

ISSN 1819-3161

ПРОБЛЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ

1/2018

CONTROL  SCIENCES

Редакционный совет

Акад. РАН С.Н. Васильев, акад. РАН С.В. Емельянов, акад. РАН И.А. Каляев, акад. РАН В.А. Левин, чл.-корр. РАН Н.А. Махутов, акад. РАН Е.А. Микрин, чл.-корр. РАН П.П. Пархоменко, чл.-корр. РАН А.Ф. Резчиков, акад. РАН Е.А. Федосов

Редколлегия

Д-ра техн. наук Ф.Т. Алескеров, В.Н. Афанасьев, Н.Н. Бахтадзе, канд. техн. наук Л.П. Боровских (зам. гл. редактора), д-ра техн. наук В.Н. Бурков, В.М. Вишневский, д-р экон. наук М.И. Гераськин, д-р техн. наук А.А. Дорофеюк, д-р экон. наук В.В. Клочков, д-ра техн. наук С.А. Краснова, О.П. Кузнецов, В.В. Кульба, А.П. Курдюков, д-ра физ.-мат. наук А.Г. Кушнер, А.А. Лазарев, д-р техн. наук В.Г. Лебедев, д-р психол. наук В.Е. Лепский, д-р техн. наук А.С. Мандель, д-р биол. наук А.И. Михальский, чл.-корр. РАН Д.А. Новиков (гл. редактор), д-ра техн. наук Б.В. Павлов, Ф.Ф. Пащенко (зам. гл. редактора), д-р физ.-мат. наук Л.Б. Рапопорт, д-ра техн. наук Е.Я. Рубинович, В.Ю. Рутковский, д-р физ.-мат. наук М.В. Хлебников, д-р техн. наук А.Д. Цвиркун, д-р физ.-мат. наук П.Ю. Чеботарёв, д-р техн. наук И.Б. Ядыкин

Руководители региональных редакционных советов

Владивосток – д-р техн. наук О.В. Абрамов (ИАПУ ДВО РАН)
Волгоград – д-р физ.-мат. наук А.А. Воронин (ВГУ)
Воронеж – д-р техн. наук С.А. Баркалов (ВГАСУ)
Курск – д-р техн. наук С.Г. Емельянов (ЮЗГУ)
Липецк – д-р техн. наук А.К. Погодаев (ЛГТУ)
Пермь – д-р техн. наук В.Ю. Столбов (ПНИПУ)
Ростов-на-Дону – д-р техн. наук Г.А. Угольницкий (ЮФУ)
Самара – д-р техн. наук В.Г. Засканов (СГАУ)
Саратов – д-р техн. наук В.А. Твердохлебов (ИПТМУ РАН)
Уфа – д-р техн. наук Б.Г. Ильясов (УГАТУ)



CONTROL SCIENCES

**Научно-технический
журнал**

6 номеров в год

ISSN 1819-3161

Издается с 2003 года

УЧРЕДИТЕЛЬ

Федеральное государственное
бюджетное учреждение науки
Институт проблем управления
им. В.А. Трапезникова РАН

Главный редактор
чл.-корр. РАН

Д.А. Новиков

Заместители главного
редактора

Л.П. Боровских, Ф.Ф. Пащенко

Редактор

Т.А. Гладкова

Выпускающий редактор

Л.В. Петракова

Издатель

ООО «Сенсидат-Плюс»

Адрес редакции

117997, ГСП-7, Москва,

ул. Профсоюзная, д. 65, к. 410.

Тел./факс (495) 334-92-00

E-mail: pu@ipu.ru

Интернет: http://pu.mtas.ru

Оригинал-макет и электронная версия
подготовлены
ИП Прохоров О. В.

Отпечатано в ООО «Авансед солюшнз»

Заказ № PB118

Подписано в печать

1.02.2018 г.

Журнал зарегистрирован
в Министерстве Российской
Федерации по делам печати,
телерадиовещания и средств
массовых коммуникаций

Свидетельство о регистрации

ПИ № ФС 77-49203 от 30 марта 2012 г.

Журнал входит в RSCI на платформе
Web of Science и Перечень
рецензируемых научных изданий ВАК

Подписные индексы:

80508 и **81708** в каталоге Роспечати;

38006 в объединенном каталоге
«Пресса России»

Цена свободная

© Федеральное государственное
бюджетное учреждение науки
Институт проблем управления
им. В.А. Трапезникова РАН

ПРОБЛЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ

1.2018

СОДЕРЖАНИЕ

Обзоры

Митришкин Ю.В., Корнев П.С., Прохоров А.А. и др. Управление плазмой в токамаках. Ч. 1. Проблема управляемого термоядерного синтеза. Токмаки. Компоненты систем управления 2

Шведов А.С. Аппроксимация функций с помощью нейронных сетей и нечетких систем 21

Математические проблемы управления

Деменков Н.П., Микрин Е.А., Мочалов И.А. Нечеткие двухточечные краевые задачи в математическом моделировании и управлении. Ч. 1. Нечеткое математическое моделирование 30

Анализ и синтез систем управления

Афанасьев В.Н., Матвеева Н.А. Построение управления для нелинейной системы с квазипостоянными параметрами регулятора 37

Управление в социально-экономических системах

Белов М.В., Новиков Д.А. Сетевые активные системы: модели планирования и стимулирования 47

Силич М.П., Силич В.А., Аксенов С.В. Способы оценки факторов иерархической гибридной когнитивной карты на примере оценки состояния сферы теплотребления регионов 58

Грибанова Е.Б. Алгоритмы моделирования распространения информации при маркетинговых мероприятиях в группах онлайн-социальной сети 66

Управление подвижными объектами и навигация

Богомолов А.С., Ивашенко В.А., Кушников В.А. и др. Моделирующий комплекс для анализа критических сочетаний событий в авиационных транспортных системах 74

* * *

Contents and abstracts 80

УПРАВЛЕНИЕ ПЛАЗМОЙ В ТОКАМАКАХ¹.

Ч. 1. Проблема управляемого термоядерного синтеза. Токамаки. Компоненты систем управления

Ю.В. Митришкин, П.С. Коренев, А.А. Прохоров, Н.М. Карцев, М.И. Патров

Представлены различные концепции перспективных токамаков — лидеров в решении проблемы управляемого термоядерного синтеза. Рассмотрена эволюция токамаков от круглых в вертикальном поперечном сечении с большим аспектным отношением до токамаков с малым аспектным отношением вплоть до сферических. Приведена классификация современных токамаков. Уделено внимание методам диагностики плазмы по магнитным измерениям вне плазмы, исполнительным устройствам, применяемым как при магнитном, так и при кинетическом управлении плазмой, а также для ее дополнительного нагрева. Рассмотрены магнитные и кинетические модели плазмы, неустойчивости и срывы плазменного шнура.

Ключевые слова: управляемый термоядерный синтез, термоядерная электростанция, токамак, плазма, классификация токамаков, диагностика, дополнительный нагрев, исполнительные устройства, восстановление равновесия плазмы, магнитные и кинетические модели плазмы, неустойчивости плазмы, срывы.

ВВЕДЕНИЕ

Цель обзора состоит в представлении токамаков с плазмой как сложных неустойчивых нестационарных многосвязных нелинейных объектов управления с распределенными параметрами и неопределенностями, а также в рассмотрении систем магнитного и кинетического управления плазмой и тенденций их развития.

Плазма в токамаке [1—4] находится в тороидальной аксиально симметричной магнитной конфигурации, созданной магнитным полем токов в обмотках тороидального поля, распределенным током самой плазмы и токами в обмотках полоидального поля. Аббревиатура «токамак» расшифровывается как ТОроидальная КАмера с МАгнитными Катушками (аббревиатура, как и сам токамак, предложена в Институте атомной энергии им. И.В. Курчатова, г. Москва). Вследствие эф-

фекта индукции, переменное магнитное поле тока в центральном соленоиде (индукторе) генерирует вихревое электрическое поле, которое пробивает газ, например, водород, в вакуумной камере токамака и создает плазму (полностью ионизованный газ), по которой протекает ток. Таким образом, токамак представляет собой трансформатор тока.

Тороидальный плазменный шнур стремится увеличить свой большой радиус, так как полный ток плазмы на аксиально симметричных участках тора течет в разные стороны, что приводит к расталкиванию противоположно направленных токов. Кроме того, расталкивающие силы увеличиваются из-за газокинетического давления плазмы. Поэтому для обеспечения плазменного разряда необходима система управления с обратной связью, стабилизирующая горизонтальное положение плазмы с помощью вертикального магнитного поля.

В современных токамаках плазма вытянута по вертикали, что увеличивает давление плазмы при том же тороидальном поле. Но это вызывает неустойчивость вертикального положения плазмы, поэтому для стабилизации положения плазмы относительно горизонтальной плоскости необходима

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (грант № 17-19-01022), § 1—6 и Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 17-08-00293), § 7.



система управления с обратной связью, стабилизирующая вертикальное положение плазмы с помощью горизонтального поля.

Для удержания высокотемпературной плазмы вблизи первой стенки токамака необходима многомерная система управления формой плазмы. При этом ток плазмы должен управляться регулятором в отдельном контуре управления или общим регулятором, который одновременно управляет током и формой плазмы [5–7].

При возрастании давления плазмы появляются неустойчивые резистивные пристеночные моды, подавление которых требует дополнительных катушек и системы с обратной связью [8].

На основе перечисленных факторов можно заключить, что проектирование современных токамаков должно проводиться совместно с проектированием систем магнитного управления плазмой.

Для дополнительного нагрева плазмы используется инжекция нейтральных атомов и электромагнитные волны. Исполнительные устройства дополнительного нагрева дают возможность кинетического управления плазмой, т. е. управления профилями тока плазмы [9, 10], запасом устойчивости [11], давлением и температурой [12] для достижения оптимальных режимов плазменного разряда. Комплексирование магнитного и кинетического управлений плазмой [13] создаст основу для систем управления плазмой будущих термоядерных реакторов, позволяющую повысить надежность их эксплуатации.

Настоящий обзор состоит из четырех частей. В нем рассматриваются различные концепции конструкций современных токамаков, а также различные системы магнитного и кинетического управления плазмой, которые показали себя работоспособными как при численном моделировании для действующих токамаков и проектов токамаков, так и в физическом эксперименте.

Часть 1 посвящена общей проблеме управляемого термоядерного синтеза, основным особенностям токамаков и компонентам систем управления плазмой в них. Описаны конструкция и диагностическая система сферического токамака Глобус-М (Физико-технический институт им. А.Ф. Иоффе РАН, г. Санкт-Петербург). Полученные на нем экспериментальные данные были использованы в МГУ им. М.В. Ломоносова и Институте проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН для разработки оригинальных систем управления положением, током и формой плазмы.

В частях 2 и 3 рассмотрены системы магнитного управления плазмой, а в части 4 — системы кинетического управления плазмой и их интеграция с системами магнитного управления в целях достижения оптимальных режимов работы токамаков в

стационарных и переходных режимах для получения максимальных запасов устойчивости и допустимого качества управления.

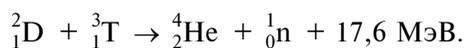
1. ПРОБЛЕМА УПРАВЛЯЕМОГО ТЕРМОЯДЕРНОГО СИНТЕЗА

В настоящее время большую часть энергии человечество получает от сжигания органических ископаемых — угля, нефти и газа. Хотя ископаемые виды топлива не будут полностью исчерпаны в течение нескольких сотен лет, эксперты прогнозируют дефицит энергии менее чем через 50 лет при нынешних темпах потребления [14]. Возобновляемые источники энергии, такие как солнечная энергия, гидроэнергия, геотермальная энергия и энергия ветра привлекательны с экологической точки зрения, но не могут обеспечить достаточного выхода энергии, чтобы стать полноценной заменой ископаемого топлива. Атомная энергетика, получающая выделяемую в реакциях деления атомов тяжелых элементов энергию, может производить достаточное количество энергии, но, к сожалению, побочные продукты деления очень радиоактивны и довольно долговечны. Кроме того, атомные электростанции требуют тщательного контроля за всеми рабочими параметрами, иначе, в случае аварии, воздействие на экологию от выброса вредных веществ может существенно превысить воздействие тепловых станций.

Одним из перспективных источников энергии будущего являются реакции термоядерного синтеза, в ходе которых происходит слияние ядер легких элементов, например, водорода. Хотя технологически управляемый термоядерный синтез чрезвычайно сложен, термоядерная энергетика имеет значительные преимущества по сравнению с существующими источниками энергии. В частности, запасов топлива для термоядерных реакций на земле хватит на много тысяч лет, так как необходимые изотопы водорода могут быть получены из воды и широко доступного лития. Реакции слияния ядер не приводят к загрязнению воздуха или образованию парниковых газов при нормальной эксплуатации, поскольку продукт реакции слияния представляет собой гелий. В отличие от атомных станций, в термоядерных реакторах-токамаках не будут проходить неконтролируемые цепные реакции с высвобождением большого количества энергии, а значит, отсутствует риск возникновения подобного рода ядерных аварий. Дело в том, что в любой момент можно закрыть клапаны подачи топлива в камеру токамака и, тем самым, прекратить процесс синтеза. Отметим также, что термоядерный реактор не производит долгоживу-

щих радиоактивных отходов. Основные радиоактивные побочные продукты в реакторе представляют собой нейтронно-активированные материалы (т. е. ставшие радиоактивными в результате нейтронной бомбардировки первой стенки токамаков), которые можно свести к минимуму путем выбора специального материала. Большинство из этих радиоактивных материалов, полученных в реакторе, могут быть безопасно и легко утилизированы в течение нескольких десятилетий, в отличие от большинства побочных продуктов деления, которые требуют специального хранения и обработки в течение тысяч лет.

Существует множество возможных реакций ядерного синтеза, отличающихся условиями прохождения и количеством выделяемой энергии. С этих позиций, наибольший практический интерес представляет реакция слияния изотопов водорода: дейтерия и трития



При слиянии ядер дейтерия и трития образуется ядро гелия-4 и нейтрон, который несет 80% энергии синтеза. Ядра гелия-4 остаются в плазме и вносят свою энергию для поддержания термоядерной реакции. Нейтроны поглощаются первой стенкой в токамаке-реакторе, нагревают ее, а затем тепло отводится для дальнейшего превращения его в электроэнергию.

Дейтерий-тритиевая смесь обладает чрезвычайно большой энергоемкостью: 1 г смеси эквивалентен 10 000 л нефти! Процесс заправки, предусмотренный для реактора с термоядерным топливом, использует небольшую часть энергии, создаваемой реактором для извлечения дейтерия из морской воды, тогда как тритий получают путем нейтронной бомбардировки лития.

Поскольку ядра атомов положительно заряжены, то согласно закону Кулона они отталкиваются друг от друга. При обычной температуре реакций слияния не происходит, поскольку атомы не обладают достаточной для преодоления кулоновского барьера энергией. Температура для прохождения термоядерной реакции составляет около 10^9 К. При данных температурах топливо находится в состоянии полностью ионизированного газа — плазмы. Для положительного выхода энергии плазма в реакторе должна удовлетворять критерию Лоусона [2] $n\tau T > 3 \cdot 10^{21} \text{ м}^{-3} \text{ с} \times \text{кэВ}$, где τ — время удержания энергии, в течение которого плазма сохраняет достаточную для прохождения реакции энергию, n — концентрация частиц плазмы, T — температура плазмы.

2. ТОКАМАКИ

2.1. Эволюция токамаков

Первый токамак был построен в 1954 г. в ИАЭ им. И.В. Курчатова, после чего исследования удержания высокотемпературной плазмы в токамаках начали вести во многих лабораториях мира. Всего с 1954 г. была построена 221 установка типа токамак, 41 из которых действуют в настоящее время [15].

За всю историю токамаков произошла их эволюция от «круглых», имеющих круг в вертикальном поперечном сечении и окруженных медным кожухом, до современных вытянутых по вертикали [2]. В первых токамаках при движении плазмы в проводящем медном кожухе наводились токи Фуко, действия которых демпфировало скорость движения и играло роль регулятора прямого действия. В современных установках для управления параметрами плазменного шнура (магнитными, кинетическими и др.) применяются активные системы управления с обратными связями. Полоидальные [2, 6, 7, 16] системы удержания и управления плазмой в токамаках прошли путь от скалярных систем управления горизонтальным положением плазмы до многосвязных систем, управляющих положением, формой и током плазмы. За последние 30 лет мощность, генерируемая на установках типа токамак, выросла в 10^8 раз [14]. Такой прогресс достигнут в результате качествен-

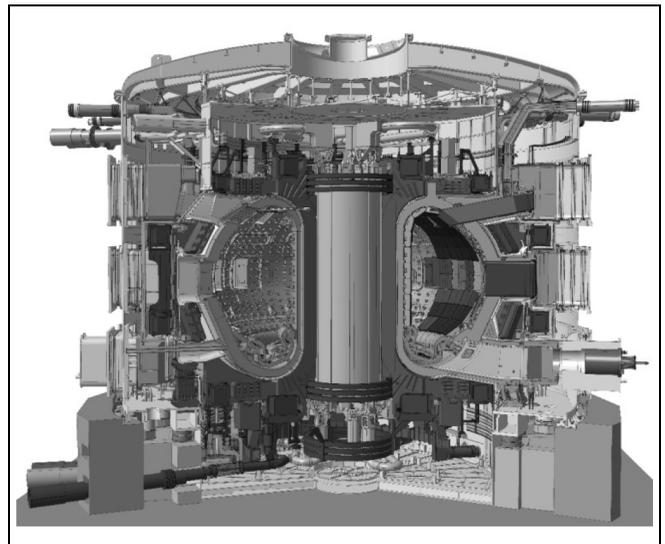


Рис. 1. Вид токамака-реактора ITER²

² © ITER Organization, <http://www.iter.org/>.

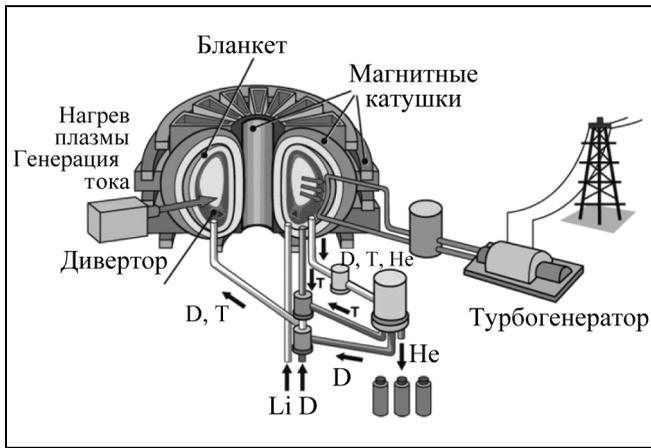


Рис. 2. Схема термоядерной электростанции на дейтериево-тритиевом топливе³

ного скачка в развитии теории физики плазмы и понимания процессов, происходящих во время разряда в плазме токамака.

Фундаментальная задача, возникающая при разработке современных токамаков — это поиск методов и подходов к обеспечению оптимальных и надежных условий протекания термоядерной реакции синтеза. Большая часть исследований удержания и нагрева плазмы на действующих токамаках направлены в поддержку разработки международного проекта ITER (англ. *International Thermonuclear Experimental Reactor*; в русской транскрипции ИТЭР — Интернациональный Термоядерный Экспериментальный Реактор) [17] (рис. 1), который должен открыть путь к проекту DEMO (англ. *DEMOstration Power Plant*) — первой термоядерной некоммерческой электростанции (рис. 2) [18]. Токamak ITER станет первой экспериментальной термоядерной установкой, которая будет производить на порядок больше энергии, чем потреблять. Разработкой и сооружением ITER занимается международное сообщество, куда входят представители Европейского союза, Японии, США, России, Китая, Южной Кореи и Индии.

В табл. 1 приведены сравнительные характеристики токамака-ректора ITER и термоядерной электростанции DEMO [18], проектируемой на принципе токамака-ректора. Термоядерная электростанция DEMO будет последней ступенькой перед созданием коммерческих термоядерных электростанций. В отличие от ITER, являющегося экспериментальной установкой для исследования высокотемпературной плазмы, DEMO будет иметь

конструкцию, приближенную к будущим промышленным реакторам, более технологичную для целей надежной эксплуатации и замены компонентов. Будет оптимизирована система охлаждения под более высокие температуры при генерации энергии, уменьшено количество диагностических подсистем, будут использованы только необходимые для функционирования системы, обеспечены самоподдерживающаяся реакция синтеза и длительность импульса более двух часов. Результаты, полученные на ITER, позволят сузить диапазон требований и одновременно оптимизировать их на установке DEMO.

2.2. Принцип действия токамаков

В токамаках электромагнитные поля токов, протекающих в магнитных катушках, воздействуют на заряженные частицы плазмы и используются для удержания и управления плазмой в ограниченном объеме камеры. Токи в катушках поперечных и тороидальных полей совместно с полем тока плазмы создают результирующее винтовое магнитное поле токамака (рис. 3). Заряженные частицы не покидают такую магнитную конфигурацию, вращаясь по ларморовским радиусам с циклотронной частотой вдоль винтовых магнитных линий внутри тора. Тороидальное поле в токама-

Таблица 1

Характеристики токамака-ректора ITER и термоядерной электростанции DEMO [18]

Характеристика	ITER $A = 3,1$	DEMO 1 $A = 3,1$	DEMO 2 $A = 2,6$
Аспектное отношение $A = R/a$	6,2/2,0	9,1/2,9	7,5/2,9
Вытянутость k / треугольность δ	1,7/ 0,33	1,6/0,33	1,8/0,33
Площадь поверхности, m^2 / объем плазменного шнура, m^3	683/831	1428/2502	1253/2217
Ток плазмы, МА	17	20	22
Тороидальное поле на большом радиусе, Тл	5,3	5,7	5,6
Длительность разряда, с	400	Более 7200	Более 7200
Выходная термоядерная мощность, МВт / про- изводимая электриче- ская мощность, МВт	500/0	2037/500	3255/953

Примечание: R и a — большой и малый радиусы плазмы, k и δ — ее вытянутость и треугольность (см. далее рис. 6, в и г).

³ © Max-Planck-Institute-fur-Plasmaphysik: http://www.ipp.mpg.de/986351/fusion_e.pdf.

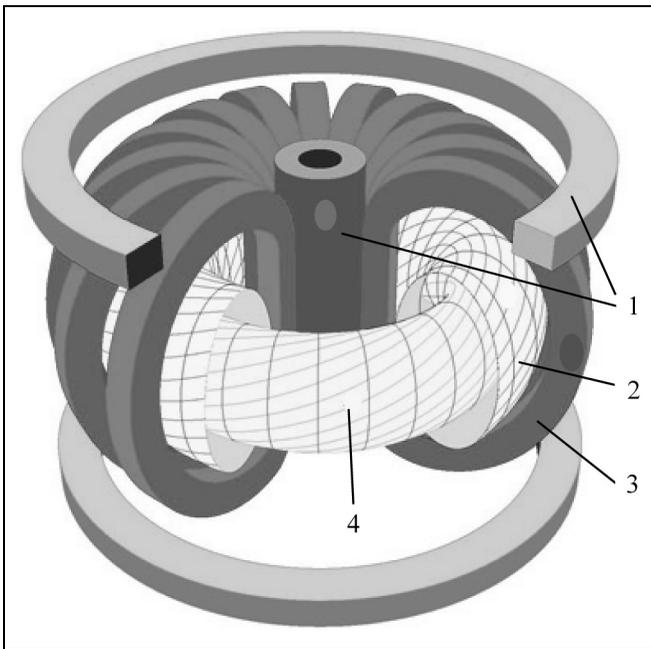


Рис. 3. Вытянутый токамак с воздушным центральным соленоидом: 1 — внутренние и внешние катушки полоидального магнитного поля; 2 — вакуумная камера; 3 — катушки тороидального магнитного поля; 4 — плазменный виток с магнитными винтовыми линиями⁴

ках на порядок сильнее полоидального, обычно оно составляет несколько единиц тесла. Катушка тороидального поля имеет большое число витков и при токах в несколько килоамперов создает поле, эквивалентное полю одного витка с током во много мегаамперов. В зависимости от сопротивления катушек (обычно медных или сверхпроводящих), диапазон напряжения, необходимого для создания тока, составляет от нескольких единиц до сотен вольт для установившегося режима, а для переходных процессов требования значительно выше. Существуют конструкции токамаков, например, JET (Великобритания), в центральном соленоиде которых установлен железный сердечник для увеличения магнитного потока, индуцирующего ток плазмы, однако в большинстве установок имеется воздушный центральный соленоид, к ним относятся, например, токамак DIII-D (США).

Магнитные поля токамака создают внешнее магнитное давление, которое уравнивает внутреннее кинетическое давление плазмы. Небольшое возмущение магнитного поля может привести к локальному расширению плазменного шнура, которое может экспоненциально увеличиваться,

если не будет своевременно подавлено. Большинство подобных неустойчивостей плазмы можно описывать с помощью теории магнитогидродинамики (МГД) [19].

Ток плазмы создается аналогично току во вторичной обмотке трансформатора — вихревым электрическим полем, создаваемым изменением тока в центральном соленоиде, играющим роль первичной обмотки трансформатора. Однако, поскольку ток плазмы не переменный, для его поддержания требуется постоянное повышение тока в соленоиде, что ограничивает длительность разряда в токамаке. Поэтому для поддержания стационарного разряда токамака необходимы другие, неомические источники тока. Наиболее перспективен бутстрэп-ток, создаваемый градиентом плотности частиц плазмы (от англ. *bootstrap* — самозагрузка, самонастройка), а также ток, вызванный источниками дополнительного нагрева плазмы.

2.3. Классификация современных токамаков по полоидальным системам

В табл. 2 приведены основные характеристики действующих вытянутых по вертикали наиболее продвинутых токамаков в смысле систем управления плазмой (см. части 2—4 настоящего обзора в следующих выпусках журнала), а также сооружаемого экспериментального токамака-реактора ITER и проекта токамака-реактора DEMO для термоядерной электростанции.

Полоидальные системы современных токамаков с вытянутым по вертикали поперечным сечением можно условно разделить на три группы.

- «Теплые» катушки полоидального поля (не сверхпроводящие) расположены внутри тороидальной обмотки, катушка управления вертикальным положением плазмы — вне вакуумной камеры. К таким токамакам относятся NSTX, DIII-D (США), JT-60U (Япония), TCV (Швейцария).

- «Теплые» катушки полоидального поля расположены вне тороидальной обмотки, катушка управления вертикальным положением плазмы — вне вакуумной камеры. К таким токамакам принадлежат JET (Великобритания), ASDEX Upgrade (Германия), Глобус-М (Россия).

- Сверхпроводящие катушки полоидального поля размещены вне тороидальной обмотки, катушка управления вертикальным положением плазмы — внутри вакуумной камеры. Примеры таких установок: EAST (Китай), ITER (Франция), KSTAR (Южная Корея). В установке KSTAR [27] и в проекте токамака JT-60SA [30] внутри камеры помещена не только обмотка управления вертикальным положением плазмы, но и обмотка управления горизонтальным положением плазмы, что значительно усиливает эффективность управления.

⁴ © Проектный центр ИТЭР (Россия): http://www.iterrf.ru/upload/docs/Booklet_new.pdf.



2.4. Дополнительный нагрев плазмы в токамаках

При выполнении критерия Лоусона [2] плазма выделяет достаточно тепла, чтобы поддерживать свою температуру, но для его достижения джоуле-ва нагрева током плазмы недостаточно, возникает необходимость *дополнительного* нагрева плазмы. Дополнительный нагрев плазмы также может быть использован для управления профилями ее тока, температуры и давления в целях достижения энергетически выгодных рабочих режимов и подавления МГД-неустойчивостей.

При прохождении тока I_p плазма выделяет джоулево тепло $P \sim \eta I_p^2$, где η — удельное сопротивление плазмы. Однако сопротивление плазмы падает с повышением ее температуры по закону $\eta \sim T^{-3/2}$, поэтому омический нагрев перестает быть эффективным при больших температурах и необходимы дополнительные методы нагрева.

Один из основных методов дополнительного нагрева — это нагрев инъекцией пучков нейтральных частиц. Электромагнитное поле не препятствует попаданию нейтральных частиц внутрь плазмы, где они ионизируются в столкновениях с частицами плазмы, передавая им свою кинетическую энергию. Например, пучки дейтерия мощностью 20 МВт используются в токамаках DIII-D [20] и ASDEX Upgrade [25].

Другой метод нагрева плазмы основан на использовании радиоволн, резонирующих с частицами плазмы и передающими им свою энергию. Различают нагрев радиоволнами с ионной циклотронной частотой (десятки мегагерц) и с электронной циклотронной частотой (сотни гигагерц). Так, на токамаке DIII-D применяются системы ионного нагрева (30—120 МГц, 6 МВт) и электронного (110 ГГц, 6 МВт) нагрева [31], на токамаке ASDEX

Upgrade — системы ионного (30—120 ГГц, 6 МВт) и электронного (140 ГГц, 4 МВт) нагрева [32, 33]. На токамаке TCV применяется система нагрева радиоволнами с электронными циклотронными частотами, состоящая из 9-ти гиротронов (82 и 118 ГГц, 4,5 МВт) [12, 23]. На токамаке EAST применяется нагрев радиоволнами с ионными циклотронными частотами (27 МГц, 6 МВт) [34].

3. ДИАГНОСТИКА ПЛАЗМЫ В ТОКАМАКАХ

Измерительные системы — важнейший компонент системы управления любого токамака. Они позволяют определять физические величины, описывающие поведение и структуру нагретой плазмы внутри камеры токамака, и осуществлять диагностику плазмы. Измерительные устройства, требующие физического контакта с плазмой даже на короткий промежуток времени, применяются крайне ограниченно, поскольку высокотемпературная плазма может достаточно быстро вывести их из строя. Также в экспериментах применяются инфракрасные датчики, однако они не обеспечивают измерения с достаточным временным разрешением для большинства целей управления плазмой [35]. Наиболее простой и широко распространенный вариант — применение для детектирования границы и интегральных параметров плазмы магнитных датчиков, измеряющих изменения магнитного поля и потока вне плазмы [4, 6, 35], но внутри области магнитного поля, создаваемого плазмой.

Все датчики, относящиеся к магнитной диагностике, работают по одному и тому же основному принципу, а именно: индуцированное напряжение U_0 в катушке равно скорости изменения магнитного потока, проходящего через витки этой

Таблица 2

Характеристики действующих токамаков и токамаков-реакторов ITER и DEMO

Токамак	Страна	Год запуска	Большой радиус, м	Малый радиус, м	Тороидальное поле, Тл	Ток плазмы, МА
DIII-D [20]	США	1986	1,66	0,67	2,2	3,0
NSTX [21]	США	1999	1,85	0,65	0,3	1,4
JT-60U [22]	Япония	1991	3,40	1,00	2,7	5,5
TCV [23]	Швейцария	1992	0,88	0,25—0,7	1,4	1,2
JET [24]	Великобритания	1992	3,00	1,25—2,1	4,0	6,0
ASDEX Upgrade [25]	Германия	1991	1,65	0,5—0,8	3,9	1,4
EAST [26]	Китай	2006	1,75	0,4—0,8	5,0	0,5
KSTAR [27]	Республика Корея	2008	1,8	0,5	3,5	2,0
ITER [28, 29]	Франция	2025	6,2	2,0	5,3	17
DEMO 1 [18]	—	2040—2045	9,1	2,9	5,7	20,0

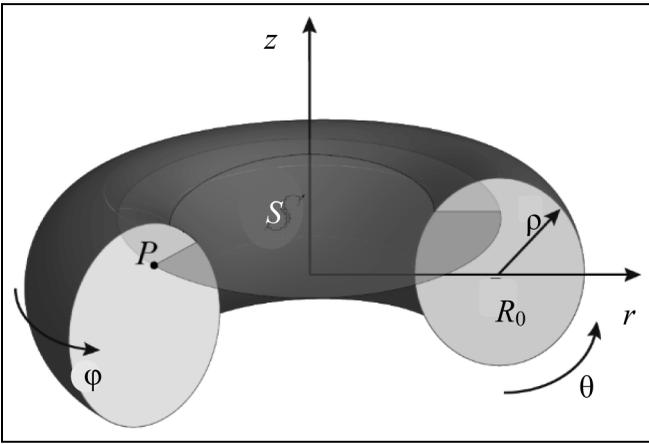


Рис. 4. Цилиндрические координаты r , φ , z и тороидальные координаты ρ , θ в токамаке

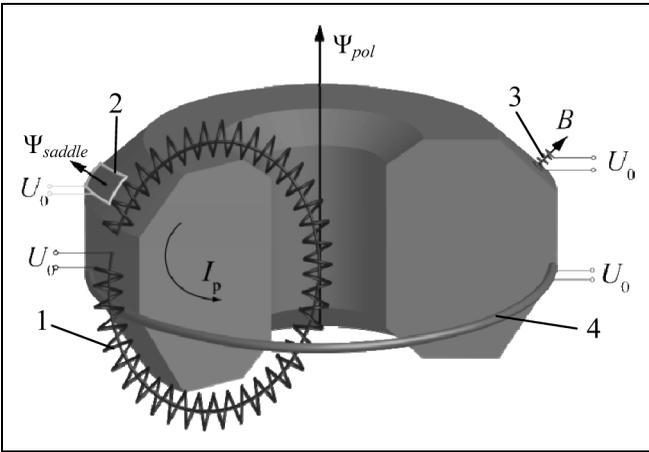


Рис. 5. Магнитные измерения в токамаке: 1 — пояс Роговского; 2 — седловая петля; 3 — магнитный зонд; 4 — датчик магнитного потока

катушки, взятой со знаком минус (в соответствии с законом Фарадея):

$$U_0 = -N \frac{d\Phi}{dt} = -N \frac{d}{dt} \int \vec{B} d\vec{S},$$

где N — число витков катушки, Φ — магнитный поток, проходящий через катушку, \vec{B} — вектор магнитной индукции.

Для описания электромагнитных явлений в камере токамака вводится функция полоидального потока $\psi(\vec{r}, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{S(\vec{r})} \vec{B} d\vec{S}$ как магнитного потока на один радиан, проходящего через окружность S с центром на вертикальной оси токамака (рис. 4). Данная функция зависит от координаты r на полоидальной плоскости и от времени t .

Полоидальный магнитный поток ψ в токамаке измеряется путем интегрирования напряжения U_0 , пропорционального электродвижущей силе, индуцированной в датчике 4 магнитного потока (flux loop, рис. 5), который располагается вне вакуумной камеры в тороидальном направлении. Датчик магнитного потока состоит из одного витка провода, называемого также петлей. Интегрированное напряжение петли с соответствующим коэффициентом представляет собой полоидальный магнитный поток, проходящий через ее контур:

$$\psi(\vec{r}, t) = -\frac{1}{2\pi} \int_{t_0}^t U_0(\tau) d\tau + \psi(\vec{r}, t_0).$$

Для осесимметричной плазмы это измерение дает значение полоидального потока в определенной точке полоидальной плоскости.

Седловые петли 2 (saddle loop, см. рис. 5), которые конструируются посредством соединения двух датчиков магнитного потока, позволяют измерить разницу в полоидальном магнитном потоке между двумя точками на полоидальной плоскости в приближении осесимметричной плазмы:

$$\begin{aligned} \psi(\vec{r}_1, t) - \psi(\vec{r}_2, t) = \\ = -\frac{1}{2\pi} \int_{t_0}^t U_0(\tau) d\tau + \psi(\vec{r}_1, t_0) - \psi(\vec{r}_2, t_0). \end{aligned}$$

В предположении постоянства магнитного потока через петлю они дают возможность измерить магнитное поле, нормальное к поверхности петли.

Магнитное поле измеряется также с помощью магнитных зондов 3 (magnetic probe, см. рис. 5), которые реагируют на изменение магнитного потока, проходящего через них. Магнитный зонд — это многовитковая катушка индуктивности, соединенная с датчиком напряжения. В предположении однородности магнитного поля внутри катушки индуцированное напряжение U_0 связано с локальным магнитным полем $\vec{B}(\vec{r}, t)$ соотношением

$$\vec{B}(\vec{r}, t) \vec{n} = -\frac{1}{NS} \int_{t_0}^t U_0(\tau) d\tau + \vec{B}(\vec{r}, t_0) \vec{n},$$

где \vec{n} — вектор нормали к поперечному сечению катушки, N — число витков, S — площадь поперечного сечения катушки. Это выражение приближенное, так как магнитный поток не постоянен на краях зонда.

Кроме этого, для измерения токов применяют петли (пояса) Роговского [2]. На рис. 5 показан пояс Роговского 1, который измеряет сумму I_{sum} тороидального тока плазмы I_p и тока в вакуумной



камере, проходящих через ее сечение, интегрируя магнитное поле в замкнутом контуре вокруг измеряемого тока. По закону Ампера ток, протекающий через замкнутый контур, определяется через интеграл магнитной индукции по этому контуру $I_{sum} = \frac{1}{\mu_0} \oint \vec{B} d\vec{l}$. Если витки пояса Роговского малы

по сравнению с общим размером катушки, то тогда изменение индукции \vec{B} мало на одном витке при измерении потока вдоль катушки на малом отрезке $d\vec{l}$, а малое изменение потока при этом можно получить в виде $d\Phi = nS\vec{B}d\vec{l}$, где n — число витков на единицу длины катушки, S — площадь поперечного сечения катушки. Тогда полный поток, пронизывающий пояс Роговского, равен величине $\Phi = nS \oint \vec{B} d\vec{l}$, а измеряемый суммарный ток с учетом вычисленного потока Φ и закона Фарадея определяется соотношением:

$$I_{sum}(t) = \frac{\Phi}{\mu_0 n S} = -\frac{1}{\mu_0 n S} \int_{t_0}^t U_0(\tau) d\tau + I_{sum}(t_0).$$

Магнитная диагностика — основная функция измерительного комплекса любого токамака. Рассмотрение других видов диагностики выходит за рамки данного обзора. Отметим лишь их большое разнообразие, которое возникает, прежде всего, из-за особенностей высокотемпературной плазмы, излучающей в широком спектре длин волн — от видимого диапазона до жесткого рентгеновского излучения, а также, из-за необходимости контроля не только интегральных параметров плазмы, но и локальных в объеме плазменного шнура величин.

4. МОДЕЛИ ПЛАЗМЫ

4.1. Уравнения эволюционных моделей плазмы

Магнитодинамическое равновесие плазмы в токамаке принято описывать функцией $F(\Psi)$ полоидального потока Ψ , пропорциональной в точке P потоку магнитной индукции через окружность S , перпендикулярную аксиальной оси Z и проходящую через рассматриваемую точку (см. рис. 4). Зная распределение полоидального потока, границу плазмы можно найти как наибольшую замкнутую линию уровня полоидального потока в камере токамака, а в соответствии с теоремой Гаусса $\text{div} \vec{B} = 0$ полоидальное магнитное поле выражается как $\vec{B}_p = \nabla \Psi \times \nabla \varphi$.

Из закона Ампера $\text{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$, где \vec{J} — вектор плотности тока, μ_0 — магнитная постоянная, уравнения баланса сил в плазме $\vec{J} \times \vec{B} = \nabla p$ и условия аксиальной симметрии токамака следует уравне-

ние Грэда — Шафранова [2, 4, 6], описывающее равновесие плазмы. В цилиндрических координатах оно имеет вид:

$$r \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} = -\mu_0 r^2 \frac{dp}{d\Psi} - F \frac{dF}{d\Psi},$$

где p — газокINETическое давление плазмы, а функция $F(\Psi)$ связана с тороидальным магнитным полем: $F(\Psi) \equiv r B_\varphi$.

В пределе бесконечной проводимости плазмы контуры магнитного потока как бы «вморожены» в плазму, и значение полоидального потока на границе плазмы не меняется. Но сопротивление плазмы недостаточно мало, чтобы им можно было пренебречь на протяжении разряда токамака, и магнитное равновесие плазмы претерпевает эволюцию в соответствии с законом Ома. Проекцию дифференциального закона Ома на магнитные линии в плазме называют уравнением диффузии полоидального потока. В пределе большого аспектного отношения и круглого сечения плазмы оно имеет вид [36]:

$$\sigma_{\parallel} \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \frac{1}{\mu_0 \rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \rho \frac{\partial \Psi}{\partial \rho} + r J_{ni},$$

где σ_{\parallel} — проводимость плазмы вдоль силовых линий, а J_{ni} — плотность токов неомического происхождения, к которым относится бутстрэп-ток, токи, создаваемые системами дополнительного нагрева (токи увлечения) и др.

Для определения проводимости и неомических токов в уравнении диффузии полоидального потока необходимы распределения давления и плотности электронов и ионов плазмы. Эти величины находятся путем решения уравнений переноса частиц и энергии в плазме [37]:

$$\frac{\partial n_\alpha}{\partial t} + \nabla(n \vec{u}_\alpha) = S_\alpha,$$

$$\frac{3}{2} \frac{\partial p_\alpha}{\partial t} + \nabla \left(\vec{q}_\alpha + \frac{5}{2} p_\alpha \vec{u}_\alpha \right) = P_\alpha.$$

Здесь индекс $\alpha = i, e$ указывает тип частиц (ионы или электроны), n_α — концентрация частиц, S_α — источники частиц, \vec{q}_α — поток тепла, переносимый частицами, \vec{u}_α — скорость частиц, P_α — мощность источников энергии частиц, куда входят омический и дополнительный нагрев, обмен энергией между электронами и ионами, а также потери на излучение. Эти величины берутся из теоретических или (так как на данный момент отсутствует за-

конечная теория процессов переноса в токамаке) из эмпирических моделей в зависимости от режима работы токамака.

4.2. Плазмофизические коды нелинейных эволюционных моделей плазмы

4.2.1. Плазма со свободной границей

Для решения уравнений эволюционных моделей плазмы, в настоящее время разработан ряд плазмофизических кодов. Они состоят из двух групп. Первая группа — это коды, предназначенные для моделирования плазмы со свободной границей. В частности, в ГНЦ РФ «Троицкий институт инновационных и термоядерных исследований (ТРИНИТИ)» (г. Троицк) разработана нелинейная динамическая плазмофизическая модель плазмы в токамаке [37]. В основе модели лежит двумерное равновесие плазмы со свободной границей во внешних магнитных полях, усредненный по магнитным поверхностям транспорт плазменных кинетических параметров и полоидального магнитного потока, а также система активных катушек полоидального поля и структура пассивной стабилизации. Модель плазмы в токамаке численно реализована в коде DINA.

В различных странах и на различных токамаках созданы другие нелинейные коды со свободной границей плазмы аналогичного назначения, отличающиеся от кода DINA различными особенностями (наличием ненулевой массы плазмы, точностью расчета уравнений равновесия и диффузии магнитного поля, скоростью счета, методом решения уравнения Грэда — Шафранова и др.): TSC (Tokamak Simulation Code, США) [38], JETTO (Италия) [39], CORSICA (США) [40], UEDGE (США) [41], PET (Россия) [42], SCoPE (Россия) [4], EDGE2D (Англия) [43], MAXFEA (Италия) [44], B2-IRENE (Германия) [45], PARASOL (Япония) [46] и др.

4.2.2. Плазма с фиксированной границей

Вторая группа — это коды, предназначенные для моделирования плазмы с фиксированной границей, которая задается пользователем. К ним относятся многие коды, специализирующиеся на расчете транспортных процессов в плазме. В их число входят ASTRA (Россия) [47], CRONOS (Франция) [48], TRANSP и PTRANSF [49, 50], ONETWO [51] и BALDUR [52] (все США).

Транспортные коды могут использоваться совместно с кодами со свободной границей плазмы, создавая гибридную транспортную и магнитную модели. Так, код DINA-CH был объединен с кодом CRONOS [53], а код TSC [38] — с кодом PTRANSF [50].

4.3. Линеаризация нелинейных моделей плазмы

В задачах управления формой, током и положением плазмы в токамаке, как правило, требуется удерживать плазму возле желаемого равновесного положения. Малость отклонений от равновесия, обеспечиваемая системами управления с обратной связью, позволяет описывать плазму линейными моделями, для управления которыми существуют различные подходы. Для данных задач в качестве основного уравнения служит нелинейное дифференциальное уравнение Кирхгофа, описывающее взаимосвязанную магнитную систему проводников с токами, включая плазменный виток [54, 55]:

$$\dot{\Psi} + RI_c = Nu, \quad N = \begin{bmatrix} \Xi_{m \times m} \\ 0_{(n-m) \times m} \end{bmatrix},$$

$$\Psi, I_c \in R^n, \quad u \in R^m, \quad n > m,$$

где Ψ — вектор полоидальных потоков, усредненных по поперечным сечениям контуров и пронизывающих их в вертикальных плоскостях, I_c — вектор токов в активных обмотках полоидальных полей и пассивных контурах, R — матрица сопротивлений контуров, u — вектор внешних напряжений, приложенных к обмоткам полоидальных магнитных полей, который представляет собой *вектор входного воздействия* на объект управления, $\Xi_{m \times m}$ — единичная матрица размером $m \times m$, $0_{(n-m) \times m}$ — нулевая матрица размером $(n - m) \times m$. Единицы в матрице N соответствуют напряжениям на активных обмотках полоидальных полей и секциях центрального соленоида в соответствии с вектором u , а нули — нулевым напряжениям на контурах пассивных структур.

Линеаризованное уравнение Кирхгофа при малых отклонениях от положения равновесия имеет вид

$$\frac{\partial \Psi}{\partial I_c} \delta \dot{I}_c + \frac{\partial \Psi}{\partial I_p} \delta \dot{I}_p + \frac{\partial \Psi}{\partial \vec{r}_p} \delta \dot{\vec{r}}_p + \frac{\partial \Psi}{\partial \xi} \delta \dot{\xi} + R \delta I_c = N \delta u.$$

Здесь I_p — полный ток плазмы, \vec{r}_p — вектор координат магнитной оси плазмы, ξ — вектор параметров, описывающих профиль тока, например, отношение газокинетического давления плазмы к давлению полоидального магнитного поля β_p и внутреннюю индуктивность плазмы l_i ; $\xi = [\beta_p \ l_i]^T$. Форму полоидального сечения плазменного шнура удобно описывать в виде

$$h = h(I_c, I_p, \vec{r}_p, \xi),$$

куда входят вектор токов в обмотках управления и пассивных структурах I_c , полный ток плазмы I_p ,



положение магнитной оси \vec{r}_p и вектор возмущения ξ . Линеаризуя это уравнение, получим

$$y = \delta h = \frac{\partial h}{\partial I_c} \delta I_c + \frac{\partial h}{\partial I_p} \delta I_p + \frac{\partial h}{\partial \vec{r}_p} \delta \vec{r}_p + \frac{\partial h}{\partial \xi} \delta \xi.$$

Приращение тока плазмы δI_p может быть описано линеаризованным уравнением Кирхгофа для контура плазмы либо выражено через приращения δI и $\delta \xi$ с учетом физического условия «вмороженности» полоидального потока в плазму $\bar{\Psi} = \frac{1}{I_p} \int J \Psi dS = \text{const}$, где J — плотность тока плазмы, откуда

$$\frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial I_c} \delta I_c + \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial I_p} \delta I_p + \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \vec{r}_p} \delta \vec{r}_p + \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \xi} \delta \xi = 0.$$

Аналогично, смещение положения плазмы $\delta \vec{r}_p$ может быть описано уравнением движения $m \ddot{\vec{r}}_p = \vec{F}$ либо, с пренебрежением массой плазмы, линейно выражено из условия баланса действующих на плазму сил \vec{F} :

$$\frac{\partial \vec{F}}{\partial \vec{r}_p} \delta \vec{r}_p + \frac{\partial \vec{F}}{\partial I_c} \delta I_c + \frac{\partial \vec{F}}{\partial I_p} \delta I_p + \frac{\partial \vec{F}}{\partial \xi} \delta \xi = 0.$$

Итоговая система уравнений в пространстве состояний линейной модели плазмы имеет вид:

$$\begin{aligned} \delta \dot{I} &= A \delta I + B \delta u + E \delta \xi, \\ y &= C \delta I + F \delta \xi, \end{aligned}$$

где A, B, C, E и F — матрицы Якоби. В вектор состояний δI входят приращения токов в активных и пассивных контурах токамака δI_c , а также могут входить: приращение полного тока плазмы δI_p , смещение положения плазмы $\delta \vec{r}_p$ и его скорость $\delta \dot{\vec{r}}_p$.

Если исключить производную $\delta \dot{\xi}$ из первого уравнения данной системы с помощью замены переменных $x \equiv \delta I - E \delta \xi$, то уравнения линейной модели при обозначении $u = \delta u$ примут стандартную форму представления линейной динамической системы с управлением в пространстве состояний и учетом присутствия вектора внешнего возмущения $\delta \xi$ в обоих уравнениях, позволяющего моделировать «малые срывы» в плазме токамаков:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu + AE \delta \xi, \\ y &= Cx + (CE + F) \delta \xi. \end{aligned}$$

Подчеркнем, что в данной модели отсутствует статическая связь между вектором управления u и вектором выходных сигналов y в терминах $ABCD$ -

представления линейной динамической системы: матрица D является нулевой. Физически данный факт объясняется тем, что ток в плазме и ее магнитная конфигурация не могут измениться мгновенно под воздействием сигналов управления, так как требуется некоторое время для проникновения электродвижущей силы внутрь плазмы, что создает динамику распространения управляющего воздействия в плазме. Математически описание данного процесса сводится к решению двумерного уравнения в частных производных для индуцированного в плазме напряжения [4].

