

ISSN 1819-3161

ПРОБЛЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ

1/2013

CONTROL  SCIENCES

РЕДКОЛЛЕГИЯ

Ф.Т. Алескеров, В.Н. Афанасьев, Р.Р. Бабаян, Л.П. Боровских, В.Н. Бурков, акад. РАН С.Н. Васильев, В.А. Виттих, Б.Г. Волик, А.А. Дорофеюк, акад. РАН С.В. Емельянов, Э.Л. Ицкович, чл.-корр. РАН И.А. Каляев, В.Ю. Кнеллер, О.С. Колосов, О.П. Кузнецов, В.В. Кульба, В.Г. Лебедев, акад. РАН В.А. Левин, Г.Г. Малинецкий, В.Д. Малюгин, А.С. Мандель, чл.-корр. РАН Н.А. Махутов, акад. РАН Е.А. Микрин, Р.М. Нижегородцев, В.В. Никитин, чл.-корр. РАН Д.А. Новиков, В.Н. Новосельцев, К.Б. Норкин, Б.В. Павлов, чл.-корр. РАН П.П. Пархоменко, Ф.Ф. Пащенко, С.А. Редкозубов, чл.-корр. РАН А.Ф. Резчиков, Л.И. Розоноер, Е.Я. Рубинович, В.Ю. Рутковский, акад. ГАН М. Салуквадзе, А.Э. Софиев, акад. РАН Е.А. Федосов, А.Д. Цвиркун

РУКОВОДИТЕЛИ РЕГИОНАЛЬНЫХ РЕДСОВЕТОВ (РРС)

ВЛАДИВОСТОК — О.В. Абрамов (4232) 31-02-02
ВОЛГОГРАД — А.А. Воронин (8442) 40-55-06
ВОРОНЕЖ — С.А. Баркалов (4732) 76-40-07
КРАСНОЯРСК — В.В. Огурцов (3912) 27-63-89
КУРСК — С.Г. Емельянов (4712) 50-48-00
ЛИПЕЦК — А.К. Погодаев (4742) 32-80-44
ПЕРМЬ — В.Ю. Столбов (3422) 39-12-97
МИНСК — А.В. Тузиков (10-37517) 284-21-40
САМАРА — В.Г. Засканов (8463) 35-64-07
САРАТОВ — В.А. Твердохлебов (8452) 22-10-42
ТАГАНРОГ — В.М. Курейчик (8634) 39-32-60
ТИРАСПОЛЬ — С.И. Берилл (10-373553) 9-44-87
УФА — Б.Г. Ильясов (3472) 73-78-35



CONTROL SCIENCES

Научно-технический журнал

6 номеров в год
ISSN 1819-3161

УЧРЕДИТЕЛЬ

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН

Главный редактор
чл.-корр. РАН
Д.А. Новиков

Заместители главного редактора
Л.П. Боровских, Ф.Ф. Пашенко

Редактор
Т.А. Gladkova

Выпускающий редактор
Л.В. Петракова

Издатель
ООО «Сенсидат-Плюс»

Адрес редакции
117997, ГСП-7, Москва,
ул. Профсоюзная, д. 65, к. 410.
Тел./факс (495) 334-92-00

E-mail: pu@ipu.ru

Интернет: <http://pu.mtas.ru>

Оригинал-макет
и электронная версия
подготовлены
ИП Прохоров О. В.

Фото на четвертой странице обложки
В.М. Бабилова

Отпечатано в ИПУ РАН

Заказ № 11

Подписано в печать
13.02.2013 г.

Журнал зарегистрирован
в Министерстве Российской
Федерации по делам печати,
телерадиовещания и средств
массовых коммуникаций

Свидетельство о регистрации
ПИ №77-1/1963 от 06 марта 2002 г.

