на значения функций в правой части), поэтому не представляется возможным записать непосредственно в его терминах, например, *линейные модели* (см. обзор в разделе 3.2 книги [13], а также работу [20])

$$\Delta q_i(t+1) = \sum_{j \in N_i(t)} a_{ij}(q_j(t) - q_i(t)), \quad (40)$$

где $\sum_{j \in N_i(t)} a_{ij} \leq 1$, или *модели порогового поведения* [10]

$$q_i(t+1) = I\left(\frac{1}{|N_i(t)|} \sum_{j \in N_i(t)} q_j(t) \geq \delta_i(t)\right), \quad (41)$$

где $N_i(t) \in 2^N$ — множество «соседей» i -го АЭ в периоде t , $\delta_i(t) \in [0; 1]$ — его «порог».

Поэтому поступим так: будем учитывать влияние других АЭ не на состояние рассматриваемого АЭ непосредственно (а его состоянием является ожидаемое значение опыта q), а на вероятность освоения. Предположим, что вероятность освоения может быть представлена в виде суммы двух функций

$$W_i(q(t), t) = d_i(q_i) + D_i(q_{-i}), \quad i = \overline{1, n}, \quad (42)$$

принимающих значения от нуля до единицы каждая, но в сумме не превышающих единицы, где $q_{-i} = (q_1, \dots, q_{i-1}, q_{i+1}, \dots, q_n)$ — обстановка для i -го АЭ.

Содержательно интерпретируемыми примерами таких зависимостей являются «линейная модель» (с индексом L — от англ. *linear*, ср. с выражением (40))

$$W_i^L(q(t)) = \alpha_i + \beta_i \sum_{j \in N_i(t)} a_{ij}q_j(t), \quad (43)$$

или «пороговая модель» (с индексом T — от англ. *threshold*, ср. с выражением (41))

$$W_i^T(q(t)) = \alpha_i + \beta_i I\left(\frac{1}{|N_i(t)|} \sum_{j \in N_i(t)} q_j(t) \geq \delta_i(t)\right) \quad (44)$$

с константами $\alpha_i + \beta_i \leq 1$, $i = \overline{1, n}$.

При этом первое слагаемое в правых частях выражений (42), (43) и (44) может интерпретироваться как отражающее *эксплицитно транслируемый* (непосредственно передаваемый субъекту и осваиваемый субъектом) опыт, а второе слагаемое — как имплицитно транслируемый (получаемый и осваиваемый субъектом опосредованно, путем взаимодействия с другими субъектами).

Естественный отбор (конкуренцию) в рассматриваемом классе моделей можно учесть, например, предположив, что $W_i(q(t), t) \rightarrow 0$ при

$$q_i(t) \ll \frac{1}{|N_i(t)|} \sum_{j \in N_i(t)} q_j(t).$$

Пример 2. Пусть имеются два агента с одинаковой и стационарной вероятностью забывания u и вероятностями освоения $W_i(q(t), t) = \gamma_i \frac{q_i(t)}{q_i(t) + q_{3-i}(t)}$, $i = \overline{1, 2}$. Со-

держательно, АЭ конкурируют за постоянное для каждого периода количество ресурса, который распределяется между ними пропорционально их опыту. Вероятность освоения в каждом периоде пропорциональна по-

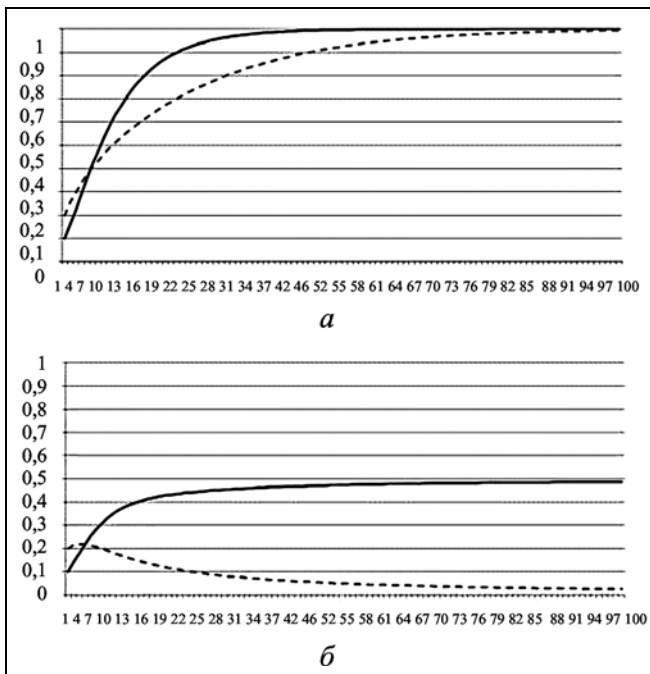


Рис. 7. Динамика опыта АЭ в примере 2 при: $a - u = 0$, $b - u = 0,2$ (по горизонтали — время)

лученному в прошлом периоде количеству ресурса, а коэффициент пропорциональности γ_i может интерпретироваться как отражающий индивидуальные способности АЭ к обучению.

Предположим, что агенты различаются начальными значениями опыта: $q_1(0) = 0,1$, $q_2(0) = 0,2$ (первому АЭ соответствует непрерывная кривая на рис. 7, второму — пунктирная), но первый агент, хоть и имеет худшие «стартовые условия», более способный: $\gamma_1 = 0,2$, $\gamma_2 = 0,1$.

В отсутствие забывания оба агента успешно обучаются и при достаточно большом горизонте времени делят ресурс пополам (см. рис. 7, a). При наличии забывания ($u = 0,2$) первый агент побеждает в конкуренции и при достаточно большом горизонте времени получает весь ресурс (см. рис. 7, b). ♦

Модель 12 (формирование общественного опыта) — см. стрелку 4 на рис. 4). В модели 10 считалось, что для формирования коллективного опыта достаточно, чтобы опыт сформировался хотя бы у одного из членов коллектива. В настоящей модели будем считать, что для формирования общественного опыта необходимо, чтобы опыт сформировался у всех его членов.

При таком подходе критерий опыта мультипликативен по подмножествам — в условиях модели 10 для однородного случая одинаковых АЭ и равномерного распределения вероятностей, если общество состоит из двух подмножеств: $N = N_1 \cup N_2$, $N_1 \cap N_2 = \emptyset$, $|N_1| = n_1$, $|N_2| = n_2$, то

$$L_{\min}(n, w, t) = L_{\min}(n_1, w, t) L_{\min}(n_2, w, t).$$

Из выражений $L_{\max}(n, w, t) = 1 - \left(1 - \frac{w}{K}\right)^{nt}$ и

$L_{\min}(n, w, t) = \left(1 - \left(1 - \frac{w}{K}\right)^t\right)^n$, $t = 0, 1, 2, \dots$, можно оценить поведение зависимости ожидаемого времени, необходимого для достижения заданного уровня q^* коллективного опыта, от числа АЭ:

$$t(n, q^*) \sim \frac{\ln(1 - (q^*)^{1/n})}{\ln\left(1 - \frac{w}{K}\right)}. \quad (45)$$

Видно, что время (45) достаточно медленно растет с ростом числа АЭ (примерно линейно по логарифму числа АЭ). Но так как коллективный опыт растет линейно по числу АЭ, то получаем, что справедливо

Утверждение 6. Общественный опыт формируется примерно в $n \ln(n)$ медленнее коллективного.

Из условия $L_{\min}(n, w, t) = L_t^2$ после несложных преобразований получаем справедливость следующего утверждения.

**Утверждение 7. В отсутствии забывания при**

$$w(n, t) = K \left\{ 1 - \left[1 - \left(1 - \left(1 - \frac{1}{K} \right)^n \right)^{1/t} \right] \right\} \text{ формирование}$$

общественного опыта с единичной вероятностью освоения эквивалентно формированию индивидуального опыта одного агента с вероятностью освоения $w(n, t)$.

В силу утверждения 7 общественный опыт можно рассматривать как опыт одного интегрального виртуального субъекта.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Результаты § 3 и § 4 свидетельствуют, что известные (см. работы [11, 14, 18]) модели научения, в том числе кривые научения (20)–(26), соответствуют частным случаям описанной во втором разделе общей модели опыта. В работах [14, 18] показано, что модели научения, в свою очередь, обобщают модели: испытаний сложных систем и проверки их характеристик; массового производства и повышения его эффективности в ходе освоения (модели Т. Райта и его последователей); тестирования программного обеспечения; распространения знаний (идей, теорий, концепций) в обществе; управления знаниями и извлечения/приобретения знаний; машинного обучения (machine learning); итеративного научения и тестирования знаний в педагогике, психологии и физиологии человека и животных. В этих же обзорах [14, 18] можно найти ссылки на многочисленные работы экспериментального определения характеристик нетривиальных процессов, лежащих в основании моделей научения.

Перечислим представляющиеся перспективными направления дальнейших исследований:

- Формирование опыта является существенным компонентом любой деятельности, поэтому «стратегически» важной представляется разработка в рамках МКД общей математической модели комплексной деятельности (позволяющей операционально декомпозировать и агрегировать частные модели), отражающей в том числе активный выбор субъектов и учитывающей процессы формирования их опыта.
- Система классификаций моделей опыта, введенная в § 2, позволяет на регулярной основе генерировать различные частные модели формирования и освоения индивидуального и коллективного опыта. Разработка и исследование такого рода моделей представляется вполне обоснованным «тактическим» шагом. Перспективным является углубленное изучение совместного формирования опыта в процессе работы, оптимизации продолжительности времени обу-

чения до перехода к продуктивной деятельности, влияния забывания и глубины предыстории, роли зависимости состояний факторов неопределенности от времени, влияния структуры опыта (логических связей между его компонентами), задач оптимизации/управления процесса формирования опыта и др.

- Предложенная модель опыта представляется достаточно богатой для того, чтобы попытаться описать ею такие явления и процессы, как:
 - *управление персоналом*, включая его найм, расстановку, развитие (в первую очередь, конечно, именно развитие), продвижение и увольнение, а также *модели человеческого капитала*;
 - *управление риском и информационной безопасностью*;
 - *эволюция* (включая *адаптацию, конкуренцию и естественный отбор*) в биологических системах (с установлением взаимосвязи с традиционно используемым для этих задач математическим аппаратом — конечных автоматов³ [21, 22], дифференциальных уравнений [23–25], эволюционных игр [26, 27] и др.);
 - различные характерные времена и иерархичность эксплицитно транслируемого, имплицитно транслируемого и нетранслируемого опыта, учитываемые в *психологических и социологических* подходах;
 - отбор, формирование, освоение, закрепление и трансляция общественного опыта, рассматриваемые как феномены *культуры*.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бурков В.Н. Основы математической теории активных систем. — М.: Наука, 1977. — 255 с. [Burkov, V.N. Osnovy matematicheskoy teorii aktivnyh sistem. — M.: Nauka, 1977. — 255 s. (In Russian)]
2. Goubko, M., Burkov, V., Kondrat'ev, V., et al. Mechanism Design and Management: Mathematical Methods for Smart Organizations. — New York: Nova Science Publishers, 2013. — 163 p.
3. INCOSE Systems Engineering Handbook / Ed. by C. Haskins. — San Diego: INCOSE, 2012. — 376 p.
4. Systems Engineering Guide. — Bedford: MITRE Corporation, 2014. — 710 p.
5. Белов М.В., Новиков Д.А. Методология комплексной деятельности. — М.: Ленанд, 2018. — 320 с. [Belov, M.V., Novikov, D.A. Metodologiya kompleksnoj deyatel'nosti. — M.: Lenand, 2018. — 320 s. (In Russian)]
6. Новиков Д.А. Управление, деятельность, личность. — М.: ИПУ РАН, 2020. — 80 с. [Novikov, D.A. Upravlenie, deyatel'nost', lichnost'. — M.: IPU RAN, 2020. — 80 s. (In Russian)]

³ Упомянутые здесь и далее области исследований настолько объемны, что мы, нисколько не претендуя на полноту, даем ссылки на несколько классических монографий и/или современных обзоров.

7. Новиков А.М. Основания педагогики. — М.: Эгвес, 2010. — 208 с. [Novikov, A.M. Osnovaniya pedagogiki. — M.: Egves, 2010. — 208 s. (In Russian)]
 8. Ожегов С.И. Словарь русского языка. 23-е изд. — М.: Русский язык, 1991. — 917 с. [Ozhegov, S.I. Slovar' russkogo yazyka. 23-e izd. — M.: Russkij yazyk, 1991. — 917 s. (In Russian)]
 9. Платонов К.К. Краткий словарь системы психологических понятий. — М.: Высшая школа, 1984. — 174 с. [Platonov, K.K. Kratkij slovar' sistemy psihologicheskikh ponyatij. — M.: Vysshaya shkola, 1984. — 174 s. (In Russian)]
 10. Бреер В.В., Новиков Д.А., Рогаткин А.Д. Управление толпой: математические модели порогового коллективного поведения. — М.: Ленанд, 2016. — 168 с. [Breer, V.V., Novikov, D.A., Rogatkin, A.D. Upravlenie tolpoj: matematicheskie modeli porogovogo kollektivnogo povedeniya. — M.: Lenand, 2016. — 168 s. (In Russian)]
 11. Novikov, D. Regularities of Iterative Learning. — Moscow: ICS RAS, 2019. — 67 p.
 12. Александров Ю.И., Александрова Н.Л. Субъективный опыт, культура и социальные представления. — М.: Изд-во Института психологии РАН, 2009. — 320 с. [Aleksandrov, Yu.I., Aleksandrova, N.L. Sub'ektivnyj opyt, kul'tura i social'nye predstavleniya. — M.: Izd-vo Institut psihologii RAN, 2009. — 320 s. (In Russian)]
 13. Теория управления (дополнительные главы). — М.: Ленанд, 2019. — 552 с. [Teoriya upravleniya (dopolnitel'nye glavy). — M.: Lenand, 2019. — 552 s. (In Russian)]
 14. Белов М.В., Новиков Д.А. Модели технологий. — М.: Ленанд, 2019. — 160 с. [Belov, M.V., Novikov, D.A. Modeli tekhnologij. — M.: Lenand, 2019. — 160 s. (In Russian)]
 15. Философский энциклопедический словарь. — М.: Советская энциклопедия, 1983. — 840 с. [Filosofskij enciklopedicheskij slovar'. — M.: Sovetskaya enciklopediya, 1983. — 840 s. (In Russian)]
 16. Пелипенко А.А., Яковенко И.Г. Культура как система. — М.: Издательство «Языки русской культуры», 1998. — 376 с. [Pelipenko, A.A., Yakovenko, I.G. Kul'tura kak sistema. — M.: Izdatel'stvo «Yazyki russkoj kul'tury», 1998. — 376 s. (In Russian)]
 17. Резник Ю.М. Введение в социальную теорию. — М.: Наука, 2003. — 525 с. [Reznik, Yu.M. Vvedenie v social'nyuyu teoriyu. — M.: Nauka, 2003. — 525 s. (In Russian)]
 18. Белов М.В., Новиков Д.А. Управление жизненными циклами организационно-технических систем. — М.: Ленанд, 2020. — 384 с. [Belov, M.V., Novikov, D.A. Upravlenie zhiznennymi ciklami organizacionno-tekhnicheskikh sistem. — M.: Lenand, 2020. — 384 s.]
 19. Новиков Д.А. Математические модели формирования и функционирования команд. — М.: Физматлит, 2012. — 186 с. [Novikov, D.A. Matematicheskie modeli formirovaniya i funkcionirovaniya komand. — M.: Fizmatlit, 2012. — 186 s. (In Russian)]
 20. Chkhartishvili, A., Gubanov, D., Novikov, D. Social Networks: Models of Information Influence, Control and Confrontation. — Heidelberg: Springer, 2019. — 194 p.
 21. Бухараев Р.Г. Основы теории вероятностных автоматов. — М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1985. — 288 с. [Buharaev, R.G. Osnovy teorii veroyatnostnykh avtomatov. — M.: Nauka, Glavnaya redakciya fiziko-matematicheskoy literatury, 1985. — 288 s. (In Russian)]
 22. Цетлин М.Л. Исследования по теории автоматов и моделированию биологических систем. — М.: Наука, 1969. — 316 с. [Cetlin, M.L. Issledovaniya po teorii avtomatov i modelirovaniyu biologicheskikh sistem. — M.: Nauka, 1969. — 316 s. (In Russian)]
 23. Емельянов В.В., Курейчик В.В., Курейчик В.М. теория и практика эволюционного моделирования. — М.: Физматлит, 2003. — 432 с. [Emel'yanov, V.V., Kurejchik, V.V., Kurejchik, V.M. Teoriya i praktika evolyucionnogo modelirovaniya. — M.: Fizmatlit, 2003. — 432 s. (In Russian)]
 24. Otsuka, J. The Role of Mathematics in Evolutionary Theory. — Cambridge: Cambridge University Press, 2020. — 74 p.
 25. Schuster, P. Mathematical Modeling of Evolution. Solved and Open Problems // Theory Biosci. — 2011. — Vol. 130. — P. 71—89.
 26. Васин А.А. Некооперативные игры в природе и обществе. — М.: Макс Пресс, 2005. — 412 с. [Vasin, A.A. Nekooperativnye igry v prirode i obshchestve. — M.: Maks Press, 2005. — 412 s. (In Russian)]
 27. Weibull, J. Evolutionary Game Theory. — Cambridge: The MIT Press, 1997. — 265 p.
- Статья представлена к публикации руководителем регионального редсовета А.А. Ворониным.
- Поступила в редакцию 06.11.2020, после доработки 11.12.2020.
Принята к публикации 11.12.2020.
- Белов Михаил Валентинович** — д-р техн. наук, Сколковский институт науки и технологий, г. Москва, mbelov59@mail.ru,
- Новиков Дмитрий Александрович** — чл.-корр. РАН, Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, г. Москва, novikov@ipu.ru.