4.4. Восстановление равновесия плазмы по внешним магнитным измерениям

Эволюционные коды позволяют получить распределения плотности тока и полоидального потока для любого момента времени в моделируемом плазменном разряде по экспериментальным измерениям. Однако в ходе эксперимента эти распределения не известны, а форма плазмы и профили ее параметров должны быть идентифицированы по показаниям диагностики вне плазмы. Данная обратная задача называется задачей *восстановления равновесия плазмы* [35].

В задаче восстановления равновесия необходимо найти распределение полоидального потока ψ , область плазмы S и распределение плотности тока плазмы J в ней, удовлетворяющее уравнению Грэда — Шафранова:

$$r \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = \begin{cases} -\mu_0 r J, & (r, z) \in S, \\ 0, & (r, z) \notin S, \end{cases}$$

$$J = rp'(\psi) + \frac{1}{\mu_0 r} F(\psi) F'(\psi)$$

с граничными условиями $\psi|_{r=0} = \psi|_{r=\infty} = 0$, и согласующиеся с показаниями имеющейся магнитной диагностики, куда, как правило, входит полный ток плазмы $\int_S J dS = I_p$, значения полоидального потока в наборе N точек вне плазмы $\psi(\vec{r}_i) = \Psi_i$, $i = 1, \dots, N$, и значения полоидального магнитного поля в наборе M точек вне плазмы $\nabla \psi(\vec{r}_j) \times \nabla \phi(\vec{r}_j) = \vec{B}_{pj}$, $j = 1, \dots, M$. Также возможны дополнительные ограничения на распределение плотности тока, следующие из измерений кинетических параметров и профиля запаса устойчивости q .

Одним из самых распространенных подходов к решению задачи восстановления равновесия является метод итераций Пикара с линейной параметризацией плотности тока плазмы [56—58]. В данном методе на каждой итерации функции p' и FF' ,

входящих в уравнение Грэда — Шафранова, представляют в виде линейных комбинаций базисных функций, зависящих от значений полоидального потока предыдущей итерации:

$$p'_n = \sum_k a_k \alpha_k(\psi_{n-1}), \quad F_n F'_n = \sum_l b_l \beta_l(\psi_{n-1}).$$

Значения коэффициентов a_k и b_l находятся на каждой итерации минимизацией функционала, состоящего из квадратов разностей между рассчитанными и измеренными значениями полного тока плазмы, полоидального потока и полоидального магнитного поля, который является, в таком представлении, квадратичным функционалом. При этом, поскольку задача восстановления равновесия является некорректной по Адамару, применяются техники регуляризации, например, регуляризация Тихонова или SVD-разложение [59]. Данная процедура повторяется на каждой итерации, пока не будет достигнута сходимость к решению.

Описанный алгоритм трудоемкий, и для его применения в реальном времени разряда токамака требуются упрощения, например, ограничение одной итерацией при использовании равновесия предыдущего момента времени в качестве нулевого приближения. Другая возможная модификация заключается в представлении плазмы в виде набора филаментов [60], представляющих собой набор концентрических идеальных проводников с токами, аппроксимирующий магнитную конфигурацию плазмы. В этом случае плотность тока плазмы представляется в виде линейной комбинации дельта-функций. Филаменты могут быть фиксированы в пространстве, а могут быть движущимися, с определяемыми минимизацией функционала невязки координатами.

Метод филаментов не позволяет восстановить профили параметров плазмы, но может применяться в задачах, в которых достаточно определить положение и форму плазмы. Для таких задач также подходят алгоритмы восстановления формы плазмы, не восстанавливающие полоидальный поток в области плазмы. Примером такого алгоритма служит код XLOC [61], который аппроксимирует полоидальный поток в области вакуума полиномиальными функциями с ограничением $\Delta^* \psi = 0$. Граница плазмы при этом находится, как линия уровня потока, содержащая X -точку, в которой $\nabla \psi = 0$. Также для подобных задач применяются алгоритмы, основанные не на решении уравнений равновесия плазмы, а на регрессионном анализе большого количества экспериментальных данных [62].

Математически строго показано [4], что одних только магнитных измерений недостаточно для

определения внутренних параметров плазмы, таких как профили тока и давления плазмы. Будучи некорректно поставленной, задача восстановления равновесия, в общем случае, неустойчива по входным данным и может иметь несколько решений, существенно различающихся по внутренним параметрам.

Преодолеть данные трудности позволяет метод, основанный на использовании ε -сетей и реализованный в коде SDSS (*Substantially Different Solutions Searcher*, Россия) [63—67]. В данном методе в качестве начального приближения принимается равновесие, восстановленное любым другим методом, например, одним из вышеописанных. Затем для окрестности данного равновесия строится ε -сеть [68], т. е. набор правых частей уравнения

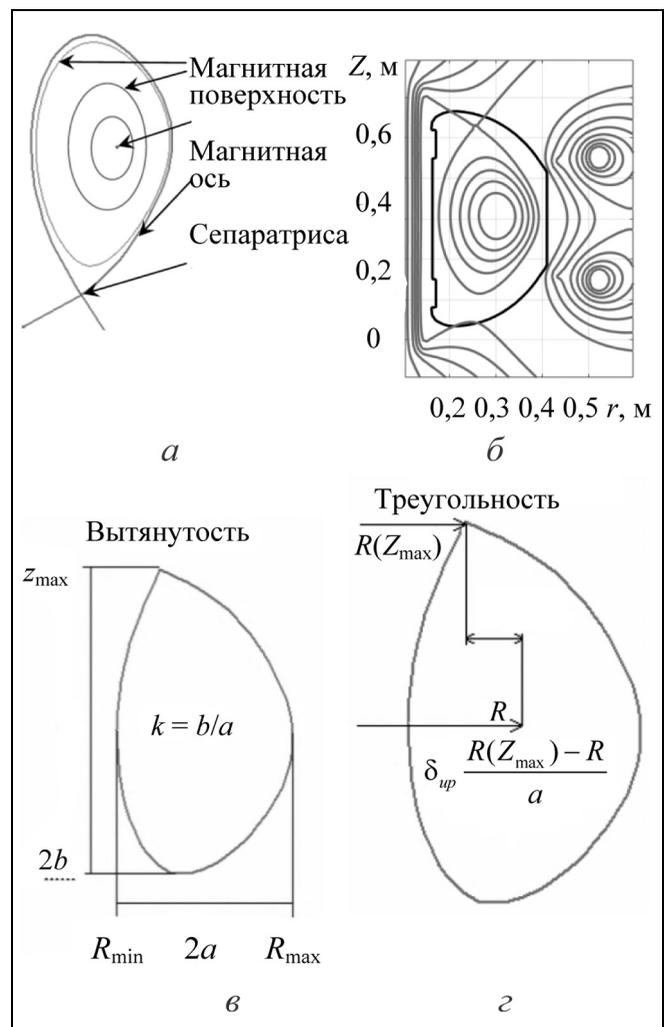


Рис. 6. Магнитные конфигурации: а — виды магнитных поверхностей в токамаке; б — конфигурация с верхней X -точкой на токамаке Глобус-М; в — к определениям большого и малого радиусов плазмы и ее вытянутости; з — к определению треугольности плазмы

Грэда — Шафранова, позволяющий аппроксимировать произвольное равновесие в рассматриваемой области с погрешностью, не превышающей ε . Разбор равновесий, соответствующих элементам ε -сети, позволяет найти все существенно различающиеся решения задачи восстановления и оценить их погрешность.

В качестве примеров на рис. 6, а приведены виды магнитных поверхностей в токамаке, а на рис. 6, б — восстановленные равновесия в виде системы линий равного уровня для полоидально-го потока токамака Глобус-М (код FCDI [58]). На рис. 6, в, г показаны геометрические параметры сепаратрисы плазмы. Большой радиус плазмы — среднее арифметическое между максимальным и минимальным большим радиусом на сепаратрисе $R = (R_{\max} + R_{\min})/2$, малый радиус — полуразность максимального и минимального большого радиуса на сепаратрисе $a = (R_{\max} - R_{\min})/2$, вытянутость плазмы — отношение вертикального и радиально-го размеров плазмы $k = (Z_{\max} - Z_{\min})/(R_{\max} - R_{\min})$, верхняя треугольность плазмы — смещение верхней точки сепаратрисы относительно большого радиуса сепаратрисы, отнесенное к малому радиусу $\delta_{up} = (R(Z_{\max}) - R)/a$, нижняя треугольность $\delta_{down} = (R(Z_{\min}) - R)/a$.

5. НЕУСТОЙЧИВОСТИ И СРЫВЫ

Уравнение Грэда — Шафранова описывает равновесную конфигурацию плазмы в токамаке, однако оно не отражает устойчивость равновесия. При анализе устойчивости исследуется эволюция равновесия плазмы при возмущениях (модах) определенного вида, например, $\xi(r)e^{i(\omega t + m\theta - n\varphi)}$ (см. рис. 4). Для устойчивости равновесия необходимо, чтобы все возможные моды были затухающими либо имели времена развития много больше длительности разряда. Анализ устойчивости представляет собой чрезвычайно сложную задачу, для решения которой во многих случаях приходится прибегать к численному моделированию разряда. Но решение этой задачи необходимо, поскольку неустойчивости плазмы могут приводить к большим срывам, при которых теряется магнитное удержание, и плазма приходит в соприкосновение со стенками токамака, что может привести к аварии и повредить установку.

Исследованиям больших срывов плазменного шнура в токамаках и причин их возникновения уделяется в настоящее время большое внимание, так как они не должны возникать при работе термоядерного реактора. Для этого, в частности, строятся модели процессов больших срывов по экспе-

риментальным данным и изучаются процессы взаимодействия плазмы при больших срывах с первой стенкой токамака [69]. В этом процессе важную роль играют гало-токи (англ. *halo* — ореол), которые появляются в слое вне сепаратрисы при взаимодействии плазмы со стенкой [2, 69] во время развития вертикальной неустойчивости плазмы. В этом случае возникают большие механические силы, действующие на стенку. Например, в токамаке JET они могут достигать значений в несколько сотен килоньютонов при воздействии на вакуумную камеру [2].

Неустойчивости плазмы накладывают ограничения на рабочие параметры токамака. Именно из-за неустойчивостей для работы токамака необходимы сильные удерживающие магнитные поля, при которых отношение кинетического давления p плазмы к давлению магнитного поля B , обозначаемое β , не превышает значений порядка 10^{-2} . На основании анализа большого объема экспериментальных данных разных установок установлено эмпирически предельное достижимое значение β для устойчивого равновесия [70]:

$$\beta_{\max} = \left(\frac{p}{B^2/2\mu_0} \right)_{\max} = 0,028 \frac{I}{aB} \left[\frac{\text{МА}}{\text{м} \cdot \text{Тл}} \right],$$

где a — малый радиус плазменного шнура. Данное условие накладывает ограничение на допустимое давление плазмы в токамаке.

Удобным параметром для описания устойчивости плазмы служит запас устойчивости q [2], определяемый для магнитной поверхности как

$$q(L) = \frac{1}{2\pi} \oint_L \frac{B_\varphi}{rB_p} dl, \text{ где интегрирование производится по полоидальному сечению поверхности, } B_\varphi \text{ и } B_p \text{ — тороидальное и полоидальное магнитные поля.}$$

В приближении круглого сечения плазмы и большого аспектного отношения (R/a), профиль $q(\rho)$ выражается через профиль тока плазмы $I(\rho)$:

$$q(\rho) = \frac{2\pi\rho^2 B_\varphi}{\mu_0 R I(\rho)}. \text{ Таким образом, ограничения на}$$

профиль q сводятся к ограничениям на профиль тока. Так, анализ устойчивости моды $m = 1$ приводит к важному критерию Крускала — Шафранова [70, 71]

$$q(a) = \frac{aB_\varphi(a)}{RB_\theta(a)} > 1,$$

что означает необходимость превышения отношения тороидальной $B_\varphi(a)$ и полоидальной $B_\theta(a)$ составляющих магнитного поля над аспектным от-

ношением R/a . Это эквивалентно ограничению на полный ток плазмы при заданной силе тороидального магнитного поля:

$$I_p < \frac{2\pi a^2 B_\phi}{\mu_0 R}.$$

Нарушение ограничений на профиль запаса устойчивости приводит к образованию *винтовой* неустойчивости плазмы. Различают два основных вида винтовой МГД-неустойчивости в токамаке: неустойчивость границы (кинк-мода), которая имеет тип поверхностной волны, и диссипативную тиринг-неустойчивость (от англ. *tearing* — разрывание) внутренних областей плазмы. Физически, эта одна и та же неустойчивость. При описании разница заключается лишь в выборе условий у границы шнура. В первом случае предполагается вакуумный зазор между идеально проводящей плазмой и камерой. Во втором — зазор «заполняется» плазмой с конечной электропроводностью. Если в первом случае продлить плазменный шнур до камеры, а во втором — сделать плазму идеально проводящей, то шнур оказывается устойчив по отношению ко всем резонансным винтовым возмущениям, кроме моды $m = 1$, что соответствует критерию Крускала — Шафранова $q(a) > 1$.

По мере нагрева плазмы ее проводимость растет, а с ней растет и плотность тока в горячем центре плазмы, что также приводит к уменьшению запаса устойчивости $q(0)$. При достижении значения $q(0) < 1$, возникающая неустойчивая мода $m = 1$ приводит к резкому срыву плотности и температуры в центре плазмы, к колебаниям температуры и плотности, называемыми *пилообразными колебаниями*. Физика пилообразных колебаний не изучена до конца, но известно, что на их амплитуду и период влияют наличие быстрых ионов и давление плазмы, а также крутизна профиля q . Пилообразные колебания не приводят к срыву плазменного шнура и считаются частью рабочего режима токамака, однако они могут понижать устойчивость плазмы к другим модам. По этой причине на некоторых токамаках применяются системы управления амплитудой пилообразных колебаний, использующие инжекторы нейтральных частиц и нагрев радиоволнами электронных и ионных циклотронных частот.

Условия устойчивости могут зависеть не только от полного тока плазмы, но и от вида профиля тока. Так, плазма с постоянной плотностью тока, резко обрывающимся на границе плазмы, неустойчива по отношению ко всем модам $m > 1$ — у края плазмы желателен малый градиент тока. Наличие поверхности с запасом устойчивости $q = 2$ вблизи сепаратрисы приводит к нарастанию свя-

занных с конечной проводимостью плазмы тиринг-мод, которые ведут к разрыванию силовых линий поля и образованию «магнитных островов». В результате это явление вызывает ускорение процессов переноса и большой срыв плазмы. Поэтому на практике ограничение Крускала — Шафранова усиливают до $q(a) > 3$.

С профилем устойчивости q также связаны ограничения на допустимую плотность плазмы. С увеличением плотности ускоряются связанные с частотой столкновений процессы переноса и растут радиационные потери на границе плазмы, что приводит к уменьшению температуры в пограничном слое. С уменьшением температуры увеличивается сопротивление пограничного слоя, и слой перестает проводить ток, что ведет к уменьшению эффективной области плазмы, уменьшению запаса устойчивости q на эффективной границе и последующему срыву плазменного шнура. Для сохранения устойчивости плотность плазмы n не должна превышать установленной Гринвальдом предельной плотности [72]:

$$n[10^{20} \text{ м}^{-3}] < \frac{I_p}{\pi a^2} \left[\frac{\text{МА}}{\text{м}^2} \right].$$

Для задач управления плазмой фиксированной плотности n данный критерий может быть рассмотрен как ограничение снизу на полный ток плазмы I_p .

В целом МГД-возмущения оказывают существенное влияние на разряд токамака и являются одной из основных причин ухудшения удержания плазмы и даже могут приводить к большому срыву, т. е. окончанию разряда. По этой причине получение режимов в отсутствие крупномасштабных МГД-неустойчивостей в установках типа токамак является актуальной задачей. Кроме создания устойчивой по отношению к МГД-модам магнитной конфигурации плазменного шнура, также применяются и активные методы их подавления. Например, локальным нагревом на частотах электронно-циклотронного резонанса удается эффективно влиять на профиль давления, предотвращая развития неустойчивых мод.

В исследованиях токамаков уделяется большое внимание поиску конфигураций плазмы с повышенным давлением, т. е. с высокими значениями температуры, плотности и временем удержания, позволяющих приблизиться к выполнению критерия Лоусона. Но такие конфигурации часто подвержены новым неустойчивостям. Так, на современных токамаках, как правило, изучается вытянутая по вертикали плазма. В сравнении с круглой конфигурацией, вытянутая плазма позволяет достигать значительно большего давления при той

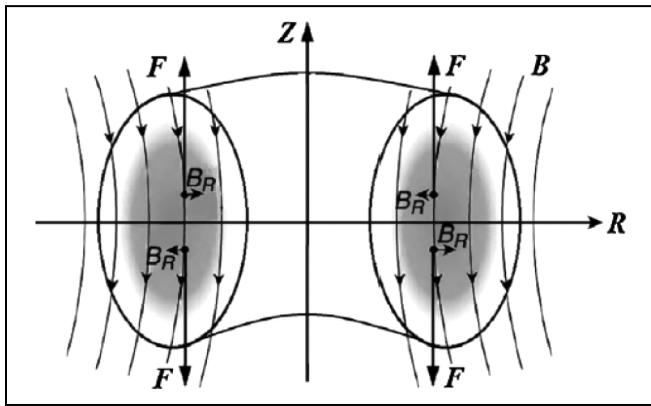


Рис. 7. Природа вертикальной неустойчивости вытянутой плазмы

же силе магнитного поля. Для растяжения плазмы по вертикали в плазме создается горизонтальное поле, направленное в противоположные стороны в верхней и нижней частях плазмы (рис. 7). Однако при такой конфигурации малые смещения плазмы по вертикали приводят к увеличению действующих в этом направлении сил Ампера $\vec{J}_p \times \vec{B}_R$, и плазма становится вертикально неустойчивой. Поэтому для работы современных токамаков необходима система управления с обратной связью, регулирующая токи в катушках горизонтального поля и стабилизирующая положение плазмы.

Еще одной перспективной конфигурацией плазмы является режим улучшенного удержания, так называемый *H*-режим (от англ. *High-confinement* — улучшенное удержание), возникающий при сильном дополнительном нагреве и характеризующийся значительно повышенным временем удержания энергии. Однако такой режим подвержен влиянию ELM-неустойчивостей (от англ. *Edge Localized Modes* — краевые локализованные моды). Данные моды, как правило, имеют $n \sim 10$, $m \sim 30$ и приводят к периодическим выбросам энергии

плазмы, что ведет к ухудшению удержания и может повредить камеру токамака. Для борьбы с ELM-неустойчивостью применяются системы управления частотой и амплитудой выбросов, в которых предусмотрены нагрев краевых областей плазмы и аксиально асимметричные магнитные поля.

6. ИСПОЛНИТЕЛЬНЫЕ УСТРОЙСТВА СИСТЕМ МАГНИТНОГО УПРАВЛЕНИЯ ПЛАЗМОЙ И ИХ МОДЕЛИ

Для управления положением, формой и током плазмы в токамаке применяются магнитные датчики, (см. § 3), подключенные через регуляторы к управляемым источникам питания, таким как: многофазные тиристорные выпрямители (рис. 8, а) [73—74], инверторы напряжения на силовых транзисторах (рис. 8, б) [75—77], тиристорные инверторы тока (рис. 8, в) [78].

Тиристорные выпрямители обладают относительно малым быстродействием и применяются для питания катушек тороидальных и полоидальных полей для управления формой и током плазмы [79, 80]. Иногда они применяются вместе с катушками полоидальных полей для управления вертикальным и горизонтальным положением плазмы, например, на токамаке ASDEX Upgrade [33]. При синтезе линейных регуляторов для систем магнитного управления плазмой в токамаке модели тиристорных выпрямителей с достаточной точностью аппроксимируются передаточными функциями в виде динамического звена первого порядка с транспортным запаздыванием вида $W(s) = e^{-Ts}/(Ts + 1)$, где параметр T зависит от характеристик конкретного выпрямителя [79].

Инверторы напряжения и тока обладают более высоким быстродействием, по сравнению с тиристорными выпрямителями, и применяются для питания катушек полоидальных полей или отдельных катушек горизонтального и вертикального полей в целях управления положением плазмы и

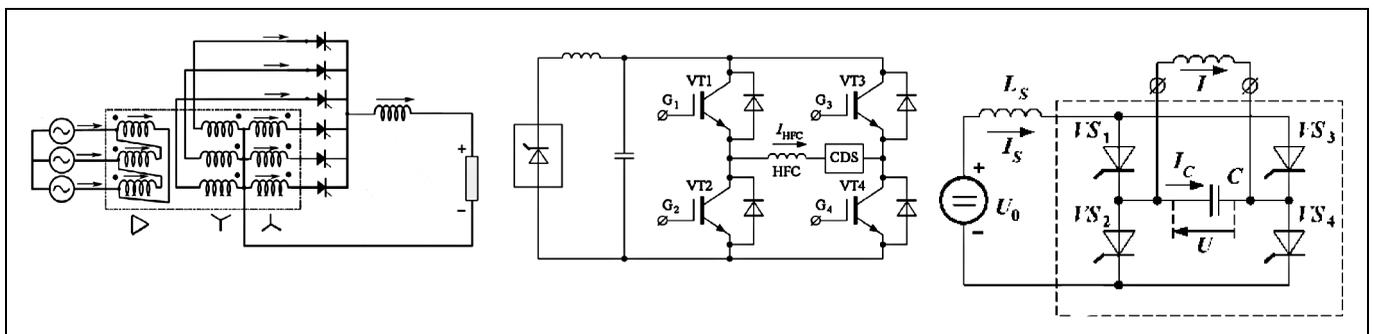


Рис. 8. Силовые части исполнительных устройств: а — многофазный тиристорный выпрямитель; б — транзисторный инвертор напряжения; в — тиристорный инвертор тока

подавления ее неустойчивости по вертикальной координате [78, 80]. Модели данных устройств сложные и нелинейные. Однако для целей синтеза систем управления обычно достаточно аппроксимации в виде коэффициента усиления [80, 82, 83], так как нелинейная динамика на порядок быстрее управляемых процессов в плазме токамака. Инверторы напряжения могут работать в режиме широтно-импульсной модуляции [76, 77] либо в релейном режиме, обеспечивающем скользящий режим или автоколебательные процессы [78, 83] в замкнутой системе управления.

7. СФЕРИЧЕСКИЙ ТОКАМАК ГЛОБУС-М

7.1. Конструкция токамака Глобус-М

Установка Глобус-М представляет собой сферический токамак нового поколения, предназначенный для исследования физических процессов в плазме сферической конфигурации и отработки инженерных рекомендаций для сферических токамаков мегаамперного диапазона [84].

Основные параметры сферического токамака Глобус-М: Ток плазмы I_p до 0,3 МА, тороидальное магнитное поле $B_T \leq 0,4$ Тл. Большой радиус установки $R = 0,36$ м, малый радиус $a = 0,24$ м, что соответствует аспектному отношению 1,5, при этом вертикальная вытянутость шнура k может достигать 2,2, а треугольность $\delta = 0,4$.

Электромагнитная система токамака спроектирована по классической схеме, когда все обмотки расположены вне вакуумной камеры, а обмотки полоидального поля расположены вне обмотки тороидального поля (рис. 9, см. третью страницу обложки).

Шестнадцать одновитковых D-образных катушек изготовлены из электротехнической меди, соединены последовательно и образуют обмотку тороидального поля. Проходящие через внутренний цилиндр вакуумной камеры части катушек изготовлены в виде 16 изолированных друг от друга бронзовых сегментов. На образованный сегментами центральный стержень надета обмотка для создания вихревого электрического поля — центральный соленоид. Соленоид выполнен из медно-серебряного сплава в виде двухслойной катушки, общая высота обмотки составляет 1,3 м. Девять пар полоидальных обмоток разбиты на три функциональные группы: обмотки компенсации рассеянного поля, «медленные» и «быстрые» обмотки управления положением и формой плазмы. Система полоидальных катушек позволяет создавать магнитные конфигурации как лимитерные, так и диверторные, с одной или двумя X-точками.

Обращает на себя внимание очень малое расстояние (2—3 см) между внешней магнитной поверхностью плазменного шнура и стенкой разрядной камеры. Эта особенность является одной из ключевых, отличающих токамак Глобус-М от других сферических токамаков. Применение конструкции, в которой плазма тесно вписана в объем вакуумной камеры, имеет ряд преимуществ. Катушки магнитной системы токамака могут быть максимально приближены к плазме без необходимости помещать их в вакуум. Тем самым уменьшается объем создаваемого внешнего магнитного поля и снижается мощность источников питания для его создания. Кроме того, упрощается конструкция самих катушек, так как снижаются требования по отводу от них тепла по сравнению с обмотками, расположенными в вакууме. Одновременно с этим близко расположенная проводящая стенка оказывает стабилизирующее воздействие на плазменный шнур.

Имеется также ряд преимуществ, используемых при проектировании диагностического оборудования. Например, датчики магнитной диагностики могут быть расположены близко к внешней магнитной поверхности плазмы, через диагностические патрубки может быть реализован более широкий ракурс обзора для наблюдения за плазмой. К негативным моментам, связанным с конструкцией установки Глобус-М, следует отнести повышенную нагрузку на стенку разрядной камеры из-за малой площади поверхности по сравнению с объемом плазмы, а также более жесткие требования к системе управления положением плазменного шнура (точность и малое время переходных процессов, быстрое действие источников питания в контуре управления).

Обмотки токамака питаются от силовых трансформаторов, подключенных к высоковольтной сети переменного тока 110 кВ с помощью шестифазных тиристорных выпрямителей и быстрых тиристорных инверторов тока с частотой до 3 кГц. Источники питания охвачены петлями обратной связи и позволяют поддерживать заданные положение, форму и ток плазмы. Система охлаждения обмоток электромагнитной системы обеспечивает работу токамака с частотой 6 импульсов в час при длительности разряда 0,3 с и максимально достигнутом в эксперименте токе 0,36 МА. Обычный (рабочий) диапазон токов составляет 180—250 кА. Ток плазмы поддерживается за счет расхода магнитного потока системы полоидальных катушек, вольт-секундная площадь которой равна 0,33 В · с. Вклад центрального соленоида в создание магнитного потока составляет 90 %.

Рисунки к статье Ю.В. Митришкина, П.С. Коренева, А.А. Прохорова и др.
«Управление плазмой в токамаках. Ч. 1. Проблема управляемого термоядерного синтеза. Токамаки. Компоненты систем управления» (с. 2–20)

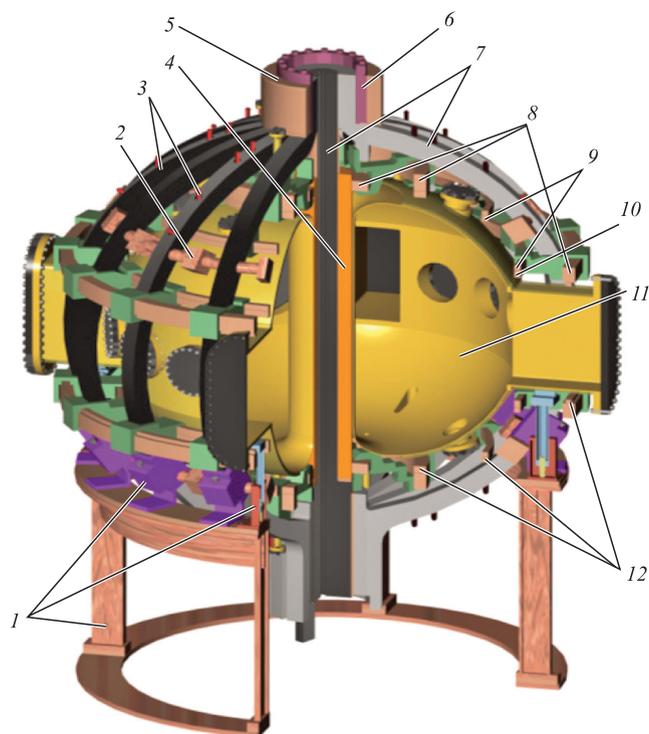


Рис. 9. Конструкция токамака Глобус-М: 1 – опорная конструкция токамака; 2 – межвитковые распорки тороидальных катушек; 3 – крепления полоидальных катушек; 4 – центральный соленоид; 5 – бандажное кольцо; 6 – клиновой зажим; 7 – обмотка тороидального поля; 8 – «медленные» обмотки полоидального поля; 9 – «быстрые» обмотки управления (горизонтальное поле); 10 – «быстрые» обмотки управления (вертикальное поле); 11 – вакуумная камера; 12 – компенсационные обмотки

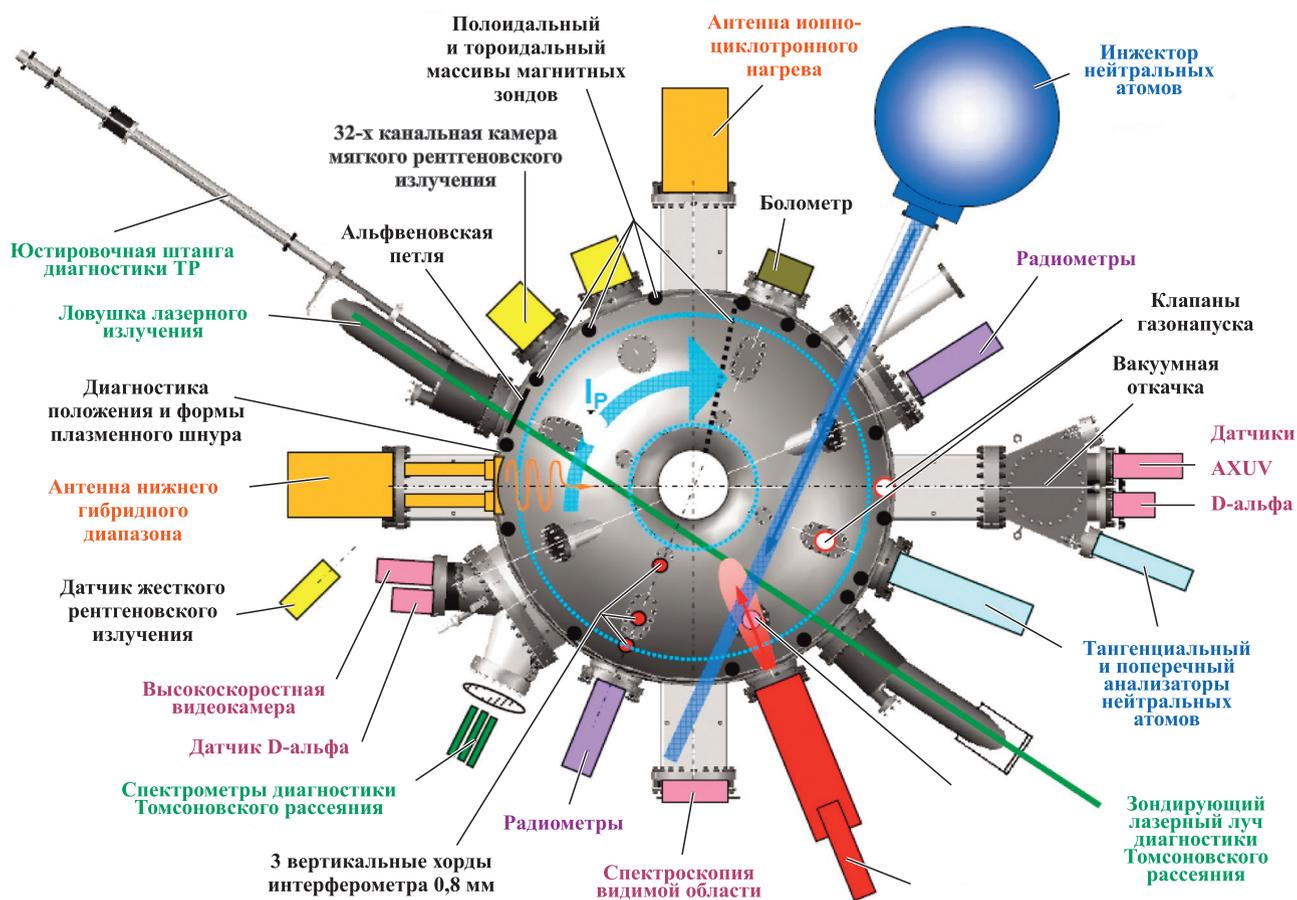


Рис. 10. Схема размещения основных систем и диагностик на токамаке Глобус-М: вид сверху; полоидальная магнитная система не показана



Вакуумная камера токамака Глобус-М объемом около $1,1 \text{ м}^3$ представляет собой цельносварную конструкцию из нержавеющей стали. В ней имеются 38 диагностических патрубков общей площадью $0,8 \text{ м}^2$, обеспечивающих хороший доступ к плазме для диагностики и источников дополнительного нагрева. Вакуумная камера сварена из внутреннего цилиндра с толщиной стенки 2 мм, двух полусфер с толщиной стенки 3 мм и толстого наружного кольца толщиной 14 мм. Полное сопротивление камеры 120 мкОм в тороидальном направлении. Около 50 % тока протекает по внутреннему цилиндру, 35 % по полусферам и только 15 % по внешнему кольцу. Такой малый ток по внешнему кольцу объясняется наличием патрубков. Фактически, ток протекает по двум кольцам высотой около 4 см. Конструкция патрубков позволяет вводить в плазму до 4 МВт мощности дополнительного нагрева (фундаментальные и высокие гармоники ионно-циклотронной частоты [85], инжекция пучка нейтральных атомов [86]). Основная часть обращенной к плазме поверхности, наиболее подверженной воздействию плазменных потоков, защищена плитками, изготовленными из специального типа графита РГ-Тi91. Детали конструкции токамака описаны также в работе [87].

7.2. Диагностические системы токамака Глобус-М

Диагностический комплекс токамака, используемый в экспериментах, состоит из большого числа мониторинговых систем диагностики, работающих постоянно. В их состав входят датчики токов и напряжений в обмотках магнитной системы токамака, набор петель и зондов магнитной диагностики, СВЧ-интерферометр, детекторы оптического (коллимированные и обзорные датчики светимости линий водорода и дейтерия, датчики излучения легких примесей, обзорные спектрометры) и рентгеновского (мягкого и жесткого) излучения, болометры, зонды Ленгмюра и др. [88, 89].

В зависимости от задач эксперимента могут подключаться сложные диагностические системы, требующие участия оператора или передающие большой объем дополнительной информации в базу данных установки, такие как система диагностики томсоновского рассеяния [90], система диагностики потоков атомов перезарядки [89], быстрая видеокамера оптического диапазона. Схема размещения основных систем диагностик и собственно систем токамака представлена на рис. 10 (см. третью страницу обложки).

На основе данных магнитной диагностики [91], таких как данные с двадцать одной петли, установленных на поверхности разрядной камеры токамака для измерения полоидального потока, с

помощью кода EFIT [56] осуществляется реконструкция магнитной конфигурации (off-line). Плотность плазмы измеряется в режиме мониторинга с помощью СВЧ-интерферометра, работающего на длине волны 0,8 мм и имеющего три вертикальные хорды, проходящие на расстоянии 24, 42 и 50 см от оси токамака. Аппаратура позволяет уверенно измерять линейную плотность в диапазоне до $0,6 \times 10^{20} \text{ м}^{-2}$, что соответствует средней плотности плазмы около $1,0 \times 10^{20} \text{ м}^{-3}$.

С помощью диагностики томсоновского рассеяния [90] профиль температуры и плотности электронов измеряется по десяти пространственным точкам вдоль малого радиуса с внутренней стороны плазменного шнура. Диагностика позволяет производить до 20 измерений за разряд в заранее заданных временных точках. Минимальный интервал между соседними измерениями не превышает 500 мкс. Ионная температура определяется по потокам атомов перезарядки с помощью анализатора АКОРД-12 [89], линия наблюдения которого направлена вдоль большого радиуса токамака. Анализатор позволяет одновременно измерять потоки атомов водорода и дейтерия по шести энергетическим каналам для каждого изотопа. Минимальное временное разрешение прибора составляет 1 мс. Линия наблюдения второго аналогичного анализатора ориентирована в тороидальном направлении.

Отметим ключевое отличие установки Глобус-М от других сферических токамаков, состоящее в том, что токамак Глобус-М характеризуется высоким значением средней по сечению плотности тока в плазменном шнуре. В различных режимах работы эта величина составляет $1,4\text{--}1,8 \text{ МА/м}^2$. Данное обстоятельство делает омический режим более эффективным, так как удельная мощность нагрева пропорциональна квадрату плотности тока. Высокая плотность тока, как и высокое значение отношения B_T/R , достигающее $1,8 \text{ Тл/м}$, позволяет получать разряды с высокой предельной средней плотностью плазмы около $1 \cdot 10^{20} \text{ м}^{-3}$ даже в режиме омического нагрева.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

На примере ряда действующих современных токамаков с вытянутым по вертикали поперечным сечением, а также сооружаемого термоядерного реактора-токамака ITER представлены различные аспекты современных токамаков как объектов автоматического управления. Поступившие данные от разработчиков проекта первой термоядерной электростанции DEMO показывают, что этот про-

ект вполне реализуемый и намечены определенные сроки его реализации.

Показанная картина действующих токамаков, экспериментального термоядерного реактора ITER и термоядерной электростанции DEMO определяет дорожную карту решения проблемы управляемого термоядерного синтеза в обозримые сроки.

Отличия токамаков заключаются в размещении обмотки тороидального поля внутри или вне обмоток полоидального поля, в наличии или отсутствии обмоток внутри вакуумной камеры для управления положением плазмы, являются ли обмотки токамаков сверхпроводящими или нет и др. Токamak DEMO предполагается создать со сверхпроводящими обмотками, но какую полоидальную систему принять к исполнению пока остается предметом исследования.

Рассмотренные вопросы диагностики плазмы токамаков и построения соответствующих исполнительных устройств показывают дополнительные сложности в разработке систем управления плазмой, для синтеза и анализа которых необходимы приведенные нелинейные и линейные модели плазмы.

В настоящее время основная часть неустойчивостей плазмы в токамаках подавляется. Наиболее опасное явление для будущих термоядерных реакторов представляют собой так называемые большие срывы [2, 69, 92], которые не должны возникать при эксплуатации реакторов-токамаков. Это явление изучается и ищутся пути, как не допустить большие срывы, которые сводятся к правильному заданию профилей плазменных параметров с помощью систем кинетического управления и их оптимального взаимодействия с системами магнитного управления плазмой.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Artsimovich L.A.* Tokamak devices // Nuclear Fusion. — 1972. — Vol. 12. — P. 215–252.
2. *Wesson J.* Tokamaks: 3rd ed. — Oxford: Clarendon Press, 2004. — 749 p.
3. *Днестровский Ю.Н., Костомаров Д.П.* Математическое моделирование плазмы: 2-е изд. — М.: Физматлит, 1993. — 336 с.
4. *Зайцев Ф.С.* Математическое моделирование эволюции тороидальной плазмы: 2-е изд. — М.: МАКС Пресс, 2011. — 640 с. [English edition: *Zaitsev F.S.* Mathematical modeling of toroidal plasma evolution. — М.: MAKS Press, 2014. — 688 p.]
5. *Самойленко Ю.И., Губарев В.Ф., Кривонос Ю.Г.* Управление быстропротекающими процессами в термоядерных установках. — Киев: Наукова думка, 1988. — 684 с.
6. *Ariola M., Pironti A.* Magnetic Control of Tokamak Plasmas. — Berlin: Springer, 2008. — 181 p.
7. *Митришкин Ю.В.* Управление плазмой в экспериментальных термоядерных установках: Адаптивные автоколеба-
- тельные и робастные системы управления. — М.: URSS-КРАСАНД, 2016. — 400 с.
8. *Katsuro-Hopkins O., Sabbagh S.A., Bialek J.M.* Analysis of resistive wall mode LQG control in NSTX with mode rotation // Proc. Joint 48th IEEE Conference on Decision and Control and 28th Chinese Control Conference, Shanghai, P.R. China, December 16–18, 2009. — P. 309–314.
9. *Xu C. and Schuster E.* Control of Ramp-Up Current Profile Dynamics in Tokamak Plasmas via the Minimal-Surface Theory // Ibid. — P. 1367–1372.
10. *Mitrishkin Y.V., Ivanov V.A.* Combined Nonlinear Tokamak Plasma Current Profile Control System Design with Input Constraints // Proc. IFAC World Congress, Milan, Italy. — 2011. — P. 3728–3733.
11. *Moreau D., Mazon D., Adachi Y., et al.* Identification of the Magneto-Thermal Plasma Response for Plasma State Control in Advanced Tokamaks // Proc. Joint 48th IEEE Conference on Decision and Control and 28th Chinese Control Conference, Shanghai, P.R. China, December 16–18, 2009. — P. 1379–1386.
12. *Felici F.* Real-time control of tokamak plasmas: from control of physics to physics-based control. PhD thesis no. 5203, École Polytechnique Fédérale de Lausanne (EPFL), CH-1015. — Lausanne, Switzerland. — October 2011. — 293 p.
13. *Shi W., Wehner W., Barton J., et al.* A Two-time-scale Model-based Combined Magnetic and Kinetic Control System for Advanced Tokamak Scenarios on DIII-D // Proc. 51st IEEE Conference on Decision and Control, December 10–13, Maui, Hawaii, USA. — 2012. — P. 4347–4352.
14. *Pironti A. and Walker M.* Control of Tokamak Plasmas. Introduction to the special section // IEEE Control Systems Magazine. — 2005. — Vol. 25, N 5. — P. 24–29. *Pironti A. and Walker M.* Fusion, tokamaks, and Plasma Control. An introduction and tutorial // IEEE Control Systems Magazine. — 2005. — Vol. 25, N 5. — P. 30–43.
15. *Balshaw N.* All-the-World's Tokamaks. — URL: www.tokamak.info (дата обращения: 28.09.2017).
16. *Моффат Г.* Возбуждение магнитного поля в проводящей среде. — М.: Мир, 1980. — 342 с.
17. URL: <https://www.iter.org/> (дата обращения: 28.09.2017).
18. *Federici G., Biel W., Gilbert M.R., et al.* European DEMO design strategy and consequences for materials // Nuclear Fusion. — 2017. — Vol. 57, N 9. — URL: <http://iopscience.iop.org/article/10.1088/1741-4326/57/9/092002/meta> (дата обращения: 28.09.2017).
19. *Каулинг Т.* Магнитная гидродинамика. — М.: Изд-во иностр. лит., 1959.
20. *Walker M.L., Humphreys D.A., Leuer J.A., et al.* Implementation of model-based multivariable control on DIII-D. GA-A23468, 2000. — URL: <https://fusion.gat.com/pubs-ext/SOFT00/A23468.pdf> (дата обращения: 28.09.2017).
21. *Shi W., Barton J., Alsarheed M. and Schuster E.* Multivariable Multi-Model-based Magnetic Control System for the Current Ramp-up Phase in the National Spherical Torus Experiment (NSTX) // Proc. of 50th IEEE Conference on Decision and Control and European Control Conference (CDC-ECC), Orlando, FL, USA, December 12–15, 2011. — P. 26–37.
22. *Lister J.B., Sharma A., Limebeer D.J.N., et al.* Plasma equilibrium response modelling and validation on JT-60U // Nuclear Fusion. — 2002. — Vol. 42, N 6. — P. 708–724.
23. *Hofmann F., Lister J.B., Anton M., et al.* Creation and Control of Variably Shaped Plasmas in TCV. Plasma Physics and Controlled Fusion, 36 (1994) B277-B287. — URL: https://info-science.epfl.ch/record/119423/files/0741-3335_31_4_003.pdf (дата обращения: 28.09.2017).
24. *Sartori F., Tommasi G., Piccolo F.* The Joint European Torus. Plasma Position and Shape Control in the World's Largest Tokamak // IEEE Control Syst. Magazine. — 2006. — Vol. 26, N 2. — P. 64–78.