Журнал входит в Перечень ведущих
рецензируемых журналов и изданий,
в которых должны быть опубликованы
основные научные результаты
диссертаций на соискание ученой
степени доктора и кандидата наук

Подписные индексы:
80508 и **81708** в каталоге Роспечати;
38006 в объединенном каталоге
«Пресса России»

Цена свободная

© Федеральное государственное
бюджетное учреждение науки
Институт проблем управления
им. В.А. Трапезникова РАН

ПРОБЛЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ

1.2013

СОДЕРЖАНИЕ

10 лет журналу «Проблемы управления» 2

Анализ и синтез систем управления

Лакеев А.В., Русанов В.А., Козырев В.А. К реализации непрерывных квази-
линейных систем с автономными операторами в гильбертовом пространстве 7

Фуртат И.Б. Адаптивное управление неминимально-фазовыми объектами
определенного класса 19

Кузьмин О.В., Кедрин В.С. Анализ структуры гармонических рядов динамики
на базе алгоритма сингулярного разложения 26

Управление в социально-экономических системах

Косачев Ю.В. Оптимальное управление инновационным процессом в рамках
интегрированной структуры 32

Корнетова А.Н., Червоненкис А.Я. Оптимизация показов рекламы в поисковых
системах 40

Петровец Ю.О., Андрианов Д.Л. Задача оптимального планирования работ
по обновлению железнодорожной линии: постановка, алгоритмы решения 50

Управление подвижными объектами и навигация

Волковицкий А.К., Каршаков Е.В., Павлов Б.В. Позиционирование подвижных
объектов в низкочастотном электромагнитном поле. Ч. 1. Базовый алгоритм
относительного позиционирования 57

Сомов Е.И. Синтез нелинейного закона управления для перезакрутки упругого
спутника слабыми внутренними моментами 63

Алисейчик А.П., Павловский В.Е. Модель и динамические оценки управляемости
и комфортабельности движения многоколесного мобильного робота 70

К 100-летию академика Б.Н. Петрова

Вице-президент Академии наук СССР академик Борис Николаевич Петров 79

Иванов В.П. Взаимосвязь фундаментальной науки, прикладных исследований
и практики проектирования систем управления 83

Хроника

Павел Павлович Пархоменко (к 90-летию со дня рождения) 86

* * *

Contents & abstracts 88

10 ЛЕТ ЖУРНАЛУ «ПРОБЛЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ»

Немного истории. В целях адекватного отражения в научной печати исследований, выполняемых в области управления социально-экономическими и медико-биологическими структурами, автоматизированных систем организационного управления и обработки данных, программного обеспечения систем управления и др. в 2002 году Институт проблем управления РАН учредил научно-технический журнал «Проблемы управления». Инициатива создания нового журнала принадлежала дирекции Института, главным редактором стал бывший в то время директором Института академик НАН Грузии И.В. Прангишвили, который и руководил Журналом до конца дней своих в 2006 году.

Предполагалось, что Журнал будет выходить 4 раза в год — ежеквартально, начиная с 2003 года. Однако первый номер вышел в свет с некоторым опозданием — 17 мая 2003 года, поскольку поначалу в «портфеле» редакции было пусто, да и редакции как таковой не было. Тем не менее, Журнал все-таки вышел!

Появление нового журнала сотрудниками Института было встречено неоднозначно. Многие вполне обоснованно отнеслись к этому событию несколько скептически — зачем нужен еще один журнал, когда есть профильный и привычный, авторитетный, издающийся с 1936 года научный журнал «Автоматика и телемеханика». Действительно, тематика этих двух журналов во многом схожая, но есть и отличия. В журнале «Проблемы управления», как показало его развитие, наряду с традиционными проблемами автоматизации, информатики и вычислительной техники, большое внимание уделяется междисциплинарным проблемам, в том числе — управлению в социально-экономических и организационных системах, проблемам системного анализа, задачам информационного управления, принятия решений, анализа данных и обработки больших массивов информации, проблемам решения управленческих задач в слабо структурированных и плохо формализуемых ситуациях. Журнал стремится быть понятным и интересным широкому кругу читателей; существенное внимание обращается на возможность и опыт практического применения излагаемых научных результатов.