MODELS OF EXPERIENCE

M.V. Belov¹ and D.A. Novikov²

¹ Skolkovo Institute of Science and Technology, Moscow, Russia

² V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences, Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia

¹ mbelov59@mail.ru, ² novikov@ipu.ru

Abstract. A generalized probabilistic model is proposed that uniformly describes the formation and development of individual, collective, and social experience at various human activity levels. Some of its particular cases are considered, covering many learning models known in mathematical psychology and models of development and mastering of technologies within the methodology of complex activity.

Keywords: experience, activity, knowledge, technology, culture, learning curve.

НАЛОГОВЫЕ СХЕМЫ СТИМУЛИРОВАНИЯ ПРОСОЦИАЛЬНОГО ГОЛОСОВАНИЯ В МОДЕЛИ ViSE

В.А. Афонькин

Аннотация. В рамках модели социальной динамики, определяемой голосованием в стохастической среде, рассмотрены три схемы перераспределения доходов, направленные на поддержку участников с просоциальной стратегией. Первая из них представляет собой подоходный налог, вторая — налог, гарантирующий каждому такому участнику приращение капитала не ниже среднего, третья — налог, гарантирующий просоциальным участникам в целом среднее приращение капитала не ниже среднего по обществу. Оценена общественная полезность просоциального голосования. Проведен сравнительный анализ эффективности указанных налоговых схем по степени их влияния на капитал агентов с разными стратегиями. Установлено, что эффективность подоходного налога определяется условиями внешней среды. Вторая и третья налоговые схемы лишены этого недостатка, но вторая схема излишне премирует просоциальных агентов. Общим рациональным основанием рассмотренных налоговых схем является то, что при их применении участники-эгоисты получают больший доход, чем в обществе без просоциальных агентов. Тем самым, если применение указанных схем приведет к выбору частью участников просоциальной стратегии голосования, то это повысит ожидаемый доход всех без исключения агентов.

Ключевые слова: модель ViSE, альтруизм, голосование, социальная динамика, налог, яма ущерба.

ВВЕДЕНИЕ

Основные положения модели ViSE

В модели ViSE (Voting in Stochastic Environment) голосования в стохастической среде [1] рассматривается *общество*, состоящее из n агентов. Каждый агент характеризуется социальной установкой, определяющей его стратегию голосования, и текущим благосостоянием (капиталом), выраженным действительным числом. Под стратегией понимается алгоритм использования информации о предложении и обществе для принятия решения о поддержке или не поддержке вынесенного на голосование предложения. *Стохастическая среда* генерирует предложение обществу — вектор реализаций независимых одинаково распределенных случайных величин. Каждая компонента с номером i этого вектора есть *предлагаемое приращение капитала* i -го агента. Предложение выносится на голосование, в ходе которого каждый агент, действуя согласно своему алгоритму голосования, отдает голос «за» или «против». Если голосов «за» больше 50 %, то предложение прини-

мается и к капиталу агентов прибавляются соответствующие компоненты предложения (в более общем случае голосов «за» должно быть больше αn , где α — *относительный порог голосования*, n — число агентов). В противном случае капиталы участников остаются неизменными. Предложения выносятся на голосование последовательно; голосование по одному предложению называется «*ходом*» или «*шагом*» последовательности принимаемых решений. В ходе серии голосований параметры распределения, генерирующего предложения, и стратегии голосования агентов остаются неизменными. В настоящей статье в качестве генератора предложений рассмотрено нормальное распределение. Цель исследований — анализ эффективности стратегий голосования агентов и процедур принятия коллективных решений по критериям увеличения индивидуальных капиталов агентов и их суммы.

В статьях [1, 2] и других работах по модели ViSE рассматривается ряд ее вариантов, вводимых наложением дополнительных условий. Конкретные детали модели, непосредственно относящиеся к тематике настоящего исследования, обсуждаются в последующих разделах статьи.

Модель ViSE относится к теории голосования, которая, в свою очередь, представляет собой часть теории выбора (Social choice). В отличие от ряда моделей теории игр, агенты в модели ViSE не рассматриваются как игроки, максимизирующие свои функции полезности. Они имеют капитал, но их поведение не всегда сводится к его максимизации — оно имеет, вообще говоря, произвольную структуру, задаваемую исследователем. Основным элементом этого поведения — персональный (и при этом не обязательно постоянный) алгоритм голосования агента, общество же характеризуется механизмом принятия коллективных решений. Исследователь, анализирующий (в предположениях модели) эффективность механизмов принятия индивидуальных и коллективных решений, стоит на позиции социального дизайнера, пытающегося понять, какие из найденных закономерностей могут оказаться полезными в реальной жизни.

Яма ущерба

Для модели ViSE известен сценарий, в котором общество, состоящее из агентов с эгоистической социальной установкой, действует нерационально, принимая предложения, которые в целом невыгодны для него, поскольку приводят к отрицательному суммарному приращению капитала [2]. *Эгоистической стратегией* называется стратегия, при которой участник поддерживает предложение тогда и только тогда, когда оно увеличивает его личный капитал. Эффект обнищания и разорения общества в этом случае принято называть *ямой ущерба*.

Эту ситуацию иллюстрирует рис. 1, где по вертикальной оси отложено среднее приращение капитала (СПК) участника за один шаг в неблагоприятной среде, математическое ожидание предложений которой откладывается по горизонтальной оси. Компоненты предложения среды здесь и далее представляют собой реализации независимых



Рис. 1. Среднее приращение капитала общества из 25 агентов с эгоистической стратегией

нормально распределенных случайных величин с $\sigma = 12$. В рассматриваемой ситуации «непредвзятые» предложения среды фактически приводят к тому же результату, что и манипуляция повесткой дня в парадоксе А.В. Малишевского, описанном, например, в работе [3, с. 92—95].

Действительно, эффект разорения общества вследствие реализации решений, принятых большинством голосов его классически рациональных участников, в известном смысле парадоксален. Его появление связано с тем, что в зоне умеренно-негативного математического ожидания нередко встречаются предложения, которые большинству агентов несут небольшое увеличение капитала, а остальной части общества — превосходящее по модулю суммарное уменьшение. Такие предложения принимаются большинством голосов, но общее благосостояние общества при их реализации уменьшается.

Одним из способов защиты от ямы ущерба является подбор наилучшего порога голосования α [2]. В случае негативной среды этот оптимум обычно выше 50 %. Соответствующая зависимость суммарного капитала от порога голосования сравнима с результатами работы [4], где изучалось влияние иных общественных механизмов (торги, взятки) на эффективность решений, определяющих социальную динамику.

Влияние альтруистических агентов на благосостояние общества

Другой фактор, способный уменьшить яму ущерба, — присутствие в обществе агентов, которые при голосовании руководствуются не личными интересами, а интересами всего общества. Стратегию агента, поддерживающего предложение тогда и только тогда, когда оно увеличивает суммарное благосостояние общества, называют *альтруистической*. Поведение, приносящее пользу обществу, также называют *просоциальным*. В случае, представленном на рис. 1, замена трех эгоистов на участников-альтруистов заметно увеличивает среднее приращение благосостояния общества за шаг, что демонстрирует рис. 2.

Здесь и далее результаты получены методом имитационного моделирования с помощью программы ViSE Experiment Module [5]. Получение тех же результатов аналитически — задача как минимум высокой сложности, поскольку для соответствующих многократных интегралов не удается найти общего выражения через стандартные функции.

Присутствие агентов-альтруистов всегда позитивно сказывается на благосостоянии общества: доля принятых нерациональных (в отношении все-



Рис. 2. Сравнение эффективности общества из 25 эгоистов и общества с 22 эгоистами и 3 альтруистами: — общество с тремя альтруистами; - - - общество эгоистов



Рис. 3. Среднее за шаг приращение капитала агентов, сгруппированных по стратегиям, в обществе из 22 эгоистов и 3 альтруистов: — эгоисты; - - - альтруисты

го общества) решений существенно снижается. Однако сами альтруисты в этом случае являются «аутсайдерами»: как показывает рис. 3, их капитал заметно меньше среднего по обществу. Эта закономерность наблюдается и при других значениях параметров.

Это объясняется тем, что альтруисты при голосовании не учитывают изменение своего личного капитала в случае реализации предложения среды. Поэтому они поддерживают в числе прочих предложения, обогащающие общество в целом, но уменьшающие их собственный капитал. Таким образом, обществу выгодно наличие альтруистичных агентов, но их роль оказывается «жертвенной».

Ситуация, когда общество никак не поощряет участников, предохраняющих его от разорения, в

жизни представляется несправедливой. Кроме того, в варианте модели, где участники могут менять свой принцип голосования на индивидуально более выгодный, обеспечение просоциальным агентам дохода не ниже среднего будет гарантировать, что они не изменят свою стратегию на эгоистическую. Если же положение просоциальных агентов станет лучше среднего по обществу, то в упомянутом варианте модели доля таких агентов будет расти, что приведет к увеличению и благосостояния всего общества.

В рамках модели ViSE нет необходимости представлять всякое (в том числе просоциальное) поведение агента как результат максимизации его функции полезности — это затруднило бы описание сложных типов поведения, характерных для реальной жизни. Так, в реальности социальная установка, направленная на поддержание всего общества, обуславливается человеколюбием, необходимостью поддержки репутации и др., но подобная мотивация может отойти на второй план при серьезных материальных потерях, а потом без внешних причин снова вернуться.

Цель исследования в настоящей работе заключается в анализе механизмов материальной поддержки агентов с просоциальными стратегиями. Возможность смены агентами своих стратегий голосования на индивидуально более выгодные допускается, но конкретные механизмы такого изменения не рассматриваются, поскольку для достижения поставленных целей это не требуется. В работе предлагаются и исследуются несколько алгоритмов поддержки просоциальных агентов, суть которых — перераспределение доходов (иными словами, просоциальное голосование стимулируется за счет налогов), а также исследована эффективность просоциальной стратегии при различных параметрах среды.

Ранее вопрос голосования в обществе альтруистичных агентов исследовался в статье [6]. Как и в настоящей работе, в модели, рассматриваемой в указанной статье, агент стремится при голосовании максимизировать функцию благосостояния, значение которой монотонно увеличивается при росте потребления (аналогия увеличения капитала) любого агента. При этом на голосование выносятся схемы прогрессивного, квадратично зависящего от производства, налогообложения; доказано наличие «самоподтверждающегося» равновесия.

В статье [7] в результате лабораторных экспериментов установлено, что денежные стимулы («monetary incentives») мотивируют просоциальное поведение в случае его приватного (непубличного) характера. В работе [8] исследуется вопрос снижения внутренней мотивации к просоциальному поведению при его денежном стимулировании на

примере «зеленых» (экологических) налогов. Вывод авторов таков: если налог приводит к позитивным изменениям в обществе, его введение оправдано даже в случае уменьшения «моральной» мотивации.

Вопрос о подборе метода налогообложения агентов с помощью голосования большинством исследовался в работе [9], основной результат которой — вывод о том, что прогрессивное налогообложение выгодно «среднему классу», а также в работе [10], в которой изучался вопрос выбора линейного подоходного налога путем голосования.

1. ЭФФЕКТИВНОСТЬ АЛЬТРУИСТИЧЕСКОЙ СТРАТЕГИИ КАК ФУНКЦИЯ БЛАГОПРИЯТНОСТИ СРЕДЫ

Как отмечалось выше, присутствие в обществе небольшой доли агентов-альтруистов позволяет существенно уменьшить либо даже устранить яму ущерба. Выясним, при каких параметрах среды наличие альтруистов больше всего увеличивает капитал общества. Для этого сравним среднее одношаговое приращение капитала общества, состоящего из 25 эгоистов, и общества с 22 эгоистами и 3 альтруистами при $\sigma = 12$ и различных значениях математического ожидания предложений среды. Результат сравнения представлен на рис. 4, где «выгодой от альтруистической стратегии» названа разность СПК двух указанных обществ.

Как показывает рис. 4, агенты с альтруистической стратегией приносят обществу максимальную выгоду в *нейтральной* среде, генерирующей положительные и отрицательные предложения с рав-

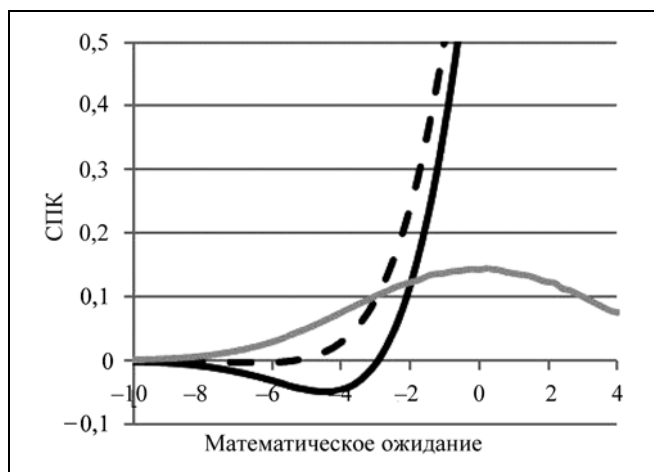


Рис. 4. График сравнения СПК (и их разности) общества из 25 эгоистов и общества из 22 эгоистов и 3 альтруистов: — эгоистическое общество; — — — общество с тремя альтруистами; — — — выгода от альтруистической стратегии

ной вероятностью. В неблагоприятной среде, наиболее опасной для общества («дно» ямы ущерба), помощь трех альтруистов в абсолютном выражении меньше. В то же время ее достаточно, чтобы практически полностью устранить яму ущерба.

2. НАЛОГОВЫЕ СХЕМЫ СТИМУЛИРОВАНИЯ АЛЬТРУИСТИЧЕСКОГО ГОЛОСОВАНИЯ

Как отмечалось выше, агенты-альтруисты, помогающие обществу принимать рациональные решения в умеренно-негативной среде, нуждаются в поддержке, которая будет направлена на увеличение относительного благосостояния альтруистов и предположительно предотвратит смену их стратегии на эгоистическую. Рассмотрим возможные схемы перераспределения доходов общества в их пользу. Такое перераспределение можно рассматривать как взимание налога. Простейшая схема — «плоский» подоходный налог. После каждого принятого предложения эгоисты, получившие положительное приращение капитала, отчисляют ν процентов личного приращения капитала за текущий шаг в фонд, средства которого поровну делятся между агентами с альтруистической стратегией голосования. Критерием эффективности способа поддержки будем считать увеличение СПК альтруиста после введения налога, а также увеличение СПК агента-эгоиста по сравнению с его приращением в обществе, состоящем исключительно из таких агентов.