25. *Mertens V., Raupp G., and Treutterer W.* Chapter 3: Plasma Control in ASDEX Upgrade // Fusion Science and Technology. — 2003. — Vol. 44, iss. 3. — P. 593–604.
26. *Yuan Q.P., Xiao B.J., Luo Z.P., et al.* Plasma current, position and shape feedback control on EAST // Nuclear Fusion. — 2013. — Vol. 53, N 4.
27. *Lee G.S., Kwon M., Doh C.J., et al.* Design and construction of the KSTAR tokamak // Nuclear Fusion. — 2001. — Vol. 41, N 10. — P. 1515–1523.
28. *Humphreys D.A., Casper N.A., Eidietis N., et al.* Experimental vertical stability studies for ITER performance and design guidance // Nuclear Fusion. — 2009. — Vol. 49, N 10.
29. *Gribov Y., Kavin A., Lukash V., et al.* Plasma vertical stabilisation in ITER // Nuclear Fusion. — 2015. — Vol. 55, N 7. doi: 10.1088/0029-5515/55/7/073021.
30. *Kikuchi M.* JA-EU Satellite Tokamak Working Group and JT-60SA Design Team. Overview of Modification of JT-60U for the Satellite Tokamak Program as one of the Broader Approach Projects and National Program // Proc. of 21st IAEA Fusion Energy Conference, Chengdu, China, 16–21 Oct. 2006.
31. *Nerem A.* DIII-D power supply, design, and development, GA-A-21957, General Atomics, 1995. — URL: http://www.iaea.org/inis/collection/NCLCollectionStore/_Public/26/061/26061882.pdf (дата обращения: 29.09.2017).
32. *Salewski M., Geiger B., Nielsen S.K., et al.* Combination of fast-ion diagnostics in velocity-space tomographies // Nuclear Fusion. — 2013. — Vol. 53, N 6.
33. *Stroth U., Adamek J., Aho-Mantila L., et al.* Overview of ASDEX Upgrade results // Nuclear Fusion. — 2013. — Vol. 53, N 10. 104003.
34. *Zhang X., Zhao Y., Mao Y., et al.* Current status of ICRF heating experiments on EAST // Plasma Science and Technology. — 2011. — Vol. 13, N 2. — P. 172–174.
35. *Beghi A. and Cenedese A.* Advances in Real-Time Plasma Boundary Reconstruction // IEEE Control Systems Magazine. — October 2005. — Vol. 25, iss. 5. — P. 44–64.
36. *Argomedo F.B., Witrant E., Prieur C., et al.* Lyapunov-based distributed control of the safety-factor profile in a tokamak plasma // Nuclear Fusion. — 2013. — Vol. 53, N 3. 033005.
37. *Khayrutdinov R.R., Lukash V.E.* Studies of plasma equilibrium and transport in a Tokamak fusion device with the inverse-variable technique // Journal of Computational Physics. — 1993. — Vol. 109, N 2. — P. 193–201.
38. *Jardin S.C., Pomphrey N., and Delucia J.* Dynamic modeling of transport and positional control of tokamaks // Journal of Computational Physics. — 1986. — Vol. 66, iss. 2. — P. 481–507.
39. *Genacchi G., Taroni A.* JETTO: a free boundary plasma transport code (basic version) / Rapporto ENEA RT/TIB 5. — 1988.
40. *Crottinger J.A., et al.* Lawrence Livermore National Report UCRL-ID-126284 1997 available through NTIS#PB2005-102154. — 1997.
41. *Rognlien T.D., Milovich J.L., Rensink M.E., Porter G.D.* A fully implicit, time dependent 2-D fluid code for modeling tokamak edge plasmas // Journal of Nuclear Materials. — 1992. — Vol. 196–198. — P. 347–351.
42. *Ivanov A.A., Galkin S.A., Drozdov V.V., et al.* Numerical simulation of free boundary tokamak plasma equilibrium evolution with flux conservation and self-consistent plasma surface current / 40th APS DPP Meeting. New Orleans, USA, November 16–20, 1998 // Bulletin of the American Physical Society. — 1998. — Vol. 43. — P. 1749.
43. *Radford G.J., Chankin A.V., Corrigan G., et al.* The Particle and Heat Drift Fluxes and their Implementation into the EDGE2D Transport Code // Contributions to Plasma Physics. — 1996. — Vol. 36, iss. 2–3. — P. 187–191.
44. *Barabaschi P.* The MAXFEA code, ITER EDA Plasma Control 983 Technical Meeting, Naka, Japan, 1993.
45. *Reiter D.* Progress in two-dimensional plasma edge modelling // Journal of Nuclear Materials. — 1992. — Vol. 196–198. — P. 80–89.
46. *Takizuka T.* Development of the PARASOL Code and Full Particle Simulation of Tokamak Plasma with an Open-Field SOL-Divertor Region Using PARASOL // Plasma Science and Technology. — 2011. — Vol. 13, N 3. — P. 316–325.
47. *Pereverzev G.V. and Yushmanov P.N.* ASTRA Automated System for Transport Analysis in a Tokamak. — Tech. rep. 5/98. IPP Report, February 2002. — URL: http://w3.pppl.gov/~hammett/work/2009/Astra_ocr.pdf (дата обращения: 21.12.2017).
48. *Artaud J.F., Basiuk V., Imbeaux F., et al.* The CRONOS suite of codes for integrated tokamak modelling // Nuclear Fusion. — 2010. — Vol. 50, N 4. 043001.
49. *Hawryluk R.J.* An Empirical Approach to Tokamak Transport // Physics of Plasmas Close to Thermonuclear Conditions. — 1981. — Vol. 1. — P. 19–46. doi.org/10.1016/B978-1-4832-8385-2.50009-1.
50. *Budny R.V., Andre R., Bateman G., et al.* Predictions of H-mode performance in ITER // Nuclear Fusion. — 2008. — Vol. 48, N 7. 075005.
51. *Pfeiffer W.W., Davidson R.H., Miller R.L., Waltz R.E.* ONETWO: A Computer Code for Modeling Plasma Transport in Tokamaks / Technical Report GA-A16178, General Atomic Company, San Diego, CA (USA), 1980.
52. *Singer C.E., Post D.E., Mikkelsen D.R., et al.* Baldur: A one-dimensional plasma transport code // Computer Physics Communications. — 1988. — Vol. 49, iss. 2. — P. 275–398. doi: 10.1016/0010-4655(88)90012-4.
53. *Kim S.H., Artaud J.F., Basiuk V., et al.* Full tokamak discharge simulation of ITER by combining DINA-CH and CRONOS // Plasma Physics and Controlled Fusion. — 2009. — Vol. 51, N 10. 105007. doi:10.1088/0741-3335/51/10/105007.
54. *Докука В.Н., Кадурич А.В., Митришкин Ю.В., Хайрутдинов Р.Р.* Синтез и моделирование системы магнитного управления плазмой в токамаке-реакторе // Автоматика и телемеханика. — 2007. — № 8. — 126–145.
55. *Walker M., Humphreys D.* Valid coordinate systems for linearized plasma shape response models in tokamaks // Fusion Science and Technology. — 2006. — Vol. 50, N 4. — P. 473–489.
56. *Lao L., John H., Stambaugh R., et al.* Reconstruction of current profile parameters and plasma shapes in tokamaks // Nuclear Fusion. — 1985. — Vol. 25, N 11. — P. 1611–1622.
57. *Mc Carthy P.J.* Analytical solutions to the Grad–Shafranov equation for tokamak equilibrium with dissimilar source functions // Physics of Plasmas. — 1999. — Vol. 6, iss. 9. doi.org/10.1063/1.873630.
58. *Корнев П.С., Митришкин Ю.В., Патров М.И.* Реконструкция равновесного распределения параметров плазмы токамака по внешним магнитным измерениям и построение линейных плазменных моделей // Мехатроника, автоматизация и управление. — 2016. — Т. 17, № 4. — С. 254–265.
59. *Forsythe G., Malcolm M., Moler C.* Computer methods for mathematical computations. — USA, NJ: Englewood Cliffs, 1977.
60. *Mitriushkin Y.V., Korenev P.S., Prohorov A.A., Patrov P.I.* Robust H_∞ switching MIMO control for a plasma time-varying parameter model with a variable structure in a tokamak // Proc. of IFAC 2017 World Congress, Toulouse, France. — P. 11883–11888.
61. *Sartori F., Cenedese A., and Milani F.* JET real-time object-oriented code for plasma boundary reconstruction // Fusion Engineering and Design. — 2003. — Vol. 66–68. — P. 735–739.
62. *Braams B.J., Gilje W. and Lackner K., et al.* Fast determination of plasma parameters through function parametrization // Nuclear Fusion. — 1986. — Vol. 26, N 6. — P. 699–708.
63. *Zaitsev F.S., Kostomarov D.P., Suchkov T.P., et al. and JET-EFDA Contributors.* Analyses of substantially different plasma

- current densities and safety factors reconstructed from magnetic diagnostics data // *Nuclear Fusion*. — 2011. — Vol. 51, ref. 103044. — P. 1—11.
64. *Zaitsev F.S., Matejck S., Murari A., Suchkov E.P. and JET-EFDA Contributors*. A new method to identify the equilibria compatible with the measurements using the technique of the e-nets // *Fusion Science and Technology*. — 2012. — Vol. 62, N 2. — P. 366—373.
65. *Костомаров Д.П., Зайцев Ф.С., Сучков Е.П., Богданов П.Б.* Решение обратных задач методом эпсилон-сетей на высокопроизводительных ЭВМ // Доклады академии наук. — 2014. — Т. 455, N 5. — С. 516—520.
66. *Coelho R., Matejck S., McCarthy P., Suchkov E.P., Zaitsev F.S., and EU-IM Team, ASDEX Upgrade Team*. Evaluation of epsilon-net calculated equilibrium reconstruction error bars in the European integrated modeling platform // *Fusion Science and Technology*. — 2016. — Vol. 69, N 3. — P. 611—619.
67. *Зайцев Ф.С., Шишкин А.Г., Лукьяница А.А.* и др. Базовые компоненты аппаратно-программного комплекса моделирования и управления тороидальной плазмой методом эпсилон-сетей на гетерогенных мини-суперкомпьютерах // Тр. НИИСИ РАН. — 2016. — Т. 6, № 1. — С. 36—49.
68. *Колмогоров А.Н., Фомин С.В.* Элементы теории функций и функционального анализа. — М.: Наука, 1976. — 543 с.
69. *Zakharov L.E., Galkin S.A., Gerasimov S.N., and JET-EFDA contributor*. Understanding disruptions in tokamaks // *Physics of Plasmas*. — 2012. — Vol. 19. 055703. doi.org/10.1063/1.4705694.
70. *Freidberg J.P.* *Ideal MHD*. — Cambridge: Cambridge University Press, 2014.
71. *Boyd T.J.M., Sanderson J.J.* *The physics of plasmas*. — Cambridge: Cambridge University Press, 2003.
72. *Hender T.C., Wesley J.C., Bialek J., et al.* Chapter 3: MHD stability, operational limits and disruptions // *Nuclear Fusion*. — 2007. — Vol. 47. — S128—S202.
73. *ITER Technical Basis document G A0 FDR 1 01-07-13 R1.0*. — URL: <http://www-pub.iaea.org/MTCD/publications/PDF/ITER-EDA-DS-24.pdf> (дата обращения: 22.12.2017).
74. *Humphreys D.A., Ferron J.R., Hyatt A.W., et al.* DIII-D Integrated Plasma Control Solutions for ITER and Next-Generation Tokamaks // *Proc. of 6th IAEA Technical Meeting on Control, Data Acquisition, and Remote Participation for Fusion Research*, Inuyama, Japan, 2007. — P. 193—197.
75. *Huang H, Xu R., and Gao G* Power supply of vertical stability coil in EAST // *AASRI Procedia*. — 2012. — Vol. 3. — P. 636—641.
76. *Митришкин Ю.В., Карцев Н.М., Зенков С.М.* Стабилизация неустойчивого вертикального положения плазмы в токамаке T-15. Часть I // *Автоматика и телемеханика*. — 2014. — № 2. — С. 129—145.
77. *Митришкин Ю.В., Карцев Н.М., Зенков С.М.* Стабилизация неустойчивого вертикального положения плазмы в токамаке T-15. Часть II // *Автоматика и телемеханика*. — 2014. — № 9. — С. 31—44.
78. *Kuznetsov E.A., Yagnov V.A., Mitrishkin Y.V., Shcherbitsky V.N.* Current Inverter as Actuator for Plasma Position Control Systems in Tokamaks // *Proc. of the 11th IEEE Intern. Conf. on Application of Information and Communication Technologies (AICT2017)*, V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of RAS, September 20—22, 2017, Moscow, Russia. — P. 485—489.
79. *Mitrishkin Y.V., Kartsev N.M.* Hierarchical Plasma Shape, Position, and Current Control System for ITER // *Proc. of the 50th IEEE Conf. on Decision and Control, Orlando, FL, USA, 2011*. — P. 2620—2625.
80. *Mitrishkin Y.V., Korenev P.S., Prohorov A.A., Patrov M.I.* Tokamak Plasma Magnetic Control System Simulation with Reconstruction Code in Feedback Based on Experimental Data // *Proc. of 2017 IEEE 56th Annual Conference on Decision and Control, Melbourne, Australia, December 12—15, 2017*. — P. 2360—2365.
81. *Gusev V.K., E.A. Azizov E.A., A.B. Alekseev A.B., et al.* Globus-M results as the basis for a compact spherical tokamak with enhanced parameters Globus-M2 // *Nuclear Fusion*. — 2013. — Vol. 53, N 9.
82. *Mitrishkin Y.V., Pavlova E.A., Kuznetsov E.A., Gaydamaka K.I.* Continuous, saturation, and discontinuous tokamak plasma vertical position control systems // *Fusion Engineering and Design*. — 2016. — Vol. 108. — P. 35—47.
83. *Кузнецов Е.А., Митришкин Ю.В.* Автоколебательная система стабилизации неустойчивого вертикального положения плазмы сферического токамака Глобус-М. — М.: ИПУ РАН, 2005.
84. *Гусев В.К., Голант В.Е., Гусаков Е.З.* и др. Сферический токамак Глобус-М // *Журнал технической физики*. — 1999. — Т. 69, вып. 9. — С. 58—62.
85. *Дьяченко В.В., Ирзак М.А., Трегубова Е.Н.* и др. Постановка эксперимента по ВЧ нагреву плазмы на сферическом токамаке Глобус-М // Там же. — 2003. — Т. 73, вып. 8. — С. 126—131.
86. *Гусев В.К., Деч А.В., Есупов Л.А.* и др. Комплекс нейтральной инжекции сферического токамака Глобус-М // Там же. — 2007. — Т. 77, вып. 9. — С. 28—43.
87. *Sakharov N.V.* Spherical tokamak Globus-M construction and operation // *Plasma Devices and Operations*. — 2001. — Vol. 9, N 1—2. — P. 25—38.
88. *Bulanin V.V., Gusev V.K., Chugunov I.N., et al.* The Globus-M Diagnostics Design // *Plasma Devices and Operations*. — 2001. — Vol. 9, N 1—2. — P. 129—142.
89. *Gusev V.K., Bakharev N.N., Belyakov V.A., et al.* Review of Globus-M spherical tokamak results // *Nuclear Fusion*. — 2015. — Vol. 55, N 10.
90. *Гусев В.К., Толстяков С.Ю., Варфоломеев В.И.* и др. Исследование электронного компонента плазмы на сферическом токамаке Глобус-М в условиях предельных плотностей с помощью диагностики томсоновского рассеяния // *Вопросы атомной науки и техники*. — 2007, вып. 1. — С. 39—56.
91. *Гусев В.К., Бендер С.Е., Деч А.В.* и др. Методы реконструкции равновесия плазмы на сферическом токамаке Глобус-М // *Журнал технической физики*. — 2006. — Т. 76, вып. 8. — С. 25—33.
92. *Mirnov S.V.V.D.* Shafranov and Tokamaks // *Journal of Plasma Physics*. — 2016. — Vol. 82. 515820102. doi: 10.1017/S0022377816000027.

Статья представлена к публикации членом редколлегии Е.Я. Рубиновичем.

Митришкин Юрий Владимирович — д-р техн. наук, профессор, Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова; гл. науч. сотрудник, Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, г. Москва, ✉ uvm@mail.ru,

Корнев Павел Сергеевич — аспирант, Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, ✉ pkorenev92@mail.ru,

Прохоров Артем Андреевич — аспирант, Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, ✉ artem@physics.msu.ru,

Карцев Николай Михайлович — канд. техн. наук, ст. науч. сотрудник, Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, г. Москва, ✉ n.kartsev@yandex.ru,

Патров Михаил Иванович — канд. физ.-мат. наук, науч. сотрудник, Физико-технический институт им. А.Ф. Иоффе РАН, г. Санкт-Петербург, ✉ michael.patrov@mail.ioffe.ru.



АППРОКСИМАЦИЯ ФУНКЦИЙ С ПОМОЩЬЮ НЕЙРОННЫХ СЕТЕЙ И НЕЧЕТКИХ СИСТЕМ

А.С. Шведов

Дан обзор некоторых результатов, относящихся к аппроксимации функций одного и нескольких действительных переменных. Приведен ряд теорем одного из классических направлений — аппроксимации алгебраическими многочленами. Отмечено, что первые результаты по аппроксимации функций с помощью нейронных сетей и нечетких систем появились как ответ на необходимый для практических задач вопрос о возможности приближенного представления непрерывных функций с помощью таких агрегатов. Затем эти научные направления стали развиваться теми же путями, что и теория приближения функций алгебраическими многочленами. Представлены некоторые результаты, относящиеся к аппроксимации функций нейронными сетями и нечеткими системами.

Ключевые слова: аппроксимация функций, алгебраические многочлены, нейронные сети, нечеткие системы.

ВВЕДЕНИЕ

Нейронные сети и нечеткие системы применяются для решения многих прикладных задач (см., например, книги [1–3]), в том числе и задач управления. Теоремы о возможности аппроксимации непрерывных функций данными агрегатами стали важным шагом на пути превращения и нейронных сетей, и нечетких систем из эвристических методов в математически обоснованные методы.

Основополагающие результаты по теории приближения функций получены в девятнадцатом веке К. Вейерштрассом и П.Л. Чебышевым. Их исследования были продолжены многими авторами. В двадцатом веке большой вклад в теорию приближений внесли академики А.Н. Колмогоров и С.Н. Бернштейн. При создании этой теории в качестве аппроксимирующих агрегатов использовались алгебраические многочлены (для непериодических функций) и тригонометрические полиномы (для периодических функций). Результаты из этих двух разделов теории приближений во многом похожи. Затем стали применяться и другие аппроксимирующие агрегаты — сплайны, нейронные сети, нечеткие системы. Многие интересные результаты связаны с теорией поперечников функциональных классов.

Первые теоремы о возможности аппроксимации непрерывных функций однонаправленными нейронными сетями с одним скрытым слоем получены в работах¹ [4–6]. Первые теоремы о возможности аппроксимации функций нечеткими системами доказаны в работах [7–9]. Исследования и по аппроксимации функций нейронными сетями, и по аппроксимации функций нечеткими системами были продолжены многими авторами.

Существуют и нейро-нечеткие модели, но они в настоящем обзоре не рассматриваются.

В § 1 данной работы приводятся некоторые результаты, относящиеся к приближению функций одного и нескольких действительных переменных алгебраическими многочленами, он носит вспомогательный характер. Его основное назначение — показать те постановки задач, которые затем встречаются в § 2 и 3. Обзор современного состояния теории приближения функций алгебраическими многочленами в настоящей работе не дается. В § 2 дается обзор результатов по приближению функций нейронными сетями, в § 3 — нечеткими системами.

¹ В книге [2] для термина *feedforward neural network* предлагается перевод *нейронная сеть прямого распространения*. Однако более удачным представляется перевод *однонаправленная нейронная сеть*, употребляемый в книге [3].

1. АППРОКСИМАЦИЯ ФУНКЦИЙ АЛГЕБРАИЧЕСКИМИ МНОГОЧЛЕНАМИ

Пусть $C[0, 1]$ — пространство непрерывных функций $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$. Норма функции $f \in C[0, 1]$ определяется соотношением

$$\|f\|_{\infty} = \sup_{x \in [0, 1]} |f(x)|.$$

Через Π_n обозначим пространство алгебраических многочленов степени не выше n , т. е. пространство функций вида

$$P_n(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n,$$

где $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n$ — действительные числа. Наилучшим приближением функции $f \in C[0, 1]$ алгебраическими многочленами степени не выше n называется величина

$$E_n(f) = \inf_{P_n \in \Pi_n} \|f - P_n\|_{\infty}.$$

Следующая теорема принадлежит Вейерштрассу.

Теорема 1. Для любой функции $f \in C[0, 1]$

$$E_n(f) \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty. \blacklozenge$$

Доказательство теоремы Вейерштрасса можно найти, например, в книгах [10, 11].

Модуль непрерывности функции $g \in C[0, 1]$ определяется следующим образом. При $\delta > 0$

$$\omega(g, \delta) = \sup_{\substack{x, y \in [0, 1] \\ |x - y| \leq \delta}} |g(x) - g(y)|.$$

В терминах модулей непрерывности функции f и ее производных (если они существуют) можно дать ответ на вопрос, насколько быстро последовательность $E_n(f)$ стремится к нулю в зависимости от гладкости функции f .

Следующие две теоремы принадлежат Джексону.

Теорема 2. Если функция $f \in C[0, 1]$, то при любом натуральном n

$$E_n(f) \leq C_0 \omega\left(f, \frac{1}{n}\right),$$

где C_0 — некоторая абсолютная константа.

Теорема 3. Если функция $f \in C[0, 1]$ имеет r непрерывных производных на отрезке $[0, 1]$, то при любом $n > r$

$$E_n(f) \leq \frac{C_r}{n^r} \omega\left(f^{(r)}, \frac{1}{n-r}\right),$$

где константа C_r зависит только от r . \blacklozenge

Доказательства теорем 2 и 3 можно найти, например, в книге [10]. Формально теорема 1 является следствием теоремы 2, но получена теорема 1 значительно раньше.

Теоремы 2 и 3 относятся к прямым теоремам теории приближений. Существуют и обратные теоремы теории приближений: из достаточно хорошей аппроксимации функции теми или иными агрегатами вытекает соответствующая гладкость этой функции. Про обратные теоремы для приближения алгебраическими многочленами см., например, книгу [11].

Однако теорема 3 не дает ответа на следующий вопрос. Пусть функция $f \in C[0, 1]$ и имеет r непрерывных производных на отрезке $[0, 1]$. Можно ли найти такой алгебраический многочлен P_n , который приближает функцию f , а производные этого многочлена $P'_n, \dots, P_n^{(r)}$ приближают производные $f', \dots, f^{(r)}$ соответственно? Такие задачи называются задачами о совместном приближении алгебраическими многочленами функции и ее производных.

Следующие многочлены были введены С.Н. Бернштейном. Для функции $f \in C[0, 1]$ алгебраический многочлен

$$B_n(f; x) = \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) C_n^k x^k (1-x)^{n-k}$$

называется многочленом Бернштейна. Доказательство того, что многочлены Бернштейна дают решение задачи о совместном приближении функции и ее производных, можно найти, например, в книге [12]. Однако скорость приближения функции многочленами Бернштейна значительно более медленная, чем та, которая дается теоремой 2 (см., например, работу [13]).

Многочлены Бернштейна дают пример линейного метода приближения. Оператор $L_n: C[0, 1] \rightarrow C[0, 1]$ называется линейным, если для любых функций $f, g \in C[0, 1]$ и для любых $a, b \in \mathbb{R}$

$$L_n(af + bg) = aL_n(f) + bL_n(g).$$

Линейный оператор L_n называется положительным, если из условия $f(x) \geq 0$ при $0 \leq x \leq 1$ вытекает, что $L_n(f; x) \geq 0$ при $0 \leq x \leq 1$.

Следующая теорема принадлежит П.П. Коровкину [14].

Теорема 4. Пусть $\{L_n\}$ — последовательность линейных положительных операторов из $C[0, 1]$ в $C[0, 1]$. Рассмотрим функции $g_k(x) = x^k$. Тогда если

$$\|g_k - L_n(g_k)\|_{\infty} \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty,$$



при $k = 0, 1, 2$, то для любой функции $f \in C[0, 1]$

$$\|f - L_n(f)\|_\infty \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty. \blacklozenge$$

Существуют многочисленные обобщения теоремы Коровкина (см., например, работы [15, 16]).

Задача приближения функций алгебраическими многочленами изучена не только для равномерной метрики, но и для интегральных метрик.

Пространство $L_p[0, 1]$, $1 \leq p < \infty$, состоит из измеримых по Лебегу функций $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, для которых

$$\int_0^1 |f(x)|^p dx < \infty.$$

Функции, различающиеся лишь на множестве меры ноль, отождествляются. Норма функции $f \in L^p[0, 1]$ определяется следующим образом:

$$\|f\|_p = \left(\int_0^1 |f(x)|^p dx \right)^{1/p}.$$

Для наилучшего приближения функций $f \in L^p[0, 1]$ алгебраическими многочленами в метрике L^p также имеются теоремы типа Джексона (см., например, работу [17]).

Значительная часть результатов о приближении функций одного действительного переменного в той или иной степени обобщена для функций нескольких действительных переменных (см., например, книгу [18]).

Рассмотрим компактное множество $K \subseteq \mathbb{R}^d$ (т. е. множество K является ограниченным и замкнутым). Пусть $C(K)$ — пространство непрерывных функций $f: K \rightarrow \mathbb{R}$ с равномерной нормой

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in K} |f(x)|.$$

Пусть M — линейное подпространство пространства $C(K)$, и выполняются следующие три условия.

1. Подпространство M является алгеброй, т. е. из условия $f \in M, g \in M$ следует, что и произведения $fg \in M$.

2. Для любых несовпадающих точек $x, y \in K$ найдется функция $f \in M$ такая, что $f(x) \neq f(y)$.

3. Для любой точки $x \in K$ найдется функция $f \in M$ такая, что $f(x) \neq 0$.

Следующая теорема принадлежит Стоуну.

Теорема 5. *Подпространство M является плотным в пространстве $C(K)$ относительно равномерной метрики. \blacklozenge*

Доказательство теоремы Стоуна можно найти, например, в книге [11].

Отметим, что пространство всех алгебраических многочленов относительно переменных x_1, \dots, x_d удовлетворяет условиям 1–3. Поэтому верен многомерный аналог теоремы 1: любую функцию из пространства $C(K)$ можно сколь угодно точно приблизить алгебраическими многочленами в равномерной метрике.

Один из вариантов теоремы Джексона для приближения функций нескольких действительных переменных алгебраическими многочленами дается в работе [19].

Многомерные многочлены Бернштейна имеют вид

$$\begin{aligned} B_n(f; x_1, \dots, x_d) &= \\ &= \sum_{k_1, \dots, k_d=0}^n f\left(\frac{k_1}{n}, \frac{k_2}{n}, \dots, \frac{k_d}{n}\right) C_n^{k_1} C_n^{k_2} \dots C_n^{k_d} \times \\ &\times x_1^{k_1} (1-x_1)^{n-k_1} x_2^{k_2} (1-x_2)^{n-k_2} \dots x_d^{k_d} (1-x_d)^{n-k_d}. \end{aligned}$$

Результаты о совместном приближении функции нескольких действительных переменных и ее частных производных многомерными многочленами Бернштейна устанавливаются в работе [20].

По направлениям, обозначенным в данном параграфе, развиваются и теория приближения нейронными сетями, и теория приближения нечеткими системами. Преимущества этих подходов заключаются в большей однородности аппроксимируемых агрегатов, чем та, которая есть у одночленов $x_1^{k_1}, \dots, x_d^{k_d}$ при различных k_1, \dots, k_d , а также в меньшей зависимости от конкретной функциональной формы.

Отметим, что в теории приближения алгебраическими многочленами задаче численного нахождения коэффициентов аппроксимирующего многочлена уделяется относительно небольшое внимание. Наиболее известен алгоритм Ремеза (см., например, книгу [21]). Интерес к этим вопросам оказывается значительно большим, когда в качестве аппроксимируемых агрегатов применяются нейронные сети или нечеткие системы.

2. АППРОКСИМАЦИЯ ФУНКЦИЙ НЕЙРОННЫМИ СЕТЯМИ

Рассмотрим однонаправленную нейронную сеть типа MISO (multiple input single output) с одним скрытым слоем, состоящим из n нейронов. Входом является $x = (x_1, \dots, x_d)$, выходом является

$$f_n(x) = \sum_{j=1}^n \beta_j \varphi(w_j x + \theta_j). \quad (1)$$

Здесь $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ — функция активации; $w_j \in \mathbb{R}^d$, $\theta_j \in \mathbb{R}$ — внутренние параметры для j -го нейрона; $\beta_j \in \mathbb{R}$; $w_j x$ — скалярное произведение векторов w_j и x .

В качестве функций активации часто используются ступенчатая функции $\varphi(t) = 0$ при $t < 0$, $\varphi(t) = 1$ при $t \geq 0$; функция $\varphi(t) = \frac{1}{1 + e^{-t}}$; гиперболический тангенс $\varphi(t) = \frac{e^t - e^{-t}}{e^t + e^{-t}}$.

Функция φ называется сигмоидальной, если $\varphi(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow -\infty$, $\varphi(t) \rightarrow 1$ при $t \rightarrow \infty$. Первоначально к этим двум условиям добавлялось условие монотонного неубывания функции φ ; тогда график этой функции напоминает букву S , откуда и происходит название «сигмоидальная». Однако во многих теоретических результатах условие, что функция φ монотонная, оказывается лишним.

Следующая теорема принадлежит авторам работ [4–6].

Теорема 6. Пусть сигмоидальная функция φ непрерывна и ограничена на \mathbb{R} . Тогда множество сумм вида (1) плотно в пространстве $C([0, 1]^d)$. Другими словами, для любой функции $f \in C([0, 1]^d)$ и для любого $\varepsilon > 0$ при некотором натуральном n существует функция f_n вида (1) такая, что

$$|f(x) - f_n(x)| < \varepsilon$$

при всех $x \in [0, 1]^d$. ♦

Обобщения теоремы 6 для различных классов функций активации даются в ряде работ (см., например, работу [22]). Но очевидно, что результат, аналогичный теореме 6, не может быть верен, если φ — алгебраический многочлен.

Может быть рассмотрена однонаправленная нейронная сеть с одним скрытым слоем, для которой

$$f_n(x) = \sum_{j=1}^n \beta_j \Phi\left(\frac{x - z_j}{\sigma_j}\right). \quad (2)$$

Функция активации $\Phi: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$; $z_j \in \mathbb{R}^d$, $\sigma_j > 0$, $\beta_j \in \mathbb{R}$. Если имеет место соотношение

$$\Phi(z) = g(\|z\|), \quad z \in \mathbb{R}^d,$$

где $g: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$, $\|\cdot\|$ — евклидова норма в \mathbb{R}^d , то нейронную сеть называют сетью с радиальными базисными функциями.

Следующая теорема доказана в работе [23].

Теорема 7. Пусть функция Φ является интегрируемой, ограниченной, почти всюду непрерывной на \mathbb{R}^d и

$$\int_{\mathbb{R}^d} \Phi(x) dx \neq 0.$$

Тогда при любом $p \in [1, \infty)$ семейство функций вида (2), где n может быть произвольным натуральным числом, плотно в $L^p(\mathbb{R}^d)$. ♦

Теорема 7 остается верной (см. [23]) и если вместо семейства функций (2) рассмотреть более узкое семейство, для которого $\sigma_1 = \sigma_2 = \dots = \sigma_n$. Это замечание существенно, поскольку при обучении нейронной сети расчет внутренних параметров оказывается более трудной задачей, чем расчет весов $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$.

В работах [24, 25] вопрос об уменьшении числа внутренних параметров рассматривается для сигмоидальной функции активации. Доказывается теорема того же вида, что и теорема 6, но при этом внутренние веса не зависят от аппроксимируемой функции.

Разумеется, представляет интерес вопрос, как зависит точность приближения функции от числа нейронов и от свойств самой функции (сравните теоремы 2 и 3). Такие задачи рассматриваются, например, в работе [26].

Установлено, что для некоторых задач аппроксимации разрывных функций нескольких переменных в метриках L^p , $1 \leq p < \infty$, нейронные сети с двумя скрытыми слоями могут обладать лучшими аппроксимационными свойствами, чем нейронные сети с одним скрытым слоем [27].

В работе [28] рассматривается понятие почти равномерной сходимости для разрывных функций, определенных на отрезке. Доказывается теорема типа Вейерштрасса для нейронных сетей вида (1).

В работе [29] рассматривается задача интерполяции нейронными сетями вида (2) с радиальными базисными функциями. Доказывается существование решения у этой задачи.

Аппроксимация периодических функций d переменных нейронными сетями вида (1) изучается в работе [30], а также в ряде других работ.

Оказывается, что вейвлет нейронные сети обладают некоторыми преимуществами с точки зрения аппроксимации функций (см., например, работу [31]).

В работе [32] проводится сравнение аппроксимации функций нейронными сетями и аппроксимации функций алгебраическими многочленами.

Во многих публикациях изучается совместное приближение функции и ее производных нейрон-



ными сетями. Некоторый обзор этого направления дается в работе [33].

Упомянем также обзоры [34, 35] по аппроксимации функций с помощью нейронных сетей.

Существует большое число работ практической направленности и работ, в которых рассматриваются различные подходы к обучению нейронных сетей. Под обучением нейронной сети понимается нахождение параметров в формулах (1) или (2). В работе [36] сравнивается аппроксимация с помощью нейронных сетей с другими применяемыми на практике методами приближения функций. В работе [37] описаны численные эксперименты с различными функциями активации. В работе [38] представлены некоторые приемы, позволяющие улучшить аппроксимацию кусочно-непрерывных функций одного переменного. В работе [39] для обучения нейронной сети используются методы робастной статистики.

Для обучения нейронной сети применяются генетические алгоритмы (см., например, книгу [3]). Применяются и другие современные методы нахождения экстремумов функций многих переменных. Однако в работе [40] присутствует полемика с таким подходом. Там утверждается, что традиционные методы, основанные на решении алгебраических уравнений, могут дать лучшие результаты, если при обучении нейронной сети используются не только информация о значении аппроксимируемой функции, но и информация об ее градиентах.

Теорема Колмогорова о представлении непрерывных функций нескольких переменных с помощью композиций непрерывных функций одного переменного и сложения [41] хотя и не относится прямо к нейронным сетям, представляет собой математический результат из близкой области и также находит практические применения (см., например, работу [42]). Работа [41] продолжает работы [43, 44], в которых дается решение 13-й проблемы Гильберта.

3. АППРОКСИМАЦИЯ ФУНКЦИЙ НЕЧЕТКИМИ СИСТЕМАМИ

Пусть A_j^l , $l = 1, \dots, d, j = 1, \dots, n$ — нечеткие множества, универсальным множеством является \mathbb{R} (определение нечеткого множества и исторические ссылки см., например, в работе [45]). Через $\mu_{A_j^l}$ обозначим функцию принадлежности нечеткого множества A_j^l . Соответственно, $\mu_{A_j^l}: \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$. Например, в качестве функций принадлежности могут использоваться кусочно-линейные функции.

Как и в предыдущих параграфах, рассматривается задача построения для некоторой функции аппроксимирующего агрегата из определенного класса. Этот агрегат должен каждому значению $x = (x_1, \dots, x_d)$ из некоторого множества, принадлежащего \mathbb{R}^d , ставить в соответствие действительное число y . В предыдущих параграфах такими агрегатами были алгебраические многочлены и нейронные сети².

Нечеткая система состоит из n нечетких правил вида:

$$R_j: \text{ЕСЛИ } (x_1 = A_j^1) \text{ И } \dots \text{ И } (x_d = A_j^d), \\ \text{ТО } y = a_j^0; j = 1, \dots, n. \quad (3)$$

Здесь $a_j^0 \in \mathbb{R}$. Если бы консеквент имел вид $y = A_j^0$, где A_j^0 — некоторое нечеткое множество, то нечеткая система (3) называлась бы нечеткой системой Мамдани. Если бы консеквент имел вид $y = a_j^0 + a_j^1 x_1 + \dots + a_j^d x_d$, где $a_j^0, a_j^1, \dots, a_j^d \in \mathbb{R}$, то нечеткая система (3) называлась бы нечеткой системой Такаги — Сугено. В приведенном виде нечеткая система (3) может рассматриваться и как упрощенная форма нечеткой системы Мамдани, и как упрощенная форма нечеткой системы Такаги — Сугено. Подробнее о нечетких системах Мамдани и Такаги — Сугено см., например, в книге [1].

Пусть

$$\xi_j(x) = \frac{\prod_{l=1}^d \mu_{A_j^l}(x_l)}{\sum_{k=1}^n \prod_{l=1}^d \mu_{A_k^l}(x_l)}, \quad j = 1, \dots, n,$$

и

$$f_n(x) = \sum_{j=1}^n a_j^0 \xi_j(x). \quad (4)$$

Если будет доказано, что универсальным аппроксиматором (в некотором смысле) является нечеткая система (3), (4), это будет означать, что универсальными аппроксиматорами (в этом же смысле) являются и соответствующая нечеткая система Мамдани, и соответствующая нечеткая система Такаги — Сугено, поскольку они включа-

² Разумеется, эти агрегаты являются функциями. Но мы все же употребляем слово *агрегат*, поскольку слово *функция* неоднократно употребляется для обозначения других объектов: *функция активации*, *функция принадлежности*, *аппроксимируемая функция*.

ют в себя большее число аппроксимирующих агрегатов, чем упрощенная нечеткая система (3), (4).

В различных формах и при различных ограничениях теоремы о том, что нечеткие системы являются универсальными аппроксиматорами для непрерывных функций (т. е. имеет место теорема, аналогичная теореме 5), доказываются во многих работах. В ряде работ не формулируются явно все используемые при доказательствах условия. Первые доказательства приведены в работах³ [7–9, 46, 47].

Приводимое ниже доказательство теоремы о том, что нечеткие системы являются универсальными аппроксиматорами для непрерывных функций, является обработкой доказательства из работы [47]. Однако содержит, на наш взгляд, определенные упрощения и дается в более строгой форме.

Пусть компактное множество $K \subseteq \mathbb{R}^d$. Без ограничения общности будем считать, что $K \subseteq [0, 1]^d$. Выберем произвольную функцию $f \in C(K)$ и произвольное $\varepsilon > 0$.

Воспользовавшись теоремой 5, найдем алгебраический многочлен P , аппроксимирующий функцию f в равномерной метрике на K с точностью $\varepsilon/2$, т. е.

$$\sup_{x \in K} |f(x) - P(x)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Пусть m — натуральное число, и каждое из целых чисел q_1, \dots, q_m может принимать значения $0, 1, \dots, m$. Через Q_m обозначим множество точек $q = (q_1, \dots, q_d)$. Таким образом, множество Q_m содержит $(m+1)^d$ точек. При $q \in Q_m$ через q/m обозначим точку $(\frac{q_1}{m}, \dots, \frac{q_d}{m})$, принадлежащую множеству $[0, 1]^d$.

При каждом $q \in Q_m$ будем считать, что A_q^1, \dots, A_q^d — нечеткие множества. Функцию принадлежности нечеткого множества A_q^l обозначим $\mu_{A_q^l}$. Как и раньше, универсальным множеством является \mathbb{R} , т. е. каждая функция $\mu_{A_q^l} : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$.

Нечеткая система состоит из $n = (m+1)^d$ нечетких правил.

$$R_q : \text{ЕСЛИ } (x_1 = A_q^1) \text{ И } \dots \text{ И } (x_d = A_q^d),$$

$$\text{ТО } y = P\left(\frac{q}{m}\right), q \in Q_m.$$

Тогда

$$\xi_q(x) = \frac{\prod_{l=1}^d \mu_{A_q^l}(x_l)}{\sum_{q' \in Q_m} \prod_{l=1}^d \mu_{A_{q'}^l}(x_l)}, \quad (5)$$

$$f_n(x) = \sum_{q \in Q_m} P\left(\frac{q}{m}\right) \xi_q(x). \quad (6)$$

Теперь необходимо наложить условия на нечеткие множества A_q^l . Будем считать, что знаменатель дроби (5) положителен при любом $x \in [0, 1]^d$. При этом условии система функций $\xi_q(x)$ является разбиением единицы для $[0, 1]^d$. Второе условие состоит в том, что существуют последовательности неотрицательных чисел $\alpha_m \rightarrow 0$ и $\beta_m \rightarrow 0$ при $m \rightarrow \infty$ такие, что при любом $x \in [0, 1]^d$

$$\sum_{q \in M_2(x)} \xi_q(x) < \alpha_m,$$

где

$$M_1(x) = \left\{ q \in Q_m : \left\| x - \frac{q}{m} \right\| \leq \beta_m \right\},$$

$$M_2(x) = \left\{ q \in Q_m : \left\| x - \frac{q}{m} \right\| > \beta_m \right\}.$$

Очевидно, что функции принадлежности $\mu_{A_q^l}$ можно построить так, чтобы эти два условия выполнялись, если в качестве класса функций принадлежности рассматривается класс всех кусочно-линейных функций⁴. Доказательство приводимой ниже теоремы основано на стандартных рассуждениях, относящихся к разбиению единицы.

Теорема 8. Существует функция f_n вида (6) такая, что

$$\sup_{x \in K} |f(x) - f_n(x)| < \varepsilon.$$

Доказательство теоремы 8. Существуют константы $C_1 > 0$, $C_2 > 0$ такие, что

$$|P(x)| < C_1, \quad \|\text{grad} P(x)\| < C_2$$

при любом $x \in [0, 1]^d$.

⁴ Более того, последовательность $\{\alpha_m\}$ можно было бы взять нулевой. Но тогда были бы исключены из рассмотрения некоторые другие классы функций принадлежности, используемые при решении практических задач. Отметим также, что выбор системы нечетких множеств не связан с функцией f .

³ В работе [47] содержится критическая оценка результата из работы [46]. С этой критикой можно согласиться.



Зафиксировав натуральное число m и $x \in [0, 1]^d$, положим

$$\gamma(x) = \sum_{q \in M_2(x)} \xi_q(x).$$

Тогда на основании выражения (6)

$$\begin{aligned} |P(x) - f_n(x)| &= \left| P(x) - \sum_{q \in Q_m} P\left(\frac{q}{m}\right) \xi_q(x) \right| \leq \\ &\leq \left| P(x) - \sum_{q \in M_1(x)} P\left(\frac{q}{m}\right) \xi_q(x) \right| + \left| \sum_{q \in M_2(x)} P\left(\frac{q}{m}\right) \xi_q(x) \right|. \end{aligned}$$

Второе слагаемое в правой части неравенства не превосходит $C_1 \alpha_m$. Поэтому

$$\begin{aligned} |P(x) - f_n(x)| &\leq \\ &\leq \left| \gamma(x) P(x) + \sum_{q \in M_1(x)} \left(P(x) - P\left(\frac{q}{m}\right) \right) \xi_q(x) \right| + C_1 \alpha_m \leq \\ &\leq \sum_{q \in M_1(x)} \left| P(x) - P\left(\frac{q}{m}\right) \right| \xi_q(x) + 2C_1 \alpha_m. \end{aligned}$$

Воспользовавшись тем, что

$$\left| P(x) - P\left(\frac{q}{m}\right) \right| \leq \left(\sup_{y \in [0, 1]^d} \|\text{grad} P(y)\| \right) \left\| x - \frac{q}{m} \right\|,$$

получаем

$$|P(x) - f_n(x)| \leq C_2 \beta_m + 2C_1 \alpha_m.$$

Откуда

$$\|P - f_n\|_\infty \leq C_2 \beta_m + 2C_1 \alpha_m.$$

При достаточно большом m

$$C_2 \beta_m + 2C_1 \alpha_m < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Далее,

$$\begin{aligned} \sup_{x \in K} |f(x) - f_n(x)| &\leq \sup_{x \in K} |f(x) - P(x)| + \\ &+ \sup_{x \in K} |P(x) - f_n(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Теорема 8 доказана. ♦

В доказательстве теоремы 8 при больших d число нечетких правил может быть очень большим. Представляет интерес вопрос об уменьшении числа нечетких правил при сохранении точности аппроксимации (можно соотнести данный вопрос с теоремами 2 и 3). Такие задачи рассматриваются во многих работах (см., например, [48, 49].) Число нечетких правил может быть уменьшено благодаря применению многосеточных методов или кластеризации [50].

В ряде работ рассматривается аппроксимация нечеткими системами в пространствах Соболева, т. е. совместная аппроксимация функции и ее частных производных, см., например, работы [51, 52].

Доказательство теоремы 8 дословно повторяется, если взять в качестве t -нормы не произведение, а минимум. (Достаточно воспользовать-

ся не совсем привычным обозначением $\prod_{j=1}^n a_j = \min(a_1, \dots, a_n)$.) Существуют результаты об аппроксимации функций нечеткими системами, где используются другие t -нормы (см., например, работу [53]) или вместо t -норм используются нормы другого вида [54, 55]. Могут рассматриваться и системы нечеткого вывода отличные от систем Мамдани и систем Такаги — Сугено (см. работу [56]).

В работе [57] доказывается теорема об универсальной аппроксимации для иерархических нечетких систем.

В работе [58] рассматривается задача аппроксимации нечеткими системами, которые являются монотонными функциями по каждой переменной при фиксированных остальных переменных.

Аппроксимация системами, в которых используются нечеткие множества типа 2, изучается в работе [59].

В работе [60] рассматривается нечеткая система с последующим сглаживанием.

Идентификации нечетких систем, т. е. определению параметров antecedентов и consequентов всех нечетких правил, уделяется большое внимание (см., например, книги [61, 62]). В ряде работ идентификация нечетких систем рассматривается и в связи с задачей аппроксимации функций (см., например, работу [49]).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Теория приближения функций — это большое и важное научное направление, появление которого связано с именами К. Вейерштрасса и П.Л. Чебышева. Результаты и методы данной теории находят применения в различных прикладных исследованиях.

Сначала в теории приближения функций изучались задачи, где в качестве аппроксимирующих агрегатов рассматривались либо алгебраические многочлены (для непериодических функций), либо тригонометрические полиномы (для периодических функций). Однако потребности практики привели к значительному расширению данного научного направления, поскольку оказалось, что во многих приложениях вместо алгебраических многочленов или тригонометрических полиномов лучше использовать другие аппроксиматоры. К таким новым аппроксиматорам, применение и изучение которых активно начались в последние десятилетия, относятся нейронные сети и нечеткие системы.

Влияние классических разделов теории приближения функций на развитие этих новых разделов оказалось очень сильным. Доказываются те

же теоремы, что и в классических разделах, об увеличении скорости сходимости при повышении гладкости функции, о совместном приближении функции и ее производных, о формосохраняющих приближениях, о приближении в интегральных метриках. Однако результаты об аппроксимации функций с помощью нейронных сетей или с помощью нечетких систем значительно теснее связаны с практикой, чем результаты об аппроксимации функций алгебраическими многочленами или тригонометрическими полиномами.

Рассматриваемые теоремы об аппроксимации важны, например, при изучении временных рядов. Зависимость будущих значений от прошлых может выражаться (или достаточно хорошо приближенно выражаться) сложной нелинейной функцией. Сама эта функция неизвестна. Однако знание того, что ее можно аппроксимировать, например, с помощью нечеткой системы, позволяет уйти от вопроса, какого вида нелинейные функции лучше включать в математическую модель для временного ряда, и в то же время не ограничиваться линейными моделями. Широкое применение нейронных сетей при прогнозировании на финансовых рынках также во многом объясняется известными теоремами об аппроксимационных свойствах этих сетей.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Пегат А.* Нечеткое моделирование и управление. 2-е изд. — М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2013. — 798 с.
2. *Хайкин С.* Нейронные сети. Полный курс: 2-е изд. — М.: Изд. дом «Вильямс», 2017. — 1104 с.
3. *Рутковская Д., Пилинский М., Рутковский Л.* Нейронные сети, генетические алгоритмы и нечеткие системы: 2-е изд. — М.: Горячая линия — Телеком, 2013. — 384 с.
4. *Cybenko G.* Approximation by superpositions of sigmoidal function // *Mathematics of Control, Signals, and Systems.* — 1989. — Vol. 2. — P. 303–314.
5. *Funahashi K.I.* On the approximate realization of continuous mappings by neural networks // *Neural Networks.* — 1989. — Vol. 2. — P. 183–192.
6. *Hornik K., Stinchcombe M., White H.* Multilayer feedforward networks are universal approximators // *Neural Networks.* — 1989. — Vol. 2. — P. 359–366.
7. *Kosko B.* Fuzzy systems as universal approximators // *Proc. of IEEE 1992 Intern. Conf. Fuzzy Systems (San Diego, CA) Mar. 1992.* — P. 1153–1162.
8. *Wang L.-X.* Fuzzy systems are universal approximators // in: *Proc. IEEE 1992 Intern. Conf. Fuzzy Systems (San Diego, CA) Mar. 1992.* — P. 1163–1170.
9. *Wang L.-X., Mendel J.M.* Fuzzy basis functions, universal approximation, and orthogonal least-squares learning // *IEEE Trans. on Neural Networks.* — 1992. — Vol. 3. — P. 807–814.
10. *Натансон И.П.* Конструктивная теория функций. — М.: Государственное технико-теоретическое изд-во, 1949. — 688 с.
11. *Дзядык В.К.* Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами. — М.: Наука, 1977. — 512 с.
12. *Гончаров В.Л.* Теория интерполирования и приближения функций. — М.: Гос. техн.-теорет. изд-во, 1934. — 316 с.
13. *Lorentz G.G.* Bernstein polynomials. — Toronto: University of Toronto Press, 1953. — 130 p.
14. *Коровкин П.П.* Линейные операторы и теория приближений. — М.: Гос. изд-во физ.-мат. лит., 1959. — 211 с.
15. *Altomare F.* Korovkin-type theorems and approximation by positive linear operators // *Surveys in Approximation Theory.* — 2010. — Vol. 5. — P. 92–164.
16. *Anastassiou G.A.* Fuzzy mathematics: Approximation theory. — Berlin: Springer, 2010. — 444 p.
17. *Потанов М.К.* О приближении алгебраическими многочленами в интегральной метрике с весом Якоби // *Вестник Московского университета. Сер. Математика и механика.* — 1983. — Вып. 4. — С. 43–52.
18. *Никольский С.М.* Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. — М.: Наука, 1977. — 456 с.
19. *Шведов А.С.* Приближение функций многих переменных многочленами и поперечники некоторых функциональных классов // *Analysis Mathematica.* — 1982. — Vol. 8. — P. 135–150.
20. *Veretennikov A.Yu., Veretennikova E.V.* On partial derivatives of multivariate Bernstein polynomials // *Siberian Advances in Mathematics.* — 2016. — Vol. 26. — P. 294–305.
21. *Лоран П.-Ж.* Аппроксимация и оптимизация. — М.: Мир, 1975. — 496 с.
22. *Mhaskar H.N., Micchelli C.A.* Approximation by superposition of sigmoidal and radial basis functions // *Advances in Applied Mathematics.* — 1992. — Vol. 13. — P. 350–373.
23. *Park J., Sandberg I.W.* Universal approximation using radial-basis-function networks // *Neural Computation.* — 1991. — Vol. 3. — P. 246–257.
24. *Chen T., Chen H.* Approximation capability to functions of several variables, nonlinear functionals, and operators by radial basis function neural networks // *IEEE Trans. on Neural Networks.* — 1995. — Vol. 6. — P. 904–910.
25. *Chen T., Chen H.* Universal approximation to nonlinear operators by neural networks with arbitrary activation functions and its application to dynamical systems // *Ibid.* — 1995. — Vol. 6. — P. 911–917.
26. *Barron A.R.* Universal approximation bounds for superpositions of a sigmoidal function // *IEEE Trans. on Information Theory.* — 1993. — Vol. 39. — P. 930–945.
27. *Chui C.K., Li X., Mhaskar H.N.* Neural networks for localized approximation // *Mathematics of Computation.* — 1994. — Vol. 63. — P. 607–623.
28. *Llanas B., Lantaron S., Sainz F.J.* Constructive approximation of discontinuous functions by neural networks // *Neural Process Lett.* — 2008. — Vol. 27. — P. 209–226.
29. *Hou M., Han X.* Constructive approximation to multivariate function by decay RBF neural network // *IEEE Trans. on Neural Networks.* — 2010. — Vol. 21. — P. 1517–1523.
30. *Wang J.-J., Chen B.-L., Yang C.-Y.* Approximation of algebraic and trigonometric polynomials by feedforward neural networks // *Neural Comput & Applic.* — 2012. — Vol. 21. — P. 73–80.
31. *Fang Y., Chow T.W.S.* Wavelets based neural network for function approximation // in: *J. Wang, et al. (eds.): ISNN 2006, LNCS 3971.* — Berlin: Springer, 2006 — P. 80–85.
32. *Xie T.-F., Zhou X.-L.* Neural networks for optimal approximation of continuous functions in \mathbb{R}^d // *Appl. Math. Journal Chinese Univ.* — 2012. — Vol. 27. — P. 335–344.
33. *Ito Y.* Simultaneous approximations of polynomials and derivatives and their applications to neural networks // *Neural Computation.* — 2008. — Vol. 20. — P. 2757–2791.
34. *Anastassiou G.A.* Intelligent systems: Approximation by artificial neural networks. — Berlin: Springer, 2011. — 107 p.
35. *Iatan I.F.* Modern neural methods for function approximation // in: *Issues in the Use of Neural Networks in Information Retrieval, Studies in Computational Intelligence, vol. 661, Cham, Springer, 2017.* — P. 107–121.