Включение в 2004 году Журнала в список ВАК способствовало повышению престижа Журнала и пополнению его портфеля. С 2005 года Журнал стал выходить 6 раз в году, круг его сторонников значительно расширился, наметилась собственная ниша в мире научно-технической периодики, проявилось стремление к освещению наиболее актуальных вопросов теории и практики управления. В число авторов Журнала входят как маститые, так и начинающие ученые, аспиранты. Расширилась география авторов — не только Москва, но и многие регионы России, страны ближнего и дальнего зарубежья.

В 2006 году журнал получил международный индекс периодического издания ISSN и вошел в Российский индекс научного цитирования (РИНЦ), его электронная версия представлена на платформе Научной электронной библиотеки eLIBRARY.RU и портале Math-Net.ru, Журнал адекватно отражен в Интернете своим сайтом <http://pu.mtas.ru>. Повысился научный уровень публикаций, укрупнились его основные рубрики.

Редакционная коллегия, региональные редакционные советы, редакция. В состав редколлегии входят ведущие специалисты в области теории управления и ее приложений — академики и члены-корреспонденты Российской академии наук, доктора наук (см. список редколлегии на второй полосе обложки).

Редколлегия и редакция стараются обеспечить высокий научный уровень публикуемых материалов их строгим отбором (из поступающих в редакцию статей публикуется примерно половина, остальные мотивированно отклоняются), высококвалифицированным рецензированием и тщательным редактированием. Неоценимую помощь Журналу бескорыстно оказывают многочисленные рецензенты, давая объективные, квалифицированные и принципиальные оценки статей.

В целях публикации в Журнале более полной (и равномерной в масштабах России) информации об исследованиях в области теории и практики управления, о разработках и внедрении систем управления, а также в целях представления интересов Журнала в регионах при крупных научных и образовательных центрах созданы региональные

редсоветы (PPC) — их список см. на второй полосе обложки. В состав PPC входят авторитетные ученые, активно работающие в русле тематики Журнала. Со многими PPC установилось плодотворное сотрудничество, их сеть постоянно расширяется.

Немного статистики. Журнал индексируется в SCIENCE INDEX — аналитической надстройке над РИНЦ (www.elibrary.ru), позволяющей проводить детальные аналитические исследования и рассчитывать более сложные наукометрические показатели, чем это возможно сейчас в базовом интерфейсе РИНЦ. Некоторые текущие показатели Журнала, взятые из SCIENCE INDEX, представлены в табл. 1.

Учитывая, что в рейтинг РИНЦ входят 2899 научных журналов (на момент написания настоящей заметки), место Журнала в общем рейтинге можно признать достойным, а места в тематических рейтингах — весьма высокими (по тематическим направлениям «Информатика», «Автоматика. Вычислительная техника» и «Экономика. Экономические науки» в РИНЦ входят соответственно 356, 1031 и 1732 журнала). Методику определения показателей SCIENCE INDEX здесь мы не рассматриваем. Желающие могут ознакомиться с нею на платформе eLIBRARY.RU. Представляет интерес изменение показателей во времени (табл. 2). Поясним смысл некоторых из них.

Импакт-фактор — важный наукометрический показатель научного журнала. Существуют разные его определения и, соответственно, разные способы расчета. В РИНЦ он рассчитывается на основе данных по цитированию журнала в РИНЦ за предыдущие два года (или пять лет). При этом данные по цитированию берутся из публикаций года, для которого рассчитывается импакт-фактор. При расчете импакт-фактора число ссылок, сделанных в расчетном году из всех обрабатываемых в РИНЦ журналов на статьи, опубликованные в данном журнале за предыдущие два года (или пять лет),

Таблица 1
Некоторые наукометрические показатели журнала «Проблемы управления»

Общее число статей из журнала в РИНЦ	805
Общее число выпусков журнала в РИНЦ	57
Суммарное число цитирований журнала в РИНЦ	1101
Место в общем рейтинге SCIENCE INDEX за 2010 г.	199
Место в рейтинге SCIENCE INDEX за 2010 г. по тематике:	
«Информатика»	2
«Автоматика. Вычислительная техника»	4
«Экономика. Экономические науки»	16

Таблица 2

Динамика показателей журнала «Проблемы управления»