На рис. 5 показаны приращения капитала участников в обществе с подоходным налогом. Общество, как и раньше, состоит из 22 эгоистов и 3 альтруистов (12 % общества). Применена ставка подоходного налога в 13 % (налог № 1). Как видно из графика, в результате перераспределения доходы альтруистов *значительно* превышают доходы эгоистов. В то же время благосостояние эгоистов остается более высоким, чем в обществе без альтруистов. Таким образом, агенты, голосующие альтруистически, приносят пользу всему обществу, при этом становясь главными бенефициарами — «зажиточной» стратой; быть «альтруистами»¹ очень выгодно. Если позволить агентам менять стратегию, то эгоисты будут готовы голосовать альтруистично, чтобы из налогоплательщиков превратиться в налогополучателей.

¹ В некоторых случаях наименование «альтруисты» заключается в кавычки, чтобы подчеркнуть, что оно относится к участникам с альтруистической стратегией голосования. В силу рассматриваемой общественной поддержки мотивация к выбору этой стратегии может быть меркантильной, т. е. эгоистической. Наименование «эгоисты» также относится только к стратегии голосования.

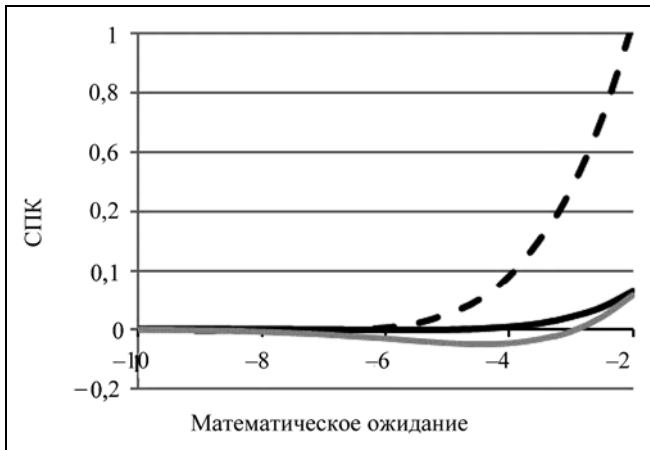


Рис. 5. Среднее за шаг приращение капитала участников в случае подоходного налога в 13 %. Сравнение с обществом, состоящим из эгоистов: — — — — — альтруисты (3 альтруиста в обществе); — — — — — эгоисты (3 альтруиста в обществе); — — — — — эгоисты (без альтруистов)

В связи с этим отметим, что разница между благосостоянием эгоистов и альтруистов зависит от соотношения числа агентов с разными стратегиями. Чем больше в обществе альтруистов, тем меньшую «прибавку» каждый из них получает из налогового фонда. В результате кривые СПК представителей двух категорий участников сближаются до полного слияния. Разница доходов агентов разных категорий зависит также от благоприятности среды. В силу этих причин естественно подбирать ставку подоходного налога в зависимости от параметров общества и среды. Фиксированная ставка может приводить к недостаточной или, наоборот, избыточной поддержке альтруистов. Так, в случае, представленном на рис. 5, наблюдается разрыв в доходах, который трудно оправдать.

Таким образом, дополнительным критерием оценки способа поддержки может служить степень зависимости эффекта применения налога от параметров внешней среды. Описанная выше проблема может быть решена посредством более гибких схем налогообложения. Вот одна из таких схем (налог № 2):

1. После каждого принятого предложения рассчитываем $\bar{c}$ — СПК участника на текущем шаге.

2. Находим сумму положительных превышений над СПК по обществу: $S_{exc} = \sum_{i=1}^n I\{c_i > \bar{c}\} \cdot (c_i - \bar{c})$,

где c_i — приращение капитала агента i на текущем шаге, $I\{\cdot\}$ — индикаторная функция события. Значение индикаторной функции равно единице, если утверждение, указанное в фигурных скобках, верно, и нулю в ином случае.

3. Находим сумму, необходимую для передачи альтруистам, чтобы их индивидуальные приращения капитала стали не ниже средних по обществу:

$$S_{don} = \sum_{i=1}^n Altr(i) I\{c_i < \bar{c}\} \cdot \{\bar{c} - c_i\}, \text{ где } Altr(i) = 1, \text{ если } i \text{ — альтруист, и } Altr(i) = 0 \text{ в противном случае.}$$

4. Находим коэффициент изъятия доходов:

$$u = \frac{S_{don}}{S_{exc}}.$$

5. С каждого агента i , у которого приращение капитала выше значения $\bar{c}$, взимаем налог $(c_i - \bar{c})u$.

6. Собранный на данном шаге налоговый фонд распределяем между агентами-альтруистами, чьи приращения капитала были ниже значения $\bar{c}$, доводя их в точности до уровня $\bar{c}$.

Отметим, что коэффициент u не может превышать единицу, поскольку в сумму S_{exc} входят все превышения доходов над средним, а S_{don} есть суммарный дефицит доходов (по отношению к среднему) лишь альтруистов, которым предложены приращения, меньшие среднего. Поэтому доход «счастливиц», у которых $c_i > \bar{c}$, не может опуститься ниже значения $\bar{c}$.

Итак, схема взимания налога № 2 гарантирует, что каждый альтруист получит от каждого предложения приращение капитала не ниже среднего по обществу. При этом налог платят не только эгоисты, но и альтруисты, которым исходно досталось приращение выше среднего. Ожидаемые приращения капитала участников при налоге № 2 показаны на рис. 6.

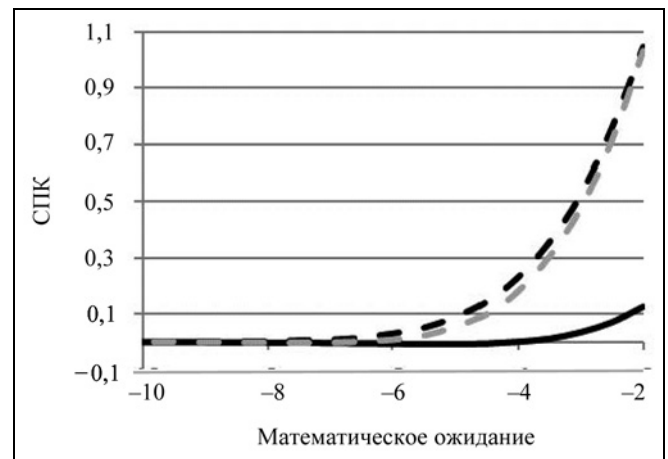


Рис. 6. Среднее за шаг приращение капитала участников в случае налога № 2. Сравнение с СПК альтруистов при 13%-ном подоходном налоге (налог № 1): — — — — — эгоисты (налог № 2); — — — — — альтруисты (налог № 2); — — — — — альтруисты (налог № 1)



Рис. 7. Среднее за шаг приращение капитала участников при налоге № 3. Сравнение с СПК «альтруистов» при налоге № 2: — эгоисты (налог № 3); — — — — — альтруисты (налог № 3); — · — — — — — альтруисты (налог № 2)

Подчеркнем, что сбор налогов определяет лишь перераспределение капитала внутри общества: процесс принятия решений не меняется, следовательно, на средний капитал общества налоги влияния не оказывают. Как видно из рис. 6, доходы альтруистов, как и при налоге № 1, заметно превышают доходы эгоистов. Отличие от налога № 1 состоит в том, что в неблагоприятной среде доходы «альтруистов» оказываются еще несколько выше. В действительности, в зависимости от численности участников с альтруистической стратегией голосования, они могут получать при налоге № 2 как больший, так и меньший, чем при подходящем налоге, доход.

Рассмотрим теперь налог № 3, призванный уменьшить разницу между доходами «альтруистов» и эгоистов. Алгоритм его сбора и распределения таков:

1. После каждого принятого предложения рассчитываем $\bar{c}$ — СПК участника на текущем шаге, а также СПК агентов-альтруистов $\bar{c}_{altr}$. Если $\bar{c}_{altr} \geq \bar{c}$, то без изменений реализуется текущее предложение среды, иначе переходим к шагу 2.

2. Находим сумму положительных превышений капитала над средним приращением за ход:

$$S_{exc} = \sum_{i=1}^n I\{c_i > \bar{c}\} \cdot (c_i - \bar{c}), \text{ как при налоге № 2.}$$

3. Находим, как и при налоге № 2, сумму возмещений, необходимую для того, чтобы каждый альтруист получил за ход как минимум среднее по

$$\text{обществу приращение: } S_{don} = \sum_{i=1}^n Altr(i) I(c_i < \bar{c}) \times (\bar{c} - c_i).$$

4. Находим коэффициент изъятия доходов, обеспечивающего группе альтруистов среднее по обществу приращение: $\tilde{y} = \frac{(\bar{c} - \bar{c}_{altr})n_{altr}}{S_{exc}}$.

5. Находим коэффициент прибавки — отношение налога, обеспечивающего альтруистам среднее по обществу приращение капитала, к S_{don} :

$$q = \frac{(\bar{c} - \bar{c}_{altr})n_{altr}}{S_{don}}.$$

6. С каждого агента i , чье приращение выше среднего, взимаем налог $(c_i - \bar{c})\tilde{y}$.

7. Каждому альтруисту, чье исходное приращение капитала на данном шаге ниже среднего приращения $\bar{c}$, доплачиваем из налогового фонда сумму, равную $(\bar{c} - c_i)q$.

Приведенный алгоритм гарантирует, что на каждом шаге *среднее* приращение капитала альтруистов не ниже $\bar{c}$ — среднего приращения по обществу. Если исходно оно ниже, то выплатами из налогового фонда оно приводится к среднему; если выше, то остается без изменений.

На рис. 7 видно, что СПК альтруистов при налоге № 3 заметно ниже, чем при налоге № 2. Меньше и превышение дохода «альтруиста» над доходом эгоиста.

Объясним эту закономерность. Предположим, что альтруисты за шаг получили приращения в среднем большие, чем эгоисты. Тогда налог № 3 не взимается. При этом налог № 2 обеспечил бы положительную прибавку тем альтруистам, чей исходный доход был ниже среднего. И если приращение выше уровня $\bar{c}$ было лишь у альтруистов, то общий доход альтруистов при налоге № 2 не изменился бы; в противном случае он увеличился бы из-за эгоистов и стал бы выше, чем при налоге № 3.

Теперь рассмотрим случай, в котором альтруисты получили за шаг в среднем меньшее приращение капитала, чем эгоисты. При налоге № 3 после перераспределения доходов СПК альтруистов и эгоистов будут равны друг другу и значению $\bar{c}$. При налоге № 2 каждый альтруист, исходно имевший приращение капитала ниже уровня $\bar{c}$, теперь получит приращение, равное значению $\bar{c}$. Приращение же капитала альтруиста, исходно превышавшее значение $\bar{c}$, останется выше уровня $\bar{c}$. Поэтому среднее итоговое приращение капитала альтруистов при налоге № 2 в каждом случае окажется не меньше, чем при налоге № 3. В силу стохастичности предложений с вероятностью, равной единице, время от времени будут приниматься предложения, при которых налог № 2 обеспечит

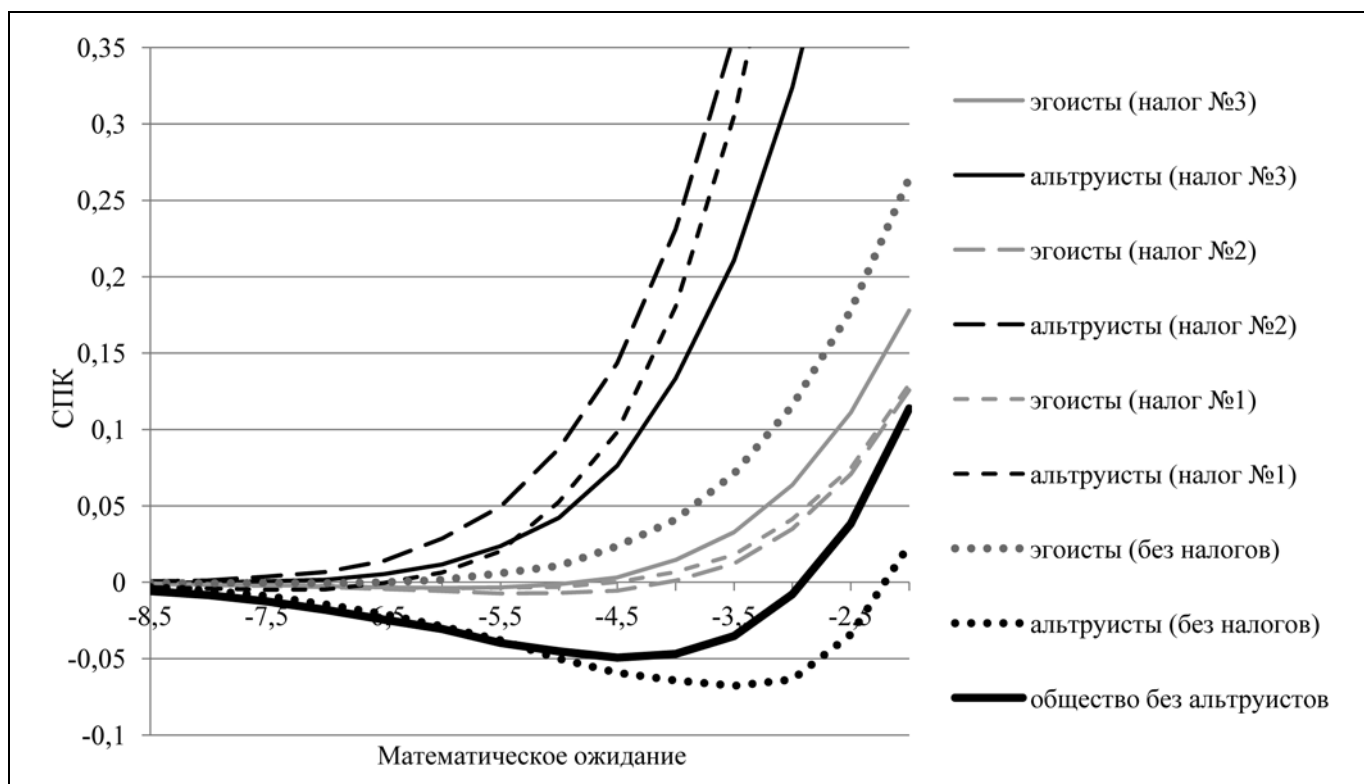


Рис. 8. Сводные данные о приращении капитала участников при рассмотренных налогах, без налогов и в обществе, состоящем из эгоистов

альтруистам *большее* приращение капитала, чем налог № 3.

Приведенное рассуждение доказывает, что ожидаемое приращение капитала «альтруистов» при налоге № 3 (и ненулевой дисперсии σ^2) всегда ниже, чем при налоге № 2.

Сводные результаты по всем рассмотренным обществам приведены на рис. 8.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе предложены и исследованы способы поддержки агентов с просоциальным поведением при голосовании, подчиняющемся модели ViSE. Установлено, что альтруисты увеличивают капитал общества, что помогает устранить парадокс «ямы ущерба». При этом без перераспределения доходов благосостояние просоциальных агентов гораздо ниже, чем у участников-эгоистов, из чего логично предположить, что такие агенты задумались бы о смене стратегии, что привело бы к ухудшению состояния всего общества. Рассмотрены три вида налогов: подоходный (№ 1), налог с «подтягиванием» (на каждом шаге) *дохода каждого альтруиста* до среднего по обществу (№ 2) и налог с «подтягиванием» *среднего дохода альтруистов* до среднего

по обществу (№ 3). Применение каждого из этих налогов обеспечивает альтруистам больший средний капитал, чем эгоистам, что создает для них «меркантильный» стимул к выгодному для общества альтруистическому голосованию. Выгода общества при этом проявляется в том, что все участники, как эгоисты, так и «альтруисты», получают больший средний капитал, чем в обществе без альтруистов.