36. Cherkassky V., Gehring D., Mulier F. Comparison of adaptive methods for function estimation from samples // IEEE Trans. on Neural Networks. — 1996. — Vol. 7. — P. 969–984.
37. Gomes G.S. da S., Ludermir T.B., Almeida L.M. Neural networks with asymmetric activation function for function approximation // Intern. Conf. on Neural Networks (Atlanta, GA) June 2009.
38. Selmic R.R., Lewis F.L. Neural-network approximation of piecewise continuous functions: Application to friction compensation // IEEE Trans. on Neural Networks. — 2002. — Vol. 13. — P. 745–751.
39. Rudenko O., Bezsonov O. Function approximation using robust radial basis function networks // Journal of Intelligent Learning Systems and Applications. — 2011. — Vol. 3. — P. 17–25.
40. Ferrari S., Stengel R.F. Smooth function approximation using neural networks // IEEE Trans. on Neural Networks. — 2005. — Vol. 16. — P. 24–38.
41. Колмогоров А.Н. О представлении непрерывных функций нескольких переменных в виде суперпозиций непрерывных функций одного переменного и сложения // Доклады АН СССР. — 1957. — Т. 114. — С. 953–956.
42. de Figueiredo R.J.P. Implications and applications of Kolmogorov's superposition theorem // IEEE Trans. on Automatic Control. — 1980. — Vol. 25. — P. 1227–1231.
43. Колмогоров А.Н. О представлении непрерывных функций нескольких переменных суперпозициями непрерывных функций меньшего числа переменных // Доклады АН СССР. — 1956. — Т. 108. — С. 179–182.
44. Арнольд В.И. О функциях трех переменных // Доклады АН СССР. — 1957. — Т. 114. — С. 679–681.
45. Шведов А.С. Нечеткое математическое программирование: краткий обзор // Проблемы управления. — 2017. — № 3. — С. 2–10.
46. Buckley J. Sugeno type controllers are universal controllers // Fuzzy Sets and Systems. — 1993. — Vol. 53. — P. 299–303.
47. Ying H. General Takagi-Sugeno fuzzy systems are universal approximators // in: Proc. IEEE Intern. Conf. on Fuzzy Systems (Anchorage, AK) May 1998. — Vol. 1. — P. 1819–823.
48. Yan S.Y., Sun Z.Q. Universal approximation for Takagi-Sugeno fuzzy systems combining statically and dynamically constructive methods — MISO cases // Intern. Conf. on Information, Management and Engineering (Kuala Lumpur, Malaysia) April 2009.
49. Sonbol A.H., Fadali M.S., Jafarzadeh S. TSK fuzzy function approximators: Design and accuracy analysis // IEEE Trans. on Systems, Man and Cybernetics — Part B: Cybernetics. — 2012. — Vol. 42. — P. 702–712.
50. Herrera L.J., Pomares H., Rojas I., et al. Multigrid-based fuzzy systems for function approximation // in: R. Monroy, et al. (eds.): MICAI 2004, LNAI 2972. — Berlin: Springer, 2004. — P. 252–261.
51. Landajo M., Rio M.J., Perez R. A note on smooth approximation capabilities of fuzzy systems // IEEE Trans. on Fuzzy Systems. — 2001. — Vol. 9. — P. 229–237.
52. Salgado P. Approximation of functions and its derivatives by fuzzy systems // Intern. Conf. on Computational Intelligence for Modelling, Control and Automation (Vienna, Austria) Nov. 2005.
53. Bede B., Rudas I.J., Schwab E.D., Schwab G. Approximation properties of Łukasiewicz fuzzy systems // Annual Conf. of the North American Fuzzy Information Processing Society (Redmond, WA) Aug. 2015.
54. Yager R.R., Kreinovich V. Universal approximation theorem for uninorm-based fuzzy systems modeling // Fuzzy Sets and Systems. — 2003. — Vol. 140. — P. 331–339.
55. Rickard J.T., Aisbett J., Mendel J.M. Rule-based fuzzy systems with weighted power mean firing operator as universal approximators // IEEE Intern. Conf. on Fuzzy Systems (Brisbane, Australia) June 2012.
56. Mandal S., Jayaram B. Similarity-based reasoning fuzzy systems and universal approximation // in: Mathematics and Computing 2013 R.N. Mohapatra, et al. (eds.), Springer Proceedings in Mathematics and Statistics 91, Springer India, 2014. — P. 215–230.
57. Joo M.G., Lee J.S. Universal approximation by hierarchical fuzzy system with constraints on the fuzzy rule // Fuzzy Sets and Systems. — 2002. — Vol. 130. — P. 175–188.
58. Hušek P. Recursive least square approximation using monotonic fuzzy systems // IEEE Intern. Symposium on Intelligent Control (Buenos Aires, Argentina) September, 2016.
59. Ying H. A sufficient condition on a general class of interval type-2 Takagi-Sugeno fuzzy systems with linear rule consequent as universal approximators // Journal of Intelligent and Fuzzy Systems. — 2015. — Vol. 29. — P. 1219–1227.
60. Richardson J., Korniak J., Reiner P.D., Wiliamowski B.M. Nearest-neighbor spline approximation (NNSA) improvement to TSK fuzzy systems // IEEE Trans. on Industrial Informatics. — 2016. — Vol. 12. — P. 169–178.
61. Lilly J.H. Fuzzy control and identification. — Hoboken (NJ): Wiley, 2010. — 231 p.
62. Zhang H., Liu D. Fuzzy Modeling and Fuzzy Control. — Boston: Birkhauser, 2006. — 416 p.

Статья представлена к публикации членом редколлегии А.С. Манделем.

Шведов Алексей Сергеевич — д-р физ.-мат. наук, профессор, Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики», ✉ ashvedov@hse.ru.

Новая книга

Гусев В.Б., Исаева Н.А. **Анализ моделей управления на основе экспертных данных: монография.** — М.: ИПУ РАН, 2017. — 115 с. — ISBN 978-5-91450-209-3

Представлены модели и методы экспертного анализа взаимовлияния факторов, отображающих функционирование экономики, финансовой сферы, инновационной деятельности, государственного управления. Полные оценки влияния оцениваются с помощью транзитивного замыкания примитивных связей, которое выполняется рефлексивными процедурами, использующими различные реализации операций над оценками (линейные, логические, времяподобные). Предлагаемые методы получения оценок взаимодействия и принятия решений являются новыми и представляют как научный, так и практический интерес.

Для разработчиков инструментария систем поддержки принятия решений, лиц, принимающих управленческие решения, студентов и аспирантов соответствующих специальностей.

Рецензенты: д-р техн. наук А.Д. Цвиркун, д-р техн. наук Г.Н. Калянов.

НЕЧЕТКИЕ ДВУХТОЧЕЧНЫЕ КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ В МАТЕМАТИЧЕСКОМ МОДЕЛИРОВАНИИ И УПРАВЛЕНИИ.

Ч. 1. Нечеткое математическое моделирование

Н.П. Деменков, Е.А. Микрин, И.А. Мочалов

Рассмотрены методы решения нечетких краевых задач для дифференциальных уравнений второго порядка. В части 1 представлены метод нечеткого преобразования Лапласа и нечеткий вариационно-итерационный метод для решения нечетких задач математического моделирования, в части 2 — нечеткий начальный метод и нечеткий метод Галеркина оптимизации нечетких задач управления. Перечисленные методы продемонстрированы на примерах. В частности, решены нечеткие задачи на безусловный экстремум нечеткого интегрального функционала и расчета периодических режимов в нечеткой поисковой системе автоматической оптимизации с запоминанием экстремума. В заключение приведены выводы и перечислены некоторые актуальные нечеткие задачи гироскопии, нечеткого управления летательными аэродинамическими и космическими аппаратами, которые могут быть решены рассмотренными методами.

Ключевые слова: нечеткая краевая задача, дифференциальное уравнение, нечеткое преобразование Лапласа, нечеткий вариационно-итерационный метод, нечеткий начальный метод, нечеткий метод Галеркина.

ВВЕДЕНИЕ

Краевые задачи возникают при решении различных проблем математического моделирования и управления — например, при управлении положением спутника с минимальным расходом энергии, прицельным артиллерийским огнем, при расчете параметров автоколебаний в поисковых системах автоматической оптимизации, решении задач вариационного исчисления, приводящих к различного рода сплайн-интерполяциям и оптимальным регуляторам, и многих других [1—3]. Оптимизация функционалов, зависящих от искомой функции и ее производных, приводит к краевым задачам для дифференциальных уравнений второго порядка [4—6].

Перечисленные задачи описываются, как правило, традиционными дифференциальными уравнениями с традиционными краевыми условиями.

Для их решения разработаны соответствующие методы — см., например, работы [7, 8].

Однако на практике на объект управления действуют возмущения, а динамические параметры дифференциальных уравнений и краевые условия задаются с некоторой неопределенностью.

Для представления возмущений используются различные математические модели, теория которых интенсивно разрабатывается и активно применяется в различных приложениях. Наиболее интенсивно для этих целей применяются методы теории интервалов [9], теории нечетких множеств [10], теории возможностей [11], гибридной вероятностной теории [12], теории нечетких случайных процессов [13] и др.

Наиболее адекватной, простой и универсальной в представлении различного рода возмущений является теория нечетких множеств. Она служит неким ядром, вокруг которого группируются существующие ныне модели возмущений и их моди-



фикации. Например, в гибридной вероятностной модели [12] два компонента: один из них — вероятностный и описывает помехи измерений, а другой — это нечеткий, который описывает неточности математической модели. Такое представление неопределенности более адекватно по сравнению с традиционной вероятностной моделью. Другой пример связан с нечетким представлением случайных процессов — нечеткий случайный процесс Маркова в форме цепей с нечеткими состояниями позволяет уменьшить размерность переходной матрицы состояний, что приводит к уменьшению объема вычислений при ее обращении [13].

Можно привести и другие примеры достоинств применения нечетких методов для решения задач математического моделирования и управления. По нашему мнению, основные преимущества применения нечетких методов в инженерных расчетах состоят в получении диапазона искомых решений по нечеткой модели, которые в лингвистических терминах трактуются как наилучшие и наилучшие решения. Такое представление результатов нечетких расчетов имеет похожие черты с результатами робастной теории управления и гарантированного оценивания в теории идентификации. Однако нечеткая теория более простая в расчетах по сравнению с робастной и гарантированной теориями, что делает нечеткую теорию привлекательной для инженерной деятельности.

Существенный недостаток нечетких методов состоит в некоем произволе и отсутствии статистической повторяемости в описании типа функций принадлежности, представляющих одну из моделей неконтролируемых возмущений в системе.

В целом же простота, универсальность и адекватность в описании возмущений компенсируют недостатки нечетких методов. Они занимают достойное место в инструментарии инженерной деятельности.

Одним из способов учета влияния возмущений заключается в использовании моделей неопределенности, построенных на основе теории нечетких множеств, что приводит к нечетким дифференциальным уравнениям и нечетким системам управления [14–16].

В практической деятельности дифференциальные уравнения обычно нелинейные, поэтому для решения нелинейных краевых задач применяются приближенные прямые методы, такие как методы Рунге, Галеркина, нечеткий метод наименьших квадратов. Решение $y_i(x)$ на i -й итерации ищется в виде

$$y_i(x) = \sum_{k=1}^i a_k \varphi_k(x), \quad i = 1, 2, \dots, n, \dots,$$

где $\varphi_k(x)$ — координатные (базисные) функции заданного типа a_k — неизвестные коэффициенты, подлежащие определению. В методе Рунге они находятся из условия допустимости функций $\varphi_k(x)$, в методе Галеркина — из условия их ортогональности, а в нечетком методе наименьших квадратов из нечетких правил относительно элементов весовой матрицы.

Цель настоящей работы заключается в модификации известных традиционных методов для решения нечетких линейных и нелинейных двухточечных краевых задач (когда дополнительные условия на решение налагаются в точках на концах отрезка), которые возникают как при решении нечетких задач математического моделирования (часть 1), так и при конструировании нечетких оптимальных регуляторов, анализе периодических режимов нечетких систем автоматической оптимизации (часть 2) и др.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Далее будем пользоваться базовыми определениями, подробно изложенными в работах [10, 14].

При математическом моделировании и анализе нечетких систем автоматической оптимизации часто возникают двухточечные нечеткие краевые задачи для дифференциальных уравнений или их систем. В некоторых случаях эти задачи могут быть преобразованы в одноточечные (начальные). Однако часто целесообразно решать исходную двухточечную краевую задачу.

В настоящей статье рассмотрены некоторые методы решения двухточечных краевых задач: метод нечеткого преобразования Лапласа, нечеткий вариационно-итерационный метод, нечеткий начальный метод и нечеткий метод Галеркина, позволяющие синтезировать нечеткие оптимальные системы управления [17–19].

Одна из таких оптимизационных задач возникает при построении адекватных нечетких математических моделей для нечеткой вариационной задачи с неподвижными границами. Они, в частности, формулируются для нечетких сплайн-аппроксимаций различных типов, нахождения нечеткого программного управления и других нечетких оптимизационных задач.

Определение 1. Одномерная функция принадлежности нечеткого множества A задается отображением $r_A: A \subset R_1 \rightarrow [0; 1] \subset R_1$. Полагается, что $r_A(x) = (\underline{r}_A(x), \bar{r}_A(x))$, $x \in A$, где $\underline{r}_A(x)$ — левая, а $\bar{r}_A(x)$ — правая ветви функции $r_A(x)$ относительно ядра множества A (core A). В параметрической фор-

ме с использованием обратного отображения r_A^{-1} : $x_A(r) = (\underline{x}_A(r), \bar{x}_A(r) \mid r \in [0; 1])$. Многомерный случай задается отображением $r_A: A \subset R_m \rightarrow [0; 1] \subset R_1$. ♦

Для нечеткого множества принято обозначение $E_m = \{r_A(x), x \in R_m\}$.

Определение 2. Одномерная нечеткая функция задается отображением $f_n: R_1 \rightarrow E_1$ и обозначается: $f_n(x) = f(x, r) = (\underline{f}(x, r), \bar{f}(x, r) \mid r \in [0; 1])$, где «n» — индекс нечеткости, а $\underline{f}(x, r), \bar{f}(x, r)$ — ветви нечеткой функции. ♦

По аналогии с традиционным банаховым пространством для совокупности четких функций вводится его нечеткий аналог, в котором задается метрика Хаусдорфа:

$$L_x(f_{n1}(t), f_{n2}(t)) = \sup_r \{ \max_t [|\underline{f}_1(t, r) - \underline{f}_2(t, r)|, |\bar{f}_1(t, r) - \bar{f}_2(t, r)|] \},$$

а операции сложения и умножения на константу выполняются по правилам, принятым в теории нечетких множеств.

Определение 3. Нечеткий функционал J_n задается отображением $J_n: \{f_n\} \in E_1 \rightarrow R_1$. Одна из его форм — нечеткий интегральный функционал:

$$J_n = \int_{t=t_0}^{t=T} f(x_n(t)) dt, \text{ а } f(x_n(t)) \text{ — нечеткий интегрант.}$$

Определение 4. Нечеткий интеграл $J_n = \int_{t=t_0}^{t=T} f(x_n(t)) dt$ определяется следующим образом.

Имеем представление: $R_p = \sum_{i=1}^n f(x_n(\xi))(t_i - t_{i-1})$, $\forall \xi \in [t_i - t_{i-1}] \subset R_1, i = 1, \dots, n$, и для него задана совокупность разбиений $P = \{t = t_0, \dots, t = T\} \in [t_0, T] \subset R_1$ и $\Delta = \max\{|t_i - t_{i-1}|\}, i = \overline{1, n}$. Тогда нечеткий интегральный функционал определяется в виде $\int_{t=t_0}^{t=T} f(x_n(t)) dt = \lim_{\Delta \rightarrow 0} R_p$, где предел задается в метрике Хаусдорфа L_x . ♦

Далее в задаче нечеткого математического моделирования будем рассматривать нечеткие интегральные функционалы типа:

$$\int_{t=t_0}^{t=T} f(x_n(t), \dot{x}_n^h(t), t) dt; \quad \int_{t=t_0}^{t=T} f(x_n(t), \dot{x}_n^h(t), \ddot{x}_n^h(t), t) dt,$$

где $\dot{x}_n^h(t), \ddot{x}_n^h(t)$ — нечеткие производные. Индекс «h» означает обобщенную производную, введенную Хукухарой (Р.М. Hukuhara). Определения первой и второй производных по Хукухаре приведены в работе [19].

Нечеткое вариационное исчисление применительно к задачам нечеткого математического моделирования может применяться в двух направлениях. *Первое из них* — это конструирование ее нечеткой теории: нечеткая непрерывность, нечеткая дифференцируемость, нечеткий экстремум и т. д. *Второе направление* — это использование определений и теорем в созданной уже к настоящему времени нечеткой теории дифференциальных и интегральных уравнений и методов их решений. Прием второго направления состоит в решении четкой вариационной задачи традиционными методами до получения уравнения Эйлера в традиционной форме, а далее оно объявляется нечетким из-за наличия неопределенности в граничных условиях и параметрах, представляемой нечеткими элементами. Затем это нечеткое уравнение Эйлера решается уже созданными нечеткими методами, а получаемое нечеткое решение объявляется решением нечеткой вариационной задачи. Можно полагать, что сейчас второе направление является перспективным, в его рамках активно разрабатываются методы решения нечетких дифференциальных и интегральных уравнений [14, 15].

Нечеткую задачу математического моделирования представим в виде оптимизационной задачи для нечеткого интегрального функционала. Имеем:

— нечеткие функции $f_n(t)$ определены и непрерывны в метрике L_x Хаусдорфа на отрезке $[t_0, T] \subset R_1$, где t_0, T — заданные четкие числа;

— функции $x_n(t)$ удовлетворяют нечетким граничным условиям:

$$x_n(t = t_0) = x_{n0}, \quad x_n(t = T) = x_{nT},$$

где нечеткие переменные заданы своими функциями принадлежности:

$$x_{n0} = x_0(r) = (\underline{x}_0(r), \bar{x}_0(r) \mid r \in [0; 1]);$$

$$x_{nT} = x_T(r) = (\underline{x}_T(r), \bar{x}_T(r) \mid r \in [0; 1])$$

и тракуются как некие модели неопределенности, представляющие погрешности или помехи в задании граничных условий. Эти условия характеризуют прохождение нечетких функций через две нечетко закрепленные граничные точки.



На нечетком множестве E_1 задан нечеткий интегральный функционал

$$J_H = J(x_H(t)) = \int_{t=t_0}^{t=T} f(x_H(t), \dot{x}_H^h(t), \ddot{x}_H^h(t), t) dt. \quad (1)$$

Среди допустимых нечетких кривых $x_H(t) \subset E_1$ необходимо найти нечеткую кривую $x_H^*(t)$, на которой нечеткий функционал (1) достигает экстремума

$$J(x_H^*(t)) = \text{extr}_{x_H(t) \in E_1} \int_{t=t_0}^{t=T} f(x_H(t), \dot{x}_H^h(t), \ddot{x}_H^h(t), t) dt. \quad (2)$$

В этой задаче отсутствуют ограничения, кроме нечетких граничных условий, поэтому по аналогии с традиционным подходом задача (1), (2) является нечеткой задачей на безусловный экстремум нечеткого интегрального функционала.

Нечеткими моделями представления (1), (2) являются нечеткие линейная и кубическая интерполяционные функции, которые принимают в узлах сетки заданные нечеткие значения и минимизируют нечеткий интегральный функционал типа (1).

Нечеткая линейная сплайн-интерполяционная функция $x_H(t)$, $t \in [t_0, T]$, находится из условия:

$$\min_{x_H \in E_1} J_H = \min \int_{t=t_0}^{t=T} (\dot{x}_H^h(t)) dt.$$

Нечеткая кубическая сплайн-интерполяционная функция $x_H(t)$, $t \in [t_0, T]$, находится из условия

$$\min_{x_H \in E_1} J_H = \min \int_{t=t_0}^{t=T} (\ddot{x}_H^h(t)) dt.$$

В последнем случае нечеткий интегральный функционал J_H как аналог энергии, варьируемой в некотором диапазоне, упругого стержня, закрепленного в точках плоскости (t_k, x_{Hk}) , и на нечетком кубическом сплайне реализующий некий диапазон минимума этой энергии.

ка относительно нечеткой координаты x_{jH} вектора состояний x_H :

$$\ddot{x}_H^h = f(x_H(t), \dot{x}_H^h(t), t), \quad x_H(t_0) = x_{H0}, \quad x_H(t_k) = x_{Hk}. \quad (3)$$

Здесь индекс «j» номера координаты опущен для простоты обозначений. Индекс «h» обозначает обобщенную производную по Хукухаре.

Согласно работам [19—21] будем иметь четыре типа нечетких решений и задач для уравнения (3): (i, i) , (i, ii) , (ii, i) , (ii, ii) . В скобках символ на первом месте обозначает тип первой обобщенной производной, символ на втором месте после запятой — тип второй обобщенной производной. Таким образом, для нечеткой двухточечной краевой задачи второго порядка будем иметь четыре решения, получаемые из четырех нечетких задач. Имеем, опустив индекс «h» для простоты обозначений, четыре типа нечетких задач:

$$\text{тип } (i, i): \begin{cases} \ddot{x}^{(i)}(r, t) = \underline{f}(x(r, t), \dot{x}^{(i)}(r, t), t), \\ x(r, 0) = x_0(r), x(r, t_k) = x_k(r), \\ \bar{x}^{(i)}(r, t) = \bar{f}(x(r, t), \dot{x}^{(i)}(r, t), t), \\ \bar{x}(r, 0) = \bar{x}_0(r), \bar{x}(r, t_k) = \bar{x}_k(r), \\ r \in [0; 1]; \end{cases}$$

$$\text{тип } (i, ii): \begin{cases} \ddot{x}^{(i)}(r, t) = \bar{f}(x(r, t), \dot{x}^{(i)}(r, t), t), \\ x(r, 0) = x_0(r), x(r, t_k) = x_k(r), \\ \bar{x}^{(i)}(r, t) = \underline{f}(x(r, t), \dot{x}^{(i)}(r, t), t), \\ \bar{x}(r, 0) = \bar{x}_0(r), \bar{x}(r, t_k) = \bar{x}_k(r), \\ r \in [0; 1]; \end{cases}$$

$$\text{тип } (ii, i): \begin{cases} \ddot{x}^{(ii)}(r, t) = \bar{f}(x(r, t), \dot{x}^{(ii)}(r, t), t), \\ x(r, 0) = x_0(r), x(r, t_k) = x_k(r), \\ \bar{x}(r, t) = \underline{f}(x(r, t), \dot{x}^{(ii)}(r, t), t), \\ \bar{x}(r, 0) = \bar{x}_0(r), \bar{x}(r, t_k) = \bar{x}_k(r), \\ r \in [0; 1]; \end{cases}$$

$$\text{тип } (ii, ii): \begin{cases} \ddot{x}^{(ii)}(r, t) = \underline{f}(x(r, t), \dot{x}^{(ii)}(r, t), t), \\ x(r, 0) = x_0(r), x(r, t_k) = x_k(r), \\ \bar{x}^{(ii)}(r, t) = \bar{f}(x(r, t), \dot{x}^{(ii)}(r, t), t), \\ \bar{x}(r, 0) = \bar{x}_0(r), \bar{x}(r, t_k) = \bar{x}_k(r), \\ r \in [0; 1]. \end{cases}$$

2. МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ НЕЧЕТКИХ ДВУХТОЧЕЧНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ

2.1. Метод нечеткого преобразования Лапласа [17—21]

Имеется нечеткая двухточечная краевая задача для дифференциального уравнения второго поряд-

Относительно производной Хукухары имеет место следующее суждение. Для первой производной в теории нечетких множеств необходимо задание операции вычитания для приращения нечеткой функции, операции умножения на константу и операции предельного перехода относительно заданной метрики в пространстве нечетких переменных. При выполнении условия полноты в этом пространстве оно превращается в банахово пространство, в котором существует достаточное число разнообразных производных в зависимости от способа задания метрики, но в работах [14—16, 18] показано, что все производные эквивалентны между собой, кроме производных Сейккала и Бакли—Фейринга. Поэтому в теории нечетких начальных задач используются упомянутые две производные и соответственно имеются два различных типа решений.

Для упомянутых первых производных не определена нечеткая вторая производная, которая возникает в нечеткой краевой задаче для нечеткого дифференциального уравнения второго порядка. Для устранения этой трудности обычно используется нечеткая производная Хукухары, которая имеет два типа первой производной, поэтому для второй производной и соответствующих типов нечетких дифференциальных уравнений второго порядка возникает четыре их типа, которые представлены выше. Это приводит к четырем типам решений нечеткой краевой задачи. В этом состоит характерная особенность нечетких (мягких) вычислений, т. е. неединственность решений — особенность нечетких вычислений.

Определение 5. Для нечеткой функции (оригинал) $f_H(t) = (\underline{f}(t, r), \bar{f}(t, r) | r \in [0; 1])$ и действительной переменной (параметр «s») ее нечеткое преобразование Лапласа [19—21]:

$$\begin{aligned} \hat{F}(s) &= L\{f_H(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} f_H(t) dt = \\ &= \lim_{\tau \rightarrow \infty} \int_0^{\tau} e^{-st} f_H(t) dt = \left(\lim_{\tau \rightarrow \infty} \int_0^{\tau} e^{-st} \underline{f}_H(t, r) dt, \right. \\ &\quad \left. \lim_{\tau \rightarrow \infty} \int_0^{\tau} e^{-st} \bar{f}_H(t, r) dt | r \in [0; 1] \right). \quad \diamond \quad (4) \end{aligned}$$

Полагается, что предел в выражении (4) существует. В формуле (4) обычно используется обозначение

$$\begin{aligned} l[\underline{f}(t, r)] &= \lim_{\tau \rightarrow \infty} \int_0^{\tau} e^{-st} \underline{f}(t, r) dt, \\ l[\bar{f}(t, r)] &= \lim_{\tau \rightarrow \infty} \int_0^{\tau} e^{-st} \bar{f}(t, r) dt, \end{aligned}$$

поэтому будем иметь запись

$$L\{f_H(t)\} = (l[\underline{f}(t, r)], l[\bar{f}(t, r)] | r \in [0; 1]).$$

Расчеты для преобразования Лапласа $L\{\ddot{x}_H(t)\}$ по выражению (4) дают

$$L\{\ddot{x}_H(t)\} = s^2 L\{x_H(t)\} \ominus s x_H(t_0) \ominus \dot{x}_H(t_0),$$

где операция \ominus определена в работах [19—21]. Здесь и далее операция \ominus имеет смысл обычного прямого вычитания.

Аналогичные вычисления для $L\{\dot{x}_H(t)\}$ дают

$$L\{\dot{x}_H(t)\} = s L\{x_H(t)\} \ominus x_H(t_0).$$

Модифицируем выражение (3) и затем применим полученные соотношения. Тогда будем иметь

$$\ddot{x}_H(t) + c_1(t)x_H(t) + c_2(t)x_H(t) = \varphi_H(t),$$

$$x_H(t_0) = x_{H0}, \quad x_H(t_k) = x_{Hk},$$

откуда при « \ominus » \equiv « \leftarrow » получим

$$\begin{aligned} s^2 L\{x_H(t)\} - s x_H(t_0) - \dot{x}_H(t_0) + c_1(t) L\{x_H(t) - x_H(t_0)\} + \\ + c_2(t) L\{x_H(t)\} = L\{\varphi_H(t)\}, \end{aligned}$$

$$x_H(t_0) = x_{H0}, \quad x_H(t_k) = x_{Hk}. \quad (5)$$

Краевое условие $x_H(t_0) = x_{H0}$ используется для нахождения неизвестного $\dot{x}_H(t_0)$ в выражении (5).

Далее применяется обратное преобразование Лапласа L^{-1} , что приводит к нахождению искомого $\dot{x}_H^*(t)$.

Пример 1. Пусть имеем нечеткий интегральный функционал типа (1) в форме

$$J_H = \int_{t_0=0}^{t_k=T} [t x_H(t) + \dot{x}_H^h(t)] dt.$$

Необходимо найти нечеткую экстремаль $x_H^*(t)$, удовлетворяющую нечетким граничным условиям:

$$x_H(t_0 = 0) = x_{H0} = 0_H = (\underline{0}(r) = -1 + r,$$

$$\bar{0}(r) = 1 - r | r \in [0; 1]),$$

$$x_H(t_k = T) = x_{HT} = 0,5_H = (\underline{0,5}(r) = 0,5r,$$

$$\bar{0,5}(r) = 1 - 0,5r | r \in [0; 1]).$$

Здесь нечеткие элементы, имеющие индекс «н», определяются в соответствии с определением 2. Для решения примера нечеткой вариационной задачи с нечеткими граничными условиями воспользуемся приемом второго направления (см. выше) их решения. Для этого формируется традиционная задача, которая реша-



ется до получения уравнения Эйлера в традиционной форме. Имеем:

$$f = tx(t) + \dot{x}(t) = \frac{\partial}{\partial t} \dot{f}_x - \frac{\partial}{\partial t} \dot{f}_{\dot{x}} = 0 \Rightarrow \Rightarrow t - \frac{\partial}{\partial t} \ddot{x} = 0 \Rightarrow \ddot{x}(t) - t = 0.$$

Переходим к нечеткому аналогу:

$$\ddot{x}_h^h(t) - a_{ht} = 0, \quad x_{h0} = 0_h, \quad x_{hT} = 0, 5_h.$$

Решим эту нечеткую двухточечную задачу методом нечеткого преобразования Лапласа. В результате получим нечеткое решение (i, i) -типа:

$$x_h^*(t) = (\underline{x}_{(i,i)}^*(t, r), \bar{x}_{(i,i)}^*(t, r) \mid r \in [0; 1] \subset R_1).$$

Другие типы нечетких решений находятся аналогичным способом.

Для интерполяции нечетким линейным сплайном на отрезке $t \in [t_0 = 0, t_k = T = 1]$ имеем:

$$\min_{x_h \in E_1} J_h = \min_{x_h \in E_1} \int_{t_0=0}^{t_k=T} (\dot{x}_h^h(t) dt).$$

Переходя к традиционной вариационной задаче, получаем четкое уравнение Эйлера, которое приводится к его нечеткому аналогу путем введения индексов «н» и «h» — нечеткость функции и тип нечеткой производной соответственно. Далее, применяя нечеткое преобразование Лапласа, получим различные типы нечетких решений, для которых на нечеткой сетке

$$\left(\begin{array}{c} t_0, \dots, t_k \\ x_{h0}, \dots, x_{hk} \end{array} \right)$$

путем решения соответствующих нечетких систем алгебраических уравнений находится совокупность нечетких линейных сплайнов. Заметим, что все типы нечетких решений дифференциальных уравнений проверяются, удовлетворяют ли они уравнению. Это приводит к сокращению числа решений уравнений и числа нечетких линейных сплайнов.

2.2. Вариационно-итерационный метод [22, 23]

Для нелинейной начальной задачи

$$M[x(v)] + N[x(v)] = g(v), \quad (6)$$

где M — линейный, а N — нелинейный операторы, $g(v)$ — заданная в аналитической форме функция, применяется метод корректирующего функционала

$$x_{n+1}(v) = x_n(v) + \int_0^v \lambda(v, t) \{M[x_n(t)] + N[\tilde{x}_n(t)] - g(t)\} dt, \quad (7)$$

где λ — множитель Лагранжа, определяемый из соответствующей вариационной задачи, x_n — приближенное решение уравнения (7) на n -й итерации,

\tilde{x}_n — ограниченная вариация для x_n , т. е. $\delta \tilde{x}_n = 0$. Кроме уравнений (6) и (7) рассматривается краевая задача второго порядка

$$X''(t) = F(t, X(t), X'(t)), \quad (8)$$

$$X(t=0) = \Phi_1, \quad X(t=T) = \Phi_2, \quad (9)$$

где $X(t) = [x_1(t), \dots, x_n(t)]^T$, $x_i(t)$, $i = 1, \dots, n$, — неизвестные вещественные функции от переменной t , F — нелинейная непрерывная функция от t , $X(t)$, $X'(t)$, Φ_1 и Φ_2 — заданные векторы в R^n .

Для задачи (8) корректирующий функционал (7) задается в виде

$$X_{n+1}(t) = X_n(t) + \int_0^t \lambda(s) \{X''_n(s) - \tilde{F}[s, X_n(s), X'_n(s)]\} ds \quad (10)$$

с граничными условиями (9). Здесь $\tilde{F}(\cdot) = \delta F$ — вариация для функции F .

После вычисления вариации относительно $\lambda(s)$ в выражении (10) для вспомогательного функционала с множителями Лагранжа получим условия экстремума функционала в виде:

$$\lambda''(s) = 0; \quad 1 - \lambda'(s=t) = 0; \quad \lambda(s=t) = 0,$$

откуда очевидно, что $\lambda(s) = s - t$.

Подставляя найденные значения в выражении (10), получим следующую вариационную формулу вычисления $X_{n+1}(t)$ для задачи (8), (9):

$$X_{n+1}(t) = X_n(t) + \int_0^t (s-t) \{X''_n(s) - \tilde{F}[s, X_n(s), X'_n(s)]\} ds, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Для оценки точности применяется следующий прием: вычисляются $X_n(t)$ и $X_{n+1}(t)$ и сравниваются эти зависимости в нескольких точках отрезка $[t_0 = 0, t_k = t]$. Если в пределах требуемой точности их значения совпадают, то считается, что с требуемой точностью получено решение искомой задачи (8), (10). Если же $X_n(t)$ и $X_{n+1}(t)$ в выбранных точках не совпадают, то вычисляется $X_{n+2}(t)$, далее сравниваются $X_{n+1}(t)$, $X_{n+2}(t)$ и т. д. до тех пор, пока $X_{n+k}(t)$ и $X_{n+k+1}(t)$ не совпадут. Этот практический прием оценки точности достаточно надежен, хотя теоретически не совсем совершен.

Пример 2. Решим краевую задачу вариационно-итерационным методом. Пусть дана двухточечная краевая задача

$$\ddot{x}(t) - x(t) = 0$$

с нечеткими краевыми условиями

$$x_n(t_0 = 0) = 0_n = (\underline{0} = -1 + r, \bar{0} = 1 - r | r \in [0, 1]),$$

$$x_n(t_k = 1) = 0,5_n = (\underline{0,5} = 0,5r, \bar{0,5} = 1 - 0,5r | r \in [0, 1]).$$

Необходимо найти нечеткую переменную $x_n^*(t) = x(t, r) = (\underline{x}(t, r), \bar{x}(t, r) | r \in [0; 1])$.

Точное решение (i, \bar{i}) -типа для $\underline{x}^*(t, r)$, $\bar{x}^*(t, r)$ получены ранее на основе нечеткого преобразования Лапласа.

Приближенное решение (i, \bar{i}) -типа получено по формулам вариационно-итерационного метода:

$$\underline{x}_{n+1}(t, r) = \underline{x}_n(t, r) + \int_0^t [(s-t)\ddot{\underline{x}}_n(s, r)]ds,$$

$$\bar{x}_{n+1}(t, r) = \bar{x}_n(t, r) + \int_0^t [(s-t)\ddot{\bar{x}}_n(s, r)]ds,$$

которые промоделированы при значениях $t = 0; 1$ и $r = 0; 0,2; \dots; 1,0$. Результаты вычислений по точным и приближенным формулам показали приемлемую точность.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Для линейного и нелинейного дифференциальных уравнений сформулирована двухточечная краевая задача в нечеткой постановке, которая возникает как при решении нечетких задач математического моделирования, так и при синтезе нечетких оптимальных систем управления. Приведены некоторые методы их решения.

Рассмотрены нечеткое преобразование Лапласа и его применение для решения двухточечной краевой задачи. Приведен пример расчета с помощью нечеткого преобразования Лапласа нечеткой кривой, на которой нечеткий функционал достигает экстремума.

Рассмотрен метод, в основу которого положен нечеткий вариационно-итерационный принцип решения краевых задач, и дан пример его применения для решения нечеткой вариационной задачи с нечеткими граничными условиями.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Современная математика для инженеров* / Под ред. Э.Ф. Бекенбаха. — М.: ИИЛ, 1959. — 500 с.
2. *Казакевич В.В., Родов А.Б.* Системы автоматической оптимизации. — М.: Энергия, 1977. — 288 с.
3. *Сю Д., Мейер А.* Современная теория автоматического управления и ее применения. — М.: Машиностроение, 1972. — 544 с.
4. *Атанс М., Фалб П.Л.* Оптимальное управление. — М.: Машиностроение, 1968. — 764 с.
5. *Шлаф Л.Я.* Вариационное исчисление и интегральные уравнения. — М.: Наука, 1969. — 192 с.

6. *Эльсгольц Л.Э.* Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. — М.: Наука, 1969. — 208 с.
7. *Агафонова С.А., Герман А.Д., Муратова Т.В.* Дифференциальные уравнения. — М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2006. — 347 с.
8. *Деменков Н.П.* Вычислительные аспекты решения задач оптимального управления. — М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2007. — 171 с.
9. *Алтунин А.Е., Семухин М.В.* Модели и алгоритмы принятия решения в нечетких условиях. — Тюмень: Изд-во Тюменского гос. ун-та, 2000. — 352 с.
10. *Методы робастного, нейро-нечеткого и адаптивного управления* / Под ред. Н.Д. Егупова. — М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2001. — 743 с.
11. *Дюбуа Д., Прад А.* Теория возможностей. — М.: Радио и связь, 1990. — 286 с.
12. *Мочалов И.А., Хрисат М.С.* Оценка параметров модели по нечетким случайным данным // Информационные технологии. — 2014. — № 2 (210). — С. 14–22.
13. *Мочалов И.А., Петрунин Н.Г., Редькин А.С., и др.* Нечеткие вероятностно-статистические методы // Приложение к журналу «Информационные технологии». — 2003. — № 4. — С. 1–24.
14. *Мочалов И.А., Хрисат М.С., Шихаб Еддин М.Я.* Нечеткие дифференциальные уравнения в задачах управления. Ч. I // Информационные технологии. — 2015. — № 3. — Т. 21. — С. 171–178.
15. *Мочалов И.А., Хрисат М.С., Шихаб Еддин М.Я.* Нечеткие дифференциальные уравнения в задачах управления. Ч. II // Там же. — 2015. — № 4. — Т. 21. — С. 243–250.
16. *Мочалов И.А., Хрисат М.С., Шихаб Еддин М.Я.* Нечеткие уравнения в частных производных в задачах управления // Там же. — 2015. — № 8. — Т. 21. — С. 563–569.
17. *Friedman M., Ming M., Kandel A.* Fuzzy linear systems // Fuzzy sets and systems. — 1988. — N 96. — P. 201–209.
18. *Buckley J.J., Feuring T.* Fuzzy differential equations // Ibid. — 2000. — N 100(1). — P. 43–54.
19. *Ahmad L., Farooq M., Ullah S., et al.* Solving fuzzy two-point boundary value problem using fuzzy Laplace Transform // Mathematics GM. — 2014. — N 2. — P. 1–17.
20. *Деменков Н.П., Микрин Е.А., Мочалов И.А.* Нечеткое преобразование Лапласа в моделировании. Ч. 1 // Информационные технологии. — 2017. — Т. 23, № 4. — С. 251–257.
21. *Деменков Н.П., Микрин Е.А., Мочалов И.А.* Нечеткое преобразование Лапласа в моделировании. Ч. 2 // Там же. — 2017. — Т. 23, № 5. — С. 362–369.
22. *Armand A., Gouyandeh Z.* Solving two-point fuzzy boundary value problem using variational iteration method // Communication advanced computational science with applications. — 2013. — Vol. 2013. — P. 1–10. doi: 10.5899/2013/cacs-00006.
23. *Ritz W.* Über eine neue Methode zur Lösung gewisser Variationsprobleme der mathematischen Physik // Journal für die Reine und Angewandte Mathematik. — 1909. — Vol. 1909, iss. 135. — P. 1–61. — URL: <https://doi.org/10.1515/crll.1909.135.1> (дата обращения: 16.11.2017).

Статья представлена к публикации руководителем РРС А.К. Погодаевым.

Деменков Николай Петрович — канд. техн. наук, доцент, Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана, ✉ dnp@bmsu.ru,

Микрин Евгений Анатольевич — академик РАН, ген. конструктор, первый зам. ген. директора, ПАО «РКК «Энергия» им. С.П. Королева»; зав. кафедрой, Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана, ✉ eugeny.mikrin@bmsu.ru,

Мочалов Иван Александрович — д-р техн. наук, профессор, Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана, ✉ intelsyst@mail.ru.

ПОСТРОЕНИЕ УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ С КВАЗИПОСТОЯННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ РЕГУЛЯТОРА¹

В.Н. Афанасьев, Н.А. Матвеева

Рассмотрен метод синтеза управления нелинейным объектом с квадратичным функционалом качества, основанный на приеме «расширенной линеаризации» исходной математической модели объекта. При этом параметры нелинейного регулятора определяются решениями матричного уравнения типа Риккати с параметрами, зависящими от состояния объекта. Отмечено, что основная проблема реализации такого регулятора заключается в сложности нахождения решения этого уравнения в темпе функционирования объекта. Для ее решения предложен метод, основанный на поиске параметров регулятора для каждого временного шага интервала управления. Разработанный метод синтеза и реализации управления нелинейным объектом предложено проверять путем построения стратегии введения препаратов при лечении рака с использованием математической модели динамики процесса роста раковой ткани и ее взаимодействия с нормальными и иммунными клетками. Приведены результаты математического моделирования, выполненного в целях проверки эффективности полученных решений.

Ключевые слова: нелинейные дифференциальные уравнения, метод «расширенной линеаризации», квадратичский функционал качества.

ВВЕДЕНИЕ

Одним из развивающихся методов синтеза управления нелинейными системами с квадратичными функционалами качества является метод, основанный на представлении исходных нелинейных математических моделей объектов в виде моделей с линейной структурой, но с параметрами, зависящими от состояния (State Dependent Coefficient, SDC) [1–3]. Такое представление позволяет осуществить переход от уравнения Гамильтона — Якоби — Беллмана к уравнению типа Риккати с параметрами, зависящими от состояния (State Dependent Riccati Equation, SDRE). Это и составляет

основу SDRE-метода синтеза оптимальных нелинейных систем управления [4, 5]. Следует отметить, что основная проблема реализации SDRE-регулятора, как это следует из приведенной литературы, заключается в сложности нахождения решения матричного нелинейного уравнения с параметрами, зависящими от состояния объекта, в темпе функционирования объекта. В работе предложен метод решения проблемы, основанный на поиске параметров субоптимального регулятора для каждого (заданного) временного шага интервала управления.

Разработанный метод синтеза и реализации управления нелинейным объектом проверяется путем построения стратегии введения препаратов при лечении рака с использованием математической модели динамики процесса роста раковой ткани и ее взаимодействия с нормальными и иммунными клетками.

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 16-8-00522).

1. ФОРМУЛИРОВКА ЗАДАЧИ УПРАВЛЕНИЯ В ОБЩЕМ ВИДЕ. МЕТОД СИНТЕЗА УПРАВЛЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫМ ОБЪЕКТОМ

Пусть математическая модель нелинейной системы имеет вид

$$\frac{d}{dt}x(t) = f(x) + g(x)u(t), \quad x(t_0) = x_0, \\ f, g : t_f \times \Omega_x \rightarrow R^n, \quad x \rightarrow f(x), g(x). \quad (1)$$

Здесь $[t_0, t_f]$ — интервал управления; $x(t) \in \Omega_x$, где Ω_x — область (открытое связанное множество) R^n ; $x(t)$ — состояние системы; $x_0 \in \Omega_x$; $u \in R^r$ — управление, подлежащее нахождению. Предполагается, что элементы n -мерной вектор-функции $f(x)$ и матрицы $g(x)$ действительны, непрерывны. Предполагается, что при всех $x(t)$ система (1) управляема.

Представим систему (1) в несколько ином, эквивалентном виде. Для этого воспользуемся методом «расширенной линеаризации» или SDC-параметризацией [1–5].

Предположение 1. Вектор-функция $f(x)$ — непрерывная дифференцируемая по $x \in \Omega_x$, т. е. $f(\cdot) \in C^1(\Omega_x)$ и $g(\cdot) \in C^0(\Omega_x)$.

Предположение 2. Без потери общности положим, что условие $x = 0_n \in \Omega_x$ есть точка равновесия системы при $u = 0_{r \times 1}$ так, что $f(0) = 0_{n \times 1}$ и $g(x) \neq 0_{n \times r}$, $\forall x(t) \in \Omega_x$. ♦

При сделанных предположениях исходная нелинейная система (1) может быть представлена (используя SDC-линеаризацию) в виде модели системы

$$\frac{d}{dt}x(t) = A(x)x(t) + g(x)u(t), \quad x(0) = x_0, \quad (2)$$

которая имеет линейную структуру и $A(x)x(t) = f(x)$.

Предположение 3. Система (2), где $u(t) \in U \subset R^r$, U — множество допустимых управляющих воздействий, управляема на множестве Ω_x . ♦

Учитывая, что математическая модель системы (2) имеет линейную структуру, в ряде работ [1–5] употребляется термин *поточечная управляемость*. Дадим пояснение этому термину. Рассмотрим множество $D(t) \in R^n(t)$, $t_0 \leq t \leq t_f$. При заданном t множество $D(t)$ состоит из всех точек $A(x)x(t) + g(x)u(t)$ пространства R^n , которые получаются, когда $u(t)$ пробегает все множество U . Таким образом, для

всех t , при которых $x(t)$ существует, справедливо включение

$$\frac{d}{dt}x(t) \in D(t), \quad t_0 \leq t \leq t_f,$$

и множество $D(t)$ содержит все точки $x(t_i) = x_i$, $i = 0, 1, 2, \dots$, траектории $x(t)$ при управлении $u(t) \in U$.

Так как система (2) в силу предположения 3 управляема, то для всех точек $x(t_i) = x_i$, $i = 0, 1, 2, \dots$, множества $D(t)$ должно выполняться условие Калмана — условие управляемости линейных систем с постоянными параметрами

$$\text{rank}[g(x(t_i)) | A(x_i)g(x(t_i)) | A^2(x_i)g(x(t_i)) \dots | A^{n-1}(x_i)g(x(t_i))] = n,$$

$$x(t_i) \in D(t).$$

Это условие и называют поточечным условием управляемости.

Выполнение предположений 1–3 является необходимым и достаточным условием представления управляемой системы (1) в виде управляемой системы (2).

Отметим, что представление $f(x)$ в виде $A(x)x(t)$ при $n > 1$ не единственно. Общие рекомендации по выбору матрицы $A(x)$ отсутствуют. Если задача об управлении ставится как задача синтеза оптимального управления системой, математическая модель которой представима в виде (2), то матрица $A(x)$ должна (при выполнении сделанных выше предположений) выбираться из условия обеспечения минимального значения функционала, доставляющего управление, синтезированном с помощью выбранной матрицы. В других же случаях, на выбор матрицы $A(x)$ могут влиять соображения практического характера (затраты на управления, сложность вычислений, вид полученных переходных процессов и пр.). В рассмотренном далее примере будет показано влияние выбора матрицы $A(x)$ на результаты управления нелинейным объектом.

Для синтеза управления $u(t)$ введем функционал качества

$$J(x(\cdot), u(\cdot)) = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} \{x^T(t)Qx(t) + u^T(t)Ru(t)\} dt. \quad (3)$$

Предполагается, что интервал времени $T = t_f - t_0$ управления больше времени окончания переходных процессов в системе, вызванных начальными условиями и соответствующим управлением. Симметрические матрицы Q и R положительно определенные, $Q > 0$, $R > 0$. Предполагается также, что в случае, когда на управление наложены ограничения в виде $\|u(t)\| \leq \gamma = \text{const} > 0$, то учесть эти ограничения можно соответствующим назначением матрицы R [6].



Таким образом, рассматриваемая задача заключается в нахождении управляющего воздействия $u(t)$, минимизирующего функционал вида (3) на решениях системы (1).

Решение задачи, поставленной выше, существует на множестве Ω_x , если существует непрерывная положительно определенная функция $V: \Omega_x \rightarrow R^+$, определенная в виде $V(x) \triangleq \min_u J(x, u)$ для всех $x \in \Omega_x$ и допустимых управлений $u(t) \in U$ [7].

Значение назначаемой функции $V(x)$ есть решение задачи динамического программирования, связанное с дифференциальным уравнением первого порядка в частных производных Гамильтона — Якоби — Беллмана [7, 8]

$$\min_u \left\{ \frac{\partial V(x)}{\partial x(t)} [f(x) + g(x)u(t)] + \frac{1}{2} [x^T(t)Qx(t) + u^T(t)Ru(t)] \right\} = \min_u H \left\{ x, u, \frac{\partial V(x)}{\partial x(t)} \right\}, \quad (4)$$

где H — гамильтониан.

Предположение 4. Функция $H\{x, u, \partial V(t, x)/\partial x\}$ определена и непрерывна для $(x, u, t) \in R^n \times R^r \times R$, $t \in [t_0, t_f]$. Более того, функция H предполагается дважды дифференцируема. ♦

При выполнении предположения 4 оптимальное управление $u(t, x)$ определяется соотношениями [7, 8]

$$\left\{ \frac{\partial H}{\partial u(t)} \right\}^T = Ru(t) + g^T(x) \left\{ \frac{\partial V(x)}{\partial x(t)} \right\}^T = 0, \quad \frac{\partial^2 H}{\partial u^2(t)} = R > 0.$$

Откуда

$$u(t) = -R^{-1}g^T(x) \left\{ \frac{\partial V(x)}{\partial x(t)} \right\}^T. \quad (5)$$

Запишем систему (1) с управлениями (5)

$$\frac{d}{dt}x(t) = f(x) - g(x)R^{-1}g^T(x) \left\{ \frac{\partial V(x)}{\partial x(t)} \right\}^T, \quad x(t_0) = x_0. \quad (6)$$

Перепишем гамильтониан (4) с управлениями с учетом выражений (1) и (6) и приравняем его нулю:

$$\frac{\partial V(x)}{\partial x(t)} f(x) - \frac{1}{2} \frac{\partial V(x)}{\partial x(t)} g(x)R^{-1}g^T(x) \left\{ \frac{\partial V(x)}{\partial x(t)} \right\}^T + \frac{1}{2} x^T(t)Qx(t) = 0. \quad (7)$$

Будем искать $\{\partial V(x)/\partial x(t)\}^T$ в виде

$$\{\partial V(x)/\partial x(t)\}^T = S(t)x(t). \quad (8)$$

Тогда оптимальное управление, в силу формулы (5), будет определяться соотношением

$$u(t) = -R^{-1}g^T(x)S(x)x(t). \quad (9)$$

Перепишем выражение (7) с учетом формулы (8) и что $f(x) = A(x)x(t)$:

$$x^T(t)\{S(x)A(x) + A^T(x)S(x) - S(x)g(x)R^{-1}g^T(x)S(x) + Q\}x(t) = 0. \quad (10)$$

Учитывая, что уравнение (10) должно выполняться при любом начальном состоянии $x(t_0)$, а $x(t)$ есть решение однородного уравнения

$$\frac{d}{dt}x(t) = [A(x) - g(x)R^{-1}g^T(x)S(x)]x(t), \quad x(t_0) = x_0,$$

то уравнение (10) должно быть справедливым при любом значении $x(t)$. В силу этого, получаем уравнение Риккати с параметрами, зависящими от состояния,

$$S(x)A(x) + A^T(x)S(x) - S(x)g(x)R^{-1}g^T(x)S(x) + Q = 0. \quad (11)$$

Основная проблема реализации управления вида (9) заключается в сложности нахождения матрицы $S(x)$ как решения уравнения (11) в темпе функционировании объекта.