Показатель	2008 г.	2009 г.	2010 г.	2011 г.
Число статей в РИНЦ	69	73	67	62
Двухлетний импакт-фактор РИНЦ	0,326	0,386	0,430	0,421
Двухлетний импакт-фактор РИНЦ без самоцитирования	0,273	0,278	0,359	0,364
Число статей, опубликованных за предыдущие два года	187	158	142	140
Число цитирований статей предыдущих двух лет	61	61	61	59
Двухлетний коэффициент самоцитируемости, %	16,4	27,9	16,4	13,6
Пятилетний импакт-фактор РИНЦ	—	—	0,363	0,369
Общее число цитирований журнала в текущем году	108	132	178	186
из них самоцитирований	22	35	26	35
Среднее число ссылок в списках цитируемой литературы	11	14	10	14
Время полужизни статей из Журнала, процитированных в текущем году	—	—	3,4	3,6

делится на общее число этих статей. По сути, данный показатель отражает среднее число цитирований одной статьи в журнале. Например, при расчете пятилетнего импакт-фактора за 2012 г. суммарное число ссылок, сделанных в 2012 г. на статьи, опубликованные в журнале в период с 2007 по 2011 г. включительно, делится на общее число статей, опубликованных в выпусках журнала за 2007—2011 гг.

Под *временем полужизни* статей понимается медианный возраст процитированных в Журнале статей в текущем году. Половина ссылок из журнала, сделанных в этом году, идет на статьи моложе этого возраста, другая половина — на статьи старше.

Смысл других показателей довольно очевиден.

Из табл. 2 видно, что важнейший показатель — импакт-фактор — постепенно растет¹. Часть показателей, хотя и медленно, изменяются в лучшую сторону². Представление о распределении публикаций по тематике дает диаграмма (приведенные

¹ Отметим, что до 2008 г. показатели не вычислялись, поскольку проект РИНЦ еще не был запущен.

² Конечно, следует учитывать, что интервал наблюдения и выборки значений показателей пока еще невелики.



Распределение публикаций по тематике

на диаграмме данные коррелируют с данными в табл. 1, а именно, с местами Журнала в рейтингах по различным тематическим направлениям).

Распределение публикаций по числу соавторов: один автор — 42, два — 27, три — 13, четыре — 4 и более четырех — 14 %.

Статьи, вызвавшие наибольший интерес научной общественности (по данным портала Math-Net.Ru), представлены в табл. 3 и 4.

На платформе eLIBRARY.RU Научной электронной библиотеки и портале Math-Net.Ru Математического института им. В.А. Стеклова РАН можно найти много другой интересной информации о журнале «Проблемы управления» и его авторах. Например, распределение публикаций по организациям, годам, авторам (за 10 лет в Журнале публиковались более 800 авторов примерно из 150 организаций), типу, цитируемости авторов, сведения о статьях, цитирующих публикации Журнала (а цитируют статьи Журнала авторы около 300 научных журналов, работающие примерно в 200 различных организациях), сведения об авторах и их статьях в других изданиях, например, их профиль, список публикаций на Google Scholar, на ZentralBlatt, в базе данных Math-Net.Ru и др.

Интернет и Журнал. Традиционные научные журналы переживают сейчас не лучшие времена — число подписчиков падает, стоимость подписки растет. В научном сообществе становится нормой публиковать статьи в электронных журналах. Известно, что и традиционным (печатаемым на бумаге), и электронным научным журналам присущи свои достоинства и недостатки. Однако представляется, что в обозримом будущем многие «бумажные» журналы, по-видимому, перестанут существовать, либо исчезнув, либо превратившись в элек-

Часто цитируемые статьи журнала «Проблемы управления»