При этом может возникнуть проблема чрезмерного премирования «альтруистов». Из рассмотренных подходов лучше всего защищает от нее налог № 3, премирующий альтруистов в среднем в меньшем объеме, чем налог № 2. Последствия введения подоходного налога с фиксированной ставкой (№ 1) сильно зависят от благоприятности среды и доли агентов-альтруистов, что свидетельствует о его негибкости. Вместе с тем администрирование налогов № 2 и № 3 требует полной информации о доходах участников и более сложных расчетов, что делает эти налоги менее прозрачными и несколько усложняет их практическое применение. При этом во всех рассмотренных методах перераспределения эгоисты в результате получают больший доход, чем в обществе без просоциальных агентов, что делает появление альтруистов, поддерживае-

мых налогом, привлекательным в том числе для агентов с эгоистической стратегией.

В сравнении со статьей [11], в которой поиск оптимального способа налогообложения мотивирован стремлением обеспечить размер общественного блага, максимизирующий суммарную функцию полезности общества, в настоящей работе предложен и исследован другой критерий оптимальности налога — степень поддержки агентов, чья стратегия способствует увеличению благосостояния общества. Закономерности, выявленные в ходе данного исследования, могут быть использованы при разработке реальных алгоритмов налогообложения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Чеботарев П.Ю., Логинов А.К., Цодикова Я.Ю. и др. Анализ феноменов коллективизма и эгоизма в контексте общественного благосостояния // Проблемы управления. — 2008. — № 4. — С. 30—37. [Chebotarev, P.Yu., Loginov, A.K., Tsodikova Ya.Yu., et al. Analysis of Collectivism and Egoism in the Context of Social Welfare // Control Sciences. — 2008. — No. 4. — P. 30—37. (In Russian)]
2. Чеботарев П.Ю., Малышев В.А., Цодикова Я.Ю. и др. Оптимальный порог голосования как функция коэффициента вариации среды // Управление большими системами. — 2016. — № 62. — С. 169—187. [Chebotarev, P., Malyshev, V., Tsodikova, Y., et al. The Optimal Majority Threshold as a Function of the Variation Coefficient of the Environment // Large-Scale Systems Control. — 2016. — Iss. 62. — P. 169—187. (In Russian)]
3. Миркин Б.Г. Проблема группового выбора. — М.: Наука, 1974. — 256 с. [Mirkin, B.G. Problema gruppovogo vybora. — M.: Nauka, 1974. — 256 p. (In Russian)]
4. Gomes, A., Jehiel, P. Dynamic Processes of Social and Economic Interactions: On the Persistence of Inefficiencies // J. Polit. Econom. — 2005. — Vol. 113. — P. 626—667.
5. Афонькин В.А. VISE Experiment Module: Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2018615940 РФ. Запег. 18.05.2018. [Afonkin, V.A. VISE Experiment Module: Svidetel'stvo o gosudarstvennoi registratsii programmy dlya EVM No. 2018615940 RF. Zareg. 18.05.2018.]
6. Kranich, L. Altruism and the Political Economy of Income Taxation // Journal of Public Economic Theory. — 2001. — Vol. 3 (4). — P. 455—469.
7. Ariely, D., Bracha, A., Meier, S. Doing Good or Doing Well? Image Motivation and Monetary Incentives in Behaving Prosocially // American Economic Review. — 2009. — Vol. 99. — P. 545—555.
8. Nyborg, K. Will Green Taxes Undermine Moral Motivation // Public Financ. Manag. — 2010. — Vol. 110 (2). — P. 331—351.
9. Snyder, J.M., Kramer, G.H. Fairness, Self-Interest, and the Politics of the Progressive Income Tax // Journal of Public Economics. — 1988. — Vol. 36 (2). — P. 197—230.
10. Roberts, K. Voting over Income Tax Schedules // J. Public Econom. — 1977. — Vol. 8. — P. 329—340.
11. Berliant, M., Gouveia, M. On the Political Economy of Income Taxation // MPRA Paper No. 92528. — 2019. https://mpra.ub.uni-muenchen.de/92528/1/MPRA_paper_92528.pdf.

Статья представлена к публикации членом редколлегии Ф.Т. Алескеровым.

Поступила в редакцию 10.04.2019, после доработки 16.11.2020.

Принята к публикации 16.11.2020.

Афонькин Вадим Александрович — аспирант, Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет), г. Долгопрудный, ✉ afonkinvadim@yandex.ru.

TAX INCENTIVES FOR PROSOCIAL VOTING IN A STOCHASTIC ENVIRONMENT

V.A. Afonkin

Moscow Institute of Physics and Technology, Dolgoprudny, Russia

✉ afonkinvadim@yandex.ru

Abstract. Three income redistribution algorithms supporting the agents with prosocial voting are considered within the Voting in Stochastic Environment (ViSE) model of social dynamics. The first algorithm is income tax; the second one ensures that the income of each agent with the prosocial strategy is not smaller than the average income; the third one ensures that the average income of prosocial agents is not smaller than that of the entire society. The social utility of prosocial voting is analyzed. The three algorithms are compared with each other. The effectiveness of income tax depends on the environment. The second and third algorithms do not suffer from this disadvantage. However, under certain conditions, the second algorithm provides too many bonuses to prosocial agents. With any of these income redistribution algorithms, the egoists get more profit than in a society without any prosocial agents. Thus, whenever such tax schemes motivate some participants to choose the prosocial voting strategy, this will increase the expected income of all agents.

Keywords: ViSE model, altruism, voting, social dynamics, tax, pit of losses, prosocial behavior.

ДВУХКАСКАДНЫЕ ДУАЛЬНЫЕ ФОТОННЫЕ КОММУТАТОРЫ В РАСШИРЕННОМ СХЕМНОМ БАЗИСЕ

Е.А. Барабанова, К.А. Вытовтов, В.С. Подлазов

Аннотация. Предложен новый метод построения двухкаскадного дуального фотонного коммутатора с повышенными функциональными характеристиками в системном базисе из малоканальных фотонных коммутаторов и фотонных мультиплексоров и демultipлексоров. В дуальном коммутаторе совмещены шинный и коммутаторный способы разрешения конфликтов. Метод обеспечивает построение неблокируемых коммутаторов со статической самомаршрутизацией, а также обеспечивает существенное повышение быстродействия коммутаторов при одинаковом числе каналов и существенное увеличение числа каналов при одинаковом быстродействии по сравнению с ранее построенными неблокируемыми дуальными коммутаторами. Построенные неблокируемые коммутаторы имеют максимальное возможное для них быстродействие и широкую масштабируемость по числу каналов. Показано, что дуальные коммутаторы имеют сопоставимую коммутационную сложность по сравнению с полными коммутаторами и имеют меньшую канальную сложность, чем полные коммутаторы.

Ключевые слова: физический уровень, фотонный коммутатор, дуальный коммутатор, многокаскадный коммутатор, бесконфликтная самомаршрутизация, неблокируемый коммутатор, статическая самомаршрутизация, квазиполный орграф, коммутационные свойства, прямые каналы, масштабируемость и быстродействие.

ВВЕДЕНИЕ

В работах [1–3] предложена методика построения неблокируемых фотонных коммутаторов со статической самомаршрутизацией для оптических суперкомпьютерных систем. Системная сеть является неблокируемой, если в ней для любой перестановки пакетов можно проложить бесконфликтные пути от источников к приемникам. Системная сеть является самомаршрутизируемой, если бесконфликтные пути можно проложить локально по узлам сети без их взаимодействия только на основе маршрутной информации в пакетах. Наконец, самомаршрутизация является статической, если любой источник может самостоятельно наметить бесконфликтные пути к своему приемнику без взаимодействия с другими источниками.

Задача построения неблокируемых системных сетей до последнего времени не имела своего полного решения. В лучшем случае предлагались пе-

рестраиваемые многокаскадные сети Клоза [4, 5]. В перестраиваемых сетях [4] возможна бесконфликтная реализация любой перестановки пакетов данных, но бесконфликтное расписание для каждой перестановки приходится составлять отдельно, и оно не является самомаршрутизируемым.

Известны неблокируемые сети Клоза [6]. Однако для них до сих пор не предложено процедур ни статической, ни хотя бы динамической маршрутизации. Кроме того, они имеют значительно большую сложность, чем перестраиваемые сети Клоза, и на практике не применяются.

В качестве системной сети широко применяется p -ичный r -мерный обобщенный гиперкуб [7, 8]. Однако при $r > 2$ он не является ни неблокируемым, ни даже перестраиваемым. Для превращения его в перестраиваемую сеть приходится увеличивать в нем число каналов. Так, при $p = 2$ достаточно удвоить число каналов одного измерения [9]. При этом сдвоенный гиперкуб, в котором все ка-

налы дублированы, имеет бесконфликтные расписания сразу для двух перестановок [10].

Недавно удалось сделать неблокируемым трехмерный гиперкуб с динамической самомаршрутизацией [11]. Однако для этого потребовалось увеличить число каналов и степень составляющих коммутаторов почти втрое.

Тем не менее, задача построения неблокируемой самомаршрутизируемой сети имеет решение в частном случае сетей с топологией квазиполного графа и орграфа [12]. К сожалению, число N абонентов (процессоров) таких сетей не превосходит квадрата степени p составных коммутаторов: $N = p(p - 1)/\sigma + 1$ и $N = p^2$ соответственно, где σ — число разных каналов между абонентами. При этом они имеют коммутационную сложность больше, а канальную сложность меньше, чем у полного графа. Квазиполный граф изоморфен такому математическому объекту, как неполная уравновешенная блок-схема [13–17], а квазиполный орграф изоморфен двумерному обобщенному гиперкубу (параллелограмму) или двумерному мультикольцу. В частности, два младших измерения четырехмерного гиперкуба Dragonfly (CRAY XC-30) [8] выполнены в виде параллелограмма 6×16 и представляют собой неблокируемую самомаршрутизируемую подсеть.

Сети с топологией квазиполных графов и орграфов можно расширять, увеличивая число их абонентов, и не менять при этом свойств неблокируемости и самомаршрутизируемости. Это осуществляется с помощью метода инвариантного расширения системных сетей [12, 18]. К сожалению, при этом еще больше увеличивается коммутационная сложность расширенных сетей, что сильно ограничивает их масштабируемость.

Отметим, что большинство современных системных сетей (сети Клоза [5], обобщенные гиперкубы [8], многомерные торы [19], иерархия полных графов компании IBM [20], толстое дерево Melanox [21, 22]) не могут бесконфликтно реализовать произвольную перестановку пакетов в одном сеансе. Часто приходится организовывать повторные передачи заблокированных в буферах пакетов. В настоящее время предлагаются уже фотонные компьютеры [23], фотонные сети которых не содержат в каналах никакой буферной памяти для заблокированных пакетов.

В работах [1–3] введено понятие дуальных сетей и построены новые дуальные сети, пригодные для фотонных компьютеров, которые бесконфликтно реализуют произвольные перестановки пакетов при несколько меньшем канальном быстродействии. Методика построения этих сетей основана на четырех базовых положениях.

- Применение четырехканального коммутатора новой структуры, который является *дуальным по*

способу разрешения конфликтов. Он совмещает шинный способ (разведение конфликтующих сигналов по разным тактам в одном канале) и коммутаторный способ (разведение конфликтующих сигналов по разным каналам).

- Допущение о передаче сигнальной и управляющей информации для коммутаторов параллельно на разных частотах для каждого разряда данных. Это позволяет снять проблему синхронизации сигналов разных каналов.
- Способ каскадирования коммутаторов, по которому I -й канал J -го коммутатора одного каскада подсоединяется к J -му каналу I -го коммутатора в следующем каскаде. С помощью обменных связей предыдущий и следующий каскады должны включать в себя одинаковое число коммутаторов с одинаковым числом каналов каждый. Этот способ позволяет создавать многоканальные коммутаторы с малым числом каскадов.
- Балансировка быстродействия и сложности многокаскадного коммутатора основывается на применении метода инвариантного расширения системных сетей [4], сохраняющего неблокируемость и быстродействие коммутатора при увеличении числа его каналов. Это метод базируется на использовании расширенной схемной базы, состоящей как из коммутаторов $p \times p$ на p каналов, так и пар мультиплексоров $1 \times p$ и демultipлексоров $p \times 1$ ($p \geq 2$).

В работах [1–3] одна из схем дуального коммутатора 4×4 имеет вид двухкаскадной схемы из четырех демultipлексоров и четырех мультиплексоров с обратными связями через линии задержки (рис. 1). Каскады коммутатора соединены обменными связями.

Если измерять сложность мультиплексоров M_4 и демultipлексоров D_4 в числе точек коммутации как равную четырем, то коммутационная сложность коммутатора задается как $S_1 = 32$.

Комбинация из двух управляющих частот однозначно определяет режим демultipлексора, в котором информационный сигнал может быть направлен на один из четырех выходов. Возможные комбинации управляющих сигналов приведены в табл. 1.

Таблица 1

Управляющие частоты для фотонного коммутатора 4×4

Номер выхода	Управляющие частоты
1	$\lambda_1 \lambda_1$
2	$\lambda_1 \lambda_2$
3	$\lambda_2 \lambda_1$
4	$\lambda_2 \lambda_2$

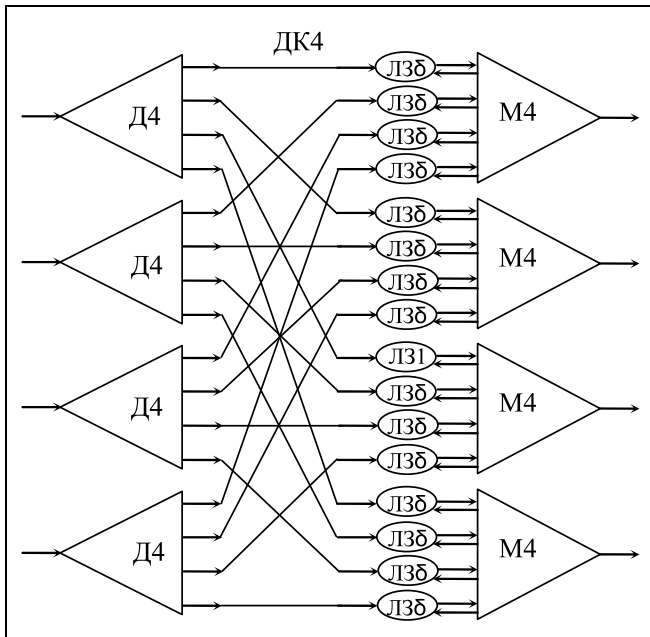


Рис. 1. Обобщенная схема дуального коммутатора **КК4**: М4 — мультиплексор на четыре входа, Д4 — демультиплексор на четыре выхода, ЛЗδ — линия задержки длиной в δ сигналов

Сигналы с выходов демультиплексора поступают на входы мультиплексора. Один из них пропускается на выход, а остальные возвращаются на свои линии задержки ЛЗδ. С помощью обратных связей через ЛЗδ в коммутаторе реализуется функция динамической задержки сигналов.

Дуальный коммутатор **КК4** обеспечивает неблокируемость при статической самомаршрутизации, если выбрать соответствующую длину линии задержки δ. Значение δ зависит от номера каскада, в котором используется коммутатор **КК4**.

В первом каскаде δ = 1. Пусть на входы коммутатора **КК4** одновременно поступают четыре сигнала длительностью T_0 , принимаемой за один такт. С помощью динамической задержки сигналов на его выходах возможна реализация одного из четырех вариантов размещения сигналов: по одному на каждом выходе, по два сигнала подряд на двух выходах, один и три сигнала подряд на двух выходах и четыре сигнала подряд на одном выходе. Они представлены на рис. 2. В результате коммутатор **КК4** окажется неблокируемым на любом входном трафике при длительности периода T_1 информационных сигналов в четыре такта.

Следовательно, неблокируемый самомаршрутизируемый коммутатор **КК4** имеет такие характеристики: период сигналов $T_1 = 4 = \underline{N}_1$ тактов, число каналов $\underline{N}_1 = 4$ и коммутационную сложность $\underline{S}_1 = 32 = \underline{N}_1^{5/2}$.