Для получения реализуемого решения задачи управления нелинейным объектом вида (1) интервал управления $T = t_f - t_0$ разобьем на N отдельных подынтервалов $[t_0, t_1], [t_1, t_2], \dots, [t_{N-1}, t_f]$.

Значения матриц $A(x_0), A(x_1), A(x_2), \dots, A(x_{N-1}), g(x_0), g(x_1), g(x_2), \dots, g(x_{N-1})$, определенных в точках $t_0, t_1, t_2, \dots, t_{N-1}$, используются при вычислении положительно определенной матрицы с постоянными параметрами $S_i, i = 0, 1, 2, \dots, N - 1$:

$$A^T(x_i)S_i + S_iA(x_i) - S_i g(x_i)R^{-1}g^T(x_i)S_i + Q = 0, \quad i = 0, 1, 2, \dots, N - 1. \quad (12)$$

Таким образом, управление в каждом подынтервале будет иметь вид

$$u_i(t) = -R^{-1}g^T(\tilde{x})S_i\tilde{x}(t), \quad i = 0, 1, 2, \dots, N - 1. \quad (13)$$

Система (1) с управлениями (13) в каждом из подынтервалов $[t_i, t_{i+1}], i = 0, 1, 2, \dots, N - 1$, описывается уравнением:

$$\frac{d}{dt}\tilde{x}(t) = f(\tilde{x}) - g(\tilde{x})R^{-1}g^T(\tilde{x})S_i\tilde{x}(t), \quad \tilde{x}(t) = \tilde{x}_i, \quad t \in [t_i, t_{i+1}].$$

Отметим, что число подынтервалов N , которое определяет длительность по времени интервала $[t_i, t_{i+1}]$, зависит как от самого существа задачи управления, так и от возможности устройства по реализации вычислений матрицы S_i по формуле (12).

Очевидно, что при $\tau = t_{i+1} - t_i \rightarrow 0$, $i = 0, 1, 2, \dots, N-1$, т. е. при уменьшении интервалов разбиения, следует: $\lim_{\tau \rightarrow 0} S(x(t_i)) \rightarrow S(x(t_{i+1}))$, $i = 0, 1, 2, \dots, N-1$, и

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} [x(t) - \tilde{x}(t)] \rightarrow 0. \quad (14)$$

Запишем рассогласование $\varepsilon(t_{i+1}) = x(t_{i+1}) - \tilde{x}(t_{i+1})$, $i = 0, 1, 2, \dots, N-1$, решений уравнений

$$\frac{d}{dt}x(t) = [A(x) - g(x)R^{-1}g^T(x)S(x)]x(t), \quad x(t_0) = x_0,$$

$$\frac{d}{dt}\tilde{x}(t) = [A(\tilde{x}) - g(\tilde{x})R^{-1}g^T(\tilde{x})S_i]\tilde{x}(t), \quad \tilde{x}(t_0) = x_0$$

в интервале управления $t \in [t_i, t_{i+1}]$.

Пусть

$$A(x) = A + a(x), \quad A(\tilde{x}) = A + a(\tilde{x}),$$

$$g(x) = g + \Delta g(x), \quad g(\tilde{x}) = g + \Delta g(\tilde{x}),$$

$$S(x) = S + s(x), \quad S_i = S + s_i,$$

$$A = A(x(t_0)), \quad g = g(x(t_0)),$$

где матрицы A и g с постоянными элементами образуют управляемую пару, а положительно определенная матрица S есть решение алгебраического матричного уравнения Риккати

$$SA + A^T S - SgR^{-1}g^T S + Q = 0.$$

Определим ошибку рассогласования траекторий $x(t)$ и $\tilde{x}(t)$:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\varepsilon(t) = & [A - gR^{-1}g^T S]\varepsilon(t) + a(x)x(t) - a(\tilde{x})\tilde{x}(t) - \\ & - g(x)R^{-1}g^T[s(x)x(t) - s_i] - [g(x)R^{-1}\Delta g^T(x) + \\ & + \Delta g(x)R^{-1}g^T(x) + \Delta g(x)R^{-1}\Delta g^T(x)][S + s(x)]x(t) + \\ & + [g(\tilde{x})R^{-1}\Delta g^T(\tilde{x}) + \Delta g^T(\tilde{x})R^{-1}g^T(\tilde{x}) + \\ & + \Delta g(\tilde{x})R^{-1}\Delta g^T(\tilde{x})][S + s_i]\tilde{x}(t), \end{aligned}$$

$$\varepsilon(t_0) = x(t_0) - \tilde{x}(t_0) = 0$$

или

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\varepsilon(t) = & [A - gR^{-1}g^T S]\varepsilon(t) + \varphi(x(t), \tilde{x}(t)), \\ \varepsilon(t_0) = & 0, \end{aligned} \quad (15)$$

где

$$\begin{aligned} \varphi(x(t), \tilde{x}(t)) = & a(x)x(t) - a(\tilde{x})\tilde{x}(t) - \\ & - [g(x)R^{-1}\Delta g^T(x) + \Delta g(x)R^{-1}g^T(x) + \Delta g(x)R^{-1}\Delta g^T(x)] \times \\ & \times [S + s(x)]x(t) + [g(\tilde{x})R^{-1}\Delta g^T(\tilde{x}) + \\ & + \Delta g^T(\tilde{x})R^{-1}g^T(\tilde{x}) + \Delta g(\tilde{x})R^{-1}\Delta g^T(\tilde{x})][S + s_i]\tilde{x}(t). \end{aligned}$$

Запишем решение уравнения (15) в интервале $[t_i, t_{i+1}]$ с учетом, что матрица $[A - gR^{-1}g^T S]$ постоянная:

$$\begin{aligned} \varepsilon(t_{i+1}) = & \varepsilon(t_i) + \\ & + \int_{t_i}^{t_{i+1}} \{\exp[A - gR^{-1}g^T S](t_{i+1} - \gamma)\} \varphi(x(\gamma), \tilde{x}(\gamma)) d\gamma. \end{aligned}$$

Накопленное значение ошибки рассогласования в момент $t_N = t_f$ определяется формулой

$$\begin{aligned} \varepsilon(t_N) = & \sum_{i=0}^{N-1} \left\{ \int_{t_i}^{t_{i+1}} \{\exp[A - gR^{-1}g^T S](t_{i+1} - \gamma)\} \times \right. \\ & \left. \times \varphi(x(\gamma), \tilde{x}(\gamma)) d\gamma \right\}, \end{aligned} \quad (16)$$

так как $\varepsilon(t_0) = 0$.

Перепишем равенство (16) в виде

$$\begin{aligned} \|\varepsilon(t_N)\| = & \left\| \sum_{i=0}^{N-1} \left\{ \int_{t_i}^{t_{i+1}} \{\exp[A - gR^{-1}g^T S] \times \right. \right. \\ & \left. \left. \times (t_{i+1} - \gamma)\} \varphi(x(\gamma), \tilde{x}(\gamma)) d\gamma \right\} \right\|, \end{aligned}$$

откуда

$$\begin{aligned} \|\varepsilon(t_N)\| \leq & \sum_{i=0}^{N-1} \left\{ \int_{t_i}^{t_{i+1}} \|\{\exp[A - gR^{-1}g^T S](t_{i+1} - \gamma)\}\| \times \right. \\ & \left. \times \|\varphi(x(\gamma), \tilde{x}(\gamma))\| d\gamma \right\}. \end{aligned} \quad (17)$$

Учитывая, что действительные корни характеристической матрицы $[A - gR^{-1}g^T S]$ отрицательные, можно назначить такие положительные постоянные G и β , что

$$\|\exp[A - gR^{-1}g^T S](t_{i+1} - \gamma)\| \leq Ge^{-\beta(t_{i+1} - \gamma)}. \quad (18)$$

Очевидно, что значение $\|\varphi(x(\gamma), \tilde{x}(\gamma))\|_{\gamma=t_{i+1}}$ зависит как от длины подынтервала $\tau = T/N$, так и от значений матрицы $S_i = S + s_i$ в каждом из подынтервалов. Учитывая (14), отметим, что $\lim_{\tau \rightarrow 0} \|\varphi(x(\gamma), \tilde{x}(\gamma))\| \rightarrow 0$. Следовательно, можно найти такое число $K_{i+1} > 0$, что

$$\begin{aligned} \|\varphi(x(\gamma), \tilde{x}(\gamma))\|_{\gamma=t_{i+1}} \leq & K_{i+1}\tau = K_{i+1}(T/N), \\ i = & 0, 1, 2, \dots, N-1. \end{aligned} \quad (19)$$



Таким образом, выражение (17) с учетом формул (18) и (19), принимает вид

$$\begin{aligned} \|\varepsilon(t_N)\| &\leq G \int_{t_i}^{t_{i+1}} e^{-\beta(t_{i+1}-\gamma)} \sum_{i=0}^{N-1} \|\varphi(x(\gamma), \tilde{x}(\gamma))\| d\gamma \leq \\ &\leq G\tau \sum_{i=0}^{N-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} e^{-\beta(t_{i+1}-\gamma)} K_{i+1} d\gamma. \end{aligned}$$

Пусть $K^* = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} K_{i+1}$, тогда

$$\|\varepsilon(t_N)\| \leq GK^*\tau \sum_{i=0}^{N-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} e^{-\beta(t_{i+1}-\gamma)} \gamma$$

или, учитывая, что в рассматриваемом случае $t_0 = 0$,

$$\|\varepsilon(t_f)\| \leq GK^*\tau \int_0^f e^{-\beta(t_f-\gamma)} d\gamma.$$

Таким образом, норма рассогласования $\|\varepsilon(t_f)\|$ траекторий $x(t)$ и $\tilde{x}(t)$ в заданном интервале времени управления $T = t_f - t_0$ с N подынтервалами поиска матрицы $S_i, i = 0, 1, 2, \dots, N - 1$, отвечает условию

$$\|\varepsilon(t_f)\| \leq \frac{K^*TG}{N} [1 - e^{-\beta t_f}]. \quad (20)$$

Как видно из выражения (20), норма рассогласования $\|\varepsilon(t_f)\|$ в конце интервала управления зависит от числа подынтервалов N или, что то же самое, от длины подынтервала τ .

Отметим, что значение функционала качества (3) при управлении нелинейным объектом (1) с использованием его математической модели (2) и регулятором (13), имеющим квазипостоянные параметры, вычисляется по формуле [8]

$$\begin{aligned} J(\tilde{x}(\cdot), u(\cdot))_N &= \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{N-1} x^T(t_i) S_i x(t_i), \\ i &= 0, 1, 2, \dots, N - 1. \end{aligned}$$

2. ИЛЛЮСТРАЦИЯ ПРИМЕНЕНИЯ РАЗРАБОТАННОГО МЕТОДА ПОСТРОЕНИЯ РЕГУЛЯТОРА С КВАЗИПОСТОЯННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ

2.1. Математическая модель объекта управления

Многие математические модели раковых опухолей были построены с помощью теории обыкновенных дифференциальных уравнений, уравнений в частных производных, клеточных аппаратов

и др. [9—11]. Каждая из таких моделей имеет свои преимущества и недостатки. В настоящей статье используется математическая модель из работ [10, 11]. В такой модели развитие рака рассматривается в виде динамических отношений популяций нормальных, раковых и иммунных клеток вне зависимости от конкретного вида ракового заболевания.

Математическая модель предусматривает следующие допущения.

- Существование иммунной реакции. Модель предполагает наличие клеток иммунитов, увеличение числа которых может быть вызвано наличием клеток опухоли, которые могут противостоять им в ходе кинетического процесса. Предполагается, что их высокая активность не обеспечивает полного уничтожения опухоли. Вполне возможно, что, хотя раковые клетки иммуногены, реакции иммунной системы недостаточно для борьбы с быстрым ростом популяции раковых клеток и последующего развития их в состояние опухоли.
- Наличие состязательности. Нормальные и раковые клетки борются за доступные ресурсы, пока иммунные и раковые клетки борются, как «хищник — жертва».
- Оптимальное управление химиотерапией. Оптимальное введение препаратов выбирается таким образом, чтобы минимизировать число раковых клеток как к концу лечения, так и на протяжении времени поддержания числа нормальных клеток на определенном уровне (такие условия используются в медицинских протоколах).

Модель учитывает ткани вблизи концентрации раковых клеток и допускает однородность структуры раковой опухоли.

При исследовании роста популяции раковых клеток и последующего развития их в состояние опухоли в ряде работ [9—11] используется система дифференциальных уравнений

$$\frac{dN(t)}{dt} = r_2 N(t) [1 - b_2 N(t)] - c_4 T(t) N(t),$$

$$\frac{dT(t)}{dt} = r_1 T(t) [1 - b_1 T(t)] - c_2 T(t) I(t) - c_3 T(t) N(t),$$

$$\frac{dI(t)}{dt} = s + \frac{\rho T(t) I(t)}{\alpha + T(t)} - d_1 I(t) - c_1 T(t) I(t), \quad (21)$$

где $N(t)$, $T(t)$ и $I(t)$ — нормированное количество нормальных, раковых и иммунных клеток согласно [10, 11]. Начальные условия выбираются, исходя из предположения, что иммунная система организма не в состоянии самостоятельно справиться с ростом раковых клеток: $N(t_0) = 1, T(t_0) = 0,2, I(t_0) = 0,15$.

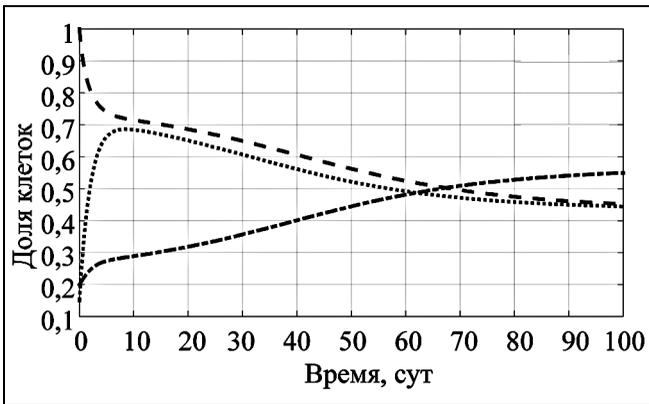


Рис. 1. Поведение системы без учета терапии: - · - · - $N(t)$; - - - $T(t)$; ······ $I(t)$

Результат взаимодействия клеточных популяций представлен на рис. 1. График показывает, что, несмотря на реакцию иммунной системы, популяция раковых клеток растет, и вместе с тем численность популяций нормальных и иммунных клеток падает.

В отсутствие терапии (21) точки положения равновесия N_E , T_E и I_E будут выглядеть таким образом:

$$\frac{dN(t)}{dt} = 0 \Rightarrow N = \text{const}, \quad N_E = \frac{r_2 - c_4 T_E}{b_2 r_2},$$

$$\frac{dT(t)}{dt} = 0 \Rightarrow T = \text{const}, \quad T_E = \frac{r_1 - c_2 I_E - c_3 N_E}{b_1 r_1},$$

$$\frac{dI(t)}{dt} = 0 \Rightarrow I = \text{const},$$

$$I_E = \frac{s(\alpha + T_E)}{(\alpha + T_E)(d_1 + c_1 T_E) - \rho T_E}.$$

Система имеет три точки равновесия: безопуховое (раковые клетки отсутствуют), безжизненное (нет нормальных клеток), точка сосуществования (имеются и раковые клетки, и нормальные). В зависимости от параметров, приведенных в таблице, в системе может быть ни одной, одна, две или три такие точки равновесия. В контексте выбора стратегии терапии должна быть достигнута безопуховая точка или точка сосуществования раковых и нормальных тканей, а популяция нормальных клеток должна приближаться к значению нормы. Безопуховое положение равновесия может быть достигнуто в точке $N^0 = 1/b_2$, $T^0 = 0$, $I^0 = s/d_1$.

Влияние химиотерапии включается в систему добавлением еще одного уравнения и слагаемых в уравнения для динамики популяций [10, 11], поскольку терапия действует не только на клетки опу-

Параметры системы [10]

Параметр	Описание	Значение	Возможные значения
a_1	Доля иммунных клеток, пораженных химиотерапией	0,2	$0 < a_1 < 0,5$ $a_3 < a_1 < a_2$
a_2	Доля клеток опухоли, пораженных химиотерапией	0,3	—
a_3	Доля здоровых клеток, пораженных химиотерапией	0,1	—
b_1	Коэффициент прироста раковых клеток	1,0	$b_1^{-1} < b_2^{-1}$
b_2	Коэффициент прироста нормальных клеток	1,0	—
c_1	Доля иммунных клеток, пораженных раковыми клетками	1,0	$c_1 > 0$
c_2	Доля раковых клеток, пораженных иммунными клетками	0,5	$c_2 > 0$
c_3	Доля раковых клеток, пораженных нормальными клетками	1,0	$c_3 > 0$
c_4	Доля нормальных клеток, пораженных раковыми клетками	1,0	$c_4 > 0$
d_1	Коэффициент естественной убыли иммунных клеток	0,2	—
d_2	Коэффициент убыли клеток вследствие химиотерапии	1,0	—
r_1	Показатель прироста раковых клеток	1,5	$r_1 > r_2$ $r_1 < \frac{s c_2}{d_1} + c_3$
r_2	Показатель прироста нормальных клеток	1,0	—
s	Показатель прироста иммунных клеток	0,33	$0 < s < 0,5$
α	Пороговое значение для иммунных клеток	0,3	$\alpha > 0$
ρ	Скорость реагирования иммунных клеток	0,01	$0 < \rho < 2$



холи, но и на популяции иммунных и нормальных клеток. Окончательно система выглядит таким образом:

$$\begin{aligned} \frac{dN(t)}{dt} &= r_2 N(t)[1 - b_2 N(t)] - c_4 T(t)N(t) - \\ &\quad - a_3 N(t)M(t), \\ \frac{dT(t)}{dt} &= r_1 T(t)[1 - b_1 T(t)] - c_2 T(t)I(t) - \\ &\quad - c_3 T(t)N(t) - a_2 T(t)M(t), \\ \frac{dI(t)}{dt} &= s + \frac{\rho T(t)I(t)}{\alpha + T(t)} - d_1 I(t) - c_2 T(t)I(t) - \\ &\quad - a_1 I(t)M(t), \\ \frac{dM(t)}{dt} &= u(t) - d_2 M(t), \end{aligned} \quad (22)$$

где $M(t)$ — функция концентрации препарата в ткани или крови, $u(t)$ — скалярное значение дозы препарата, которую пациент может принять орально, инъекцией или иным путем [10, 11].

Преобразуем систему уравнений (22) в критериальную форму, т. е. «обезразмерим» переменные $N(t)$, $T(t)$, $I(t)$ и $M(t)$, введя соответствующие переменные $x_1 = N - 1/b_2$, $x_2 = T$, $x_3 = I - s/d_1$, $x_4 = M$. Получим систему уравнений

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -r_2 x_1(1 + b_2 x_1) - \frac{c_4}{b_2} x_2 - \frac{a_3}{b_2} x_4 - \\ &\quad - c_4 x_1 x_2 - a_3 x_1 x_4, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_2 &= r_1 x_2(1 - b_1 x_2) - \left(\frac{sc_2}{d_1} + \frac{c_3}{b_2}\right) x_2 - c_3 x_1 x_2 - \\ &\quad - c_2 x_2 x_3 - a_2 x_2 x_4, \end{aligned} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_3 &= -\frac{c_1 s}{d_1} x_2 - d_1 x_3 - \frac{a_1 s}{d_1} x_4 + \rho \frac{s}{d_1} \frac{x_2}{(\alpha + x_2)} + \\ &\quad + \rho \frac{x_2 x_3}{\alpha + x_2} - c_1 x_2 x_3 - a_1 x_3 x_4, \end{aligned}$$

$$\dot{x}_4 = -d_2 x_4 + u(t),$$

$$x_1(t_0) = 1, \quad x_2(t_0) = 0,15, \quad x_3(t_0) = 0,2, \quad x_4(t_0) = 0.$$

2.2. Синтез управления с квазипостоянными параметрами и результаты математического моделирования

Перепишем систему уравнений (23) в виде

$$\frac{d}{dt} x(t) = f(x) + gu(t), \quad x(0) = x_0,$$

$$f, g : t_f \times \Omega \rightarrow R^4, \quad x \rightarrow f(x). \quad (24)$$

Отметим, что представление $f(x) = A(x)x(t)$ при $n = 4$ не единственно. Будем рассматривать задачу построения системы управления с двумя матрицами $A_1(x)$ и $A_2(x)$. Запишем уравнения динамики (24) в виде

$$\frac{d}{dt} x(t) = A_j(x)x(t) + gu(t), \quad j = 1, 2, \quad x(0) = x_0,$$

где

$$\begin{aligned} A_1(x) &= \begin{bmatrix} -r_2(1 + b_2 x_1) & -c_4\left(x + \frac{1}{b_2}\right) & 0 & -a_3\left(\frac{1}{b_2} + x_1\right) \\ -c_3 x_2 & r_1(1 - b_1 x_2) - \left(\frac{sc_2}{d_1} + \frac{c_3}{b_2}\right) & -c_2 x_2 & -a_2 x_2 \\ 0 & \frac{\rho\left(x_3 + \frac{s}{d_1}\right)}{\alpha + x_2} - c\left(x_3 + \frac{s}{d_1}\right) & -d_1 & -a_1\left(x_3 + \frac{s}{d_1}\right) \\ 0 & 0 & 0 & -d_2 \end{bmatrix}, \\ A_2(x) &= \begin{bmatrix} -r_2(1 + b_2 x_1) - c_4 x_2 & -\frac{c_4}{b_2} & 0 & -a_3\left(\frac{1}{b_2} + x_1\right) \\ -c_3 x_2 & r_1(1 - b_1 x_2) - \left(\frac{sc_2}{d_1} + \frac{c_3}{b_2}\right) & -c_2 x_2 & -a_2 x_2 \\ 0 & \frac{\rho s}{d_1(\alpha + x_2)} - c_1\left(x_3 + \frac{s}{d_1}\right) & -d_1 + \frac{\rho x_2}{(\alpha + x_2)} & -a_1\left(x_3 + \frac{s}{d_1}\right) \\ 0 & 0 & 0 & -d_2 \end{bmatrix}, \\ g &= [0 \ 0 \ 0 \ 1]^T. \end{aligned}$$

Значения элементов матрицы Q штрафа R в функционале качества (3) были приняты такими:

$$Q = \begin{bmatrix} 0,5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 100 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,1 \end{bmatrix}, \quad R = 1.$$

Управление системой (24) описывается уравнением (13), в котором матрица S_i является решением уравнения (12). Эта матрица вычислялась с помощью стандартной процедуры пакета MatLab.

В соответствии с описанным выше методом было проведено моделирование для двух представлений матрицы системы при различном выборе длительностью временных подынтервалов. Результаты моделирования для матрицы $A_1(x)$ приведены на

рис. 2–4. Временной интервал, в начале которого вычислялись параметры регулятора, содержал подынтервалы длительностью 10, 5 и 1 сут.

Как видно из приведенных графиков, под действием химиотерапии в разных случаях доля раковых клеток постепенно снижается.

Отметим, что количество препаратов значительно отличается в рассмотренных случаях (рис. 5), количество нормальных и иммунных клеток восстанавливается за счет их репродукции и достигает желаемого значения, характерного для организма здорового человека. Применяемое лечение позволяет полностью устранить популяцию клеток опухоли согласно предположениям, принятым при построении модели.

Результаты моделирования при выборе матрицы $A_2(x)$ и аналогичным делениям временного интервала по 10 и 5 сут представлены на рис. 6 и 7.

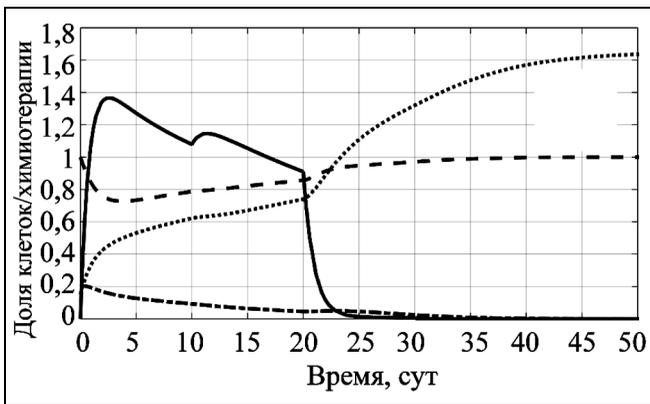


Рис. 2. Поведение системы с матрицей $A_1(x)$ при изменении параметров регулятора через каждые 10 сут: - - - - - $N(t)$; - · - · - $T(t)$; ······ $I(t)$; — $M(t)$

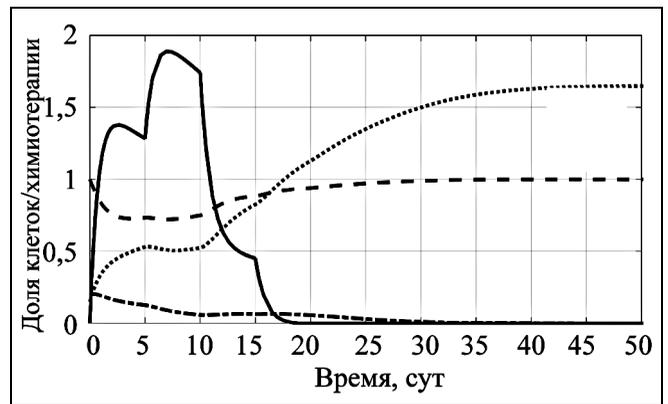


Рис. 3. Поведение системы с матрицей $A_1(x)$ при изменении параметров регулятора через каждые 5 сут: - - - - - $N(t)$; - · - · - $T(t)$; ······ $I(t)$; — $M(t)$

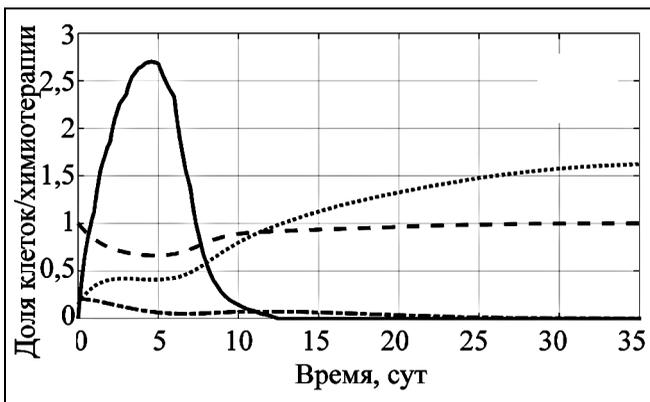


Рис. 4. Поведение системы с матрицей $A_1(x)$ при изменении параметров регулятора каждые сутки: - - - - - $N(t)$; - · - · - $T(t)$; ······ $I(t)$; — $M(t)$

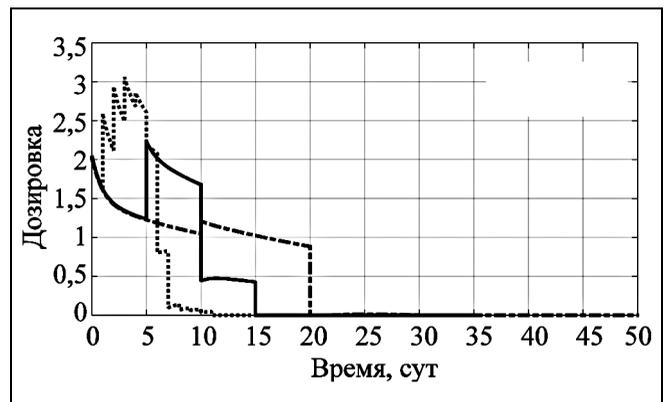


Рис. 5. Сравнение дозировок при применении химиотерапии через разное число суток: - - - - - $u(t)$ через 10 сут; ······ $u(t)$ через 1 сут; — $u(t)$ через 5 сут

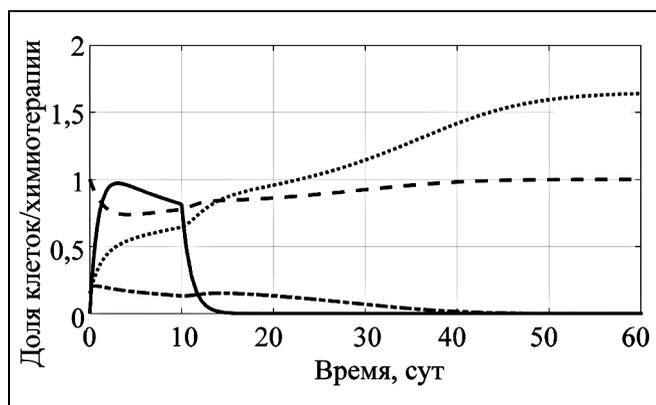


Рис. 6. Поведение системы с матрицей $A_2(x)$ при применении препаратов через каждые 10 сут: - - - - $N(t)$; - · - · - $T(t)$; ······ $I(t)$; — $M(t)$

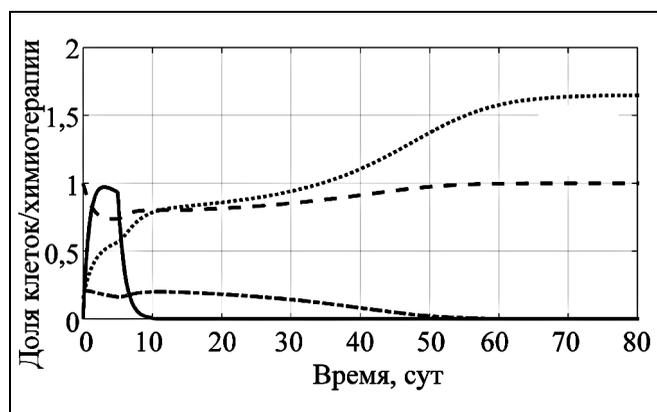


Рис. 7. Поведение системы с матрицей $A_2(x)$ при применении препаратов через каждые 5 сут: - - - - $N(t)$; - · - · - $T(t)$; ······ $I(t)$; — $M(t)$

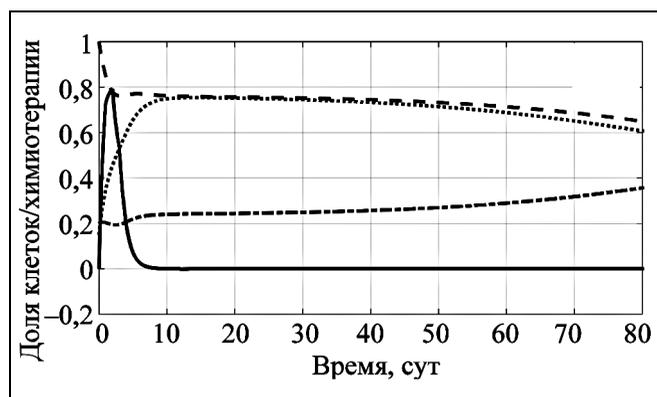


Рис. 8. Поведение системы с матрицей $A_2(x)$ при применении препаратов каждые сутки: - - - - $N(t)$; - · - · - $T(t)$; ······ $I(t)$; — $M(t)$

Дозировка для случая матрицы $A_2(x)$ оказалась существенно меньшей на протяжении всего лечения, и, поскольку лечение химиотерапией токсично, этот факт позволяет отметить особую важность выбора представления матриц при рассмотрении задач в медико-биологической области.

Однако при таком подходе для значения подынтервала длительностью в 1 сут системе не обеспечивается переход в желаемое состояния (рис. 8) из-за того, что на систему наложены ограничения на уровень управления (дозировки) и в связи с тем, что в матрицу $A_2(x)$ явно не входит состояние, описывающее влияние препаратов. Поэтому предпочтение в выборе матриц при ежедневном лечении следует отдавать матрице $A_1(x)$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассмотрен метод реализации управления нелинейным объектом, эквивалентная модель которого строится с помощью метода «расширенной линеаризации». Учитывая, что применение этого метода в общем случае приводит к различным, но эквивалентным описаниям объекта (кроме одномерного случая), а, следовательно, к управлениям с различными параметрами, при математическом моделировании системы управления с различными возможными матрицами было рассмотрено два варианта представления матрицы объекта.

Параметры регулятора определяются решением уравнения Риккати с параметрами, зависящими от состояния, поиск решения которого либо затруднен, либо при большой размерности системы невозможен. Предложен метод поэтапного нахождения решения квазистационарной матрицы параметров регулятора.

Разработанный метод организации управления нелинейными объектами опробован на решении задачи управления с помощью математической модели реакции человеческого организма на введение препаратов при лечении рака. Результаты проведенного математического моделирования показали эффективность полученного управления для решения поставленной модельной задачи и свидетельствуют, что синтезированное управляющее воздействие способно в рамках модели обеспечить полное уничтожение опухоли и поддержать жизнедеятельность организма в рамках нормы.

Однако отметим, что успех применения предложенного метода на практике напрямую связан с адекватностью математической модели и реально протекающих процессов. В этом отношении задача построения таких математических моделей, которые наиболее полно отражают состояние человеческого организма, их структурная и парамет-

рическая идентификация является важной и актуальной. Успешное решение этой задачи возможно только в рамках совместной работы медиков и математиков, работающих в области управления динамическими объектами.

ЛИТЕРАТУРА

1. Cloutier J.R., D'Souza C.N. and Mracek C.P. Nonlinear regulation and nonlinear H_∞ control via the state-dependent Riccati equation technique: Part 1, Theory; Part 2, Examples // Proc. of the First Intern. Conf. on Nonlinear Problems in Aviation and Aerospace, Daytona Beach, FL, 1996.
2. Mracek C.P. and Cloutier J.R. Full envelope missile longitudinal autopilot design using the state-dependent Riccati equation method // Proc. of the AIAA Guidance, Navigation, and Control Conf., New Orleans, LA, 1997. — P. 1697—1705.
3. Erdem E.B., Alleyne A.G. Design of a class of nonlinear controllers via state-dependent Riccati equations // IEEE Trans. on Control Systems Technology. — 2004. — Vol. 12, N 1. — P. 133—137.
4. Cimen T.D. On the Existence of Solutions Characterized by Riccati Equations to Infinite-Time Horizon Nonlinear Optimal Control Problems // Proc. of the 18th World Conf. IFAC, Milano, Italy, August, 28 — September 2, 2011. — P. 9618—926.
5. Афанасьев В.Н. Управление нелинейными неопределенными динамическими объектами. — М.: URSS, 2015. — 224 с.
6. Справочник по теории автоматического управления / под ред. А.А. Красовского. — М.: Наука, 1987. — 712 с.
7. Беллман Р., Энджел Э. Динамическое программирование и уравнения в частных производных. — М.: Мир, 1974. — 207 с.
8. Афанасьев В.Н., Колмановский В.Б., Носов В.Р. Математическая теория конструирования систем управления. — М.: Высшая школа, 2003. — 616 с.
9. Zurkowski R. Modeling and analysis of gene-therapeutic combination chemotherapy for pancreatic cancer // Proc. of the 18th World Conf. IFAC, Milano, Italy, 2011. — P. 14217—14222.
10. De Pillis L.G., Radunskaya A.E. The dynamics of an optimally controlled tumor model: A case study // Mathematical and Computer Modelling. — 2003. — Vol. 37. — P. 1221—1244.
11. Ceyda Unal, Metin U. Salamci. Drug Administration in Cancer Treatment via Optimal Nonlinear State Feedback Gain Matrix Design // Proc. of the 20th World Conf. IFAC, Toulouse, France, July 9—14, 2017. — P. 10396—10401.

Статья представлена к публикации членом редколлегии С.А. Красновой.

Афанасьев Валерий Николаевич — д-р техн. наук, зав. кафедрой, Московский институт электроники и математики Национального исследовательского университета «Высшая школа экономики», ✉ afanval@mail.ru,

Матвеева Наталия Алексеевна — аспирант, Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, ✉ matv_na@mail.ru.

Новая книга

Белов М.В., Новиков Д.А. Методология комплексной деятельности. — М.: Ленанд, 2018. — 320 с.

Книга посвящена изложению методологии комплексной деятельности, развивающей общую методологию на случай любой сложной (имеющей нетривиальную многоуровневую внутреннюю структуру) человеческой деятельности. Рассматриваются структурные элементы комплексной деятельности, конструктивно описываются ее логическая, причинно-следственная и процессная структуры. Значительное внимание уделяется организации и управлению, неопределенности, а также жизненным циклам деятельности, ее субъектов, предметов, ресурсов, знаний и технологий. В качестве иллюстраций реализации общих подходов на протяжении всего текста используются несколько типовых примеров — функционирование рабочих групп, подразделений, проектов и организаций в целом: розничного банка, авиастроительной фирмы, пожарной части и атомной электростанции. Использование системы согласованных формальных моделей обеспечивает практическую применимость результатов как специалистами-практиками, так и учеными, занимающимися исследованиями общих принципов организации деятельности (практической, научной и др.) и управления организационно-техническими системами.

Скачать книгу в PDF: <http://www.mtas.ru/biblio/MKD.pdf>.

Краткая презентация («зачем это надо»): <http://www.mtas.ru/biblio/MKDc.pdf>.

СЕТЕВЫЕ АКТИВНЫЕ СИСТЕМЫ: МОДЕЛИ ПЛАНИРОВАНИЯ И СТИМУЛИРОВАНИЯ¹

М.В. Белов, Д.А. Новиков

Введены в рассмотрение и исследованы модели сетевых активных систем, включающих в себя конечное множество взаимодействующих в рамках заданной сети агентов, характеризующихся технологией своей деятельности (зависимостью результатов их деятельности от собственных действий и результатов деятельности других агентов). Поставлены и решены задачи стимулирования и планирования. Обсуждены возможности применения сетевых активных систем для моделирования и оптимизации деятельности расширенных предприятий.

Ключевые слова: активная система, комплексная деятельность, расширенное предприятие.

ВВЕДЕНИЕ

В работе [1] предложены общие модели логической, причинно-следственной и процессной структур деятельности. Их общность, с одной стороны, позволяет единообразно описывать любую *комплексную деятельность* (КД), реализуемую *организационно-техническими системами* (ОТС), а с другой стороны, требует развития адекватного математического аппарата, позволяющего конструктивно анализировать и оптимизировать КД.

Управление КД и осуществляющими ее ОТС, согласно работе [1], заключается в оказании воздействия на КД и ОТС, призванного обеспечить поведение объекта управления (КД и ОТС), приводящего к достижению целей субъекта управления. Так как комплексная деятельность и реализующая ее ОТС составляют сложную систему (систему, состоящую из систем), для их операционального описания и изучения необходимы множественные модели, каждая из которых отражает определенную совокупность свойств КД и ОТС. Одним из существенных свойств КД и ОТС как объекта управления является *активность* ОТС (ОТС в целом или ее элементов) как субъекта КД. Активность объекта управления (или его элементов) побуждает использовать соответствующие модели и привлекать адекватный математический аппарат для исследования и решения задач управления КД и

ОТС. Рассмотрению именно этого аспекта и разработке математических моделей и методов посвящена данная работа, расширяющая теорию активных систем на случай управления субъектами комплексной деятельности.

Логическая структура КД описывает структуру целей КД и вместе с ней отношения подчиненности и ответственности элементов КД и их субъектов. Логическая структура, как правило, иерархична, в то время как *причинно-следственная* и *процессная структуры* лучше описываются (на заданном уровне детализации) *сетями*.

Аппарат *теории графов*, давно и успешно применяемый для описания транспортных, производственных, социальных, экономических и других сетей (см. обзоры в работах [2, 3]), управления проектами [4, 5] и др., не всегда позволяет учитывать целенаправленность субъектов деятельности — элементов ОТС, агентов (как ее учитывают, например, теоретико-игровые модели, используемые в теории активных систем и в смежных с ней науках [6]). Поэтому возникает необходимость разработки и исследования класса моделей, «интегрирующих» сетевую структуру ОТС и активность ее элементов, которые далее предложено называть *сетевыми активными системами* (САС).

Изложение материала настоящей работы имеет следующую структуру. В § 1 приведена общая модель САС, в § 2 — задача планирования и методы декомпозиции игры агентов. Важный результат, полученный в работе, заключается в доказательстве возможности независимого стимулирования субъектов КД: в § 2 показано, что оптимальная сис-

¹ Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского научного фонда (грант № 16-19-10609).

тема стимулирования может быть задана для каждого из агентов автономно и что она не зависит от причинно-следственной структуры КД и совокупности технологических функций нижестоящих элементов КД. Параграфы 3 и 4 посвящены частным случаям — производственной функции Леонтьева (отражающей технологию деятельности агентов) и последовательной структуре САС (производственной цепочке) соответственно. В § 5 кратко рассмотрена постановка задач календарного планирования в САС, в § 6 — использование САС в качестве моделей расширенных предприятий. В § 7 обсуждены возможности применения аппарата иерархических игр для моделирования САС, в § 8 описаны «фрактальные» САС. В Заключении приведены перспективные направления будущих исследований САС.

1. ОБЩАЯ МОДЕЛЬ СЕТЕВОЙ АКТИВНОЙ СИСТЕМЫ

Рассмотрим конечное множество $N = \{1, 2, \dots, n\}$ агентов, $n \geq 2$, и сеть $G = (N, E)$ (ориентированный связный граф без циклов), вершины которой соответствуют агентам, а множество дуг $E \subseteq N \times N$ отражает «технологические» связи между агентами, причем номера агентов образуют правильную нумерацию [4] вершин сети. Обозначим через $N_i = \{j \in N | (j, i) \in E\}$ множество предшественников i -го агента в сети G , $i \in N$.

Предположим, что сеть имеет единственный выход (вершину, не имеющую исходящих дуг) — n -ю вершину. Обозначим через $M_0 \subseteq N$ множество входов рассматриваемой сети (вершин, не имеющих входящих дуг), через M_k — множество вершин, в которые входят дуги только из вершин, принадлежащих множествам $\{M_j\}$, $j = \overline{0, k-1}$ (число $k(i)$ называется рангом вершины i , принадлежащей множеству M_k), $k = \overline{1, m}$, $m \leq n - 1$, $M_m = \{n\}$. Набор множеств $\{M_k\}$, $k = \overline{0, m}$, является разбиением множества N . Обозначим через $M^k = \bigcup_{j=0}^{k-1} M_j$, $k = \overline{1, m}$,

и положим $M^0 = \emptyset$.

Пусть i -й агент характеризуется своими скалярными действием $y_i \geq 0$ и результатом деятельности $z_i \geq 0$. Обозначим через y_D вектор действий агентов из множества $D \subseteq N$, через z_D — вектор результатов деятельности агентов из этого множества. Связь результата деятельности агента с его действием и используемыми им в процессе этой деятельности результатами других агентов определяется «технологической функцией» $Q_i: \mathbb{R}_+^{|N_i|+1} \rightarrow \mathbb{R}_+^1$, т. е. $z_i = Q_i(y_i, z_{N_i})$; для $i \in M_0$ имеет место $N_i = \emptyset$,

поэтому положим $z_i = Q_i(y_i, z_0)$, z_0 — L -мерный вектор «входов» сети. Отметим, что рассматриваемая модель агента подразумевает, что выход агента един для всех его последователей (множество последователей i -го агента определим как $R_i = \{j \in N | (i, j) \in E\}$), т. е. эта модель имеет условную структуру «несколько входов, действие, один результат». Более общим (но выходящим за рамки настоящего исследования) является случай структуры «несколько входов, действие, несколько результатов».

Совокупность множества агентов N (быть может, с их интересами и предпочтениями), сети G и набора $\{Q_i(\cdot, \cdot)\}$ технологических функций назовем сетевой активной системой.

Допустим, что выполнено

Предположение А.1. Функция $Q_i(\cdot, z_{N_i})$ взаимно однозначна, т. е. при заданных результатах деятельности предшественников агента его действие однозначно определяет результат его деятельности, и наоборот — зная результаты деятельности агента и его предшественников, можно однозначно восстановить его действие, $i \in N$. ♦

Модель САС имеет два обширных класса содержательных интерпретаций.

Первый — описание технологии совместной деятельности агентов, рассматриваемой в рамках методологии комплексной деятельности [1], или управления проектами [6], или управления производственными системами [7, 8]. При этом, как правило, вариантов (комбинаций результатов деятельности агентов) достижения заданного результата САС (значения выхода сети) не много (технология «жесткая», т. е. технологические функции обычно удовлетворяют предположению А.3 — см. далее).

Второй класс содержательных интерпретаций — системы оценки деятельности (комплексного оценивания [7, 9], агрегирования информации [10] и т. п.), когда требуется комплексировать набор значений частных показателей в один или несколько более общих показателей. При этом число вариантов, приводящих к одному и тому же агрегированному результату, как правило, велико (технология «мягкая», т. е. технологические функции обычно удовлетворяют предположению А.1, но не удовлетворяют предположению А.3).

Выбор действия y_i требует от i -го агента затрат $c_i(y_i)$, где для функции затрат выполняется

Предположение А.2. $c_i(\cdot)$ — гладкая строго монотонно возрастающая положительнозначная выпуклая функция затрат, $i \in N$. ♦

Таким образом, технология деятельности i -го агента описывается кортежем $(N_i, c_i(\cdot), Q_i(\cdot, \cdot))$.

Предположим, что i -й агент получает за результат z_i своей деятельности вознаграждение (стиму-



лирование) $\sigma_i(z_i) \geq 0$. Также предположим, что каждый агент рационален, т. е., выбирая свое действие $y_i \geq 0$, i -й агент, $i \in M_k$, стремится максимизировать свою целевую функцию $f_i(y_{M^{k(i)}}, y_i)$, представляющую собой разность между вознаграждением и затратами:

$$f_i(y_{M^{k(i)}}, y_i) = \sigma_i(Q_i(y_i, z_{N_i}(y_{M^{k(i)}}))) - c_i(y_i), \quad i \in N. \quad (1)$$

В частности, САС является обобщением модели «производственных цепочек» [11] на случай сетевой структуры.

Сформулируем задачу стимулирования в САС. Обозначим через σ_D вектор-функцию стимулирования агентов из множества $D \subseteq N$. Предположим, что агенты выбирают свои действия однократно, одновременно и независимо, причем сеть $G = (N, E)$, технологии деятельности всех агентов и их целевые функции (включая функции стимулирования) являются для них на момент выбора действий общими знаниями [9]. Обозначим через $E_N(\sigma_N)$ множество равновесий Нэша в рассматриваемой игре в нормальной форме (данное множество в теории управления организационными системами [9] называется множеством действий, реализуемых системой стимулирования σ_N):

$$E_N(\sigma_N) = \{y_N^* \in \mathfrak{R}_+^n \mid$$

$$\forall i \in N: i \in M_k \forall y_i \geq 0 \sigma_i(Q_i(y_i^*, z_{N_i}(y_{M^{k(i)}}^*))) - c_i(y_i^*) \geq \sigma_i(Q_i(y_i, z_{N_i}(y_{M^{k(i)}}^*))) - c_i(y_i)\}. \quad (2)$$

Предположим, что конечной (например, рыночной) ценностью обладает только результат z_n деятельности выхода сети (результата САС в целом), который реализуется по цене $\lambda(z_n) \geq 0$, зависящей от размера предложения — результата z_n . Тогда целевая функция САС (критерий эффективности управления (стимулирования) САС) представляет собой разность между выручкой и суммарными затратами на стимулирование всех агентов:

$$\Phi(\sigma_N) = \min_{y_N^* \in E_N(\sigma_N)} [\lambda(Q_n(y_n^*, z_{N_n}(y_{M^n}^*))) \times Q_n(y_n^*, z_{N_n}(y_{M^n}^*)) - \sum_{i=1}^n \sigma_i(Q_i(y_i^*, z_{N_i}(y_{M^{k(i)}}^*)))]. \quad (3)$$

Задача управления заключается в выборе системы стимулирования, имеющей максимальную эффективность:

$$\Phi(\sigma_N) \rightarrow \max_{\sigma_N}. \quad (4)$$

Значение функционала (3), достижимое в результате решения задачи (4), назовем эффективностью САС и обозначим через K . Задача (2)–(4) далеко не тривиальна, т. е. «любовой» поиск ее решения не представляется возможным. Поэтому воспользуемся свойствами САС, позволяющими применить общие теоремы о декомпозиции игры агентов [9, 11].

2. ЗАДАЧА ПЛАНИРОВАНИЯ И ДЕКОМПОЗИЦИЯ ИГРЫ АГЕНТОВ

Если субъекту, осуществляющему управление САС (будем называть его центром), известны технологии деятельности всех агентов, то он может:

— прежде всего, по набору функций $\{Q_i(y_i, z_{N_i}), i \in N\}$ найти функцию $Q(y_N, z_0)$, определяющую зависимость результата z_n деятельности n -го агента от вектора y_N действий всех агентов и входа САС z_0 (данную функцию можно условно считать агрегированной технологией САС в целом);

— затем, для заданного значения выхода сети $z_n = x \geq 0$ найти множество

$$A(x) = \{y_N \in \mathfrak{R}_+^n \mid Q(y_N, z_0) = x\} \quad (5)$$

векторов действий агентов, приводящих к требуемому результату x ;

— далее, для заданного значения выхода сети $x \geq 0$ найти множество

$$A^*(x) = \text{Arg} \min_{y_N \in A(x)} \sum_{i=1}^n c_i(y_i) \quad (6)$$

векторов действий агентов, приводящих к требуемому результату x с минимальными суммарными затратами агентов

$$C(x) = \min_{y_N \in A(x)} \sum_{i=1}^n c_i(y_i); \quad (7)$$

— наконец, решить задачу планирования — найти оптимальный план (значение выхода сети), максимизирующий разность между выручкой и суммарными затратами всех агентов:

$$x^* = \arg \max_{x \geq 0} [\lambda(x)x - C(x)]. \quad (8)$$

В силу свойств технологической функции (предположение А.1), центр имеет возможность основывать стимулирование каждого агента на его действии, а не на результате его деятельности. Поэтому связь между задачами (2)–(4) и (5)–(8) устанавливается утверждением 1 — см. далее. Фиксируем произвольные $x \geq 0$ и вектор $y_N(x) \in A^*(x)$. Обозначим через u_i резервную полезность i -го агента (ре-

зервная полезность — выигрыш агента при отказе от участия в данной системе [9]).