В работах [1–3] был рассмотрен двухкаскадный коммутатор 16×16 $K_2 16$ с обменными связями, состоящий из четырех коммутаторов **КК4** в каждом каскаде. В первом каскаде используются ЛЗ1, а во втором — ЛЗ0, т. е. линии задержки не используются. На произвольной перестановке пакетов $K_2 16$ оказался неблокируемым самомаршрутизируемым коммутатором с такими характеристиками: число каналов $\underline{N}_2 = 16$, период сигналов $T_2 = 4 = \underline{N}_2^{1/2}$ тактов и коммутационная сложность $\underline{S}_2 = 2 \cdot 4 \cdot 32 = 256 = \underline{N}_2^2$.

В работах [1–3] был рассмотрен четырехкаскадный коммутатор 256×256 $K_4 256$ с обменными связями, состоящий из 16 коммутаторов $K_2 16$ в каждом каскаде. Он состоит из четырех каскадов коммутаторов **КК4**. В первом каскаде используются ЛЗ1, во втором — ЛЗ4, в третьем — ЛЗ15 и в четвертом — ЛЗ0, т. е. линии задержки не используются. На произвольной перестановке пакетов $K_4 256$ оказался неблокируемым самомаршрутизируемым коммутатором с такими характеристиками: период сигналов $T_4 = 49 \approx 3 \underline{N}_4^{1/2}$ тактов, число каналов $\underline{N}_4 = 256$ и коммутационная сложность $\underline{S}_4 = 2 \cdot 16 \cdot 256 = 8192 = \underline{N}_4^{1.625}$. Отметим здесь большой период разрядов (низкое быстродействие) и малую сложность этого коммутатора.

В работах [1–3] была предложена балансировка соотношения «быстродействие — сложность» с помощью инвариантного расширения коммутаторов с малым периодом. В частности, расширился коммутатор $K_2 16$ посредством использования внешних мультиплексоров М4 и демультиплексоров Д4. В результате был построен неблокируемый самомаршрутизируемый коммутатор $K_3 64$, состоящий из 16-ти коммутаторов $K_2 16$ и 64-х демультиплексоров Д4 и мультиплексоров М4 и имеющий такие характеристики: число каналов $\underline{N}_3 = 64$, период

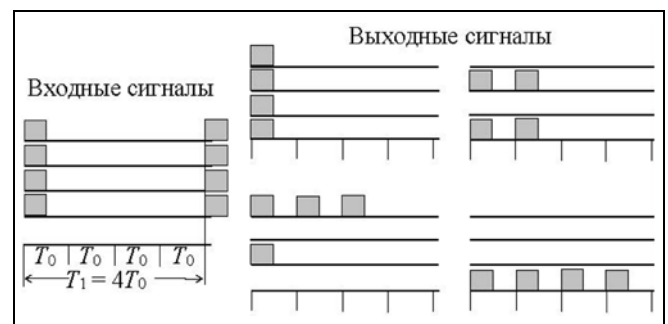


Рис. 2. Разные варианты распределения входных сигналов по линиям и тактам

сигналов $T_3 = 4 = N_3^{1/3}$ тактов и коммутационную сложность $S_3 = 16 \cdot 256 + 4 \cdot 128 = 4 \cdot 608 = N_3^{2,028}$.

В настоящей статье неблокируемый коммутатор с топологией квазиполного орграфа используется не только для расширения двухкаскадных коммутаторов, а сразу для их построения. В результате удастся построить коммутаторы с большим быстродействием (меньшим периодом сигналов) и с большим числом каналов, чем в работах [1–3].

В § 1 рассматривается структура и характеристики коммутатора с топологией квазиполных графов при любом числе портов p . В § 2 рассматривается основная идея повышения быстродействия и числа каналов для $p = 2$ на примере построения неблокируемого трехкаскадного коммутатора. В § 3 эта идея реализуется полностью на примере построения неблокируемого двухкаскадного коммутатора при $p = 2$. В § 4 дается построение аналогичного двухкаскадного коммутатора при любом p . В § 5 описывается расширение двухкаскадного коммутатора в коммутаторы с большим числом каналов и неизменным периодом сигналов.

1. НЕБЛОКИРУЕМЫЙ САМОМАРШРУТИЗИРУЕМЫЙ КОММУТАТОР С ТОПОЛОГИЕЙ КВАЗИПОЛНОГО ОРГРАФА

Пусть имеется $N_1 = p^2$ дуальных коммутаторов $p \times p$ (КК p). Для $p = 4$ схема каждого из них приведена на рис. 1. В общем случае они представляют

Таблица 2

Межсоединения в коммутаторе 16×16 КП16 с топологией квазиполного орграфа

Симплексные каналы от абонентов				Коммутаторы 4×4 КК4	Симплексные каналы к абонентам			
1	2	3	4	1	1	5	9	13
2	3	4	1	2	2	6	10	14
3	4	1	2	3	3	7	11	15
4	1	2	3	4	4	8	12	16
5	6	7	8	5	5	9	13	1
6	7	8	5	6	6	10	14	2
7	8	5	6	7	7	11	15	3
8	5	6	7	8	8	12	16	4
9	10	11	12	9	9	13	1	5
10	11	12	9	10	10	14	2	6
11	12	9	10	11	11	15	3	7
12	9	10	11	12	12	16	4	8
13	14	15	16	13	13	1	5	9
14	15	16	13	14	14	2	6	10
15	16	13	14	15	15	3	7	11
16	13	14	15	16	16	4	8	12

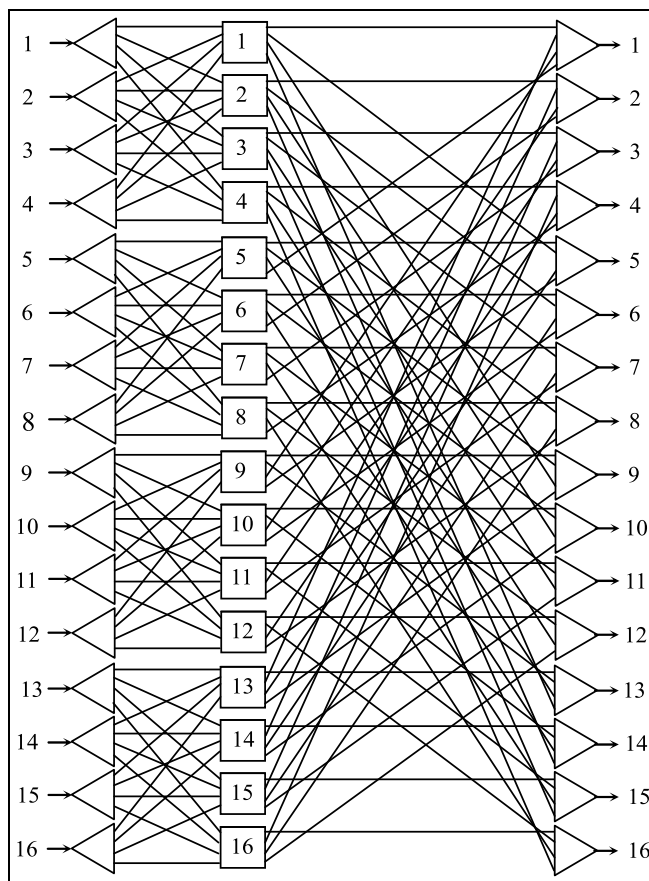


Рис. 3. Коммутатор КП16 с топологией квазиполного орграфа. Квадраты задают коммутаторы КК4, а треугольники — мультиплексоры М4 и демультиплексоры Д4

собой двухкаскадную схему с обменными связями, в первом каскаде которой находятся p демультиплексоров $p \times 1$ (Др), а во втором каскаде — p мультиплексоров $1 \times p$ (Мр) с обратными связями через линии задержки ЛЗд по каждому входу. Каждый коммутатор КК p имеет коммутационную сложность $S_1 = 2p^2$.

Из $N_1 = p^2$ коммутаторов КК p а также N_1 мультиплексоров Мр без линий задержки и N_1 демультиплексоров Др можно составить неблокируемый саммаршрутизируемый коммутатор $N_1 \times N_1$ со структурой квазиполного орграфа — КП N_1 . Межсоединения в нем задаются таблицей инцидентий, в качестве примера которой для $p = 4$ приведена табл. 2. Схема самого коммутатора КП16 изображена на рис. 3.

Коммутатор КП N_1 является неблокируемым не только на перестановках пакетов, но и при любом распределении N_1 пакетов по выходам, при котором на каждый выход направляется не более p пакетов.



Коммутатор KPN_1 имеет такие характеристики: число каналов $N_1 = p^2$, период сигналов $\tau = p$ и коммутационную сложность $\Sigma = S_1 N_1 + 2p N_1 = 2p^2 N_1 + 2p N_1 = 2p^3(p + 1)$. В дальнейшем для любых коммутаторов рассматривается и кабельная сложность по числу симплексных каналов в них. Для KPN_1 она задается как $\Lambda = 2p N_1 = 2p^3$. Все характеристики коммутатора представлены в табл. 3. Коммутатор KPN_1 мы считаем однокаскадным — по числу каскадов коммутаторов KKp . В дальнейшем число каскадов считается по числу каскадов коммутаторов KKp .

Подчеркнем, что коммутатор KPN_1 является не-блокируемым не только на перестановках пакетов, но и при любом распределении N_1 входных пакетов по выходам, при котором на каждый выход направляется не более p пакетов.

Расширение таблицы до $p = 8$ объясняется тем, что уже разработан дуальный фотонный коммутатор 8×8 , т. е. $KK8$ [24].

В § 2 и 3 используются дуальные коммутаторы $KK2$ и $KП4$, представленные на рис. 4. Заметим, что однокаскадный коммутатор $KП4$ имеет те же период сигналов и число каналов, что и двухкаскадный коммутатор, построенный из $KK4$ в работах [1–3].

2. НЕБЛОКИРУЕМЫЙ САМОМАРШРУТИЗИРУЕМЫЙ ТРЕХКАСКАДНЫЙ КОММУТАТОР

Составим из дуального коммутатора $KП4$ саммаршрутизируемую двухкаскадную сеть C_{216} с обменными связями, представленную на рис. 5. Она состоит из двух каскадов, каждый каскад — из четырех коммутаторов $KП4$. К сожалению, эта сеть не является 16-канальным не-блокируемым коммутатором, так как может иметь конфликты сигналов на каскаде мультиплексоров $M2$, выделенных серой заливкой. Конфликтовать могут сигналы в первом и втором тактах. Чтобы разрешить эти конфликты достаточно иметь в указанных мультиплек-

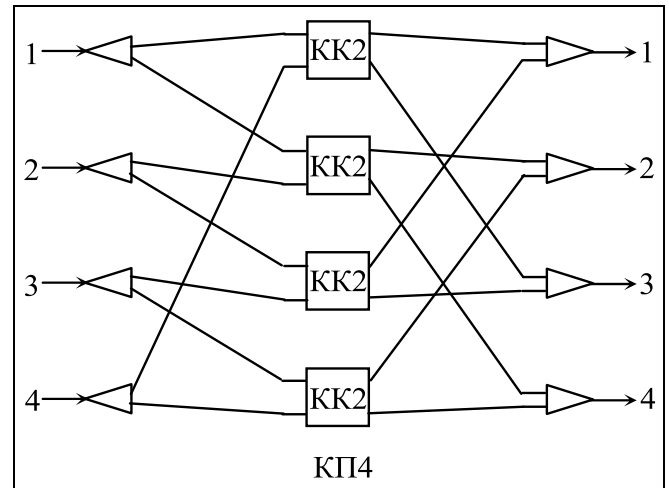


Рис. 4. Неблокируемый саммаршрутизируемый коммутатор $KП4$

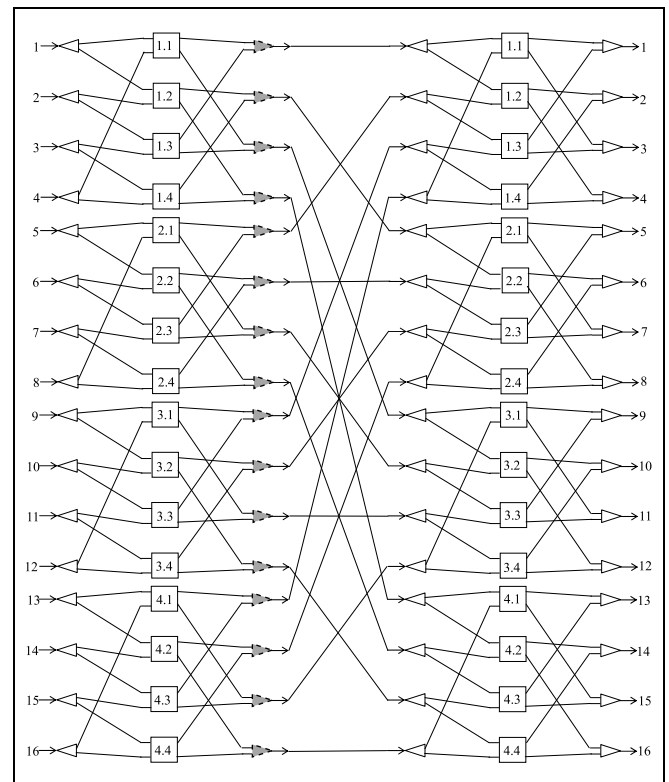


Рис. 5. Двухкаскадная сеть C_{216}

Таблица 3

Характеристики коммутатора KPN_1

p	2	3	4	5	6	7	8
N_1	4	9	16	25	36	49	64
Σ	48	216	640	1500	3024	5488	9216
Σ	$N_1^{2,79}$	$N_1^{2,45}$	$N_1^{2,33}$	$N_1^{2,27}$	$N_1^{2,24}$	$N_1^{2,21}$	$N_1^{2,19}$
Λ	16	54	128	250	432	686	1024
Λ	N_1^2	$N_1^{1,82}$	$N_1^{1,75}$	$N_1^{1,72}$	$N_1^{1,69}$	$N_1^{1,68}$	$N_1^{1,67}$

сорах $L3\delta$ с $\delta = 2$, как показано на рис. 6. Тогда можно условно считать, что они образуют второй каскад дуальных коммутаторов без демультиплексоров. В результате образуется трехкаскадный не-блокируемый саммаршрутизируемый коммутатор $K_3 16$. Он обладает такими характеристиками: число каналов $N_3 = 16 = 2^4$, период сигналов $T_3 = 4$,

коммутационная сложность $S_3 = 2N_1 \Sigma|_{p=2} = 384 = N_3^{2,15}$ и кабельная сложность $L_3 = 2N_1 \Lambda + N_1|_{p=2} = 144 = N_3^{1,79}$.

Сравним характеристики данного трехкаскадного коммутатора и описанного во введении двухкаскадного коммутатора, составленного из КК4. Они имеют по 16 каналов, отношение периодов сигналов $\gamma = T_3/T_2 = 2/4 = 0,5$ и отношение коммутационных сложностей $\sigma = S_3/S_2 = 384/256 = 1,5$. Произведение $\gamma\sigma = 0,75$ показывает во сколько раз сокращение периода сигнала меньше увеличения коммутационной сложности.

Используя коммутаторы КП16 аналогичным образом, можно построить двухкаскадную самомаршрутизируемую сеть C_3256 с обменными связями. Она состоит из двух каскадов по 16 коммутаторов КП16 в каждом каскаде. В этой сети могут быть конфликты на мультиплексорах М4 первого каскада. Для того, чтобы сделать C_3256 трехкаскадным неблокируемым самомаршрутизируемым коммутатором, достаточно использовать в мультиплексорах М4 линии задержки ЛЗ8 с $\delta = 4$ (рис. 7). В результате образуется трехкаскадный неблокируемый самомаршрутизируемый коммутатор K_3256 с такими характеристиками: число каналов $N_3 = 256 = 4^4$, период сигналов $T_3 = 11$, коммутационная сложность $S_3 = 2N_1 \Sigma|_{p=4} = 20 \cdot 480 = N_3^{1,79}$ и кабельная сложность $L_3 = 2N_1 \Lambda + N_1|_{p=4} = 4 \cdot 352 = N_3^{1,51}$. Обоснование значения δ и T_3 дается ниже в лемме 1.