Рассмотрим два класса систем стимулирования агентов со стороны центра — компенсаторные и линейные [9].

Компенсаторные системы стимулирования основаны на идее компенсации затрат агента при выборе им действий, устраивающих центр. Оптимальную компенсаторную систему стимулирования характеризует

Утверждение 1. Если выполнены предположения A.1 и A.2, то система стимулирования

$$\sigma_i^*(x, y_i) = \begin{cases} c_i(y_i(x)) + u_i, & y_i \geq y_i(x), \\ 0, & y_i < y_i(x), \end{cases} \quad i \in N, \quad (9)$$

реализует вектор действий агентов $y_N(x)$ как равновесие в доминантных стратегиях их игры с минимальными суммарными затратами центра на стимулирование. Выигрыши всех агентов в этом равновесии тождественно равны их резервным полезностям.

Доказательство утверждения 1. Фиксируем произвольный номер агента $i \in N$ и произвольную обстановку $y_{-i} = (y_1, \dots, y_{i-1}, y_{i+1}, \dots, y_n)$ игры для него. Покажем, что $\forall y_i \geq 0 f_i(y_i(x), y_i) \geq f_i(y_i, y_{-i})$. Действительно, подставляя систему стимулирования (9) в целевую функцию агента (1), получим при $y_i < y_i(x)$

$$c_i(y_i(x)) + u_i - c_i(y_i(x)) \geq 0 - c_i(y_i). \quad (10)$$

В силу неотрицательности как резервной полезности, так и функции затрат, данное неравенство всегда выполнено. При $y_i = y_i(x)$ получим $u_i \geq 0$. При $y_i > y_i(x)$ получим

$$c_i(y_i(x)) + u_i - c_i(y_i(x)) \geq c_i(y_i(x)) + u_i - c_i(y_i),$$

т. е. $c_i(y_i(x)) \leq c_i(y_i)$, что выполнено в силу предположения A.2.

Таким образом, мы показали, что любому агенту, независимо от обстановки игры, выгодно выбирать соответствующую компоненту вектора $y_N(x)$, при этом он получит выигрыш, в точности равный своей резервной полезности (см. левую часть выражения (10)). А это и есть определение равновесия в доминантных стратегиях (РДС); (напомним, что любое РДС является и равновесием Нэша) [12].

Следовательно, система стимулирования (9) реализует вектор действий агентов $y_N(x)$ как РДС. Суммарные затраты центра на стимулирование при этом

$$C(x) = \sum_{i=1}^n (c_i(y_i(x)) + u_i). \quad (11)$$

Пусть существует другая система стимулирования $\hat{\sigma}_N(\cdot)$, реализующая тот же вектор действий агентов и характеризующаяся строго меньшими суммарными затратами центра на стимулирование. Тогда найдется агент $j \in N$, для которого выполнено $\hat{\sigma}_j(y_j(x)) < c_j(y_j(x)) + u_j$, следовательно, значение его целевой функции строго мень-

ше резервной полезности. В силу свойств функций затрат и стимулирования (неотрицательность), любой агент всегда может, отказавшись от участия в данной системе, обеспечить себе выигрыш, равный резервной полезности. Получили противоречие. ♦

Множество значений выходов сети, реализуемых всевозможными компенсаторными системами стимулирования, обозначим через $Z = \{x \geq 0 \mid A(x) \neq \emptyset\}$.

Из утверждения 1 следует, что эффективность САС (выигрыш центра)

$$K = \max_{x \in Z} [\lambda(x)x - C(x)]. \quad (12)$$

Отметим, что оптимальная система стимулирования (9) не зависит от структуры сети G и совокупности технологических функций (последние определяют только множества (6) и Z)!

Имеет смысл также подчеркнуть, что результат утверждения 1 и оптимальная компенсаторная система стимулирования (9) могут быть корректно расширены на случай, когда множество возможных действий y_i каждого из агентов ограничено. Соответственно и в этом случае функции стимулирования агентов формируются независимо друг от друга и не зависят от технологии КД.

Важность такого расширения определяется не сложностью получающейся математической модели, напротив, модель становится практически тривиальной. Дело в том, что на современном этапе развития экономики в подавляющем большинстве случаев моделирование «нетривиального» множества возможных действий агентов оказывается не вполне адекватным. При вступлении в отношения с центром (или отказе от этого) у агента в большинстве случаев нет множества альтернативных действий, описываемых полупрямой $y_i > 0$. Если агент вступает в отношения с центром, то от него требуется вполне определенный результат z_i , определяемый узким диапазоном его характеристик, в условиях развитых технологий отвечает этому результату практически единственное действие $y_i(x)$. Это происходит и в случае взаимоотношений «сотрудник — работодатель», и в случае взаимоотношений фирм заказчика и подрядчика; т. е. по сути выбор агента бинарен: участвовать в САС или предпочесть альтернативную деятельность и получить резервную полезность.

Линейные (пропорциональные) системы стимулирования характеризуются линейной зависимостью размера вознаграждения от действия агента или результата его деятельности, а коэффициент пропорциональности называется ставкой оплаты, т. е. $\sigma_{Li}(y_i) = \gamma_i y_i$, $\gamma_i \geq 0$. Множество значений выходов сети, реализуемых всевозможными линей-



ными системами стимулирования, обозначим через Z_L .

При заданной линейной системе стимулирования i -й агент выбором своего действия максимизирует свою целевую функцию, т. е. решает задачу

$$\gamma_i y_i - c_i(y_i) \rightarrow \max_{y_i \geq 0}. \quad (13)$$

Задача (13) в силу предположения А.2 имеет единственное решение $y_{Li}(\gamma_i) = c_i'^{-1}(\gamma_i)$.

Для того чтобы i -й агент выбирал действие $y_i(x)$, центру следует применять ставку оплаты

$$\gamma_i(x) = c_i'(y_i(x)). \quad (14)$$

Эффективность линейных систем стимулирования в сравнении с компенсаторными характеризует

Утверждение 2. При линейных системах стимулирования множество реализуемых значений выходов САС не шире, а выигрыш центра не выше, чем при компенсаторных системах стимулирования.

Доказательство утверждения 2. Докажем сначала соответствующее соотношение множеств реализуемых выходов. Для того чтобы агент согласился участвовать в данной САС, необходимо, чтобы его выигрыш был не меньше его резервной полезности, т. е. реализуемыми линейными системами стимулирования являются значения выходов сети x , для которых множество $A(x)$ не пусто, и выполнена (см. выражения (14)) система условий:

$$c_i'(y_i(x))y_i(x) - c_i(y_i(x)) \geq u_i, \quad i \in N, \quad (15)$$

т. е. $Z_L = \{x \geq 0 \mid A(x) \neq \emptyset, (15)\}$. Напомним, что компенсаторными системами стимулирования реализуемы любые значения выходов сети x , для которых множество $A(x)$ не пусто. Наличие дополнительного требования (15) не расширяет множество реализуемых выходов сети, следовательно $Z_L \subseteq Z$.

Вычислим теперь суммарные затраты центра на стимулирование по реализации некоторого значения x выхода сети при линейных системах стимулирования:

$$C_L(x) = \sum_{i=1}^n c_i'(y_i(x))y_i(x). \quad (16)$$

Из выражений (11), (15) и (16) следует, что $C_L(x) \geq C(x)$. ♦

Обозначим через K_L эффективность САС с линейной системой стимулирования (сравните с выражением (12)):

$$K_L = \max_{x \in Z_L} [\lambda(x)x - C_L(x)].$$

Из утверждения 2 следует справедливость соотношения $K_L \leq K$, т. е. эффективность САС с линейной системой стимулирования не выше эффек-

тивности САС с компенсаторной системой стимулирования.

Пример 1. Пусть затраты агентов квадратичны: $c_i(y_i) = (y_i)^2/(2r_i)$, где константы $r_i > 0$. Тогда из выражений (11) и (16) получаем, что $C(x) = C_L(x)/2 + \sum_{i=1}^n u_i$. ♦

Утверждение 1 характеризует простую структуру системы стимулирования (9), которая не только оптимальна, но и децентрализует игру агентов (и, более того, делает поведение агентов независимым от структуры технологических связей между ними). При этом вся «сложность» оказывается сконцентрированной в задаче планирования — действительно, поиск множеств (5), (16) и последующее решение задачи (7) могут оказаться достаточно трудоемкими. Ситуация существенно упрощается, например, в следующем частном случае, когда накладываются достаточно жесткие ограничения на технологические функции.

Предположение А.3. Выполнено предположение А.1 и, кроме того, функция $Q_i(y_i, \cdot)$ взаимно однозначна, т. е. при заданных результатах деятельности агента и его действия однозначно определяются результаты деятельности его предшественников, $i \in N$. ♦

Если выполнено предположение А.3, то множества (5) и (6) состоят из единственного вектора (обозначим его через $\hat{y}_N(z_n) = (\hat{y}_1(z_n), \dots, \hat{y}_n(z_n))$), а задача (7) сводится к вычислению суммарных затрат при действиях агентов $\hat{y}_1(z_n), \dots, \hat{y}_n(z_n)$.

Далее приводятся два примера САС, удовлетворяющих предположениям А.1 и А.3 — см. соответственно § 3 и § 4.

3. ФУНКЦИЯ ЛЕОНТЬЕВА

Пусть технологическая функция i -го агента имеет вид

$$z_i(y_i, z_{N_i}) = \min \left\{ \frac{y_i}{k_{ii}}; \min_{j \in N_i} \left[\frac{z_j}{k_{ji}} \right] \right\}, \quad i \in N, \quad (17)$$

где $k_{ji} > 0$, $(j, i) \in E$; $k_{ji} \equiv 0$, $(j, i) \notin E$ — технологические коэффициенты (так называемые *коэффициенты комплектности*).

Функция (17) удовлетворяет предположению А.1 (но не удовлетворяет предположению А.3, так как множество (5) представляет собой конус). Более того, имеет место конструктивно доказываемое

Утверждение 3. Если выполнено предположение А.2, то для технологической функции Леонтьева $A^*(x) = \{\hat{y}_N(x)\}$.

Доказательство утверждения 3. Обозначим через $L_0 = \{n\}$, $L_k \subseteq N$ — множество вершин графа

G , из которых исходят дуги в вершины из множества L_{k-1} , $k = 1, 2, \dots$

При заданном требовании к выходу x сети вектор $\hat{y}_N(x)$ может быть найден в результате применения следующего алгоритма:

Шаг 0: $\hat{y}_i(x) = 0$, $i = \overline{1, n-1}$, $\hat{y}_n(x) = k_{nr}x$.

Шаг $j = \overline{1, n-1}$: $\hat{y}_{n-j}(x) := \max\{\hat{y}_{n-j}(x)\}$;

$\max_{l \geq n-j} [k_{n-j,l} \hat{y}_l(x)]$.

В силу свойств функции затрат, определяемых предположением А.2, именно этот вектор является единственным решением задачи минимизации суммарных затрат агентов.

4. ПРОИЗВОДСТВЕННАЯ ЦЕПОЧКА

Пусть граф G представляет собой одну цепь, тогда каждая технологическая функция зависит от двух аргументов — действия соответствующего агента и результата деятельности его предшественника:

$z_i = Q_i(y_i, z_{i-1})$, $i = \overline{1, n}$. Если функции $\{Q_i(\cdot, \cdot)\}$ непрерывны и строго монотонны по обоим аргументам, то выполнено предположение А.3, в частности — существуют однозначные и непрерывные «обратные» функции $\xi_i(z_i, y_i)$, которые определяют требования к результату деятельности предшественника i -го агента в зависимости от действия и результата деятельности последнего.

Агрегированная технология производственной цепочки легко записывается в явном виде:

$$z_n = Q(y_N, z_0) = Q_n(y_n, Q_{n-1}(y_{n-1}, Q_{n-2}(y_{n-2}, \dots, Q_2(y_2, Q_1(y_1, z_0)))))).$$

Например, для функции типа Кобба — Дугласа $Q_i(y_i, z_{i-1}) = A_i (y_i)^\alpha (z_{i-1})^{1-\alpha}$, где константы $A_i > 0$, $\alpha \in [0; 1]$, выражение (17) примет вид:

$$z_n = (z_0)^{(1-\alpha)^n} \prod_{i=1}^n [A_i (y_i)^\alpha]^{(1-\alpha)^{(n-i)}}.$$

Аналогично, при заданном выходе z_n , можно записать систему требований к результатам деятельности агентов:

$$z_i = \xi_{i+1}(\xi_{i+2}(\dots, y_{n-1}, \xi_n(z_n, y_n)), y_i), \quad i = \overline{0, n-1}.$$

Задача (5)—(8) с учетом результата утверждения 1 примет вид:

$$\lambda(Q(y_N, z_0)) Q(y_N, z_0) - \sum_{i=1}^n c_i(y_i) \rightarrow \max_{y_N \in \mathbb{R}_n^+}. \quad (18)$$

Пример 2. Пусть технологическая функция линейна: $Q_i(y_i, z_{i-1}) = B_i y_i + z_{i-1}$, цена λ постоянна, а затраты агентов квадратичны: $c_i(y_i) = (y_i)^2 / (2r_i)$, где константы

$B_i > 0$, $r_i > 0$. Тогда выражение (17) примет вид: $z_n = z_0 + \sum_{i=1}^n B_i y_i$, а решением задачи (18) является $y_i^* = \lambda B_i r_i$, $i = \overline{1, n}$.

5. КАЛЕНДАРНОЕ ПЛАНИРОВАНИЕ

Выше рассматривались задачи «объемного» планирования (в терминах календарно-сетевого планирования и управления (КСПУ) [4—6]), например, задача планирования (8). Для того, чтобы иметь возможность рассматривать задачи календарного планирования, введем в модель САС зависимости $t_i(y_i)$ времени деятельности i -го агента от выбираемого им действия, $i = \overline{1, n}$.

Обозначим через $T(y_N)$ длину критического пути в сети G при векторе действий агентов y_N .

Для заданного выхода сети x можно найти множество пар «затраты — продолжительность» $\{(C(y_N); T(y_N)) \mid y_N \in A(x)\}$, характеризующих варианты достижения заданного результата и позволяющих производить двухкритериальное сравнение этих вариантов в терминах КСПУ.

Пример 3. Пусть в условиях примера 2 имеет место линейная зависимость времени деятельности агента от его действия: $t_i(y_i) = \alpha_i y_i$, $i = \overline{1, n}$.

$$\text{Тогда } T(y_N^*) = \lambda \sum_{i=1}^n \alpha_i B_i r_i.$$

6. РАСШИРЕННЫЕ ПРЕДПРИЯТИЯ

В работе [1] отмечается, что в последние десятилетия имеет место тренд существенной трансформации принципов образования связей в организационно-технических системах, прежде всего — снижение роли организационных связей. Интеграция в современном мире стала глобальной, особенное развитие получила такая форма организации, как *расширенные предприятия* — совокупности предприятий и фирм, объединенные едиными технологическими процессами и связями без юридического и финансового объединения. В расширенных предприятиях основными являются технологические связи, а не организационная структура или акционерный капитал.

Приведенная выше модель компенсаторного стимулирования в САС может рассматриваться как модель расширенного предприятия, где на основе технологии предприятие-интегратор (центр) централизованно производит все расчеты с агентами с учетом всей «производственной кооперации» (технологической сети).

Линейная система стимулирования может рассматриваться как модель расширенного предпри-



ятия, где закупка производственных факторов производится на рынке (или имеет место «централизованный хозрасчет» в рамках фиксированного состава САС) и осуществляется сборка в соответствии с технологией. Эффективность такой САС (в силу утверждения 2) ниже, чем централизованной.

Внешний рынок. Рассмотрим модель, в которой агент может, помимо обеспечения требуемого своего результата для САС, работать, используя те же производственные мощности, и на внешний рынок, реализуя на нем свои действия (обладающие определенной «аддитивностью») в объеме $v_i \geq 0$ по известной ему и центру цене $\rho_i \geq 0$. Целевая функция агента с учетом выражения (9) имеет вид:

$$g_i(x, v_i) = c_i(y_i(x)) + u_i + \rho_i v_i - c_i(y_i(x) + v_i), \\ i = \overline{1, n}. \quad (19)$$

Так как при фиксированных x и системе стимулирования (9) первые два слагаемые в выражении (19) — константы, то в силу предположения А.2 оптимальный уровень реализуемых на рынке действий определяется как

$$v_i(x) = c_i'^{-1}(\rho_i) - y_i(x), \quad i = \overline{1, n}. \quad (20)$$

В силу предположения А.2 первое слагаемое в выражении (20) монотонно по рыночной цене, поэтому минимальная рыночная цена, при которой i -му агенту еще выгодно предлагать на рынок свои «дополнительные» (помимо $y_i(x)$) действия, равна $c_i'(y_i(x))$.

Рассмотрим две альтернативы для агента. Первая — участвовать в САС и, быть может, работать на внешний рынок; вторая — отказаться от участия в САС и работать только на внешний рынок в оптимальном для себя объеме $c_i'^{-1}(\rho_i)$. Сравнение выигрышей агента в этих двух случаях обосновывает

Утверждение 4. *Участие в САС выгодно для агента, если*

$$\rho_i y_i(x) \leq c_i(y_i(x)) + u_i, \quad i = \overline{1, n}. \quad \blacklozenge \quad (21)$$

С учетом утверждения 4 множество реализуемых САС значений выходов сети примет вид $Z_0 = \{x \geq 0 \mid A(x) \neq \emptyset, (21)\}$. Выше было показано, что $\rho_i \geq c_i'(y_i(x))$, $i = \overline{1, n}$.

Утверждение 5. *При линейных системах стимулирования агент, имеющий возможность работать на внешний рынок, согласится участвовать в САС только тогда, когда*

$$\rho_i = \gamma_i = c_i(y_i(x)), \quad i = \overline{1, n}. \quad \blacklozenge \quad (22)$$

Справедливость утверждения 5 следует из того, что объединение двух систем неравенств — (15) и (21) — совместно тогда и только тогда, когда выполнено условие (22).

Содержательно утверждение 5 тривиально — если центр применяет линейную систему стимулирования и предлагает агенту ставку оплаты, меньшую рыночной, то последний не согласится участвовать в САС. Отметим, что при этом мы не учитываем организационные и информационные издержки центра и агентов, эти издержки заслуживают отдельного исследования, и их введение в модель может изменить результаты, соответствующие утверждениям 4 и 5.

Пример 4. В условиях примера 2 выражение (20) примет вид:

$$v_i = (\rho_i - \lambda B_i) r_i, \quad i = \overline{1, n},$$

а система неравенств (21): $\lambda B_i r_i (\rho_i - \lambda B_i / 2) \leq u_i$, $i = \overline{1, n}$. \blacklozenge

Рассмотренная выше модель «внешнего рынка» соответствует случаю:

— ограниченных ресурсов агента, когда он вынужден оптимизировать их распределение для получения максимального выигрыша;

— «конфликтных» отношений центра и агента, когда они «делят выигрыш» от совместной деятельности.

Следствием этих априорных предположений становится фундаментальный вывод, что оптимальна компенсаторная схема стимулирования, основной принцип которой «дать агенту ровно столько, сколько ему необходимо для осуществления желаемого центру действия». Отчасти это обусловлено тем, что центр делает ход первым, предлагая «правила игры» агенту (см. обсуждение множества компромисса в работе [9]).

Другими словами, именно дефицит ресурсов приводит к тому, что центр и агент «жестко делят» ограниченный совокупный выигрыш.

Однако современный уровень развития технологий и экономики в целом характеризуется существенным смягчением ограничений на финансовые ресурсы, а, следовательно (на «длинном периоде времени»), и материально-технические, и трудовые ресурсы. Это создает предпосылки возникновения иных, кооперативных отношений между центром и агентом, когда они не столько делят выигрыш, сколько совместно увеличивают его. Поэтому имеет смысл расширить рассмотренную выше постановку задачи.

Дополним две рассмотренные выше альтернативы для агента (участвовать в САС и, быть может, работать на внешний рынок; или — отказаться от участия в САС и работать только на внешний рынок в оптимальном для себя объеме) третьим вариантом — расширения деятельности агента.

Предположим, что i -й агент (самостоятельно или совместно с центром) может привлечь дополнительные ресурсы и трансформировать свою технологию деятельности: заменить в сети G единый элемент с технологической функцией $z_i = Q_i(y_i, z_{i-1})$, $i = \overline{1, n}$, и функцией затрат $c_i(y_i(x))$ на совокупность из M_i одинаковых «производственных элементов» с теми же самыми технологической функцией и функцией затрат. «Аддитивность» действий агента предполагает возможность для агента распределять «план» $y_i(x) + v_i$ для реализации между производственными элементами. Если $c_i(0) = 0$, то монотонность и выпуклость функции затрат с очевидностью подсказывает целесообразность назначать каждому из производственных элементов план как можно меньшего размера, а число элементов M_i — выбрать соответственно требуемому плану $y_i(x) + v_i$.

Вместе с тем, очевидно, существует ограничение снизу на размер реализуемого плана — технологическая функция $Q_i(y_i, z_{i-1})$ не может быть реализована для действий y_i , меньших некоторого априори известного, задаваемого технологией деятельности агента и центра, уровня α_i . Тогда для каждого плана $y_i(x) + v_i$ найдется оптимальная организация агента, состоящая из $M_i = [(y_i(x) + v_i)/\alpha_i]$ производственных элементов (где $[\cdot]$ обозначает целую часть числа). «Оптимально организованный агент» будет иметь исходную технологическую функцию $z_i = Q_i(y_i, z_{i-1})$, при этом функция затрат трансформируется к виду

$$c_i^*(y_i) = [y_i/\alpha_i]c_i(a_i) + c_i(y_i - [y_i/\alpha_i]a_i) + b_i, \quad (23)$$

где b_i — известная константа, отражающая затраты на организацию агента. В качестве отступления отметим, что для того, чтобы избавиться от требования $c_i(0) = 0$, можно считать, что b_i — затраты на организацию одного производственного элемента, а второе слагаемое в выражении для функции затрат считать равным $[y_i/\alpha_i]b_i$. Заметим, что для «трансформированной» функции затрат (23) справедливо соотношение:

$$c_i^*(y_i) \leq \frac{c_i(a_i)}{a_i} y_i + b_i, \quad (24)$$

причем равенство достигается в точках $y_i = a_i P$, где P принимает натуральные значения. Такая трансформация будет выгодна, прежде всего, центру. При любых размерах плана $y_i(z) \geq y_i^{\text{гп}}$ (где граничное значение $y_i^{\text{гп}}$ — решение относительно y уравнения $c_i(y) = [y/\alpha_i]c_i(a_i) + c_i(y - [y/\alpha_i]a_i) + b_i$),

трансформация снижает размер компенсируемых центром затрат агента.

Проанализируем выгоду агента от трансформации, используя выражение для его целевой функции (19) с учетом трансформированной функции затрат (23) и соотношения (24):

$$g_i^*(x, v_i) = c_i^*(y_i(x)) + u_i + \rho_i v_i - [(y_i(x) + v_i)/\alpha_i]c_i(a_i) - c_i((y_i(x) + v_i) - [(y_i(x) + v_i)/\alpha_i]a_i) - b_i, \quad i = \overline{1, n}. \quad (25)$$

Рассмотрим поведение целевой функции при возрастании v_i от нуля.

Прежде всего, определим минимальный уровень цен ρ_i , при которых агент будет заинтересован работать на внешний рынок; для этого продифференцируем целевую функцию (25) по v_i :

$$\frac{dg_i^*(x, v_i)}{dv_i} = \rho_i - c_i'((y_i(x) + v_i) - [(y_i(x) + v_i)/\alpha_i]a_i), \quad i = \overline{1, n}. \quad (26)$$

Из выражения (26) видно, что агент будет заинтересован работать на внешний рынок только при ценах $\rho_i \geq c_i'(y_i(x) - [y_i(x)/\alpha_i]a_i)$. Заметим, что данное пороговое значение цен строго меньше порогового значения $c_i'(y_i(x))$ в случае функции затрат без трансформации (см. выражение (22)).

В выражении (25) первые два слагаемых ($c_i^*(y_i(x)) + u_i$) и последнее (b_i) не зависят от v_i . Поэтому для дальнейшего анализа перепишем целевую функцию, опустив эти слагаемые:

$$g_i^{**}(x, v_i) = \rho_i v_i - [(y_i(x) + v_i)/\alpha_i]c_i(a_i) - c_i((y_i(x) + v_i) - [(y_i(x) + v_i)/\alpha_i]a_i), \quad i = \overline{1, n}.$$

Нетрудно показать, учитывая соотношение (24), что при $\rho_i > c_i(a_i)/a_i$, начиная с некоторого значения аргумента v_i , функция $g_i^{**}(x, v_i)$ будет строго положительной и неограниченно возрастающей с ростом v_i . В этом случае оптимальным для агента уровнем реализуемых действий будет весь доступный объем рынка.

Таким образом, выгода трансформации для агента заключается, прежде всего, в снижении порога цен, при которых ему выгодно работать на рынке, а также в возникновении условий, при которых оптимальный уровень реализуемых на рынке действий $v_i(x)$ совпадает с объемом рынка, т. е. агенту выгодно «захватить весь рынок».

Разделение выигрыша от трансформации между центром и агентом зависит от их взаимной информированности:



— если центр знает функцию затрат агента, он получит свою долю выигрыша, применяя трансформированную функцию затрат (23) вместо исходной; агент получит свою долю выигрыша, реализуя действия на внешнем рынке и затрачивая на это меньше усилий;

— если центр не знает о возможности и/или факте трансформации, то весь выигрыш достанется агенту.

Приведенное рассуждение имеет смысл дополнить следующим содержательным соображением, выходящим за рамки данной формальной модели. Для любой трансформации агента необходимо определенное изменение технологии всей САС, элементом которой является агент. А это может сделать только центр. Поэтому с содержательной точки зрения агент, как правило, не может не проинформировать центр об изменении технологии. В свою очередь центру могут потребоваться дополнительные затраты для трансформации всей технологии САС, которые, могут компенсироваться из выигрыша агента (в частности, от реализации действий на внешнем рынке) или центра, в зависимости от их договоренностей. Таким образом проявляется необходимость кооперативных стратегий для описанной трансформации.

Приведенная модель хорошо иллюстрирует выгоды кооперативного поведения агента и центра, но не учитывает такие факторы, как: необходимость ресурсов для трансформации, неопределенность спроса — доступный объем рынка, информированность центра и агента о рынке, наличие конкурентов, динамика спроса и поведения агента и центра во времени. Все перечисленные факторы усложняют модель и служат предметом дальнейших исследований.

Модель «самоорганизации». В заключение настоящего раздела рассмотрим модель побочных платежей между агентами (условно назовем ее моделью «самоорганизации» САС), заключающуюся в следующем: будем считать, что центр отсутствует (условно, его роль выполняет n -й агент (соответствующий выходу сети), т. е. тот, чей результат представляет ценность для внешней среды), а агенты договариваются между собой (сеть G и технологические функции каждого агента являются среди них общим знанием), что они реализуют значение выхода сети x , причем в случае, когда каждый из агентов выбрал требуемое действие ($y_i = y_i(x)$, $i = \overline{1, n}$) i -й агент выплачивает j -му агенту сумму $\sigma_{ij}(x) \geq 0$, $i, j = \overline{1, n}$, а если хотя бы один агент выбрал действие, отличающееся от требуемого, то все платежи равны нулю.

Утверждение 6. Для любого значения выхода сети, реализуемого в САС с «самоорганизацией», существует компенсаторная система стимулирова-

ния агентов центром, реализующая то же значение выхода сети и обеспечивающая не меньшее суммарное значение выигрышей центра и всех агентов.

Доказательство утверждения 6. Фиксируем произвольное значение $x \in A(x)$ выхода сети, реализуемого в САС с «самоорганизацией». Легко проверить, что при фиксированной системе побочных платежей $\{\sigma_{ij}(x)\}$ выбор требуемых действий будет равновесием Нэша игры агентов в нормальной форме при условии, что каждому агенту в равновесии обеспечивается выигрыш, не меньший его резервной полезности, т. е.

$$\lambda(x)xI(i = n) + \sum_{j \in R_i} \sigma_{ji}(x) - c_i(y_i(x)) - \sum_{j \in R_i} \sigma_{ij}(x) \geq u_i, \\ i = \overline{1, n}, \quad (27)$$

где $I(\cdot)$ — функция-индикатор.

Если система неравенств (27) совместна, то, суммируя все ее n неравенств, получим

$$\lambda(x)x - \sum_{i \in N} c_i(y_i(x)) \geq \sum_{i \in N} u_i.$$

Следовательно (см. выражение (11)), $\lambda(x)x - C(x) \geq 0$ (сравните с выражением (12)), т. е. компенсаторная система стимулирования (9) реализует то же значение выхода сети с не меньшей эффективностью. ♦

Результат утверждения 6 гласит, что для любой САС с «самоорганизацией» найдется «централизованная» САС, условно говоря, не меньшей эффективности. Отметим, что мы не учли информационные и когнитивные затраты агентов на необходимый в первом случае поиск системы побочных платежей $\{\sigma_{ij}(x)\}$, удовлетворяющей системе неравенств (27), а также то, что, возможно, набор таких платежей будет не единственным. Более того, если рассматривать теоретико-игровой процесс «переговоров» агентов о выборе конкретной системы побочных платежей (например, в рамках игры формирования сети [2, 13]), то задача еще более усложнится и потребует от них немалых временных и когнитивных усилий, а также наличия механизмов «наказания» отклоняющихся от достигнутого соглашения (в «централизованном» случае роль такого органа выполняет центр, в «децентрализованном» случае — судебная система и/или репутационные воздействия и т. п.).

Для полноты картины осталось рассмотреть случай, когда в САС с «самоорганизацией» используются линейные побочные платежи. Результат очевиден и формулируется как

Следствие. При линейных побочных платежах между агентами множество реализуемых значений выходов САС не шире, чем при произвольных побочных платежах. ♦

Действительно, добавление к системе неравенств (27) набора условий

$$\sigma_{ij}(x) = \begin{cases} \gamma_{ij}y_j(x), & (j, i) \in E, \\ 0, & (j, i) \notin E, \end{cases}$$

отражающих пропорциональность побочных платежей действиям агентов, не расширяет множество ее решений.

7. ИЕРАРХИЧЕСКИЕ ИГРЫ В СЕТЕВЫХ АКТИВНЫХ СИСТЕМАХ

Взаимодействие между агентами выше рассматривалось в рамках *игр в нормальной форме*, в которых игроки выбирают свои действия однократно, одновременно и независимо. Выбор центром системы стимулирования (например, (9)) и сообщение ее агентам соответствует *иерархической игре* типа $\Gamma_2(\Gamma_0)$ в терминологии работ [9, 14]. В то же время, в рамках общих теоретико-игровых моделей сетевых организационных систем [10] было показано, что последовательность принятия решений (выбора действий/стратегий, быть может, условных, т. е. являющихся функционалами от действий других игроков) соответствует «иерархии» оргструктуры, и наоборот.

Применение этого общего подхода к САС затруднено спецификой последних, заключающейся в том, что конечную ценность для внешней среды представляет выход сети — результат агента с номером n , т. е. он и только он получает всю выручку от реализации результатов. Поэтому рассматривать модели, в которых агенты принимают решения в последовательности, соответствующей возрастанию рангов (см. § 1), не имеет смысла, так как ни один агент, кроме n -го, не может «пообещать» никакого «вознаграждения» другим агентам. Поэтому остаются два варианта — либо отождествить n -го агента с центром (тогда получаем модель, рассмотренную в § 2), либо интерпретировать в терминах иерархических игр модель самоорганизации, когда агенты должны выбирать условные стратегии («договариваться» с остальными) в порядке, соответствующем их рангам. Однако такая интерпретация представляется громоздкой и искусственной.

8. «ФРАКТАЛЬНЫЕ» СЕТЕВЫЕ АКТИВНЫЕ СИСТЕМЫ

В работе [1] отмечается, что комплексная деятельность, как правило, имеет фрактальную структуру — когда КД декомпозируется на элементы, которые в свою очередь являются КД. Поскольку САС претендуют на описание КД, то *фрактальной* назовем такую САС, агент которой сам является САС.

В рамках рассматриваемой в настоящей работе модели САС агент описывается своей технологической функцией, отображающей вектор его вхо-

дов и действие в результат деятельности (выход): $z_i = Q_i(y_i, z_{N_i})$, а также функцией затрат $c_i(y_i)$. Сетевая активная система в целом описывается агрегированной технологией, отображающей вектор ее входов и вектор действий агентов в результат деятельности САС в целом (выход сети): $x = Q(y_N, z_0)$, а также, в соответствии с утверждением 1, *функцией затрат САС*, которую определим как
$$c(y_N) = \sum_{i=1}^n (c_i(y_i) + u_i).$$

Утверждение 7. Если технологические функции (функции затрат) всех агентов удовлетворяют предположению А.3 (соответственно А.2), то и агрегированная технология САС (функция затрат САС) удовлетворяет предположению А.3 (А.2).

Справедливость утверждения 7 следует, прежде всего, из того, что граф G является сетью с единственным выходом, и, зная значение этого выхода и действия всех агентов, можно однозначно восстановить значения входов сети. Далее, легко убедиться, что операция суммирования сохраняет гладкость, монотонность и выпуклость функции нескольких переменных. Таким образом, САС наследуют свойства своих элементов.

К сожалению, свойство А.1 не наследуется при переходе к агрегированному описанию САС.

Пример 5. Пусть технологические функции агентов имеют вид (17), а все коэффициенты комплектности равны единице (легко видеть, что такие технологические функции удовлетворяют предположению А.3). Тогда агрегированная технология САС имеет вид

$$x = \min \left\{ \min_{j=1, L} \{z_j\}; \min_{j=1, n} \{y_j\} \right\} \quad (28)$$

и также удовлетворяет предположению А.3.

Технологию (28) условно можно назвать *жесткой*, так как результат определяется минимальным из входов САС и действиями входящих в нее агентов. Для жесткой технологии, в силу предположения А.2 и связности графа G (независимо от структуры), имеет место: $A^*(x) = A(x) = \{(x, \dots, x)\}$, а задача (8) является задачей безусловной скалярной оптимизации:

$$x^* = \arg \max_{x \geq 0} \left[\lambda(x)x - \sum_{i=1}^n c_i(x) \right].$$

Например, если цена λ постоянна, а затраты агентов квадратичны: $c_i(y_i) = (y_i)^2 / (2r_i)$, то $x^* = \lambda / \sum_{i=1}^n \frac{1}{r_i}$. ♦

Таким образом, описание агента, входящего в САС, и самой САС полностью унифицировано — любая САС, удовлетворяющая предположениям А.2 и А.3 фрактальна!

Подобная унификация дает возможность представлять и рассматривать агентов как САС, и на-



оборот — агрегированно описывать САС или ее часть (подграф) как одного агента, причем без потери существенной информации или снижения эффективности управления. Данное свойство представляется чрезвычайно привлекательным для задач управления проектами [6], моделирования комплексной деятельности [1], комплексирования механизмов управления [15] и многих др.

Отдельной (и очень перспективной) задачей представляется исследование оптимальных по тем или иным критериям механизмов агрегирования и декомпозиции фрактальной структуры САС, причем в общем случае эти процессы могут быть как централизованными (осуществляться центром), так и/или децентрализованными (осуществляться «по инициативе» агента, групп агентов и т. д.).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Перспективными направлениями будущих исследований САС — сетевых активных систем — представляется развитие моделей:

— внутренней структуры агентов, детерминирующей свойства соответствующих технологических функций;

— синтеза оптимальной технологии (сети технологических функций и выбора последних — например, по аналогии с работами [16, 17]);

— выбора состава агентов (назначения), реализующих те или иные элементы технологии;

— кооперативного поведения групп агентов в САС;

— календарного планирования (например, в случае, когда $t_i(y_i, \sigma_i)$ — неубывающая по y_i и невозрастающая по σ_i функция) и распределения ресурса на сети;

— учитывающих неопределенность/риски деятельности агентов (например, если действия агентов принципиально ненаблюдаемые и невозстанавливаемые центром, то следует применять системы стимулирования, оптимальные в условиях неопределенности и/или агрегирования информации в задачах стимулирования [11]);

— распределенного контроля в САС [9];

— векторных действий и результатов деятельности агентов;

— надстройки управленческой иерархии над «технологическим графом» G — например, по аналогии с работами [18, 19];

— «фрактальных» САС как отражающих комплексирование механизмов управления [15], различных для разных вершин сети или их групп.

ЛИТЕРАТУРА

1. Белов М.В., Новиков Д.А. Методология комплексной деятельности. — М.: Ленанд, 2018. — 320 с.
2. Jackson M. Social and Economic Networks. — Princeton: Princeton University Press, 2010. — 520 p.
3. The Oxford Handbook of the Economics of Networks. — Oxford: Oxford University Press, 2016. — 856 p.
4. Бурков В.Н., Горгидзе И.А., Ловецкий С.Е. Прикладные задачи теории графов. — Тбилиси: ВЦ АН ГССР, 1974. — 232 с.
5. Голенко-Гинзбург Д.И. Стохастические сетевые модели планирования и управления разработками. — Воронеж: Научная книга, 2010. — 284 с.
6. Математические основы управления проектами / ред. В.Н. Бурков. — М.: Высшая школа, 2005. — 423 с.
7. Mechanism Design and Management: Mathematical Methods for Smart Organizations. — N.-Y.: Nova Science Publishers, 2013. — 163 p.
8. Белов М.В. Организация современной производственной программы и управление ею: состояние и тенденции развития // Управление проектами и программами. — 2015. — № 2. — С. 86—99.
9. Novikov D.A. Theory of Control in Organizations. — N.-Y.: Nova Science Publishers, 2013. — 341 p.
10. Новиков Д.А. Сетевые структуры и организационные системы. — М.: ИПУ РАН, 2003. — 101 с.
11. Новиков Д.А., Цветков А.В. Механизмы стимулирования в многоэлементных организационных системах. — М.: Апостроф, 2000 — 184 с.
12. Myerson R.B. Game Theory: Analysis of Conflict. — London: Harvard University Press, 1997. — 584 p.
13. Kupferman O., Tamir T. Hierarchical Network Formation Games / A. Legay, T. Margaria (eds.) Tools and Algorithms for the Construction and Analysis of Systems. TACAS 2017. Lecture Notes in Computer Science. — Berlin: Springer, 2017. — Vol. 10205. — P. 229—246.
14. Гермейер Ю.Б. Игры с противоположными интересами. — М.: Наука, 1976. — 327 с.
15. Бурков В.Н., Коргин Н.А., Новиков Д.А. Проблемы комплексирования и декомпозиции механизмов управления организационно-техническими системами // Проблемы управления. — 2016. — № 5. — С. 14—23.
16. Воронин А.А., Харитонов М.А. Модель адаптации операционного ядра организации // Вестник ВолГУ. Сер. 1. Математика. Физика. — 2016. — № 4. — С. 44—65.
17. Воронин А.А., Харитонов М.А. Модель численной оптимизации структуры операционного ядра организации // Управление большими системами. — 2012. — № 39. — С. 165—183.
18. Губко М.В. Математические модели оптимизации иерархических структур. — М.: Ленанд, 2006. — 264 с.
19. Мишин С.П. Оптимальные иерархии управления в социально-экономических системах. — М.: ПМСОФТ, 2004. — 207 с.

Статья представлена к публикации руководителем РРС А.А. Ворониным.

Белов Михаил Валентинович — канд. техн. наук, зам. ген. директора, компания ИБС, г. Москва, ✉ mbelov59@mail.ru,

Новиков Дмитрий Александрович — чл.-корр. РАН, директор, Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, г. Москва, ✉ novikov@ipu.ru.

СПОСОБЫ ОЦЕНКИ ФАКТОРОВ ИЕРАРХИЧЕСКОЙ ГИБРИДНОЙ КОГНИТИВНОЙ КАРТЫ НА ПРИМЕРЕ ОЦЕНКИ СОСТОЯНИЯ ТЕПЛОПОТРЕБЛЕНИЯ РЕГИОНОВ

М.П. Силич, В.А. Силич, С.В. Аксенов

Изложены способы получения нечеткой оценки факторов при анализе иерархической когнитивной карты, описывающей сложную многофакторную ситуацию. Оценки текущего состояния факторов, связанных с индикаторами, определяются путем интерпретации значений индикаторов. Предложена процедура автоматического построения функций принадлежности, особенности которой состоят в учете наличия выбросов в выборке данных и учете различий во внешних условиях регионов. Оценки изменения состояния факторов определяются путем интерпретации приростных значений индикаторов, а также характеристик трендов. Применение предлагаемых способов оценки факторов проиллюстрировано на примере потребления тепловой энергии в субъектах РФ.

Ключевые слова: иерархическая гибридная когнитивная карта, нечеткая оценка, теплотребление регионов.

ВВЕДЕНИЕ

Иерархические гибридные когнитивные карты (ИГКК) [1] — это инструмент анализа сложной многофакторной ситуации в территориальных образованиях (ТО), применяемый для оценки состояния или изменения состояния факторов, влияющих на ситуацию. Примером объекта анализа может служить ситуация с эффективностью потребления того или иного вида энергоресурсов в субъектах Российской Федерации. Задача анализа — классифицировать ситуацию, дать оценку целевому фактору, позволяющую судить о наличии проблемы и ее глубине, а также выявить причины достигнутого состояния, сложившегося под влиянием множества разнообразных внешних и управляемых факторов.

Традиционно когнитивные карты применяются для решения двух типов задач. Один связан с анализом причинно-следственных связей между концептами и определением опосредованного влияния концептов. К этой группе задач относятся нахождение взаимного консонанса/диссонанса двух концептов или концепта и системы в целом, анализ устойчивости системы на основе выделения и

исследования контуров. Второй тип задач связан с оценкой состояния концептов путем распространения влияния от одних концептов к другим. Например, задаются начальные значения управляемых концептов и определяются значения остальных концептов с помощью процедур аккумуляции влияния входных концептов на выходной. Либо определяется, как изменение состояния управляемых концептов относительно начального состояния скажется на изменении состояния других концептов [2, 3].

В отличие от существующих видов когнитивных карт ИГКК ориентированы прежде всего на диагностику текущего состояния факторов или изменения состояния факторов за определенный период времени, опирающуюся на интерпретацию реальных данных. При анализе когнитивной карты только состояние факторов, для которых нет объективных измерителей, определяется с помощью процедур аккумуляции влияния других факторов, для остальных используются процедуры оценки по индикаторам. По результатам анализа формируется дерево причин. Дерево строится путем сопоставления каждому фактору его оценки. Причинно-следственные цепочки факторов при этом объясняют, почему, под воздействием каких

причин сложилось состояние того или иного фактора и, прежде всего, целевого фактора, являющегося фокусом ситуации.

При разработке способов оценки факторов по индикаторам необходимо учитывать, что один и тот же фактор может быть оценен по множеству индикаторов, и не всегда их значения могут быть однозначно интерпретированы. Целесообразно использовать нечеткие лингвистические оценки. К тому же, оценки, выраженные в терминах естественного языка, лучше воспринимаются лицами, принимающими решения. Поскольку параметры функций принадлежности, используемых для введения нечеткости, могут быть различными для различных периодов времени, желательно при построении функций принадлежности опираться не на субъективные мнения экспертов, а на анализ распределения значений индикаторов для множества ТО. При таком подходе оценка фактора для конкретного ТО будет сравнительной, выражать уровень по отношению к другим аналогичным ТО.

Еще одна проблема связана с тем, что одни и те же значения индикаторов могут по-разному интерпретироваться для ТО с разными внешними условиями. Для учета неоднородности региональных природно-климатических и социально-экономических условий применяют подход типологической группировки. Пример такого подхода для зонирования территориальных образований по признакам энергосбережения описан в работе [4]. Выделение групп регионов с приблизительно одинаковыми условиями выполняется на основе вычисления интегральной оценки по ряду показателей, характеризующих те или иные внешние факторы, и объединения в группы территорий с близкими значениями интегральной оценки. Подобный подход можно применять, однако желательно уйти от субъективизма при определении границ классов.

Настоящая статья посвящена разработке способов получения статических и динамических нечетких оценок факторов, представленных на иерархической гибридной когнитивной карте, с учетом перечисленных требований.

1. ВИДЫ ОЦЕНОК ФАКТОРОВ ИЕРАРХИЧЕСКОЙ ГИБРИДНОЙ КОГНИТИВНОЙ КАРТЫ

Иерархическая гибридная когнитивная карта представляет собой граф, вершинами которого служат концепты двух видов: факторы и индикаторы. Фактор — это качественное свойство, описывающее сложную проблемную ситуацию. Среди множества факторов выделяются управляемые факторы, состояние которых можно изменять пу-

тем непосредственного или опосредованного воздействия, и внешние, отражающие условия, сложившиеся на территории региона, на состояние которых в рамках системы невозможно повлиять.

Любому из факторов $s_j \in S$ может быть сопоставлен один или несколько индикаторов p_j ($p_j \in P$) — количественных показателей, на основе которых определяется оценка фактора. Отношению ассоциации $R^{SP} \subset S \times P$, связывающему фактор и индикатор, может быть приписан коэффициент соответствия v_{ij} ($-1 \leq v_{ij} \leq 1$). Отрицательное значение означает, что чем выше значение индикатора, тем ниже оценка фактора, положительное — что чем выше значение индикатора, тем выше оценка фактора. Значение коэффициента по модулю показывает, насколько точно индикатор характеризует фактор.

На множестве факторов устанавливаются отношения влияния $R^{SS} \subset S \times S$, каждому из которых может быть сопоставлен вес w_{ij} ($-1 \leq w_{ij} \leq 1$), характеризующий направление и силу влияния. Вес может быть переменной величиной, различной для разных объектов или групп объектов и для разных периодов времени. Поэтому на ИГКК отношения, сила влияния которых не является константой, помечаются только знаками «+» и «-». Сеть взаимовлияний факторов представляет собой дерево, корнем которого служит целевой фактор — один из управляемых факторов, характеризующий ситуацию в целом. К любому из факторов может быть присоединена дочерняя карта, что позволяет рассмотреть отдельные аспекты ситуации более подробно. На рис. 1 в качестве примера приведена од-

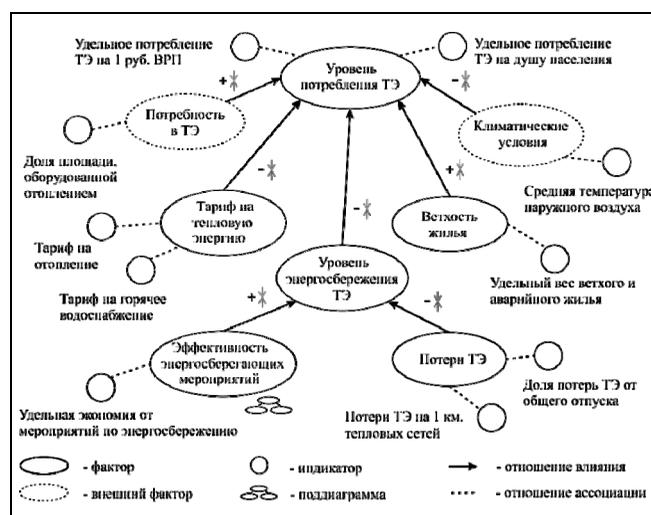


Рис. 1. Когнитивная карта для анализа потребления тепловой энергии: ВРП — валовой региональный продукт; ТЭ — тепловая энергия

на из иерархии когнитивных карт, разработанных для анализа энергетической эффективности субъектов РФ, а именно, карта для анализа уровня потребления тепловой энергии (ТЭ) в регионах.

Анализ текущего состояния ситуации в определенный период времени (например, в заданном году) предполагает определение статических оценок факторов. Исходными данными служат значения индикаторов для всех территориальных объектов (берутся средние значения за заданный период). На первом этапе оцениваются внешние факторы методом кластеризации. По каждому внешнему фактору выделяются группы ТО с близкими значениями индикаторов. Оценками служат наименования кластеров, отражающие типы внешних условий. На следующем этапе определяются оценки управляемых факторов, связанных с индикаторами, методом фазсификации по функциям принадлежности. Причем, если наблюдается влияние внешних факторов, оценки определяются с учетом типа внешних условий. На третьем этапе определяются оценки управляемых факторов, не имеющих индикаторов, с помощью процедур косвенного оценивания по оценкам влияющих факторов.

Анализ изменения состояния ситуации за определенный период времени (например, за несколько лет) заключается в определении динамических оценок факторов. Применяются те же способы оценки, что и для определения статических оценок, однако интерпретируются не средние значения индикаторов, достигнутые в заданный период, а разница между значениями на начало периода и его конец. Или, в случае анализа тенденции изменения, интерпретируются характеристики трендов, построенных на значениях временного ряда для всех территориальных образований.

На рис. 2 представлены виды оценок факторов, представленных на иерархической гибридной когнитивной карте.