Сравним характеристики данного трехкаскадного коммутатора при $p = 4$ и описанного во введении

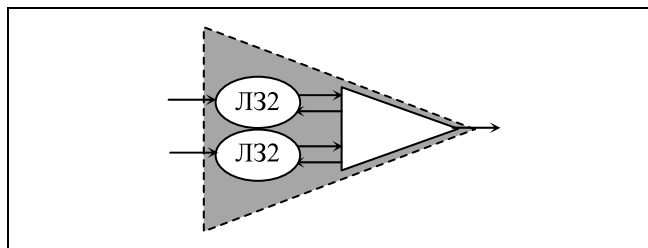


Рис. 6. Мультиплексор М2 с линиями задержки для первого каскада

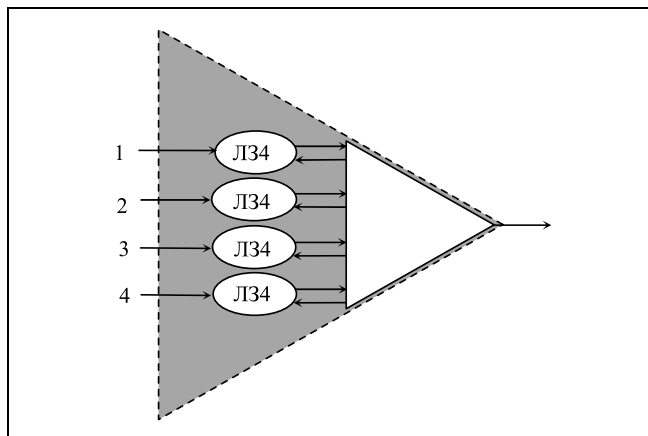


Рис. 7. Мультиплексор М4 с линиями задержки для первого каскада

четырехкаскадного коммутатора с тем же p . Они имеют по 256 каналов, отношение периодов сигналов $\gamma = T_3/T_4 = 10/49 \approx 0,204$ и отношение коммутационных сложностей $\sigma = S_3/S_4 = 20 \cdot 480/8 \cdot 192 = 2,5$. Произведение $\gamma\sigma = 0,51$ показывает, во сколько раз сокращение периода сигнала меньше увеличения коммутационной сложности.

Для произвольного $p > 2$ трехкаскадный коммутатор K_3p^4 строится аналогично из коммутаторов KPp^2 . Для него можно сформулировать следующую лемму.

Лемма 1. Для неблокируемости коммутатора K_3p^4 достаточно, чтобы мультиплексор Mp первого каскада имел ЛЗ δ с $\delta = p$ и период сигналов длительности

$$T_3 = p^2. \quad (1)$$

Доказательство. На входы Mp поступает p сигналов с возможным их распределением на отрезке от 1 до p тактов. В конфликтной ситуации они распределены максимально на отрезке от 1 до p тактов. Для того чтобы при любых конфликтах первичные сигналы не накладывались на сигналы, задержанные в ЛЗ δ , достаточно выполнения условия $\delta = p$.

Таблица 4

Характеристики коммутаторов K_3N_3

p	δ	$N_3 = p^4$	$T_3 = p^2$	S_3	L_3
2	2	16	4	$384 = N_3^{2,15}$	$144 = N_3^{1,79}$
3	3	81	9	$3888 = N_3^{1,88}$	$1053 = N_3^{1,58}$
4	4	256	16	$20\,480 = N_3^{1,79}$	$4352 = N_3^{1,51}$
5	5	625	25	$75\,000 = N_3^{1,74}$	$13\,125 = N_3^{1,47}$
6	6	1\,296	36	$217\,728 = N_3^{1,71}$	$32\,400 = N_3^{1,45}$
7	7	2\,401	49	$537\,824 = N_3^{1,70}$	$69\,629 = N_3^{1,43}$
8	8	4\,096	64	$1\,179\,648 = N_3^{1,68}$	$135\,168 = N_3^{1,42}$

Максимальное число конфликтующих сигналов возникает при распределении всех сигналов по p тактам. В этом случае разрешение конфликта потребует повторного пропуска конфликтующих сигналов через ЛЗБ p раз, что распределит их на отрезке от 1 до p^2 тактов. Что и требовалось доказать. ♦

Справедливость формулы (1) была подтверждена численным моделированием на модели коммутатора с синхронной генерацией произвольных перестановок пакетов.

При произвольном $p \geq 2$ коммутаторы $K_3 p^4$ имеют характеристики, представленные в табл. 4.

3. НЕБЛОКИРУЕМЫЙ САМОМАРШРУТИЗИРУЕМЫЙ ДВУХКАСКАДНЫЙ ДВОИЧНЫЙ КОММУТАТОР

Трехкаскадный коммутатор $K_3 16$ можно превратить в неблокируемый двухкаскадный коммутатор $K_2 16$ *способом внутреннего распараллеливания*, если вырезать каскад М2 с ЛЗР из первого каскада (рис. 5) и развести конфликтующие сигналы по двум копиям второго каскада (рис. 8). Выходы с этих копий объединяются дополнительным каскадом М2. Коммутатор $K_2 16$ имеет такие характеристики: число каналов $N_2 = 16$, период сигналов $T_2 = 2$, коммутационную сложность $S_2 = N_1(\Sigma - pN_1) + pN_2|_{p=2} = 576 = N_2^{2,29}$ и кабельную сложность $L_2 = (p + 1) N_1 \Lambda + pN_2|_{p=2} = 224 = N_3^{1,95}$.

Отметим, что коммутатор $K_2 16$ имеет большую несколько большую сложность, чем $K_3 16$. Заметим также, что двухкаскадный коммутатор $K_2 16$ и двухкаскадный коммутатор, составленный из коммутаторов КК4 в работах [1–3], имеют одинаковое число каналов, но первый имеет вдвое меньший период сигналов.

4. НЕБЛОКИРУЕМЫЙ САМОМАРШРУТИЗИРУЕМЫЙ ДВУХКАСКАДНЫЙ P -ИЧНЫЙ КОММУТАТОР

При $p > 2$ из коммутаторов KPN_1 ($N_1 = p^2$) *способом внутреннего распараллеливания* можно построить неблокируемый самомаршрутизируемый двухкаскадный p -ичный коммутатор $K_2 N_1^2$ или $K_2 N_2$ (рис. 9) с числом каналов $N_2 = p^4$. На рис. 9 трапеция $C_{2,1}$ обозначает схему коммутатора KPN_1 без выходных мультиплексоров Mp , имеющую N_1 входов и N_1 групп выходов по p выходов в группе. Квадрат $C_{2,2}$ обозначает схему полного коммутатора KPN_1 с N_1 входами и N_1 выходами. Треугольник $C_{2,3}$ — схему мультиплексора Mp .

Набор из N_1 схем $C_{2,1}$ обозначается как набор C_2^* . В нем выходы схем $C_{2,1}$ нумеруются как I, J, k , где I ($1 \leq I \leq N_1$) задает номер схем $C_{2,1}$ в C_2^* , J ($1 \leq J \leq N_1$) — номер группы из p выходов схемы $C_{2,1}$ и k ($1 \leq k \leq p$) — номер выхода в группе.

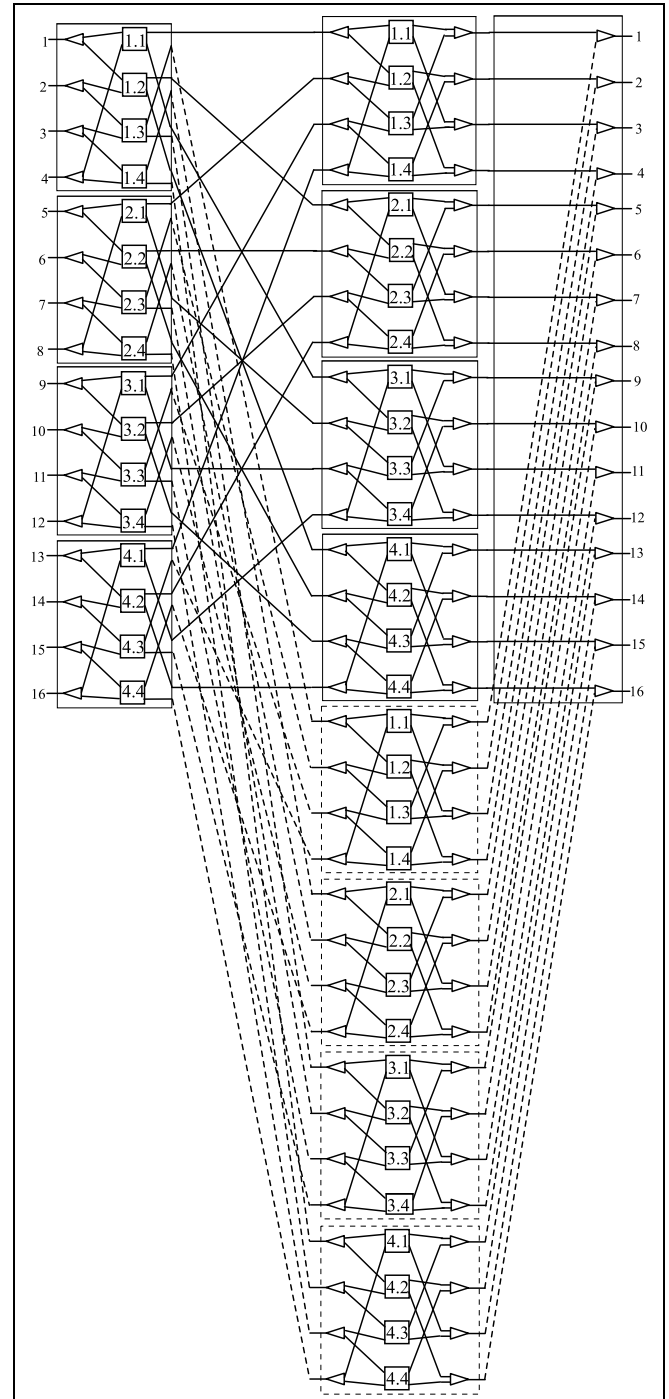


Рис. 8. Двоичный двухкаскадный неблокируемый самомаршрутизируемый коммутатор $K_2 16$. Каналы к копиям второго каскада и от них обозначены пунктиром

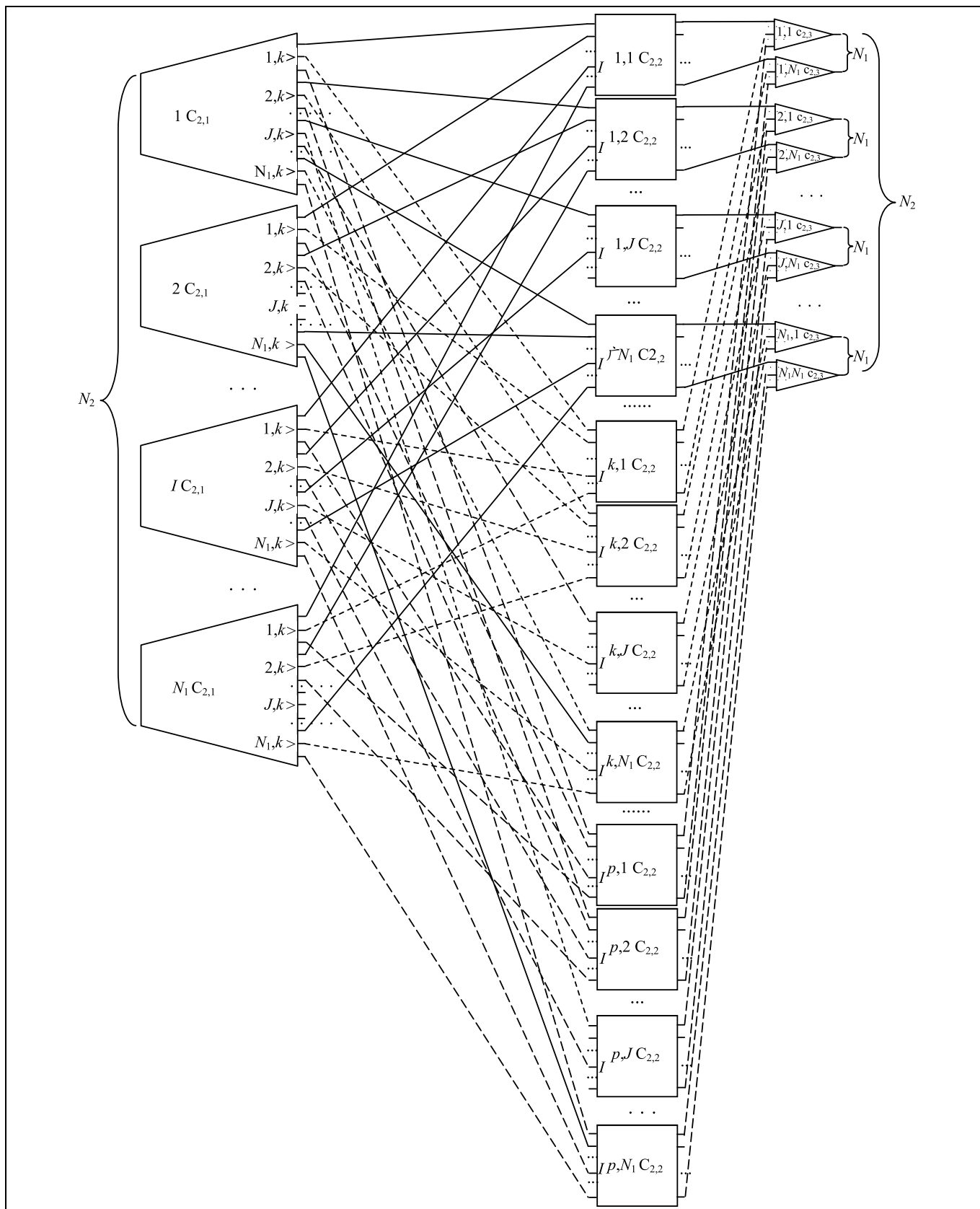


Рис. 9. Двухкаскадный p -ичный неблокируемый самомаршрутизируемый коммутатор $K_2 N_2$. Каналы к k -й и p -й копиям второго каскада и от них обозначены короткими и длинными пунктирами



Набор из N_1 схем $C_{2,2}$ обозначается как набор C_2 . В нем входы схем $C_{2,2}$ нумеруются как I, J , где I ($1 \leq I \leq N_1$) задает номер схемы $C_{2,2}$ в наборе C_2 , а J ($1 \leq J \leq N_1$) — номер входа схемы $C_{2,2}$. Имеется p копий набора C_2 .

Между выходами схем $C_{2,1}$ в наборе C_2^* и входами схем $C_{2,2}$ в каждой из p копий набора C_2 имеют место обменные связи, при которых выходы I, J, k набора C_2^* подсоединяются ко входам J, I, k -й копии набора C_2 .

Набор C_2^* и каждый набор C_2 в k -й группе имеют обменные связи, а именно: выходы I, J, k схем $C_{2,1}$ соединяются со входами J, I схем $C_{2,2}$ в k -й копии наборов C_2 . Выходы k копий наборов C_2 объединяются N_2 схемами в выходы коммутатора K_2N_2 .

Каждая схема $C_{2,1}$ имеет коммутационную сложность $S_{2,1} = \Sigma - pN_1 = 2p^2N_1 + pN_1$ и кабельную сложность вместе с выходными линиями на копии $C_{2,2} - L_{2,1} = \Lambda = 2pN_1$. Каждая копия $C_{2,2}$ имеет коммутационную сложность $S_{2,2} = \Sigma = 2p^2N_1 + 2pN_1$ и кабельную сложность $L_{2,2} = \Lambda = 2pN_1$. Каждая схема $C_{2,3}$ имеет коммутационную сложность $S_{2,3} = p$ и кабельную сложность вместе с входными линиями с копий $C_{2,2} - L_{2,3} = p$. В результате коммутационная и кабельная сложности коммутатора K_2N_2 составляют $S_2 = N_1S_{2,1} + pN_1S_{2,2} + N_2S_{2,3} = 2N_2(p^3 + 2p^2 + p) = 2(N_2^{7/4} + 2N_2^{3/2} + N_2^{5/4})$ и $L_2 = N_1L_{2,1} + pN_1L_{2,2} + N_2L_{2,3} = N_2(2p^2 + 2p + p) = 2N_2^{3/2} + 3N_2^{5/4}$ соответственно. В табл. 5 представлены

характеристики коммутаторов K_2N_2 в их сопоставлении с коммутаторами K_3N_3 (табл. 4).