В качестве способа оценки внешних факторов предлагается применять алгоритм нечеткой кластеризации, основанный на методе Густаффсона — Кесселя [5], отличительная особенность которого заключается в предварительной кластеризации входного набора данных алгоритмом Кохонена и оценке качества результата с помощью индекса Силуэта.

Косвенная оценка осуществляется либо путем логического вывода на продукционных правилах [6, 7], либо, если эксперт затрудняется с формулировкой правил или с формированием обучающей выборки для автоматической генерации правил, на основе операций с числами. В работе [8] предложена процедура оценивания выходного фактора, не имеющего индикаторов, на основе аккумуля-

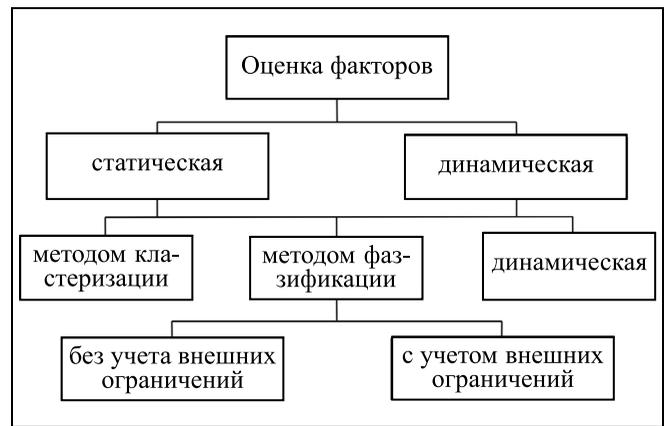


Рис. 2. Виды оценок факторов ИГКК

лирования влияния входных факторов, связанных с индикаторами, использующая операции с нечеткими числами ($L-R$)-типа.

Перейдем к рассмотрению способов определения статических и динамических оценок на основе интерпретации значений индикаторов.

2. СТАТИЧЕСКАЯ ОЦЕНКА ФАКТОРА БЕЗ УЧЕТА ВНЕШНИХ ОГРАНИЧЕНИЙ

Оцениваемый фактор s_i должен иметь хотя бы один индикатор $p_j (s_i R^{SP} p_j)$. Исходными данными служат значения индикаторов p_j для всех сравниваемых ТО, достигнутые в заданный период времени. Для измерения используются шкалы, относящиеся по типу к шкале разностей или отношений. Необходимо дать сравнительную оценку фактора для конкретного территориального объекта $o_k \in O$ в соответствии с расположением значений индикаторов для данного объекта относительно значений остальных ТО в координатном пространстве. При этом не учитываются различия во внешних условиях, в которых находятся территориальные объекты. Либо на оцениваемый фактор не влияют внешние факторы, либо это влияние игнорируется.

Фактору s_i сопоставляется лингвистическая переменная, характеризуемая терм-множеством $T^i = \{T_1^i, T_2^i, \dots, T_m^i, \dots, T_M^i\}$. Термы, представляющие собой нечеткие оценки типовых состояний фактора, задаются экспертом. На множестве термов должно быть задано отношение порядка: $T_1^i > T_2^i > \dots > T_M^i$. На множестве значений $X_j = \{x_k\}^j$ каждого индикатора p_j строятся функции принадлежности по числу термов, сопоставляющие зна-



чениям индикаторов степень уверенности в соответствующей оценке. Для термов, не крайних в упорядоченном ряду, используются функции принадлежности П-образного типа, например, трапецевидные $f_T(x, a, b, c, d)$. Для крайних термов используются Z-образные и S-образные функции. Это могут быть кусочно-линейные функции $f_{\downarrow}(x, a, b)$ и $f_{\uparrow}(x, a, b)$ [9].

Функции принадлежности строятся путем равномерного разбиения базового множества на пересекающиеся интервалы по числу термов. Удобно в качестве базового множества взять универсальную шкалу — действительные числа на интервале от 0 до 1. Для этого необходимо нормировать значения индикатора. Если коэффициент соответствия индикатора фактору положителен, нормирование выполняется по формуле

$$x_k^{norm} = \frac{x_k - x^{\min}}{x^{\max} - x^{\min}},$$

в противном случае по формуле

$$x_k^{norm} = 1 - \frac{x_k - x^{\min}}{x^{\max} - x^{\min}},$$

где x_k — значение индикатора для k -го объекта, x^{\min} — минимальное значение на всей выборке, x^{\max} — максимальное значение.

Необходимо учесть, что при фазсификации по нормированным значениям индикатора результат очень чувствителен к наличию выбросов в выборке значений. Например, если среди ТО имеется один с аномально высоким значением индикатора, то нормированные значения для большинства объектов будут невысокими. В результате может получиться, что только один объект получит, например, оценку «высокий уровень», остальные получат оценки «низкий уровень». Поэтому при определении максимального и минимального значений желательно исключить из рассмотрения значения, которые резко отличаются от других значений в собранном наборе данных.

Для нахождения выбросов формируется вариационный ряд $x_{(1)} \leq x_{(2)} \leq \dots \leq x_{(n)}$, в котором значения индикатора для всех объектов располагаются в порядке неубывания. Определяются спейсинги — расстояния между членами вариационного ряда. Кандидатом на выброс выбирается объект, которому соответствует максимальный спейсинг. Он должен находиться в начале или в конце ряда с учетом заданной верхней границы числа выбросов (как правило, 5 % от выборки).

Проверка выбранного элемента на выброс может выполняться разными методами [10]. Один из наиболее распространенных способов основан на межквартильном расстоянии. Расстояние между первым квартилем x_{Q1} и третьим x_{Q3} используется для вычисления интервала, за пределами которого значение считается выбросом. Иногда используют два интервала: так называемые внешние и внутренние границы для определения соответственно «значительного» и «незначительного» выброса. Внутренними границами служит интервал

$$[(x_{Q1} - 1,5(x_{Q3} - x_{Q1})), (x_{Q3} + 1,5(x_{Q3} - x_{Q1}))],$$

внешними — интервал

$$[(x_{Q1} - 3(x_{Q3} - x_{Q1})), (x_{Q3} + 3(x_{Q3} - x_{Q1}))].$$

Для интерпретации значений индикатора, являющихся выбросами, предлагается использовать составные термы, включающие в себя наименования крайних термов и модификатор «очень». Оценкой объекта с аномально низким значением будет «очень T_1^i », с аномально высоким — «очень T_M^i ». В качестве параметров функций принадлежности данных термов используются «внешние» и «внутренние» границы выбросов. Для терма «очень T_1^i » параметрами функции f_{\downarrow} будут:

$$a = x_{Q1} - 3(x_{Q3} - x_{Q1}),$$

$$b = x_{Q1} - 1,5(x_{Q3} - x_{Q1}),$$

где x_{Q1} , x_{Q3} — соответственно первый и третий квартиль на множестве значений индикатора. Для терма «очень T_M^i » параметры функции f_{\uparrow} будут принимать значения:

$$a = x_{Q3} + 1,5(x_{Q3} - x_{Q1}),$$

$$b = x_{Q3} + 3(x_{Q3} - x_{Q1}).$$

После построения функций принадлежности нечеткая оценка фактора s_i по индикатору p_j для объекта o_k получается путем фазсификации. В качестве оценки выбирается терм с максимальным значением функции принадлежности:

$$s_i(o_k|p_j) = \langle T_{m1}^i(o_k|p_j), \mu_{T_{m1}^i(o_k|p_j)} \rangle,$$

$$\mu_{T_{m1}^i(o_k|p_j)} = \max_m \{ \mu_{T_m^i(o_k|p_j)} \}.$$

Данная оценка не окончательная. Необходимо учитывать, что фактору может быть сопоставлено

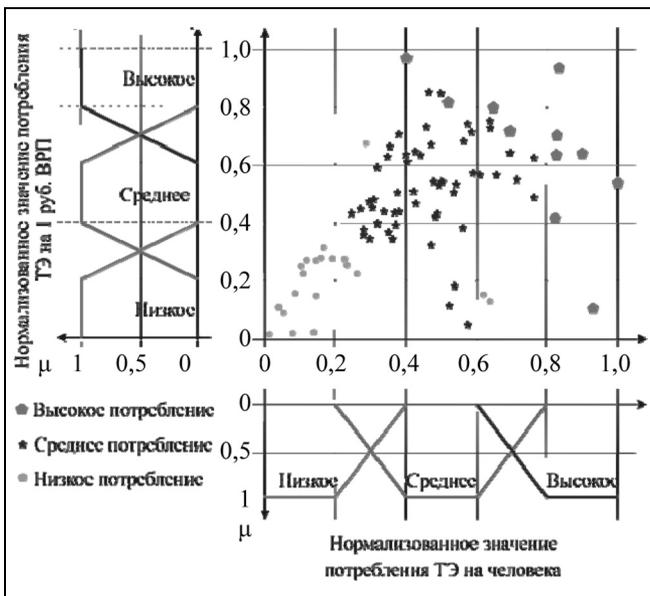


Рис. 3. Оценки текущего состояния фактора «Уровень потребления тепловой энергии» для субъектов РФ

несколько индикаторов, причем с разной степенью соответствия.

Если эксперт затрудняется в определении коэффициентов соответствия, то помочь ему может анализ взаимосвязи между индикаторами. Для каждой пары индикаторов, связанных с оцениваемым фактором, рассчитывается коэффициент корреляции. Если парный коэффициент корреляции отрицательный, то один из индикаторов должен иметь отрицательный коэффициент соответствия, а другой — положительный. По значению коэффициента корреляции можно судить о силе связи: чем она выше, тем ближе друг к другу должны быть значения коэффициентов соответствия. Если модуль коэффициента корреляции близок к единице, то имеет место дублирование, и один из индикаторов может быть исключен из рассмотрения. Если корреляция незначительна, то один из индикаторов также может быть исключен, так как скорей всего в такой ситуации индикаторы характеризуют не один и тот же фактор, а разные.

Коэффициент соответствия v_{ij} интерпретируется как степень уверенности в том, что индикатор p_j соответствует фактору s_i . С учетом этого значение функции принадлежности, полученное путем фаззификации, корректируется с помощью операции T -нормы, например, операции минимума (функция принадлежности «обрезается» на уровне $|v_{ij}|$).

Агрегирование оценок, полученных в результате фаззификации значений нескольких индикаторов, выполняется с помощью операции S -нормы,

например, операции максимума. Таким образом, агрегация выполняется по формуле:

$$\mu_{T_m^i(o_k)} = \max_j \{ \min(|v_{ij}|, \mu_{T_m^i(o_k|p_j)}) \}.$$

На рис. 3 приведен пример получения оценки фактора «Уровень потребления тепловой энергии» для субъектов РФ по значениям индикаторов «Удельное потребление тепловой энергии на душу населения, Гкал/чел» и «Удельное потребление тепловой энергии на рубль ВРП, Гкал/руб.», достигнутым в 2015 г.

3. СТАТИЧЕСКАЯ ОЦЕНКА ФАКТОРА С УЧЕТОМ ВНЕШНИХ ОГРАНИЧЕНИЙ

При определении оценки управляемого фактора нужно учесть, что для территорий с разными внешними условиями одни и те же значения индикаторов могут интерпретироваться по-разному. К примеру, одно и то же значение удельного потребления тепловой энергии на душу населения для региона с холодным климатом может оцениваться как «низкий уровень», а для региона с теплым климатом — как «средний уровень» или даже «высокий уровень».

На иерархической гибридной когнитивной карте различие внешних условий моделируется через влияние внешних факторов. Рассмотрим ситуацию, когда на оцениваемый фактор s_{i1} влияет фактор s_{i12} , являющийся внешним ограничением ($s_{i12} R^{SS} s_{i1}$).

Еще до оценивания управляемого фактора s_{i1} , должны быть выделены кластеры объектов с похожими внешними условиями, т. е. с одинаковыми оценками внешнего фактора s_{i2} . Нечеткая кластеризация по индикаторам, связанным с фактором s_{i2} , позволяет определить нечеткое покрытие множества O , которое задается матрицей $\|\mu_{O_l^{i2}(o_k)}\|$ значений функций принадлежности объектов $o_k \in O$

нечетким кластерам O_l^{i2} . Наименования кластеров $O_l^{i2} \subseteq O$ можно рассматривать как термы T_l^{i2} лингвистической переменной, сопоставленной фактору s_{i2} . Степень принадлежности кластеру трактуется как степень уверенности в оценке. Таким образом, нечеткая оценка внешнего фактора для объекта o_k может быть представлена в виде: $s_{i2}(o_k) = \langle T_l^{i2}(o_k), \mu_{T_l^{i2}(o_k)} \rangle$, где $\mu_{T_l^{i2}(o_k)} = \mu_{O_l^{i2}(o_k)}$.

Чтобы найти оценку управляемого фактора s_{i1} для объекта o_k по значению индикатора с помощью процедуры фаззификации на множестве уни-



версальных функций принадлежности, построенных на интервале действительных чисел $[0, 1]$, необходимо выполнить нормирование значения индикатора. При этом максимальное и минимальное значения, относительно которых выполняется нормирование, берутся не по всей выборке значений, а только в рамках того кластера, в который попал оцениваемый объект o_k , т. е. среди объектов, получивших такую же оценку по внешнему фактору s_{i2} , что и объект o_k .

После фаззификации по индикатору p_j , связанному с фактором s_{i1} , степень уверенности в оценке корректируется с учетом степени уверенности в оценке по внешнему фактору s_{i2} . Используются операции T -нормы, например, операция минимума:

$$\mu_{T_m^{i1}(o_k)|T_l^{i2}(o_k)} = \min\{\mu_{T_m^{i1}(o_k)}, \mu_{T_l^{i2}(o_k)}\},$$

где $\mu_{T_m^{i1}(o_k)}$ — значение функции принадлежности к оценке T_l^{i1} по управляемому фактору s_{i1} для объекта o_k , $\mu_{T_l^{i2}(o_k)}$ — значение функции принадлежности к оценке T_l^{i2} по внешнему фактору s_{i2} для объекта o_k .

В случае, если объект одновременно получил несколько оценок по внешнему фактору (попал сразу в несколько кластеров), оценки фактора s_{i1} , полученные с учетом каждой из оценок внешнего фактора s_{i2} , агрегируются с помощью операции S -нормы, например, операции максимума. Если на один и тот же фактор оцениваемый фактор влияет несколько внешних факторов, оценки, полученные с учетом влияния каждого отдельного внешнего фактора, агрегируются с помощью операции T -нормы.

4. ДИНАМИЧЕСКАЯ ОЦЕНКА ФАКТОРА

Динамическая оценка фактора — это оценка изменения его состояния за определенный период времени. Например, оценка изменения уровня потребления энергоресурса в текущем году по сравнению с уровнем потребления в некотором году, выбранном в качестве базы для сравнения. Нечеткая динамическая оценка управляемого фактора, имеющего индикаторы, определяется так же, как и нечеткая статическая оценка — путем фаззификации. Исходными данными служат множества значений индикаторов p_j , связанных с оцениваемым фактором s_j , для всех сравниваемых территориальных объектов o_k , достигнутые в конце

периода — $\{x_k^t\}^j$, и множества значений на начало периода — $\{x_k^b\}^j$.

В качестве базового множества для функций принадлежности должны выступать приростные значения индикаторов, отражающие разницу между значениями на конец и на начало периода. Однако использовать абсолютный прирост нецелесообразно, поскольку для разных показателей и разных интервалов времени приростные значения должны интерпретироваться по-разному. Например, снижение уровня потребления некоторого вида энергоресурса за пять лет и за год не должны оцениваться по одинаковым функциям. Предлагается нормировать абсолютный прирост отношением к максимальному приросту (по всем сравниваемым объектам). При этом функции строятся отдельно для области отрицательных приростных значений и для области положительных приростных значений. Нормирование приростных значений индикатора для объекта o_k выполняется по формуле:

$$\Delta x_k^{norm} = \begin{cases} -\frac{\Delta x_k}{\Delta x^{y6}}, & \Delta x_k < 0, \\ 0, & \Delta x_k = 0, \\ \frac{\Delta x_{ik}}{\Delta x^{np}}, & \Delta x_k > 0, \end{cases}$$

где $\Delta x_k = x_k^t - x_k^b$ — прирост значения индикатора для объекта o_k , $\Delta x^{y6} = |\min(0, \min_k \Delta x_k)|$ — максимальный отрицательный прирост (убыль), $\Delta x^{np} = \max(0, \max_k \Delta x_k)$ — максимальный положительный прирост.

Функции принадлежности строятся методом равномерного покрытия на интервале действительных чисел $[-1, 1]$. Примеры названий термов: «значительное снижение», «умеренное снижение», «незначительное снижение», «незначительное увеличение», «умеренное увеличение», «значительное увеличение». Для нулевого значения используется терм «без изменений». Соответствующая функция принадлежности вырождается в точку с координатами $(0, 1)$.

После фаззификации нормированных приростных значений индикаторов, как и при получении статической оценки, выполняется агрегирование оценок, полученных по различным индикаторам. Динамическая оценка может быть получена с учетом влияния внешних факторов, т. е. в рамках

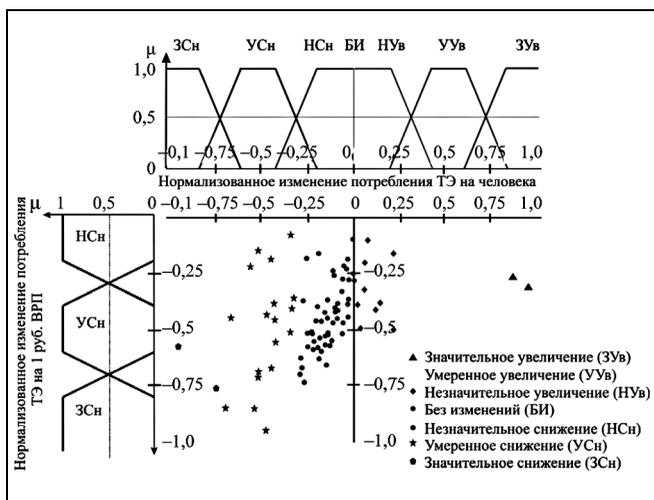


Рис. 4. Оценки изменения состояния фактора «Уровень потребления тепловой энергии» для субъектов РФ

групп территориальных образований с приблизительно одинаковым изменением внешних условий.

На рис. 4 приведен пример получения оценки изменения фактора «Уровень потребления тепловой энергии» для субъектов РФ за период с 2009 по 2014 г.

Еще один вид динамической оценки фактора — оценка тенденции изменения его состояния во времени за определенный период. Ее предлагается определять путем интерпретации характеристик трендов индикаторов.

Исходными данными служат множества значений индикаторов для всех ТО не только на начало и конец периода, но и на промежуточные моменты времени. Для каждого объекта на временных рядах значений индикаторов строятся линейные тренды. Основная характеристика линейного тренда — коэффициент уравнения линии тренда, показывающий среднее изменение значения за единицу времени. Положительный коэффициент означает тенденцию роста, отрицательный — тенденцию снижения. Чем больше модуль коэффициента, тем выше скорость роста/снижения. Нормируется коэффициент тренда так же, как и приростные значения индикаторов — путем деления в зависимости от знака (плюс или минус) на максимальный отрицательный коэффициент по всем ТО или на максимальный положительный коэффициент. Таким образом, можно использовать универсальные функции принадлежности на интервале действительных чисел $[-1, 1]$. Для интерпретации рекомендуется пользоваться терминами: «незначительное падение», «существенное падение», «резкое падение», «без изменений», «незначительный рост», «существенный рост», «резкий рост».

5. АНАЛИЗ СИТУАЦИИ В СФЕРЕ ТЕЛОПОТРЕБЛЕНИЯ РЕГИОНОВ

Рассмотрим применение предлагаемых способов оценивания факторов для получения сравнительных оценок факторов, характеризующих состояние сферы теплотребления в субъектах РФ. В качестве исходных данных воспользуемся данными Федеральной службы государственной статистики [11, 12]. Оценка уровня потребления тепловой энергии в субъектах РФ выполнялась по значениям удельного потребления на душу населения и на рубль ВРП за 2015 г. с учетом влияния климатических условий. Было выделено пять кластеров по средней температуре воздуха в зимний период времени. В рамках каждого кластера были определены степени принадлежности регионов к различным уровням (высокому, среднему, низкому) потребления тепловой энергии. Так, среди регионов с теплой зимой оценку «низкий» по фактору «Уровень потребления тепловой энергии» получили: республики Адыгея (со степенью уверенности 0,63), Дагестан (1,00), Ингушетия (1,00) и Чеченская республика (1,00); оценку «высокий» — Астраханская (0,90) и Волгоградская (1,00) области. В кластере регионов с очень холодной зимой уровень теплотребления был оценен как «низкий» в Ненецком автономном округе (1,00) и Ханты-Мансийском автономном округе (1,00); как «высокий» — в Ямало-Ненецком автономном округе (0,55) и Магаданской области (1,00). Для Чукотского автономного округа уровень был оценен, как «очень высокий» (1,00), так как значение удельного теплотребления на душу населения было определено как выброс.

Анализ изменения состояния факторов, влияющих на теплотребление в субъектах РФ, осуществлялся на основе оценки трендов индикаторов. Использовались данные за 2010—2015 гг. Анализ позволил сделать выводы, что в большинстве субъектов РФ уровень потребления тепловой энергии снизился. К группе регионов с оценкой «значительное падение» изменения состояния фактора «Уровень потребления тепловой энергии» были отнесены Ленинградская область (1,00) и Республика Башкортостан (1,00). Во множество регионов с оценкой «незначительный рост» вошли Липецкая (1,00), Орловская (1,00), Смоленская (1,0), Амурская (1,00), Магаданская (1,00) области, республики Калмыкия (0,62) и Дагестан (1,00). В республике Татарстан изменение уровня теплотребления было оценено как «резкий рост» (1,00). Причины увеличения различны. В ряде регионов, в частности в Липецкой, Орловской, Смоленской областях, в республике Дагестан увеличился удельный вес площади жилищного фонда, обору-



дованной отоплением, в общей площади всего жилищного фонда. Изменение состояния соответствующего фактора в данных субъектах РФ было оценено как «незначительный рост» или «существенный рост». В некоторых субъектах РФ наблюдалось увеличение потерь в тепловых сетях. Для Орловской области изменение состояния фактора «Потери тепловой энергии» было оценено, как «существенный рост» (0,54), для Амурской, Магаданской областей и республики Калмыкия — как «незначительный рост» (1.00).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Существуют различные пути решения проблемы оценки состояния сложной многофакторной ситуации, сложившейся в той или иной сфере социально-экономической деятельности территориального образования. Один из них состоит в применении иерархических гибридных когнитивных карт, на которых представлены причинно-следственные связи между факторами, влияющими на ситуацию, а также связи факторов с индикаторами, для определения оценок текущего состояния факторов или изменения их состояния. Оценки в виде нечетких лингвистических значений отражают качественный уровень по отношению к другим аналогичным территориальным образованиям. Предложены способы получения статических и динамических оценок факторов, основанные как на аккумуляции влияния других факторов, так и на интерпретации значений индикаторов, характеризующих ситуацию в сравниваемых территориальных образованиях в различные периоды времени.

Определение оценок по значениям индикаторов осуществляется методом фазификации по функциям принадлежности, формируемым автоматически (без учета субъективных мнений экспертов) с учетом выбросов в выборке значений. В качестве базового множества для статических оценок выступают нормированные средние значения индикаторов в заданный период времени, для динамических оценок — нормированный прирост значений или коэффициент тренда. Учитывается различие регионов по внешним условиям — климатическим, социально-экономическим, инфраструктурным. Оценки, полученные по различным индикаторам, связанным с одним и тем же фактором, агрегируются с учетом коэффициентов соответствия индикаторов фактору.

Применение предложенных методов оценки факторов для анализа ситуации в сфере теплопотребления субъектов РФ позволило определить регионы, имеющие проблемы в данной сфере, и выявить причины возникновения проблем. Методы могут быть полезны для анализа любых сложных

многофакторных ситуаций, не ограничиваясь энергопотреблением.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Силич М.П., Силич В.А., Аксенов С.В.* Анализ энергетической эффективности территорий на основе иерархии гибридных когнитивных карт // Известия Томского политехн. ун-та. — 2013. — Т. 323, № 5. — С. 26—32.
2. *Борисов В.В., Круглов В.В., Федулов А.С.* Нечеткие модели и сети. — М.: Горячая линия-Телеком, 2007. — 284 с.
3. *Авдеева З.К., Коврига С.В., Макаренко Д.И., Максимов В.И.* Когнитивный подход в управлении // Проблемы управления. — 2007. — № 3. — С. 2—8.
4. *Иванченко О.Г., Голованова Л.А.* Методические положения зонирования территории регионов по признакам энергосбережения // Вестник ТОГУ. — 2008. — № 2 (9). — С. 57—68.
5. *Silich V.A., Silich M.P., Axyonov S.V.* An Approach to Speed—up the Density—based Clustering via Gustaffson—Kessel Fuzzy Algorithm // Proc. of 6th Intern. Conf. on Computer and Electrical Engineering (ICCEE 2013). — Paris: ETP Press, 2013. — P. 167—172.
6. *Силич М.П., Силич В.А., Аксенов С.В., Ахмедов В.С.* Оценка ситуации с энергетической эффективностью в муниципальных образованиях на основе диаграммы влияния факторов // Энергобезопасность и энергосбережение. — 2012. — № 3. — С. 9—14.
7. *Силич В.А., Силич М.П., Аксенов С.В.* Алгоритм построения нечеткой системы логического вывода Мамдани, основанный на анализе плотности обучающих примеров // Доклады Томского гос. ун-та систем управления и радиоэлектроники. — 2013. — № 3 (29). — С. 76—82.
8. *Силич В.А., Силич М.П., Аксенов С.В.* Косвенная оценка факторов энергетической эффективности территориальных образований // Новые информационные технологии и системы: сб. науч. ст. XI Междунар. науч.-техн. конф. (г. Пенза, 25—27 ноября 2014 г.). — Пенза: Изд-во ПГУ, 2014. — С. 210—213.
9. *Леоненков А.В.* Нечеткое моделирование в среде MATLAB и fuzzyTECH. — СПб.: БХВ-Петербург, 2003. — 736 с.
10. *Чуракова И.Я.* Направления использования методик выявления аномальных наблюдений при решении задач операционного менеджмента. Научный доклад № 13 (R) — 2010. — СПб.: ВШМ СПбГУ, 2010. — 27 с.
11. *Единая межведомственная информационно-статистическая система [Государственный интегрированный статистический ресурс]. — URL: <http://www.fedstat.ru/indicator/data.do> (дата обращения 25.05.2017).*
12. *Официальный интернет—портал Федеральной службы государственной статистики. — URL: <http://www.gks.ru/> (дата обращения 25.05.2017).*

Статья представлена к публикации членом редколлегии О.П. Кузнецовым.

Силич Мария Петровна — д-р техн. наук, профессор, Томский государственный университет систем управления и радиоэлектроники, ✉ mary.silich@yandex.ru,

Силич Виктор Алексеевич — д-р техн. наук, профессор, Национальный исследовательский Томский политехнический университет, ✉ vas@tpu.ru,

Аксенов Сергей Владимирович — канд. техн. наук, доцент, Национальный исследовательский Томский государственный университет, доцент, Томский государственный университет систем управления и радиоэлектроники, ✉ axyonov@tpu.ru.

АЛГОРИТМЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ИНФОРМАЦИИ ПРИ МАРКЕТИНГОВЫХ МЕРОПРИЯТИЯХ В ГРУППАХ ОНЛАЙНОВОЙ СОЦИАЛЬНОЙ СЕТИ

Е.Б. Грибанова

Представлены алгоритмы моделирования распространения информации и оценки вероятности влияния при реализации маркетинговых мероприятий в социальной сети на основе независимой каскадной модели. Приведены результаты расчета показателя вероятности влияния для сгенерированной случайным образом сети с заданными характеристиками.

Ключевые слова: социальные сети, маркетинговые мероприятия, каскадная модель, распространение информации.

ВВЕДЕНИЕ

В последнее время онлайн-социальные сети получили широкое распространение, в связи с этим они становятся привлекательной платформой для реализации маркетинговых мероприятий, где в короткий промежуток времени информация может быть донесена до большого количества людей и повлиять на их поведение. Компании заинтересованы в том, чтобы как можно большее количество участников сети сделали выбор в пользу их продукции и услуг и порекомендовало их другим пользователям. Благодаря значительному охвату аудитории онлайн-сетей, такое распространение информации способно существенно повысить объем продаж фирм [1]. Однако эффективное использование социальных сетей для продвижения товаров и услуг подразумевает решение ряда задач: определение участников с наибольшим влиянием для их выбора в качестве источников распространения информации [2, 3], оценка эффективности проведенных мероприятий, определение и максимизация степени распространения информации, прогнозирование результатов проводимых акций и др. Решение данных задач затрудняется из-за большого числа элементов представляющего социальную сеть графа, взаимодействующих во времени, и их характеристик, а также трудно предсказуемого поведения пользователей.

1. МОДЕЛИ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ИНФОРМАЦИИ

Для моделирования распространения информации используются как классические модели распространения заболеваний (модель SIR), продукции (диффузная модель Ф. Басса) среди населения, в основе которых лежат дифференциальные уравнения, так и имитационные агентные модели, предполагающие поэтапное моделирование поведения отдельных элементов сети в пространстве наиболее близко к реальному процессу [4].

К имитационному моделированию исследователи обращаются, когда невозможно получить аналитическое решение, а также при необходимости выполнения экспериментов для ответа на вопрос «что будет, если?» [5]. Имитационные модели дают возможность представления развития процесса в динамике наиболее близко к реальности, и в этом их преимущество. Таким образом, могут быть получены сведения об объекте, которые не могут быть исследованы с помощью аналитических моделей.

В настоящее время для изучения распространения информации в сети с учетом поведения отдельных узлов и их влияния на соседние вершины существуют две классические модели: независимая каскадная и линейная пороговая [6]. В ос-



нову этих моделей положено представление графа в виде

$$G = (V, E, W),$$

где V — узлы (или вершины) графа (в настоящей работе будут представлять собой пользователей сети), E — ребра графа (будут характеризовать связи между пользователями: пользователи являются «друзьями» или один из пользователей является «подписчиком» другого), W — веса — числа, случайно распределенные на интервале $[0, 1]$.

Вес $w_{v,u}$, ассоциированный с ребром $(v, u) \in E$ графа, представляет собой вероятность влияния узла v на узел u (в моделях различное обозначение этой величины).

Узлы графа могут находиться в двух состояниях: активном и неактивном. Активное состояние свидетельствует о том, что вершина передает информацию соседним узлам. В социальных сетях это выражается публикацией пользователем сообщения на своей странице, которое становится доступным для его друзей и подписчиков (оригинальное сообщение называется «постом», а сообщение, скопированное у другого пользователя, называется «репостом»). Информация распространяется в дискретные моменты времени, на начальном шаге активным является набор заданных вершин графа, в качестве которых могут выступать представители фирмы или выбранные ими пользователи. Их подписчики, делая репост сообщения, способствуют дальнейшему распространению информации, т. е. вершины графа на начальном шаге активируют соседние вершины, оказывая на них влияние. При этом каждой вершине присваивается пороговая величина T_u , которая может принимать значение от 0 до 1. Под активацией понимается изменение состояния соседнего узла с неактивного на активное. На следующем шаге рассматриваются активированные вершины и осуществляется активация связанных с ними соседних вершин. Процесс продолжается до тех пор, пока не будут выполнены все возможные активации.

В простой независимой каскадной модели правила распространения информации таковы: на очередном шаге активированный узел v имеет единственный шанс активировать неактивного соседа u с вероятностью $p \in [0, 1]$, которая ассоциирована с ребром $(v, u) \in E$; если активация выполняется успешно, то вершина на следующем шаге меняет свой статус с неактивного на активный.

В линейной пороговой модели на очередном шаге каждый неактивный узел находится под влиянием активных соседних узлов. Степень влияния активных узлов v_i на неактивный узел u выражается ассоциированной с ребром $(v_i, u) \in E$ вероят-

ностью $p(v_i, u)$. Таким образом, влияние активных узлов будет представлено суммой

$$\sum_{i=1}^l p(v_i, u) \leq 1,$$

где l — число активных узлов.

Правило активации вершин: если $\sum_{i=1}^l p(v_i, u) > T_u$, то статус узла u будет изменен с неактивного на активный.

Таким образом, проверка активации в независимой каскадной модели для неактивного узла будет выполнена столько раз, сколько вершина имеет активированных на предыдущем шаге соседних узлов, а в линейной пороговой модели — один раз.

В некоторых работах для изучения интерактивного поведения активных и неактивных узлов внутри заданной сети вместо линейной используется логистическая функция активации. В этом случае активация узла будет выполнена, если значение функции больше 0,5.

В литературе рассматриваются различные варианты реализации двух моделей распространения информации.

В работе [7] представлены имитационные алгоритмы C-Loop, T-Loop и E-Loop обхода графа для реализации независимой каскадной и линейной пороговой модели. В алгоритме C-Loop обход начинается с просмотра активных узлов и оценки их влияния на связанные с ними неактивные узлы. В алгоритме T-Loop осуществляется просмотр неактивных вершин и проверяется возможность их активации с помощью активных соседних узлов. Алгоритм E-Loop в отличие от двух предыдущих основан на переборе ребер графа: если одна связанная вершина активна, а другая неактивна, то статус неактивной вершины изменяется с заданной вероятностью.

Существуют работы, посвященные применению классических моделей для исследования продвижения продукции фирм среди населения. В частности, в качестве расширений классических моделей авторы определяют новую классификацию типов узлов или их состояний. Так, предложена IC-N-модель (каскадная модель с негативными мнениями), узлы графа которой могут находиться в состояниях: нейтральное, позитивное и негативное [8]. Данные состояния отражают мнения пользователей о продукции, и распространение информации соответствующими вершинами может способствовать как отказу от покупки, так и совершению покупки потенциальными потребителями. В статье [9] предложена пороговая модель с «цветными» узлами графа, характеризующими различные виды поведения участников сети: «пот-

ребители» и «рассказчики», которые могут выполнять распространение как положительного, так и отрицательного мнения о продукции. Принадлежность узлов графа к тому или иному типу определяется с помощью заданных вероятностей при их активации.

В работе [10] приведено описание методики оценки и прогнозирования влияния в социальной сети Twitter. Для вычисления показателей влияния была загружена история распространения сообщения и, в том числе, очередность размещения его на страницах. Влияние определялось тремя способами (если на момент активации узла активными являлись несколько соседних вершин) — показатель степени влияния был:

- присвоен пользователю, который первым сделал репост на своей странице;
- присвоен пользователю, который сделал репост последним;
- разделен поровну между всеми участниками, сделавшими репост.

Для прогнозирования влияния авторы воспользовались регрессионным деревом, определяющим показатель степени влияния в зависимости от числа подписчиков и числа репостов подписчиков.

В работе [11] рассмотрено распространение информации в онлайн сети с учетом исторических данных, в частности, сделано предположение: позитивные действия одного пользователя по отношению к другому (комментарии, лайки, репосты), как правило, вызывают ответную реакцию. Другими словами, вероятность активировать узел будет выше, если есть история взаимодействия между данными участниками. Кроме того, вероятность активировать узел выше, если данный узел был активирован ранее при передаче другой информации.

2. ОЦЕНКА ЭФФЕКТИВНОСТИ МАРКЕТИНГОВЫХ МЕРОПРИЯТИЙ

Данная работа посвящена разработке алгоритмов имитационного моделирования распространения информации и оценки вероятности влияния при реализации маркетинговых мероприятий в сообществах онлайн социальной сети, целью которых заключается и в привлечении новых подписчиков. Примером такой акции может служить проведение конкурса, для участия в котором пользователи должны вступить в группу и сделать репост указанной записи, а после обозначенного периода выбирается победитель, который и получает заявленный приз. Цель подобных мероприятий состоит в повышении лояльности к деятельности организации, а также в распространении информации о ней.

Об эффективности маркетинговых мероприятий позволяют судить показатели:

— увеличение числа подписчиков группы:

$$N_{new} = N_{last} - N_{init}$$

— относительный прирост числа участников группы:

$$g = N_{new}/N_{init}$$

где N_{new} — число новых подписчиков сообщества, N_{init} — число подписчиков до маркетинговых мероприятий, N_{last} — число подписчиков после маркетинговых мероприятий.

С помощью этих показателей можно выполнить оценку и сравнить маркетинговые мероприятия между собой.

Для решения другой важной задачи — прогнозирования результатов маркетингового мероприятия можно воспользоваться регрессионными моделями, представляющими в виде уравнения зависимость увеличения аудитории сообщества от различных факторов. Так, например, можно вычислить, сколько в среднем новых участников привлекает один подписчик группы, и на основании этой оценки сделать вывод о последствиях проводимого мероприятия.

Однако такие модели имеют существенный недостаток: они не учитывают структуру сети, а схема связей ее участников играет значительную роль в распространении информации.

В данной работе для имитации распространения информации в сети принята независимая каскадная модель. Выбор модели обусловлен ее более простой реализацией:

— в независимой модели осуществляется перебор активированных на предыдущем шаге узлов (в линейной пороговой модели необходимо выполнять перебор неактивных вершин);

— в линейной пороговой модели необходимо соблюдать ограничение на сумму вероятностей влияния соседних узлов (не больше единицы).

Группу социальной сети можно рассматривать как узел графа, который и будет активирован на начальном шаге (рис. 1). В зависимости от последовательности передачи информации различают вершины первого (подписчики), второго, третьего уровней и т. д. Увеличение числа подписчиков в результате маркетингового мероприятия будет равняться числу активированных узлов второго и последующих уровней. Так, на рис. 1 информация распространяется согласно независимой каскадной модели. Числа, соответствующие ребрам, — это влияние узлов верхнего уровня, а числа, соответствующие вершинам, — пороговые значения (активация происходит в случае, если влияние активного узла верхнего уровня больше порогового значения). Результатом распространения инфор-

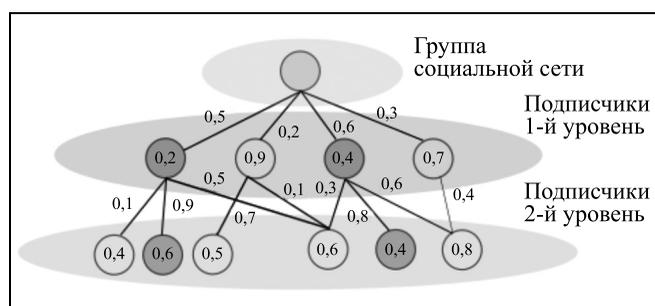


Рис. 1. Участники группы социальной сети

мации будет увеличение числа подписчиков на 2, относительный прирост составит 50 %.

При проведении исследований можно воспользоваться структурой реальной сети, а граф может быть сгенерирован случайным образом на основе вычисленных по реальным данным оценок показателей.

Среди моделей случайных графов наиболее популярны модели Эрдеша — Реньи [12] и Барабаши — Альберт [13]. При построении сети с помощью модели Эрдеша — Реньи определяется число ее узлов, а связь между двумя вершинами устанавливается независимо от других ребер с заданной вероятностью d . В модели Барабаши — Альберт по принципу предпочтительного присоединения добавляемый в граф узел присоединяется к существующей вершине с вероятностью, равной отношению ее степени к сумме степеней всех узлов [13]. Таким образом, степень наиболее связанных вершин будет увеличиваться быстрее. Также существуют различные модификации этих моделей, например, в модели Buckley — Osthus [14] для определения вероятности, кроме степени вершины, также учитывается характеристика ее привлекательности.

Сеть можно представить с помощью матрицы смежности, число столбцов и строк которой равно числу участников. Элемент матрицы равен нулю ($a_{ij} = 0$), если участники, соответствующие строке и столбцу матрицы, не связаны друг с другом (не находятся друг у друга в друзьях) и равен единице ($a_{ij} = 1$), если они связаны (являются друзьями). На главной диагонали матрицы приводятся пороговые значения: $a_{ii} = T_u$.

Тогда создание связей в неориентированном графе согласно модели Эрдеша — Реньи будет выполнено следующим образом. Для каждого элемента a_{ij} , расположенного выше главной диагонали:

— смоделировать случайную величину z на интервале $(0, 1)$;

— выполнить проверку: если $z < d$, то $a_{ij} = a_{ji} = 1$, иначе $a_{ij} = a_{ji} = 0$.

Характеристикой связности соседних вершин узла служит коэффициент кластеризации: $Cl = k_1/k$, где k — число возможных пар соседних узлов, k_1 — число пар соседних узлов, связанных между собой.

Полученный показатель Cl представляет собой долю соседних вершин, связанных между собой. Чтобы определить коэффициент кластеризации для сети, нужно вычислить среднее значение из коэффициентов кластеризации вершин графа. Чем выше значение коэффициента кластеризации, тем больше число связей в графе и, следовательно, может быть активировано большее число узлов. Для случайного графа коэффициент кластеризации равен вероятности d [12].

3. АЛГОРИТМЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ИНФОРМАЦИИ ПРИ МАРКЕТИНГОВЫХ МЕРОПРИЯТИЯХ

В рассматриваемых далее алгоритмах предполагается, что маркетинговое мероприятие имеет вероятность влияния, равную некоторой постоянной величине, определяемой характеристиками этого мероприятия (для конкурсов это могут быть стоимость приза, качество представления информации и др.). Таким образом, числа, соответствующие ребрам (см. рис. 1), будут равны заданному значению p . В свою очередь, пороговое значение T_u (равномерное распределенное на интервале $(0, 1)$) каждого узла будет отражать, насколько данный предмет нужен и интересен конкретному u -му участнику сети. Если вероятность p будет равна нулю, то такое мероприятие не интересует ни одного участника сообщества, и информация о мероприятии не будет распространена, при вероятности $p = 1$ все участники сети, связанные с группой, будут активированы. Узел u активируется при условии $T_u < p$ и инициирует изменение своего состояния s с неактивного ($s_u = 0$) на активное ($s_u = 1$) и дальнейшее распространение информации.

Показатель вероятности влияния может быть использован для сравнения маркетинговых мероприятий между собой, а также для проведения экспериментов «что будет, если» и прогнозирования распространения информации в сети с другой структурой.

Рассмотрим алгоритм моделирования распространения информации (счетчик текущего номера списка устанавливается в значение $i = 1$).

Шаг 1. Поместить в список $N(i)$ вершину — группу.

Шаг 2. Если список $N(i)$ пуст, то завершение работы алгоритма.

Шаг 3. Присвоить значение 1 счетчику перебора элементов списка $N(i)$: $k = 1$.

Шаг 4. Извлечь из списка $N(i)$ k -ю вершину. Если число соседних вершин k -го узла равно 0, то переход на шаг 5. Иначе: переход на шаг 6.

Шаг 5. $k = k + 1$. Если $k = n + 1$, то $i = i + 1$, возврат на шаг 2. Иначе — возврат на шаг 4.

Шаг 6. Счетчик соседних вершин узла k устанавливается на единицу: $r = 1$ (число соседних вершин равно R).

Шаг 7. Если вершина не содержится в списке активированных вершин D и ее пороговое значение меньше вероятности $T_r < p$, то активируется узел: $s_r = 1$, и он помещается в список $N(i + 1)$ (вершин, распространяющих информацию на следующем шаге) и в список D (уже активированных вершин).

Шаг 8. $r = r + 1$. Если $r = R + 1$, то возврат на шаг 5, иначе — возврат на шаг 7.

На рис. 2 представлен пример распространения информации в двух сетях при маркетинговом мероприятии с вероятностью влияния $p = 0,5$. Прирост подписчиков для графа (рис. 2, а) составит $7/4 = 1,75$, для графа (рис. 2, б) — $5/4 = 1,25$, т. е. маркетинговые мероприятия будут иметь одинаковые вероятности влияния, однако в смысле прироста аудитории первое мероприятие будет более успешным, что связано с наличием в графе (рис. 2, а) большего числа связей узла первого уровня.

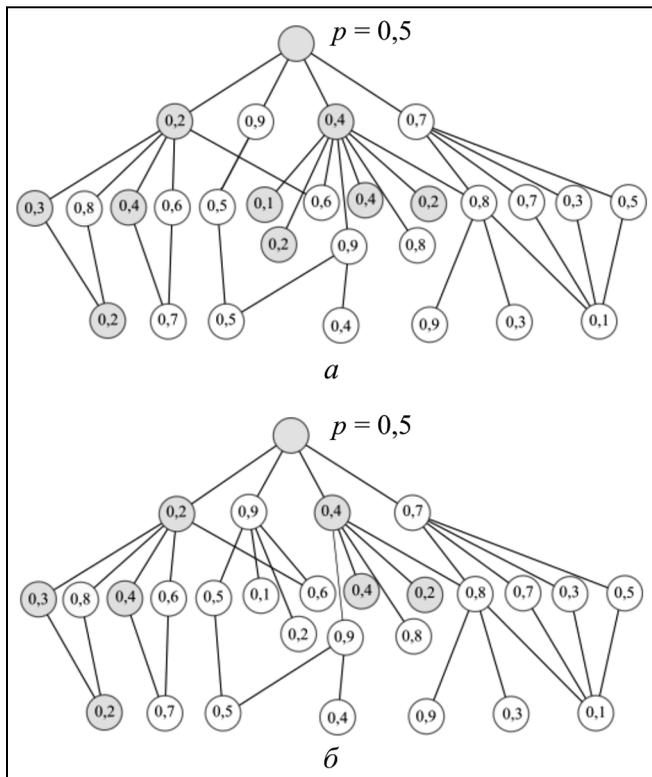


Рис. 2. Распространение информации в сети: а — число подписчиков 1,75; б — число подписчиков 1,25

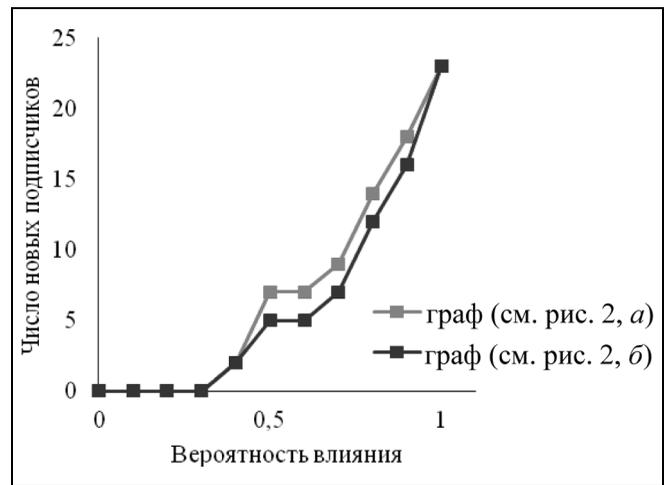


Рис. 3. Зависимость числа новых подписчиков от вероятности влияния

ня с пороговым значением 0,4. Поэтому при превышении вероятности влияния порогового значения 0,4 будет активировано большее число вершин (рис. 3).

Можно заметить, что вероятность влияния p определяет долю вершин pr , которая будет активирована узлом u :

$$pr_u = \frac{N_{active}}{N_{near}}$$

где N_{active} — число активированных соседних вершин, N_{near} — число соседних вершин, которые могут быть активированы (число вершин, связанных с узлом u , минус число уже активированных ранее).

Для всей сети может быть определено среднее значение доли активированных вершин:

$$Mpr = \frac{1}{l} \sum_{j=1}^l pr_j$$

где l — число активаций узлов в сети, способных передать информацию другим вершинам.

Другими словами, если узел был активирован и у него есть хотя бы одна неактивная соседняя вершина, то он учитывается при определении числа l .

Доля активированных вершин может быть практически определена путем нахождения отношения репостов, сделанных со страницы конкретного пользователя, к числу его подписчиков (исключая подписчиков, которые сделали репост с другой страницы).

Для графа (рис. 2, а) этот показатель

$$Mpr = \left(\frac{2}{4} + \frac{2}{5} + \frac{4}{8} + \frac{1}{1} + \frac{0}{1} \right) / 5 = 0,48.$$

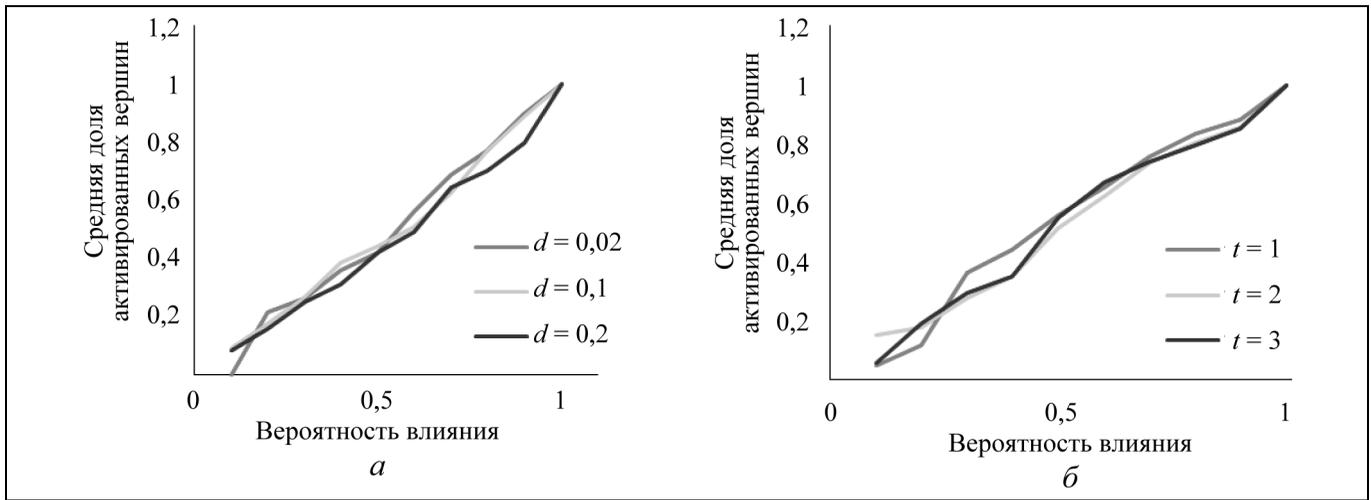


Рис. 4. Зависимости средней доли активированных вершин от вероятности влияния: *a* — для графа Эрдеша — Реньи; *б* — для графа Барабаши — Альберт

Для графа (рис. 2, *б*) средняя доля активированных вершин

$$Mpr = \left(\frac{2}{4} + \frac{2}{5} + \frac{2}{5} + \frac{1}{1} + \frac{0}{1}\right) / 5 = 0,46.$$

На рис. 4 представлены зависимости средней доли активированных вершин от вероятности влияния для двух случайных графов с числом вершин, равным 300. Граф (рис. 4, *a*) был создан с помощью модели Эрдеша — Реньи со значениями вероятностей связи, равными 0,02, 0,1 и 0,2, а граф (рис. 4, *б*) — с помощью модели Барабаши — Альберт (три различных реализации). Можно увидеть, что в случае моделей случайных графов значение средней доли активированных вершин для двух моделей близко к значению вероятности влияния. Следовательно, среднее значение доли активированных вершин может быть использовано в качестве оценки вероятности влияния.

Для более точной оценки показателя, а также в случае, когда не известна схема передачи информации, можно воспользоваться итерационной процедурой, осуществляющей последовательное изменение вероятности влияния до тех пор, пока масштаб распространения информации в модели сети не будет соответствовать реальному. Рассмотрим решение данной задачи с помощью показателей: числа подписчиков до мероприятия N_{ini} , числа новых подписчиков N_{new} (начальное значение счетчика случайных реализаций $j = 0$, число случайных реализаций равно Q , начальное значение вероятности влияния — p). Задача считается решенной, когда полученное число новых подписчиков будет равно заданному значению N_{new} с некоторой точностью σ :

Шаг 1. Увеличение числа реализаций: $j = j + 1$.

Моделирование распространения информации.

Шаг 2. Рассчитывается число активированных узлов второго и последующих уровней (новых подписчиков сообщества N_{new}^*). Запоминание значения с наименьшей ошибкой ε :

Если $|N_{new} - N_{new}^*| < \varepsilon$, то $p_{min} = p$, $\varepsilon = |N_{new} - N_{new}^*|$.

Шаг 3. Изменение показателя влияния. Проверка условия:

если $N_{new} > N_{new}^*$, то $p = p + \delta$,

если $N_{new} < N_{new}^*$, то $p = p - \delta$,

где δ — некоторое малое значение увеличения показателя влияния.

При этом значение p не может быть меньше нуля и больше единицы, поэтому в случае выхода за допустимые границы происходит корректировка.

Шаг 4. Если найдено решение с заданной точностью

$$|N_{new} - N_{new}^*| \leq \sigma,$$

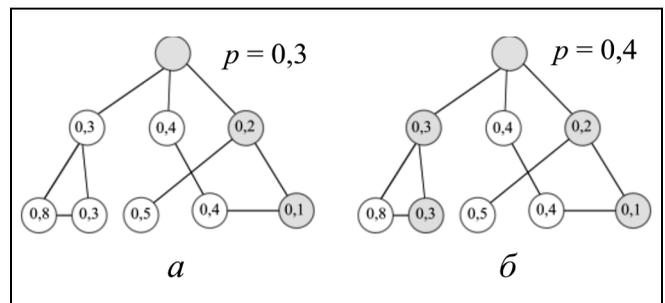


Рис. 5. Определение показателя влияния: *a* — $p = 0,3$; *б* — $p = 0,4$

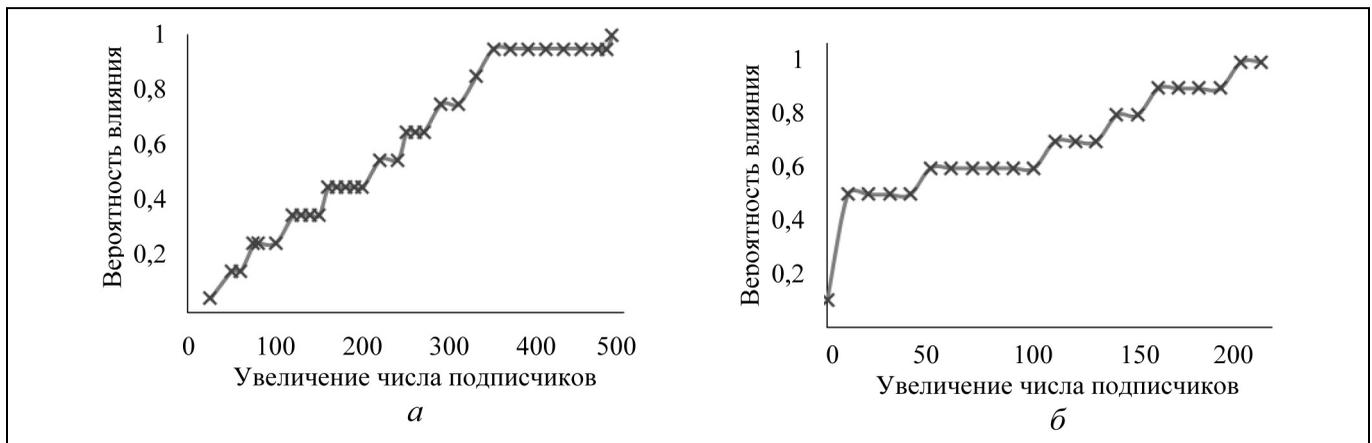


Рис. 6. Результаты определения показателя влияния: $a - d = 0,2, N = 500$; $b - d = 0,02, N = 300$

или выполнено заданное число реализаций $j = N$, то работа алгоритма завершается, иначе — переход на шаг 1.

Величина p_{\min} представляет собой найденное значение вероятности влияния.

На рис. 5 проиллюстрировано определение показателя для исходных данных $N_{\text{init}} = 3, N_{\text{new}} = 2, \delta = 0,1, \sigma = 0$. Полученное значение вероятности $p_{\min} = 0,4$. В сети (рис. 5, *a*) информация распространяется при $p = 0,3$. Число новых активированных узлов $N_{\text{new}} = 1$, что меньше заданного значения N_{new}^* , поэтому вероятность влияния увеличивается на величину $\delta = 0,1$. Распространение информации при $p = 0,4$ представлено на рис. 5, *б*. Поскольку в этом случае $|N_{\text{new}} - N_{\text{new}}^*| = 0$, то работа алгоритма завершается.

На рис. 6, *a* представлены результаты моделирования распространения информации в сети из 500 элементов характеристиками: вероятность $d = 0,2$ (модель Эрдеша — Реньи), число участников группы равно 14. Видно, что при увеличении числа новых подписчиков вычисленный показатель вероятности влияния будет больше. На рис. 6, *б* показано определение данного показателя для сети ($d = 0,02, N = 300$), в которой один из подписчиков имеет степень, значительно превышающую степень других вершин. Графически это выражается в резком увеличении числа подписчиков сообщества при превышении показателя вероятности влияния его порогового значения.

В случае, когда известна реальная схема распространения информации в сети, на шаге 1 описанного выше алгоритма пороговые значения определяются таким образом, чтобы число активированных узлов было как можно ближе к заданному значению увеличения подписчиков. Для такой настройки (решения задачи идентификации) может

быть применен случайный поиск [15], заключающийся в генерировании случайных пороговых значений вершин и определении такого набора, для которого ошибка будет минимальна. Таким образом, шаги алгоритма следующие (начальное значение счетчика случайных реализаций $j = 1$, число случайных реализаций равно Q).

Шаг 1. Сгенерировать для каждого узла i ($i = 1, \dots, N, N$ — число узлов графа) случайное пороговое значение T_i (равномерное распределение на интервале $(0, 1)$).

Шаг 2. Распространить информацию в сети с заданным значением p .

Шаг 3. Рассчитать ошибку:

$$\delta_j = \sum_{i=1}^N (s_i^* - s_i)^2,$$

где s_i^* — реальное состояние вершины графа (1 — активное, 0 — неактивное), s_i — состояние вершины графа в результате распространения информации на шаге 2.

Например, для графа (рис. 7) такая ошибка будет равна 4: числу узлов, имеющих разные статусы. На рис. 7, *a* представлен реальный граф, а на

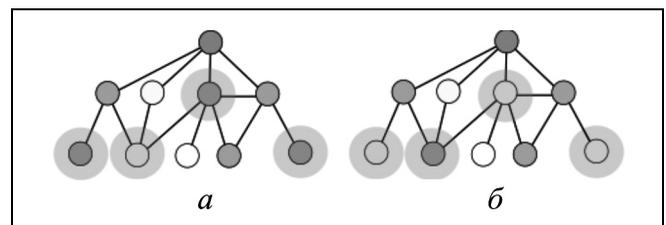


Рис. 7. Сравнение распространения информации в сетях: *a* — реальный граф; *б* — его модель



рис. 7, б — модель графа, активированные в результате распространения информации вершины закрашены.

Шаг 4. Запомнить пороговые значения, для которых ошибка минимальна: если $\delta_j < \delta_{\min}$, то запомнить пороговые значения T_j , $\delta_{\min} = \delta_j$.

Шаг 5. Проверка останова: если $j = Q$, то завершение работы алгоритма, иначе $j = j + 1$, переход на шаг 1.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассмотрены алгоритм моделирования распространения информации при проведении маркетинговых мероприятий на основе каскадной модели с заданным значением вероятности влияния, а также алгоритм определения показателя влияния с помощью итерационной процедуры. Приведены результаты вычислительных экспериментов на моделях случайных графов. Дальнейшие исследования будут направлены на оценку параметров модели сети на основе реальных данных сети в Контакте. Представленные алгоритмы могут быть полезны экономическим агентам для оценки результатов маркетинговых мероприятий, их сравнения и прогнозирования распространения информации.

ЛИТЕРАТУРА

1. Goyal S., Gagnon J. Social Networks and the Firm // *Revista de Administracao*. — 2016. — Vol. 51, — N 2. — P. 240–243.
2. Губанов Д.А., Чхартшвили А.Г. Влиятельность пользователей и метапользователей социальной сети // *Проблемы управления*. — 2016. — № 6. — С. 12–17.
3. Грибанова Е.Б., Катасонова А.В. Модель оценки групп социальной сети для реализации маркетинговых мероприя-

- тий // Доклады Томского гос. ун-та систем управления и радиоэлектроники. — 2017. — № 2. — С. 68–72.
4. Емельянов А.А., Власова Е.А., Дума Р.В. Имитационное моделирование экономических процессов. — М.: Финансы и статистика, 2014. — 416 с.
 5. Wang Q., Taylor J. Energy Saving Information Cascades In Online Social Networks: An Agent-Based Simulation Study // *Proc. of the 2013 Winter Simulation Conf. Washington, 2013*. — P. 3042–3050.
 6. Java A., Kolari P., Finin T. and Oates T. Modeling the Spread of Influence on the Blogosphere // *Proc. of the 15-th Intern. World Wide Web Conf.* — 2006.
 7. Jin J., Turner S.J., Lee B.-S., et al. HPC Simulations of Information Propagation over Social Networks // *Procedia Computer Science*. — 2012. — Vol. 9. — P. 292–301.
 8. Chen W, Collins A., Cummings R., et al. Influence Maximization in Social Networks when Negative Opinions May Emerge and Propagate // *Proc. of the 2011 SIAM Intern. Conf. on Data Mining*. — 2011. — P. 379–390.
 9. Bhagat S., Goyal A., Lakshmanan L. Maximizing Product Adoption in Social Networks // *Proc. of the 5-th ACM Intern. Conf. on Web Search and Data Mining*. — 2012. — P. 603–612.
 10. Bakshy E., Hofman J.M., Mason W.A., Watts D.J. Everyone's an Influencer: Quantifying Influence on Twitter // *Proc. of the 4-th Intern. Conf. on Web Search and Web Data Mining*. — 2011.
 11. Торопов Б.А. Модель независимых каскадов распространения репоста в онлайн-социальной сети // *Кибернетика и программирование*. — 2016. — № 5. — С. 61–67.
 12. Райгородский А.М. Модели случайных графов и их применения // *Тр. МФТИ*. — 2010. — № 4. — С. 130–140.
 13. Albert R., Barabasi A. Statistical mechanics of complex networks // *Reviews of Modern Physics*. — January 2002. — Vol. 74, N 1. — P. 47–97.
 14. Buckley P.G., Osthus D. Popularity based random graph models leading to scale-free degree sequence // *Discrete Mathematics*. — 2004. — Vol. 282. — P. 53–68.
 15. Грибанова Е.Б. Стохастический алгоритм поиска глобального минимума функции // *Прикладная информатика*. — 2017. — № 2. — С. 130–139.

Статья представлена к публикации членом редколлегии В.В. Клочковым.

Грибанова Екатерина Борисовна — канд. техн. наук, доцент, Томский государственный университет систем управления и радиоэлектроники, ✉ katag@yandex.ru.

Новая книга

Вишневский В.М., Семенова О.В. Системы адаптивного динамического поллинга с коррелированными входными потоками. Препринт. — М.: ИПУ РАН, 2017. — 88 с.

Научное издание посвящено обобщению и систематизации моделей стохастических систем циклического опроса и методов их исследований, а также новых моделей систем адаптивного динамического опроса с коррелированными входными потоками, адекватно описывающими функционирование широкополосных беспроводных сетей последующих поколений 5G. Данное издание предназначено для специалистов в области стохастических систем, проектировщиков телекоммуникационных сетей, аспирантов и студентов высших учебных заведений по специальности «теория вероятностей и математическая статистика», «системы, сети и устройства телекоммуникаций». Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда и DST (Индия) в рамках совместного проекта ИПУ РАН и Университета Махатма Ганди.

Рецензенты: д-р техн. наук Б.Т. Поляк, д-р техн. наук А.С. Мандель.

МОДЕЛИРУЮЩИЙ КОМПЛЕКС ДЛЯ АНАЛИЗА НЕБЛАГОПРИЯТНЫХ СОЧЕТАНИЙ СОБЫТИЙ В АВИАЦИОННЫХ ТРАНСПОРТНЫХ СИСТЕМАХ

А.С. Богомолов, В.А. Иващенко, В.А. Кушников, А.Ф. Резчиков,
А.Д. Цвиркун, Л.Г. Цесарский, Л.Ю. Филимонюк

Разработан подход к обеспечению безопасности авиационных транспортных систем на основе анализа возникающих неблагоприятных сочетаний событий с помощью предлагаемого моделирующего комплекса. Разработанный подход позволяет оценить вероятность возникновения критических сочетаний событий, приводящих к авариям, и определить меры по их предотвращению. Предложена информационно-логическая схема решения проблемы неблагоприятных сочетаний событий в авиационных транспортных системах, включающая в себя подсистемы поддержки принятия решений для экипажей, диспетчеров и другого персонала.

Ключевые слова: авиационная транспортная система, аварийная ситуация, неблагоприятное сочетание событий, информационно-логическая схема, поддержка принятия решений, моделирующий комплекс.

ВВЕДЕНИЕ

Развитие отечественного авиастроения, выход на зарубежные рынки авиаперевозок, надежное обеспечение обороноспособности страны невозможны без повышения уровня безопасности функционирования авиационных транспортных систем (АТС), снижения численности и тяжести аварий и катастроф, происходящих с воздушными судами (ВС). Один из перспективных путей решения данной задачи связан с применением современных средств обработки информации и совершенствования математического обеспечения АТС в целях анализа и предотвращения неблагоприятных сочетаний событий [1–7], приводящих к авариям и катастрофам.

Несмотря на большие успехи в области анализа надежности при проектировании [8–10], а также развития систем управления эксплуатацией АТС [11], актуальной проблемой остается возникновение аварийных ситуаций из-за непредвиденных неблагоприятных сочетаний событий, неопасных по отдельности. В настоящее время практически отсутствуют сведения об автоматизированных ком-

плексах, позволяющих осуществлять моделирование процессов функционирования АТС в целях управления по критерию безопасности полетов при возникновении неблагоприятных сочетаний событий.

Приведенные соображения обуславливают теоретическую и практическую значимость исследований, направленных на разработку моделирующего комплекса, включающего в себя модели и алгоритмы для решения задачи поддержки принятия решений при управлении АТС по критерию безопасности с учетом неблагоприятных сочетаний событий. Ниже предлагается формальная постановка задачи предотвращения неблагоприятных сочетаний событий.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ ПРЕДОТВРАЩЕНИЯ НЕБЛАГОПРИЯТНЫХ СОЧЕТАНИЙ СОБЫТИЙ

Пусть задан список аварийных и катастрофических ситуаций $\bar{A} = \{A_1, A_2, \dots, A_n\}$, каждая из которых возникает в результате неблагоприятных сочетаний событий, характерных для данного типа



АТС. Для каждого $A_i \in \bar{A}$ на основе анализа происшедших аварий построено дерево событий, характеризующее процесс возникновения и развития их неблагоприятных сочетаний. Множество всех деревьев событий обозначим через $\bar{D} = \{D_1, D_2, \dots, D_m\}$, $E = \{e_1, \dots, e_k\}$ — множество их терминальных вершин.

Пусть также известны интенсивности $\lambda_i(t)$, $i = \overline{1, k}$, возникновения событий из множества $E = \{e_1, \dots, e_k\}$. Через $\mu_i(t)$ обозначим интенсивности потоков парирования событий из множества $E = \{e_1, \dots, e_k\}$. Полагаем, что каждому значению $\mu_i(t)$ соответствует комплекс инструкций $Q(\mu_i(t))$, предназначенных для экипажа и других лиц, принимающих решения (ЛПР). Пусть $x(t)$ — состояние окружающей среды.

Требуется:

— на моделирующем комплексе при подготовке к полету для любого момента $t \in [t_n, t_k]$, t_n и t_k — начало и конец заданного интервала времени, определить вероятности $p_i(\lambda(t), x(t), \mu(t))$, $i = \overline{1, n}$, характеризующие возможность возникновения аварий и катастроф \bar{A} ;

— для аварий и катастроф из множества \bar{A} определить вектор воздействий $\mu(t) \in M(t)$, при которых на заданном интервале времени $[t_n, t_k]$ при всех допустимых состояниях окружающей среды $x(t) \in X(t)$ вероятности аварий не превышают заданных пределов:

$$\forall i \in \{1, \dots, n\} \quad p_i(\lambda(t), x(t), \mu(t)) \leq \varepsilon_i, \quad (1)$$

где $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ — заданные неотрицательные числа, предельные значения вероятностей аварий и катастроф.

При решении задачи рассматриваемый отрезок времени $[t_n, t_k]$ функционирования АТС разбивается на части таким образом, что на каждой из этих частей значения $\lambda_i(t)$, $i = \overline{1, k}$, рассматриваются как постоянные, что дает возможность применения однородной марковской модели. Число таких частей зависит от условий функционирования конкретной АТС.

2. ОСНОВНЫЕ ЭТАПЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ

Этап 1. Построение моделей процессов возникновения неблагоприятных сочетаний событий и разработка алгоритмов решения задачи.

1.1. Определение множества $\bar{A} = \{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ аварийных и катастрофических ситуаций.

1.2. Построить множество деревьев отказов $\bar{D} = \{D_1, D_2, \dots, D_m\}$, соответствующих авариям и катастрофам из множества \bar{A} , с множеством элементарных событий $E = \{e_1, \dots, e_k\}$.

Этап 2. Моделирование неблагоприятных сочетаний событий.

2.1. Построение комплексов для моделирования неблагоприятных сочетаний событий на различных этапах функционирования АТС.

2.2. Моделирование неблагоприятных сочетаний событий и уточнение вероятности их возникновения.

2.3. Занесение информации в базу данных и корректировка модели по результатам моделирования.

2.4. Разработка рекомендаций для экипажей, диспетчеров и другого персонала на различных этапах функционирования АТС.

3. ИНФОРМАЦИОННО-ЛОГИЧЕСКАЯ СХЕМА ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ В АТС ДЛЯ ПРЕДОТВРАЩЕНИЯ НЕБЛАГОПРИЯТНЫХ СОЧЕТАНИЙ СОБЫТИЙ

Предлагается информационно-логическая схема решения задачи предотвращения неблагоприятных сочетаний событий, рис. 1.

На рис. 1 приняты обозначения: 1, 2 — параметры, характеризующие процесс функционирования ВС и состояние экипажа соответственно; 3, 4 — параметры АТС, определяемые службами управления воздушным движением (УВД) и подготовки полета соответственно; 5 — сбор информации о процессе функционирования АТС, поступающей от датчиков и устройств локальной автоматики; 6 — запись информации в базу данных (БД) и базу знаний (БЗ); 7 — оценка ситуации при значительном отклонении параметров процесса функционирования АТС от заданных значений; 8 — идентификация текущих событий, влияющих на безопасность функционирования АТС; 9 — определение списка минимальных сечений, включающих в себя события из поз. 8; 10 — определение выполнимости критерия безопасности полета (1); 11 — критерий безопасности полета (1) нарушен?; 12 — сообщение о том, что критерий безопасности полета (1) не нарушен; 13 — занесение информации о опасных сочетаниях событий на сервер службы УВД; 14 — сообщение о том, что критерий (1) безопасности полета нарушен; 15 — занесение информации об опасных сочетаниях событий на сервер службы УВД; 16 — решение задачи предотвращения неблагоприятных сочетаний событий;

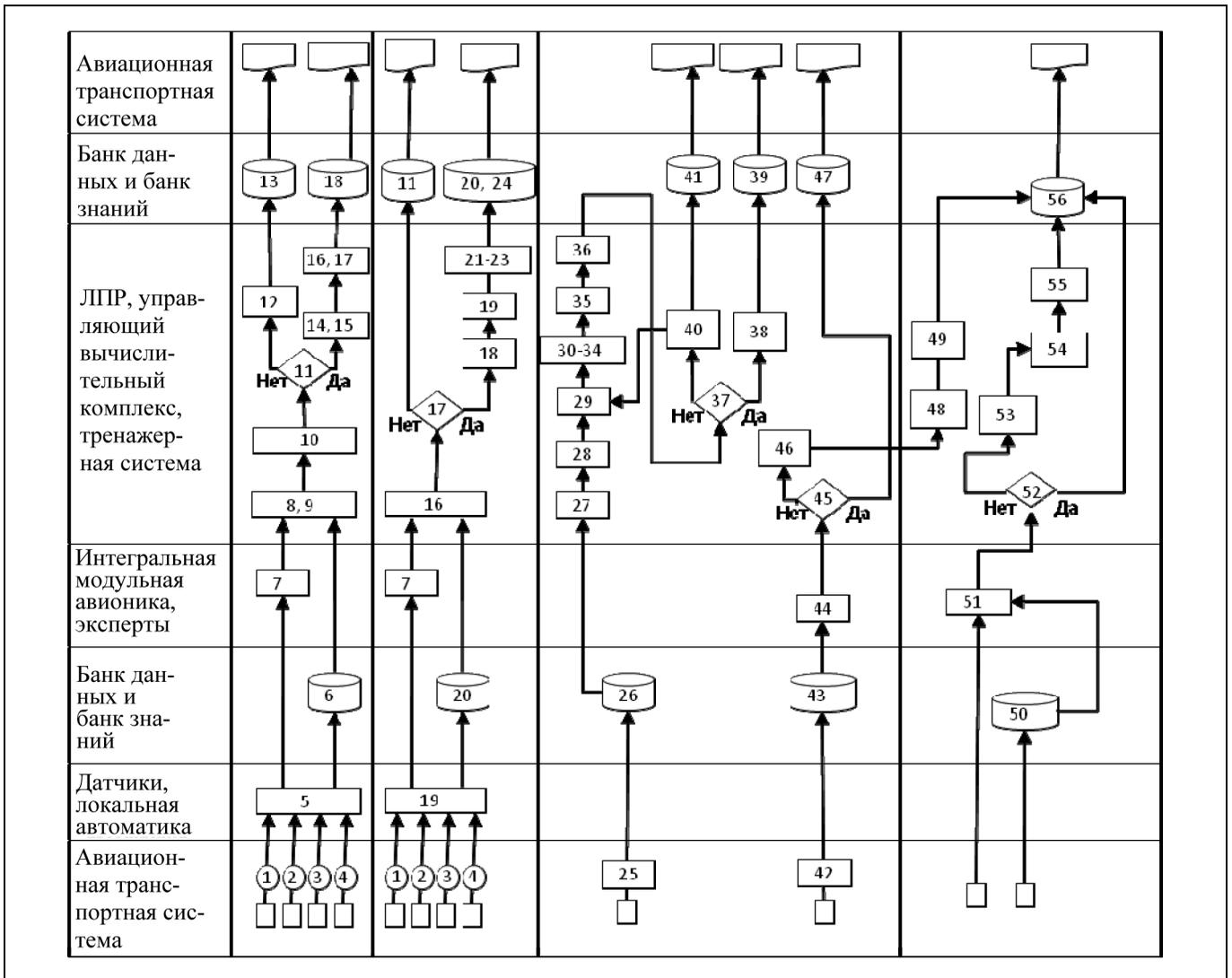


Рис. 1. Информационно-логическая схема принятия решений в АТС для предотвращения неблагоприятных сочетаний событий

17 — принятие и реализация решений экипажем или диспетчерами по устранению неблагоприятных сочетаний событий, которые могут привести к возникновению аварийных ситуаций; 18 — занесение информации о ситуации и принятых мерах по ее ликвидации на сервер службы УВД; 19 — сбор информации о текущем состоянии подсистем АТС; 20 — занесение информации в БД; 21 — выбор контролируемого списка неблагоприятных сочетаний событий; 22 — выдача сообщения о возникновении опасности неблагоприятного сочетания событий в процессе функционирования i -й подсистемы АТС; 23 — выдача рекомендации о действиях по устранению причин вероятной критической ситуации; 24 — занесение информации в БД; 25 — запуск тренажерной системы; 26 — вызов из БД дерева событий D^* , применяемого для обу-

чения экипажей и диспетчеров действиям при возникновении аварийных ситуаций, вызванных неблагоприятными сочетаниями событий; 27 — определение минимальных сечений дерева D^* , соответствующих различным сочетаниям событий; 28 — разработка алгоритмов решения задачи предотвращения неблагоприятных сочетаний событий для различных минимальных сечений; 29 — формирование блока тестовых заданий; 30 — построение диаграммы, характеризующей вероятности возникновения аварийных ситуаций при различных сочетаниях событий; 31 — определение перечня действий по устранению неблагоприятного сочетания событий; 32 — опрос обучаемого, какие неблагоприятные ситуации, по его мнению, необходимо учесть при принятии решений (выбрать из списка); 33 — ранжирование возникших

неблагоприятных сочетаний событий по степени их опасности и оценка вероятности их возникновения; 34 — формирование обучаемым списка мероприятий, необходимых для ликвидации причин возникшего неблагоприятного сочетания событий; 35 — сравнение списка действий, построенного обучаемым, с тестовым списком; 36 — оценка степени готовности обучаемого к принятию адекватных решений при возникновении различных неблагоприятных сочетаний событий; 37 — тест пройден успешно?; 38 — поощрение; 39 — занесение информации в БД об успешном обучении; 40 — разбор ошибок; 41 — занесение в БД; 42 — запуск процедуры сбора и анализа статистических данных о происшедших за месяц происшествиях, вызванных неблагоприятным сочетанием событий; 43 — определение повторяющихся происшествий; 44 — устранение причин возникновения повторяющихся неблагоприятных сочетаний событий; 45 — успешное?; 46 — выдача рекомендации о предотвращении неблагоприятного сочетания событий; 47 — занесение информации в БД; 48 — выдача рекомендаций об изменениях структуры АТС; 49 — внесение изменений в структуру АТС; 50 — накопление информации об управляющих воздействиях, реализованных в течение года; 51 — экспертная оценка размера экономического эффекта от ре-

лизации управляющих воздействий; 52 — уровень ожидаемого экономического эффекта от решения задачи достигнут или превышен?; 53 — анализ причин; 54 — коррекция плана действий, направленных на минимизацию ущерба от происшествий, вызванных неблагоприятным сочетанием событий; 55 — утверждение скорректированного плана действий; 56 — занесение информации в базу данных.

На рис. 2 приведена структура комплекса технических средств управления авиационной транспортной системой ПАО «Ил», в составе которой осуществляется внедрение информационно-управляющей системы (ИУС) на базе разработанного математического и информационно-программного обеспечения.

Для решения задачи управления АТС по критерию безопасности разработан комплекс математических моделей, включающий в себя совокупность деревьев отказов, характеризующих причины возникновения и пути развития аварийных и катастрофических ситуаций, вызванных неблагоприятными сочетаниями событий.

Построение деревьев отказов осуществляется методами достраивания и приведения, которые применяются при разработке ВС [8]. Например, для АТС на основе перспективного двухдвигатель-

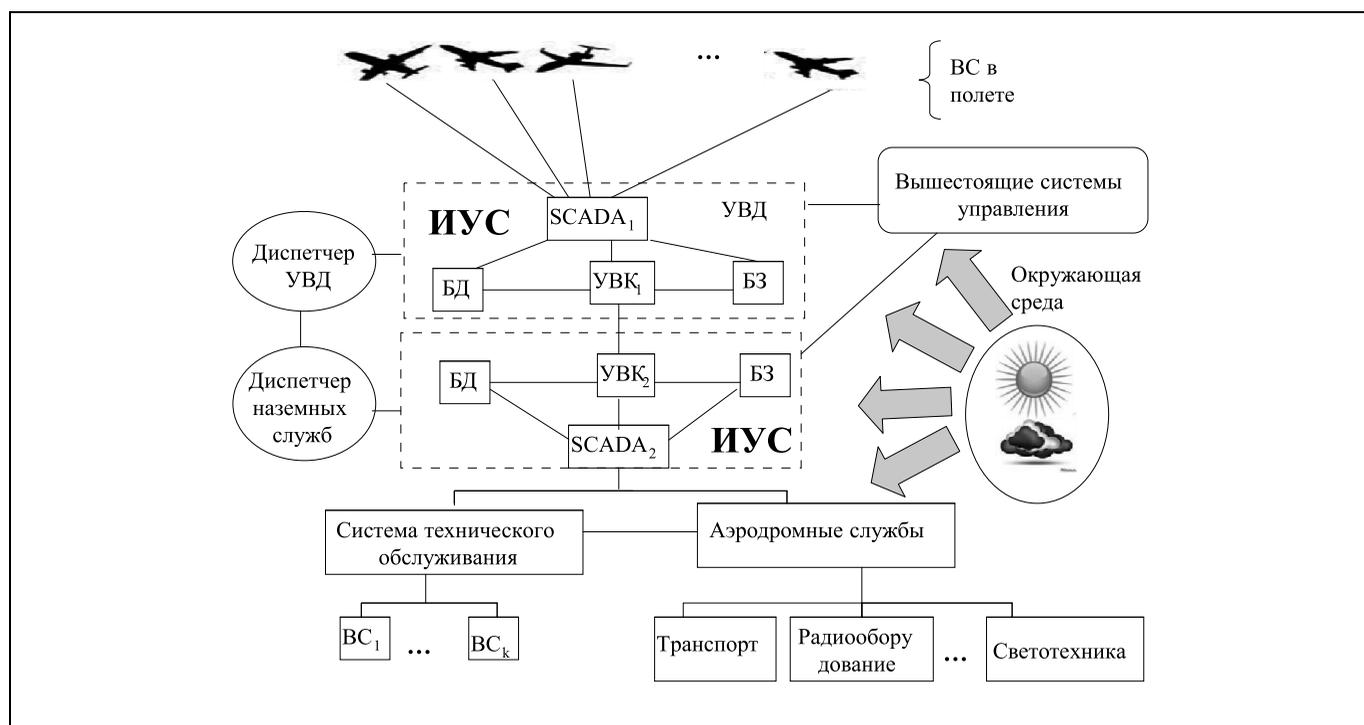


Рис. 2. Информационно-управляющая система для предотвращения неблагоприятных сочетаний событий в общей системе управления воздушным движением: ТС — транспортные средства; УВК — управляющий вычислительный комплекс; k — число воздушных судов в контуре системы технического обслуживания

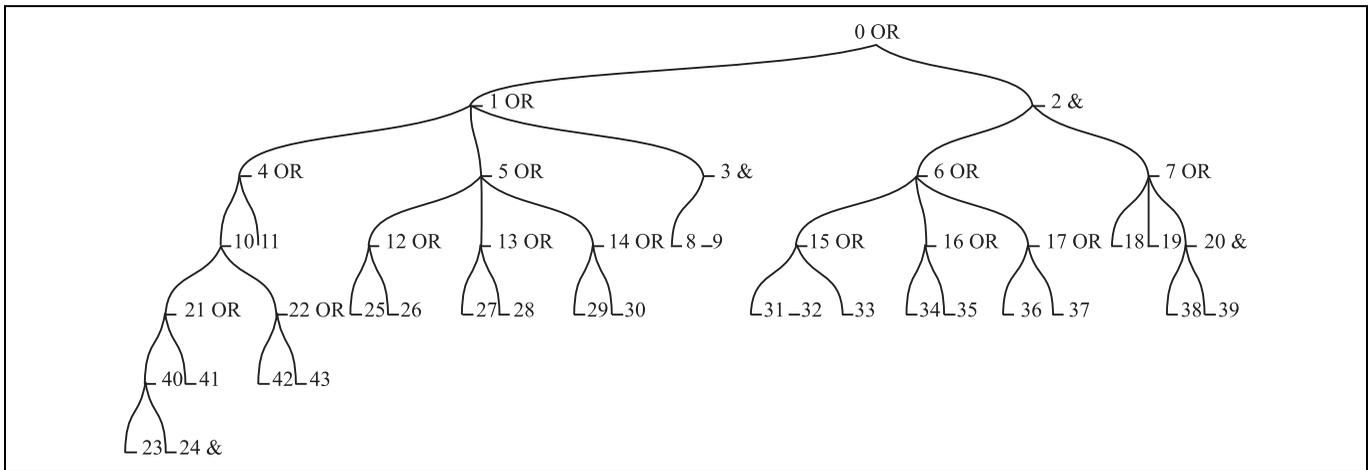


Рис. 3. Фрагмент дерева событий D , описывающий возникновение аварийной ситуации для перспективного двухдвигательного самолета

ного самолета фрагмент такого дерева отказов имеет вид, приведенный на рис. 3.

На рис. 3 приняты обозначения: 0 — аварийная ситуация; 1 — функциональные отказы (ФО); 2 — сочетания ФО воздушного судна; 3 — ошибки экипажа и параметры ожидаемых условий эксплуатации, создающие аварийную ситуацию при заходе ВС на посадку; 4 — уменьшение эффективности продольного или поперечного управления на 1/2; 5 — ФО пилотажного оборудования; 6 — ФО воздушного судна; 7 — ошибки экипажа и параметры внешних условий; 8 — отказ одного из двигателей ВС; 9 — отказ второго двигателя; 10 — заметное уменьшение по крену; 11 — потеря индикации пилотажных параметров; 12 — ложная индикация параметров у пилотирующего летчика; 13 — отказ автопилота при заходе; 14 — потеря эффективности руля направления (РН); 15 — потеря индикации у второго пилота; 16 — ложная у второго пилота; 17 — ошибки экипажа; 18 — неблагоприятные условия; 19 — сочетание неточностей в пилотировании; 20 — отказы гидропитания; 21 — ФО при управлении тангажом; 22 — ФО при управлении креном; 23 — сбой гидропитания; 24 — потеря индикации пространственного положения; 25 — потеря индикации скоростных параметров; 26 — ложная индикация положения; 27 — ложная индикация одного из высотно-скоростных параметров; 28 — ложная индикация стрелок; 29 — про падание стрелок; 30 — отказы РН; 31 — отказы питания РН; 32 — отказ механизма РН; 33 — потеря пространственного положения; 34 — потеря скоростных параметров; 35 — ложная индикация положения; 36 — ложная индикация одного из высотно-скоростных параметров; 37 — боковой ветер 8 м/с и более; 38 — потеря давления; 39 — разгерметизация; 40 — потеря давления в гидросистеме;

41 — разгерметизация гидросистемы; 42 — обрыв секции руля высоты; 43 — заклинивание бустера; & — символ конъюнкции; OR — символ дизъюнкции.

Анализ дерева событий позволяет определить множество минимальных сечений, используемых для моделирования неблагоприятных сочетаний событий. Для каждого неблагоприятного сочетания строится граф событий, отражающий структуру возникновения этого сочетания. На основе графов событий строятся системы дифференциальных уравнений в случае экспоненциального распределения времени между событиями, решение которых позволяет определить вероятности реализации минимальных сечений и определить, выполняется ли критерий (1). Значения интенсивностей $\mu_i^*(t)$, $i = \overline{1, k}$, выбираются таким образом, чтобы значения вероятности возникновения аварии не превышали допустимые значения.

В случаях, когда распределение времени между событиями не экспоненциальное, вероятности аварий определяются путем достраивания текущей ситуации до схем известных аварий и катастроф в соответствии с технической документацией системы.

Для практической реализации математического обеспечения разработан пакет программ «Информационная система для поддержки принятия решений при управлении АТС», используемый в структурных подразделениях ПАО «Ил» в модели надежности и безопасности.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предложен подход к повышению безопасности авиационных транспортных систем, основанный



на анализе неблагоприятных сочетаний событий, возникающих в процессе функционирования авиационно-транспортных систем. Разработана формальная постановка задачи управления авиационными транспортными системами по критерию безопасности. Для решения задачи предлагается применять модели и методы, позволяющие, исходя из текущей совокупности неблагоприятных событий, определять вероятности возникновения аварий и меры по их предотвращению.

Разработаны принципы построения и работы информационной системы поддержки принятия решения по предотвращению неблагоприятных сочетаний событий. Разработанное информационно-программное обеспечение внедрено в состав модели надежности и безопасности авиационно-транспортных систем в ПАО «Ил».

ЛИТЕРАТУРА

1. *Проблема критических сочетаний событий в системе «экипаж — воздушное судно — диспетчер»* / Г.В. Новожилов, А.Ф. Резчиков, М.С. Неймарк и др. // Полет. — 2015. — № 2. — С. 10—16.
2. *Резчиков А.Ф., Богомолов А.С.* Критические сочетания событий — причины аварий в человеко-машинных системах // Материалы восьмой междунар. конф. «Управление развитием крупномасштабных систем MLSD'2015», 29 сент. — 1 окт. 2015 г., ИПУ РАН / под общ. ред. С.Н. Васильева, А.Д. Цвиркуна. — М., 2015. — Т. 1. — С. 130—135.
3. *Резчиков А.Ф., Богомолов А.С.* Критические сочетания событий как причина аварий в человеко-машинных системах // Математические методы в технике и технологиях — ММТТ-28: сб. тр. XXVIII междунар. науч. конф., / под общ. ред. А.А. Большакова. — Саратов: Саратов. гос. техн. ун-т, 2015; Ярославль: Ярослав. гос. техн. ун-т; Рязань: Рязанск. гос. радиотехн. ун-т, 2015. — Т. 6. — С. 151—153.
4. *Анализ критических ситуаций, вызванных неблагоприятным стечением обстоятельств* / В.В. Клюев, А.Ф. Резчиков, В.А. Кушников и др. // Контроль. Диагностика. — 2014. — № 7. — С. 12—16.
5. *Клюев В.В., Новожилов Г.В., Резчиков А.Ф., Богомолов А.С.* Ресурсный подход к обеспечению безопасности систем «человек-объект-среда». — М.: Спектр, 2014. — 158 с.
6. *Клюев В.В., Резчиков А.Ф., Богомолов А.С., Филимонок Л.Ю.* Взаимодействие ресурсов сложных человеко-машинных систем в критических ситуациях // Контроль. Диагностика. — 2013. — № 4. — С. 41—45.
7. *Человеческий фактор в авиационно-транспортных системах* / Г.В. Новожилов, А.Ф. Резчиков, М.С. Неймарк и др. // Полет. — 2013. — № 5. — С. 3—10.
8. *Новожилов Г.В., Неймарк М.С., Цесарский Л.Г.* Безопасность полета самолета: Концепция и технология. — М.: Изд-во МАИ, 2007. — 196 с.
9. *Викторова В.С., Ведерников Б.И., Спиридонов И.Б., Степанянц А.С.* Моделирование и анализ контролепригодности бортовых систем самолетов // Надежность. — 2007. — № 3. — С. 62.
10. *Викторова В.С., Степанянц А.С.* Проектный анализ контролепригодности технических систем (теория, методы расчета, программное обеспечение). — М.: ИПУ РАН, 2010. — 71 с.
11. *Кушников В.А., Резчиков А.Ф., Цвиркун А.Д.* Управление в человеко-машинных системах с автоматизированной процедурой коррекции целей // Автоматика и телемеханика. — 1998. — № 7. — С. 168—175.

Статья представлена к публикации членом редколлегии В.Г. Лебедевым.

Богомолов Алексей Сергеевич — канд. физ.-мат. наук, ст. науч. сотрудник, Институт проблем точной механики и управления РАН, г. Саратов, ✉ AlexBogomolov@ya.ru,

Ивашенко Владимир Андреевич — д-р техн. наук, вед. науч. сотрудник, Институт проблем точной механики и управления РАН, г. Саратов, ✉ iptmuran@san.ru,

Кушников Вадим Алексеевич — д-р техн. наук, директор, Институт проблем точной механики и управления РАН, г. Саратов, ✉ kushnikoff@yandex.ru,

Резчиков Александр Федорович — д-р техн. наук, чл.-корр. РАН, гл. науч. сотрудник, Институт проблем точной механики и управления РАН, г. Саратов; гл. науч. сотрудник, Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, г. Москва, ✉ iptmuran@san.ru,

Цвиркун Анатолий Данилович — д-р техн. наук, зав. лабораторией, Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, г. Москва, ✉ tsvirkun@ipu.ru,

Цесарский Лев Гершович — канд. техн. наук, зам. нач. отдела, «ОАК — центр комплексирования»; вед. конструктор, Авиационный комплекс им. С.В. Ильюшина, г. Москва,

Филимонок Леонид Юрьевич — канд. техн. наук, науч. сотрудник, Институт проблем точной механики и управления РАН, г. Саратов, ✉ filimonyukleonid@mail.ru.

Новая книга

Козлов А.Д., Орлов В.Л. *Методы и средства обеспечения информационной безопасности распределенных корпоративных систем.* — М.: ИПУ РАН, 2017. — 156 с. — ISBN 978-5-91450-207-9

Рассмотрены вопросы применения современных методов и средств обеспечения информационной безопасности в распределенных корпоративных системах. Основное внимание уделено алгоритмам шифрования и средствам организации электронной подписи, методам построения моделей угроз и нарушителя, использованию протокола HTTPS, проблемам, возникающим при проектировании защищенных информационных систем и методам повышения комфортабельности пользователей, а также практическим вопросам построения защитных средств при создании программно-обеспеченных таких систем.

Для научных работников, студентов, аспирантов и специалистов в области защиты информации при построении распределенных информационных систем.

CONTENTS & ABSTRACTS

PLASMA CONTROL IN TOKAMAKS. PART 1. CONTROLLED THERMONUCLEAR FUSION PROBLEM. TOKAMAKS. CONTROL SYSTEMS COMPONENTS 2

Mitrishkin Yu.V., Korenev P.S., Prokhorov A.A., et al.

Various concepts are presented of promising tokamaks being the leaders in solving the controlled thermonuclear fusion problem. The evolution of tokamaks is considered from ones round in vertical cross-section with a large aspect ratio up to tokamaks with a small aspect ratio including spherical ones. The classification of modern tokamaks is given. Attention is focused on the methods of plasma diagnostics by magnetic measurements outside plasma, actuators for both plasma magnetic and kinetic control, as well as for its additional heating. Plasma magnetic and kinetic models, instabilities, and disruptions are considered.

Keywords: controlled thermonuclear fusion, thermonuclear power station, tokamak, plasma, tokamak classification, diagnostics, additional heating, actuators, plasma equilibrium reconstruction, plasma magnetic and kinetic models, plasma instabilities, disruptions.

FUNCTIONS APPROXIMATING BY NEURAL NETWORKS AND FUZZY SYSTEMS 21

Shvedov A.S.

The survey is given of some results related to approximating the functions of one and of multiple real variables. Several theorems are given of one of the classical approaches — approximating the functions by algebraic polynomials. First results on functions approximating by neural networks and fuzzy systems appeared as an answer to the significant for practical tasks question on possibility of approximating continuous functions in such ways. Later, these fields developed the same way the theory of functions approximating by algebraic polynomials did. Some results are presented, related to functions approximating by neural networks and fuzzy systems.

Keywords: approximation of functions, algebraic polynomials, neural networks, fuzzy systems.

FUZZY TWO-POINT BOUNDARY VALUE PROBLEMS IN MATHEMATICAL MODELING AND CONTROL. PART 1. FUZZY MATHEMATICAL MODELING . . . 30

Demenev N.P., Mikrin E.A., Mochalov I.A.

Methods are considered of solving fuzzy boundary value problems for second-order differential equations. Part 1 presents the fuzzy Laplace transform and fuzzy variational-iterative method for fuzzy mathematical modeling tasks solving, part 2 — fuzzy initial method and fuzzy Galerkin method of fuzzy control problems optimization. Methods listed are demonstrated on examples. In particular, the fuzzy problems are solved of fuzzy integral functional unconditional extremum and of periodic modes calculation in a fuzzy search system of automatic optimization with the extremum storing. Conclusion the findings are given and some relevant fuzzy tasks are listed of gyroscopy, of fuzzy aircraft control of aerodynamic and space craft, which can be solved with the methods considered.

Keywords: fuzzy boundary value problem, differential equation, fuzzy Laplace transform, fuzzy variation and iterative methods, fuzzy initial method, fuzzy Galerkin method.

CONSTRUCTION OF CONTROL FOR NONLINEAR SYSTEM WITH QUASI-CONSTANT REGULATOR PARAMETERS 37

Afanas'ev V.N., Matveeva N.A.

The synthesis method is considered of non-linear object control with quadratic quality functional, based on the technique of «extended linearization» of initial mathematic model of the object. Non-linear controller parameters are determined by the solution of matrix equation of Riccati type with parameters dependent on the object state. Noted is that the main problem of such controller realization is the difficulty of finding the solution of this equation at a same speed as object operate. The decision method is suggested, based on finding the controller parameters for each time step of a control interval. The developed method

of synthesis and realization of a non-linear object control is suggested to be tested by building the strategy of drug injection while cancer treatment with the use of the mathematical model of cancerous tissue growth dynamics and its interaction with normal and immune cells. The results are given of mathematical modeling, conducted to test the effectiveness of the solutions obtained.

Keywords: nonlinear differential equations, quadratic functional quality, state-dependent Riccati equation.

NETWORK ACTIVE SYSTEMS: PLANNING AND STIMULATION MODELS 47

Belov M.V., Novikov D.A.

Models of network active systems including a finite set of agents interacting within a given network, characterized by the technology of their activity (the dependence of the results of their activity on their own actions and the results of the activity of other agents) are introduced and examined. The tasks of stimulation and planning are set and solved. The possibilities of using network active systems, for modeling and optimizing the activities of extended enterprises are discussed.

Keywords: active system, complex activity, extended enterprise.

METHODS OF HIERARCHICAL HYBRID COGNITIVE MAP FACTORS ESTIMATION ON THE EXAMPLE OF ASSESSMENT OF ENERGY CONSUMPTION IN REGIONS 58

Silich M.P., Silich V.A., Axyonov S.V.

The methods are presented of fuzzy assessment of factors while analyzing the hierarchical cognitive map, describing the complex multifactor situation. The assessments of current values of factors, connected with indicators, are determined by interpreting the indicators values. The procedure of automatic design of membership functions is suggested, the peculiarity of which consists in taking into account the outliers in sampling and the differences in external conditions for regions. The assessments of factors changes are determined by interpreting the incremental values of indicators and the trends characteristics. The application of the suggested methods of factors assessment is illustrated on an example of heat energy consumption in the regions in the Russian Federation.

Keywords: hierarchical hybrid cognitive map, fuzzy assessment, energy consumption in regions.

ALGORITHMS OF INFORMATION DIFFUSION MODELING IN MARKETING ACTIVITIES WITHIN THE GROUPS OF ONLINE SOCIAL NETWORK . . 66

Gribanova E.B.

The algorithms are presented of information diffusion modeling and of estimating the probability of influence during marketing activities in social network, based on the independent cascade model. The calculation results are given of the probability of influence for randomly generated network with the specified characteristics.

Keywords: social networks, marketing activities, cascade model, information diffusion.

MODELING COMPLEX FOR CRITICAL EVENTS COMBINATIONS ANALYSIS IN AVIATION TRANSPORT SYSTEMS 74

Bogomolov A.S., Ivashchenko V.A., Kushnikov V.A., et al.

The article describes a developed approach to support the safety of aviation transport systems. It is based on an analysis of unfavorable events combinations with the use of the proposed modeling complex. The approach allows to assess the probability of occurrence of critical combinations of events, which lead to accidents and identify measures to prevent them. An information and logical schema for solving the problem of adverse combinations of events in aviation transport systems is developed. It includes decision support subsystems for crews, dispatchers and other personnel.

Keywords: aviation transport system, emergency situation, unfavorable combination of events, information-logic scheme, decision-making support, modeling complex.