Из табл. 5 следует, что двухкаскадные коммутаторы K_2N_2 и двухкаскадные коммутаторы, составленные из коммутаторов KKp в работах [1–3], при одинаковых p имеют существенно большее число каналов ($N_2 = N_2^2$) и одинаковый период сигналов ($T_2 = T_2 = p$), но при большей коммутационной сложности ($S_2 \approx N_2^2$ и $S_2 = 2N_2^{3/2}$) соответственно.

5. РАСШИРЕНИЯ НЕБЛОКИРУЕМЫХ САМОМАРШРУТИЗИРУЕМЫХ ДВУХКАСКАДНЫХ Р-ИЧНЫХ КОММУТАТОРОВ

В данном разделе применяется метод инвариантного расширения системных сетей [18], который позволяет увеличивать число абонентов, не меняя задержек передачи, посредством увеличения сложности сети. Для расширения коммутаторов K_2N_2 в этом методе используются отдельные мультиплексоры Md и демultipлексоры Dd , у которых d представляет собой делитель N_2 , т. е. $d = p^r$ ($r = 1, 2, \dots$). Это метод уже применялся в работах [1–3] при $r = 1$ для расширения коммутаторов, построенных в чисто коммутаторной схемной базе.

Суть этого метода состоит в следующем. Берется d^2 коммутаторов K_2N_2 . Каждый из них разделяется на $n = N_2/d$ зон по d портов (пар «вход — выход») в каждой. Части коммутаторов K_2N_2 в любой зоне являются также коммутаторами $d \times d$. Все вместе они являются хребтом коммутатора $K_{P_1}d^2$ с топологией квазиполного орграфа (например,

Таблица 5

Характеристики коммутаторов K_2N_2

p	$N_2 = p^4$	$T_2 = N_2^{1/4}$	S_2	L_2	$\gamma = S_2/S_3$	$\sigma = T_3/T_2$	γ/σ
2	16	2	$576 = N_2^{2,29}$	$224 = N_2^{1,95}$	1,50	2	0,75
3	81	3	$7776 = N_2^{2,04}$	$2187 = N_2^{1,75}$	2,00	3	0,67
4	256	4	$51\,200 = N_2^{1,96}$	$11\,264 = N_2^{1,68}$	2,50	4	0,63
5	625	5	$225\,000 = N_2^{1,91}$	$40\,625 = N_2^{1,65}$	3,00	5	0,60
6	1\,296	6	$762\,048 = N_2^{1,89}$	$116\,640 = N_2^{1,63}$	3,50	6	0,58
7	2\,401	7	$2\,152\,296 = N_2^{1,87}$	$285\,719 = N_2^{1,61}$	4,00	7	0,57
8	4\,096	8	$5\,308\,416 = N_2^{1,86}$	$622\,592 = N_2^{1,60}$	4,50	8	0,56

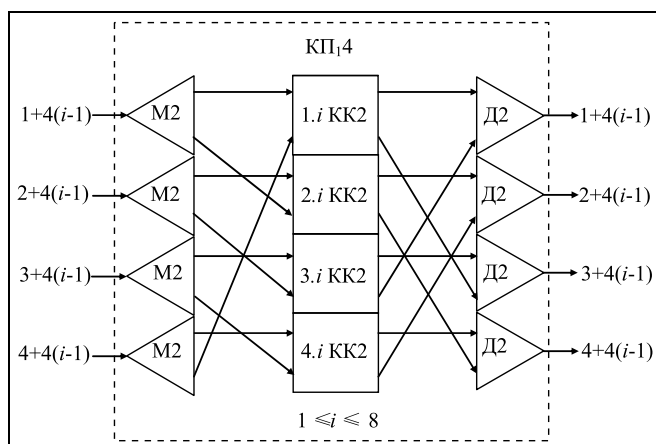


Рис. 10. Схема подсоединения входов и выходов коммутатора КР₂32 в *i*-й зоне коммутатора КР₂16

см. рис. 3 для $d = p = 4$ и рис. 4 для $d = p = 2$). Для образования каждого такого коммутатора достаточно подключить к нему d^2 входов через мультиплексоры M_d и d^2 выходов — через демultipлексоры D_d по соответствующей таблице межсоединений (например, см. табл. 2 для $d = p = 4$). При этом образуется расширенный коммутатор KP_2R_2 , где $R_2 = nd^2 = dN_2$. В нем сигнал с любого входа поступает на единственную (!) копию коммутатора K_2N_2 , с которой он без дополнительных задержек проходит на любой заданный выход. Поэтому KP_2R_2 является неблокируемым самомаршрутизируемым коммутатором, как и K_2N_2 .

Пример расширения коммутатора КР₂16 в коммутатор КР₂32 при $d = p = 2$ иллюстрируется табл. 6 и рис. 10.

Размещение коммутаторов КК2 в расширенном коммутаторе КР₂32 при $d = p = 2$

Таблица 6

Номер копии К ₂ 16	Порты коммутатора К ₂ 16															
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
	Состав коммутаторов КР ₂ 32 из коммутаторов КК2															
1	1 КК2	2 КК2	3 КК2	4 КК2	5 КК2	6 КК2	7 КК2	8 КК2								
2	1 КК2	2 КК2	3 КК2	4 КК2	5 КК2	6 КК2	7 КК2	8 КК2								
3	1 КК2	2 КК2	3 КК2	4 КК2	5 КК2	6 КК2	7 КК2	8 КК2								
4	1 КК2	2 КК2	3 КК2	4 КК2	5 КК2	6 КК2	7 КК2	8 КК2								

Характеристики коммутатора КР₂R₂ для некоторых значений *p* и *d*

Таблица 7

<i>p</i>		2	3	4	5	6	7	8
<i>T</i> ₂		2	3	4	5	6	7	8
<i>d</i> = <i>p</i>	<i>R</i> ₂	32	243	1024	3125	7776	16 807	32 768
	<i>S</i> ₂ [*]	<i>R</i> ₂ ^{2,25}	<i>R</i> ₂ ^{2,03}	<i>R</i> ₂ ^{1,97}	<i>R</i> ₂ ^{1,93}	<i>R</i> ₂ ^{1,91}	<i>R</i> ₂ ^{1,90}	<i>R</i> ₂ ^{1,89}
	<i>L</i> ₂ [*]	<i>R</i> ₂ ^{1,89}	<i>R</i> ₂ ^{1,74}	<i>R</i> ₂ ^{1,69}	<i>R</i> ₂ ^{1,66}	<i>R</i> ₂ ^{1,65}	<i>R</i> ₂ ^{1,64}	<i>R</i> ₂ ^{1,63}
<i>d</i> = <i>p</i> ²	<i>R</i> ₂	64	729	4096	15 625	46 656	117 649	262 144
	<i>S</i> ₂ [*]	<i>R</i> ₂ ^{2,21}	<i>R</i> ₂ ^{2,03}	<i>R</i> ₂ ^{1,97}	<i>R</i> ₂ ^{1,94}	<i>R</i> ₂ ^{1,93}	<i>R</i> ₂ ^{1,92}	<i>R</i> ₂ ^{1,91}
	<i>L</i> ₂ [*]	<i>R</i> ₂ ^{1,91}	<i>R</i> ₂ ^{1,78}	<i>R</i> ₂ ^{1,74}	<i>R</i> ₂ ^{1,72}	<i>R</i> ₂ ^{1,71}	<i>R</i> ₂ ^{1,7}	<i>R</i> ₂ ^{1,69}
<i>d</i> = <i>p</i> ³	<i>R</i> ₂	128	2187	16 384	78 125	279 936	823 543	2 097 152
	<i>S</i> ₂ [*]	<i>R</i> ₂ ^{2,18}	<i>R</i> ₂ ^{2,02}	<i>R</i> ₂ ^{1,98}	<i>R</i> ₂ ^{1,95}	<i>R</i> ₂ ^{1,94}	<i>R</i> ₂ ^{1,93}	<i>R</i> ₂ ^{1,92}
	<i>L</i> ₂ [*]	<i>R</i> ₂ ^{1,92}	<i>R</i> ₂ ^{1,81}	<i>R</i> ₂ ^{1,78}	<i>R</i> ₂ ^{1,76}	<i>R</i> ₂ ^{1,75}	<i>R</i> ₂ ^{1,74}	<i>R</i> ₂ ^{1,74}
<i>d</i> = <i>p</i> ⁴	<i>R</i> ₂	256	6561	65 536	390 625	1 679 616	5 764 801	16 777 216
	<i>S</i> ₂ [*]	<i>R</i> ₂ ^{2,16}	<i>R</i> ₂ ^{2,02}	<i>R</i> ₂ ^{1,98}	<i>R</i> ₂ ^{1,96}	<i>R</i> ₂ ^{1,95}	<i>R</i> ₂ ^{1,94}	<i>R</i> ₂ ^{1,93}
	<i>L</i> ₂ [*]	<i>R</i> ₂ ^{1,93}	<i>R</i> ₂ ^{1,84}	<i>R</i> ₂ ^{1,8}	<i>R</i> ₂ ^{1,79}	<i>R</i> ₂ ^{1,78}	<i>R</i> ₂ ^{1,77}	<i>R</i> ₂ ^{1,77}



Коммутатор KP_2R_2 имеет коммутационную сложность $S_2^* = d^2S_2 + 2R_2d = d^2(2(N_2^{7/4} + 2N_2^{3/2} + N_2^{5/4} + N_2))$ и кабельную сложность $L_2^* = d^2L_2 + 2R_2d = d^2(2N_2^{3/2} + 3N_2^{5/4} + N_2)$. В табл. 7 приводятся все характеристики KP_2R_2 при разных значениях p и d . Отметим практическое сохранение удельной сложности (на один канал) расширенного коммутатора при увеличении числа его каналов и сохранении его быстродействия (периода сигналов).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе предложена методика построения неблокируемых самомаршрутизируемых фотонных коммутаторов широкой масштабируемости на базе новых дуальных фотонных коммутаторов с малым числом каналов p . В дуальных коммутаторах конфликты сигналов разрешаются посредством их разведения либо по разным каналам, либо по разным временным тактам. Последний способ требует увеличения периода сигналов в p раз для p -канального дуального коммутатора $p \times p$.

Построены дуальные фотонные коммутаторы широкой масштабируемости с минимально возможным для них периодом сигналов, который в p раз больше длительности сигнала. Масштабируемость достигается путем использования коммутаторов с топологией квазиполных орграфов и способа инвариантного расширения любых сетей на их основе, который позволяет увеличивать число каналов сети с сохранением таких ее свойств, как период сигналов, неблокируемость и самомаршрутизируемость посредством ее распараллеливания с увеличением ее сложности. Этот способ использует расширенную элементную базу, состоящую из коммутаторов $p \times p$ вместе с мультиплексорами $1 \times p$ и демультиплексорами $p \times 1$.

Построены трех- и двухкаскадные неблокируемые самомаршрутизируемые N -канальные коммутаторы $N \times N$ с $N = p^4$. В первом из них баланс между длиной периода и сложностью смещен в сторону меньшей сложности при большом периоде. В двухкаскадном коммутаторе баланс смещен в сторону минимального периода при большой сложности. В нем коммутационная сложность оказалась сопоставимой со сложностью полного коммутатора, а кабельная сложность оказалась существенно меньше, чем у полного коммутатора. В этих коммутаторах имеется только два каскада коммутаторов $p \times p$ и два каскада мультиплексоров $1 \times p$ и демультиплексоров $p \times 1$.

Вышеупомянутые коммутаторы были расширены до R -канальных коммутаторов $R \times R$ с $R = N^r$ ($r = 1, 2, 3, 4$) посредством использования еще одного каскада мультиплексоров $1 \times d$ и демультиплексоров $d \times 1$ с $d = p^r$. Эти R -канальные коммутаторы являются неблокируемыми самомаршрутизируемыми коммутаторами с минимальным периодом сигналов. Их коммутационная сложность сопоставима со сложностью полного коммутатора, а канальная сложность существенно меньше ее.

Основной результат данной работы по сравнению с работами [1–3] заключается в существенном сокращении периода сигналов при одинаковом числе каналов и в существенном увеличении числа каналов при одинаковом периоде сигналов. Иначе говоря, основная новизна работы состоит в разработке метода построения неблокируемых самомаршрутизируемых дуальных фотонных коммутаторов с минимально возможным периодом сигналов и с возможностью достижения максимального числа каналов при практически неизменной сложности.

В работах [1–3] и в настоящей работе дана методика построения принципиально новых дуальных системных сетей, обладающих такими свойствами:

- они являются неблокируемыми сетями со статической самомаршрутизацией пакетов, т. е. сетями с бесконфликтной самомаршрутизацией на произвольных перестановках пакетов;
- они обладают широчайшей масштабируемостью при максимальном достижимом на них быстродействии и сложностью, сопоставимой со сложностью полного коммутатора;
- их максимальное быстродействие только в несколько раз (2–4) меньше физически достижимого быстродействия;
- они допускают балансировку соотношения сложность/быстродействие с уменьшением сложности до уровня неблокируемой сети Клоза, для которой нет процедур бесконфликтной самомаршрутизации, но при существенно меньшем быстродействии неблокируемой сети.

В дальнейшем предполагается придать дуальным сетям свойство канальной отказоустойчивости посредством замены квазиполного орграфа на квазиполный граф. Кроме того, предполагается при каскадировании дуальных сетей применять способ внутреннего распараллеливания сети (§ 3, 4) вместо способа внешнего распараллеливания (инвариантного расширения). Это позволит обеспечить масштабирование дуальных сетей с меньшими накладными затратами.

ЛИТЕРАТУРА

1. Барабанова Е.А., Вытовтов К.А., Подлазов В.С. Многокаскадные коммутаторы для оптических и электронных суперкомпьютерных систем // Матер. 8-го Национального Суперкомпьютерного Форума (НСКФ—2019). — Переславль-Залесский, 2019. — URL: http://2019.nscf.ru/TesisAll/02_Apparatura/037_BarabanovaEA.pdf. [Barabanova, E.A., Vyotovtov, K.A., Podlazov, V.S. *Mnogokaskadnye kommutatory dlya opticheskikh i elektronnykh superkomp'yuternykh sistem* // Mатer. 8-go Natsional'nogo Superkomp'yuternogo Foruma (NSKF—2019). — Pereslavl'-Zalesskii, 2019. — URL: http://2019.nscf.ru/TesisAll/02_Apparatura/037_BarabanovaEA.pdf. (In Russian)]
2. Барабанова Е.А., Вытовтов К.А., Вишневецкий В.М., Подлазов В.С. Новый принцип построения оптических устройств обработки информации для информационно-измерительных систем // Датчики и системы. — 2019. — № 9. — С. 3—9. [Barabanova, E.A., Vyotovtov, K.A., Vishnevskiy, V.M., Podlazov, V.S. *The New Principle for the Construction of Optical Information Processing Devices for Information-Measuring Systems* // Sensors and Systems. — 2019. — No. 9. — P. 3—9. (In Russian)]
3. Barabanova, E., Vyotovtov, K., Podlazov, V., Vishnevskiy, V. Model of optical non-blocking information processing system for next-generation telecommunication networks // Proceedings of the 22nd International Conference on Distributed Computer and Communication Networks: Control, Computation, Communications (DCCN—2019). — Moscow, 2019. — Communications in Computer and Information Science, vol. 1141. — Springer, Cham. — P. 188—198. — DOI: 10.1007/978-3-030-36625-4_16.
4. Pipenger, N. On rearrangeable and non-blocking switching networks // J. Comput. Syst. Sci. — 1978. — Vol. 17. — P. 307—311.
5. Scott, S., Abts, D., Kim, J. and Dally, W. The Black Widow High-radix Clos Network // Proc. 33rd Intern. Symp. Comp. Arch. (ISCA'2006). — Boston, 2006. — URL: https://www.researchgate.net/publication/4244660_The_BlackWidow_High-Radix_Clos_Network.
6. Бенеш В.Е. Математические основы теории телефонных сообщений. — М.: Связь, 1968. — 287 с. [Benesh, V.E. *Matematicheskie osnovy teorii telefonnykh soobshchenii*. — М.: Svyaz?, 1968. — 287 с. (In Russian)]
7. Bhuyan, L.N., and Agrawal, D.P. Generalized Hypercube and Hyperbus Structures for a Computer Network // IEEE Trans. on Computers. — 1984. — Vol. C-33, no. 4. — P. 323—333.
8. Alverson, R., Froese, E., Kaplan, L., and Roweth, D. Cray[®] XC[™] Series Network. — Cray Inc., 2012. — 28 p. — URL: <https://www.cray.com/sites/default/files/resources/CrayXC-Network.pdf>.
9. Gu, Q.P., and Tamaki, H. Routing a Permutation in Hypercube by Two Sets of Edge-Disjoint Paths // J. of Parallel and Distributed Comput. — 1997. — Vol. 44. — No. 2. — P. 147—152.
10. Lubiwi, A. Counterexample to a Conjecture of Szymanski on Hypercube Routing // Inform. Proc. Let. — 1990. — Vol. 35 (2). — p. 57—61.
11. Подлазов В.С. Бесконфликтная самомаршрутизация для трехмерного обобщенного гиперкуба // Проблемы управления. — 2018. — № 3. — С. 26—32. [Podlazov, V.S. *Conflict-Free Self-Routing for Three-Dimensional Generalized Hypercube* // Control Sciences. — 2018. — No. 3. — P. 26—32. (In Russian)]
12. Каравай М.Ф., Подлазов В.С. Системные сети с прямыми каналами для параллельных вычислительных систем — комбинаторный подход // Главы 5, 6. — URL: <https://www.ipu.ru/sites/default/files/publications/18125/15058-18125.pdf>. [Karavai, M.F., Podlazov, V.S. *Sistemnye seti s pryamymi kanalami dlya parallel'nykh vychislitel'nykh sistem — kombinatornyi podkhod* // Glavy 5, 6. — URL: <https://www.ipu.ru/sites/default/files/publications/18125/15058-18125.pdf>]
13. Finn, A.M., Decker, R.O. A Network Architecture for Radar Signal Processing // AIAA/IEEE 8-th Digital Avionic Systems Conference. — San Jose, California, 1988. — P. 614—621.
14. Холл М. Комбинаторика // Гл. 10—12. — М.: Мир, 1970. — 424 с. [Hall, M. *Combinatorial Theory*. — Waltham: Blaisdell Publishing Company, 1967. — 310 p.]
15. Cho, Y., Chi, C. and Chung, I. An Efficient Conference Key Distribution System Based on Symmetric Balanced Incomplete Block Design // Lecture Notes Comput. Sci. (LNCS). — 2003. — Vol. 2657. — P. 147—154.
16. Lee, O., Lee, S., Kim, S. and Chung, I. An Efficient Load Balancing Algorithm Employing a Symmetric Balanced Incomplete Block Design // Lecture Notes Comput. Sci. (LNCS). — 2004. — Vol. 3046. — P. 647—654.
17. Каравай М.Ф., Пархоменко П.П., Подлазов В.С. Комбинаторные методы построения двудольных однородных минимальных квазиполных графов (симметричных блок-схем) // Автоматика и телемеханика. — 2009. — № 2. — С. 153—170. [Karavai, M.F., Parkhomenko, P.P., Podlazov, V.S. *Combinatorial Methods for Constructing Bipartite Uniform Minimal Quasicomplete Graphs (Symmetrical Block Designs)* // Automation and Remote Control. — 2009. — Vol. 70. — P. 312—327.
18. Каравай М.Ф., Подлазов В.С. Метод инвариантного расширения системных сетей многопроцессорных вычислительных систем. Идеальная системная сеть // Автоматика и телемеханика. — 2010. — № 12. — С. 166—176. [Karavai, M.F., Podlazov, V.S. *An Invariant Extension Method for System Area Networks of Multicore Computational Systems. An Ideal System Network* // Automation and Remote Control. — 2010. — Vol. 71. — P. 2644—2654.]
19. Alverson, R., Roweth, D. and Kaplan, L. The Gemini System Interconnect // 18th IEEE Symposium on High Performance Interconnects. — 2009. — P. 3—87.
20. Arimili, B., Arimili, R., Chung, V., et al. The PERCS High-Performance Interconnect // 18th IEEE Symposium on High Performance Interconnects. — 2009. — P. 75—82.
21. URL: https://www.mellanox.com/pdf/whitepapers/IB_vs_Ethernet_Clustering_WP_100.pdf.
22. URL: https://dlcdnets.asus.com/pub/ASUS/mb/accessory/PEM-FDR/Manual/Mellanox_OFED_Linux_User_Manual_v2_3-1_0_1.pdf.
23. Степаненко С.А. Фотонный компьютер: структура и алгоритмы, оценки параметров // Фотоника. — 2017. — № 7 (67). — С. 72—83. [Stepanenko, S.A. *Photon Computer: Structure and Algorithms, Parameter Estimates* // Fotonika. — 2017. — No. 7 (67). — P. 72—83. (In Russian)]
24. Barabanova, E., Vyotovtov, K., Podlazov, V. Model and Algorithm of Next Generation Optical Switching Systems Based on 8×8 Elements // Proceedings of the 22nd International Conference on Distributed Computer and Communication Networks: Control, Computation, Communications (DCCN—2019). — Moscow, 2019. — Vol. 11965. — P. 58—70. — DOI: 10.1007/978-3-030-36614-8_5.

Статья представлена к публикации членом редколлегии В.М. Вишневецким.

Поступила в редакцию 30.04.2020, после доработки 09.09.2020.
Принята к публикации 05.10.2020.

Барабанова Елизавета Александровна — д-р техн. наук,
✉ elizavetaalex@yandex.ru,

Вытовтов Константин Анатольевич — д-р техн. наук,
✉ vyotovtov_konstan@mail.ru,

Подлазов Виктор Сергеевич — д-р техн. наук,
✉ podlazov@ipu.ru,

Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН,
г. Москва.



TWO-STAGE DUAL PHOTON SWITCHES IN AN EXTENDED SCHEME BASIS

E.A. Barabanova, K.A. Vytovtov and V.S. Podlazov

V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences, Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia

✉ elizavetaalex@yandex.ru, ✉ vytovtov_konstan@mail.ru, ✉ podlazov@ipu.ru

Abstract. This paper proposes a new method for constructing a two-stage dual photon switch with enhanced functional characteristics in the system basis of low-channel photon switches and photon multiplexers and demultiplexers. The method yields non-blocking switches with static self-routing. Also, the method ensures a significant speed-up for the switches with the same number of channels and a significant increase in the number of channels with the same speed compared to the non-blocking dual switches known previously. The non-blocking self-routing dual photon switches presented below have the highest possible speed and a maximum possible number of channels with almost the same complexity. As is shown in the paper, the dual switches have a switching complexity comparable with full switches and, at the same time, a lower channel complexity.

Keywords: physical level, photon switch, dual switch, multistage switch, conflict-free self-routing, non-blocking switch, static self-routing, quasi-complete digraph, switching properties, direct channels, scalability and speed.



2020. Vol. 20. No. 4

M. Forghani-elahabad, N. Mahdavi-Amiri. An Algorithm to Search for All Minimal Cuts in a Flow Network. P. 1—10.

L. Kadi, A. Brouri, A. Ouannou. Frequency-Geometric Identification of Magnetization Characteristics of Switched Reluctance Machine. P. 11—26.

A. Nguyen Tuan, B. Hoang Thang. Determining the Vertical Force When Steering. P. 27—35.

I. Varga, G. Kocsis. Statistical Properties of VANET-based Information Spreading. P. 36—44.

L. V. Kiselev, V. B. Kostousov, A. V. Medvedev, A. E. Tarkhanov, K. V. Dunaevskaya. Computational Models of Trajectory Investigation of Marine Geophysical Fields and Its Implementation for Solving Problems of Map-Aided Navigation. P. 45—59.

I. Brokarev, S. Vaskovskii. Multi-Criteria Estimation of Input Parameters in Natural Gas Quality Analysis. P. 60—69.

D. Maximov. Multi-Valued Neural Networks II: A Robot Group Control. P. 70—82.

M.-C. Litzinger, Y. Todorov, M. Foller-Nord, M.K. Chaudhary, A.S. Bratus. On Optimal Therapy Protocols in the Mathematical Model of Prostate Cancer Progression. P. 83—104.

V. Chadeev, N. Aristova. Automation of Cluster Large-Scale Production Systems. P. 105—112.

N. Gabdrakhmanova, M. Pilgun. Development of Unified Approaches to Building Neural Network and Mathematical Models Based on Digital Data. P. 113—124.

D.V. Tunitsky. On Some Global Properties of Multivalued Simple Waves. P. 125—131.



**Четырнадцатая международная конференция
"Управление развитием
крупномасштабных систем" (MLSD'2021)
27—29 сентября 2021 г.**

Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова Российской академии наук приглашает принять участие в Четырнадцатой международной конференции "Управление развитием крупномасштабных систем" (MLSD'2021).

Конференция будет проведена в дистанционном формате.

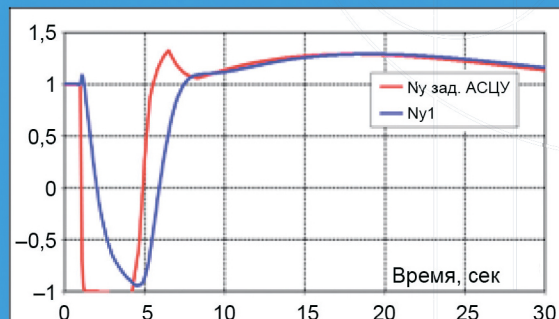
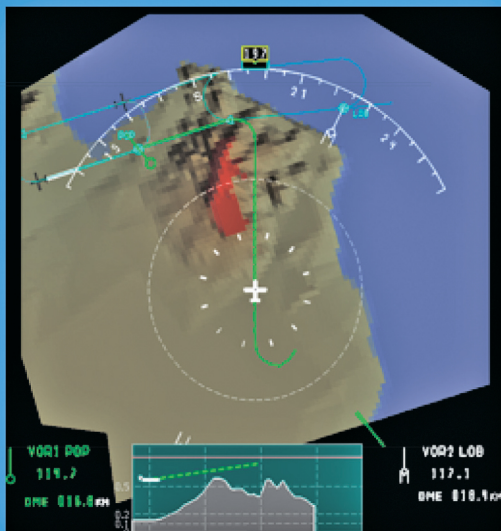
По итогам конференции будет подготовлен сборник трудов, индексируемый в базе Российского индекса научного цитирования (РИНЦ), а также осуществлен отбор статей на английском языке, рекомендованных к включению в IEEE Xplore.

Научные направления конференции

1. Проблемы управления развитием крупномасштабных систем, включая ТНК, Госхолдинги и Госкорпорации.
2. Методы и инструментальные средства управления инвестиционными проектами и программами.
3. Управление развитием цифровой экономики. Проектные офисы и ситуационные и прогнозано-аналитические центры, институты развития крупномасштабных систем.
4. Имитация и оптимизация в задачах управления развитием крупномасштабных систем.
5. Нелинейные процессы и вычислительные методы в задачах управления крупномасштабными системами.
6. Управление развитием банковских и финансовых систем.
7. Управление топливно-энергетическими, инфраструктурными и другими системами.
8. Управление транспортными системами.
9. Управление развитием авиационно-космических и других крупномасштабных организационно-технических комплексов (РАРАН).
10. Управление развитием региональных, городских и муниципальных систем.
11. Управление объектами атомной энергетики и другими объектами повышенной опасности.
12. Информационное и программное обеспечение систем управления крупномасштабными производствами.
13. Методология, методы и программно-алгоритмическое обеспечение обработки и интеллектуального анализа больших массивов информации.
14. Мониторинг в управлении развитием крупномасштабных систем.
15. Управление развитием крупномасштабных систем здравоохранения, медико-биологических систем и технологий.
16. Управление развитием социальных систем.

Сайт конференции: mlsd2021.ipu.ru

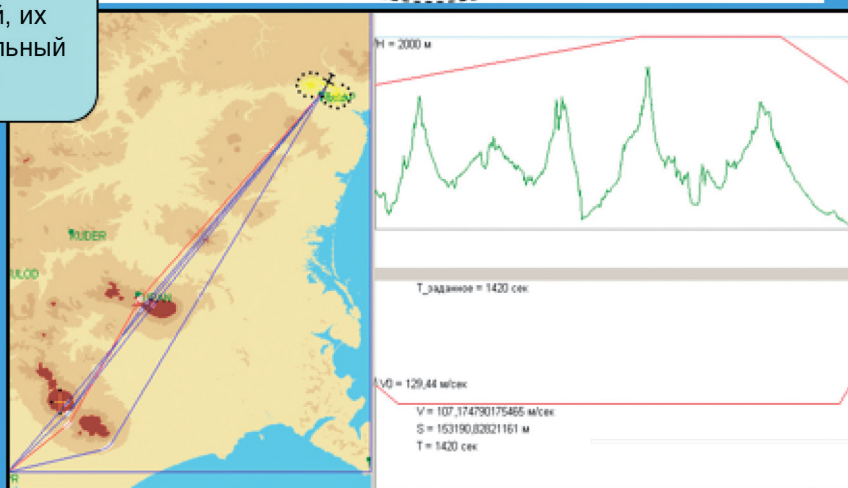
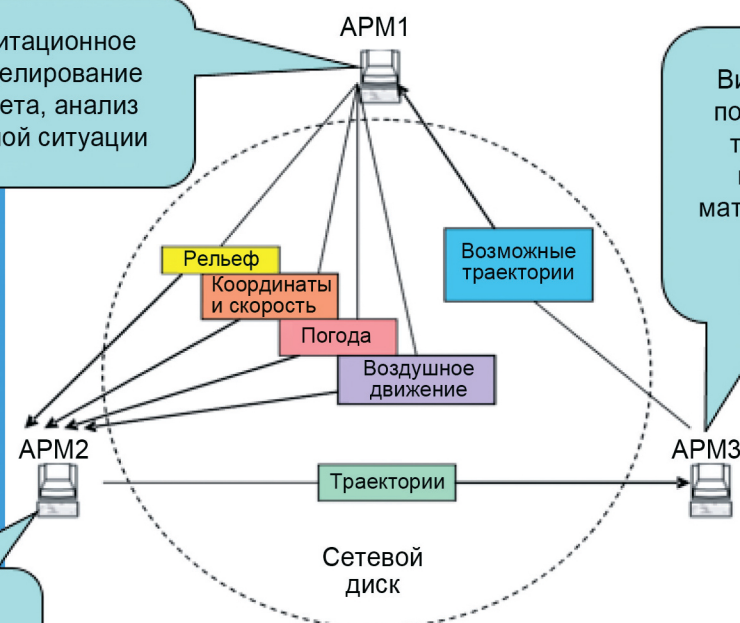
СТРУКТУРА СТЕНДА МОДЕЛИРОВАНИЯ БОРТОВОЙ СИСТЕМЫ ОБЕСПЕЧЕНИЯ ТРАЕКТОРНОЙ БЕЗОПАСНОСТИ ПОЛЕТА



Имитационное
моделирование
полета, анализ
летной ситуации

Виртуальные
полеты вдоль
траекторий
на основе
математической
модели
самолета

Генерация
траекторий, их
предварительный
анализ



Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН
Лаборатория систем поддержки принятия решений
Профсоюзная ул., д. 65, Москва, 117997
✉ lebedev@ipu.ru ☎ (495) 334-92-49