№	Статья	Число ссылок
1	Структурно-целевой анализ развития социально-экономических ситуаций В.И. Максимов ПУ, 2005, № 3, с. 30—38	25
2	Когнитивный подход в управлении З.К. Авдеева, С.В. Коврига, Д.И. Макаренко, В.И. Максимов ПУ, 2007, № 3, с. 2—8	22
3	Робастное управление нестационарными нелинейными структурно неопределенными объектами И.Б. Фуртат, А.М. Цыкунов ПУ, 2008, № 5, с. 2—7	13
4	Модели информационного влияния и информационного управления в социальных сетях Д.А. Губанов, Д.А. Новиков, А.Г. Чхартишвили ПУ, 2009, № 5, с. 28—35	13
5	«Когнитивные игры»: линейная импульсная модель Д.А. Новиков ПУ, 2008, № 3, с. 14—22	12
6	Технология крупноблочного параллелизма в SAT-задачах О.С. Заикин, А.А. Семенов ПУ, 2008, № 1, с. 43—50	11
7	Модель интеллектуальной системы управления производством В.Ю. Столбов, С.А. Федосеев ПУ, 2006, № 5, с. 36—39	11
8	Математическая формализация методов иерархического управления эколого-экономическими системами Г.А. Угольницкий, А.Б. Усов ПУ, 2007, № 4, с. 64—69	10
9	Метод однородного расширения сетей связи многопроцессорных вычислительных систем В.С. Подлазов, В.В. Соколов ПУ, 2007, № 2, с. 22—27	10
10	Управление качеством материалов со специальными свойствами И.А. Гарькина, А.М. Данилов ПУ, 2008, № 6, с. 67—73	9

Таблица 4

**Наиболее популярные статьи журнала
«Проблемы управления»**

№	Статья	Число обращений
1	Компьютерные системы поддержки принятия управленческих решений Э.А. Трахтенгерц ПУ, 2003, № 1, с. 13—28	829
2	Развитие теории автоматического управления Б.Т. Поляк ПУ, 2009, № 3.1, с. 13—18	816
3	Когнитивный подход в управлении З.К. Авдеева, С.В. Коврига, Д.И. Макаренко, В.И. Максимов ПУ, 2007, № 3, с. 2—8	805
4	Генетические алгоритмы на примерах решения задач раскроя А.В. Подлазова ПУ, 2008, № 2, с. 57—63	703
5	Агентное моделирование как средство анализа и прогноза спроса на энергоресурсы С.А. Суслов, М.А. Кондратьев, К.В. Сергеев ПУ, 2010, № 2, с. 46—52	616
6	Нечеткие регуляторы и системы управления Ю.И. Кудинов, И.Н. Дорохов, Ф.Ф. Пашенко ПУ, 2004, № 3, с. 2—14	583
7	Компьютерные системы моделирования когнитивных карт: подходы и методы А.А. Кулинич ПУ, 2010, № 3, с. 2—16	567
8	Модели информационного влияния и информационного управления в социальных сетях Д.А. Губанов, Д.А. Новиков, А.Г. Чхартишвили ПУ, 2009, № 5, с. 28—35	556
9	Экономическая теория и модели целевой функции фирмы И.В. Тополя ПУ, 2004, 1, 54—59	520
10	Нечеткое моделирование и кластеризация Ю.И. Кудинов, И.Ю. Кудинов ПУ, 2008, № 6, с. 2—10	518

тронные. (Отметим, что в свое время в Журнале была опубликована серия статей д-ра техн. наук В.Л. Эпштейна, посвященных этой непростой проблеме, в том числе фундаментальный обзор «Предвидимое будущее научных журналов».)

Выход видится в параллельной публикации печатной и электронной версий журнала. Первый шаг в этом направлении редакция сделала, разместив на сайте журнала, начиная с его первых выпусков, полные тексты некоторых статей в свободном доступе. Дальнейшим шагом в этом направлении можно считать создание и рассылку потенциальным подписчикам электронного информационно-поискового сборника аннотаций Журнала. Наконец, в 2006 году Журнал был включен в фонды Научной электронной библиотеки eLIBRARY.RU, через которую пользователь может оформить подписку на электронную версию Журнала, а также получить электронные версии отдельных выпусков и статей. На сайте Журнала ru.mtas.ru и на портале Math-Net.Ru все статьи Журнала, старше двух лет, находятся в свободном доступе.

Можно предположить, что успех будет сопутствовать журналам, сочетающим преимущества и «бумажных», и электронных журналов. Примером такого сочетания может служить форма подачи научной статьи в «бумажном» журнале в совокупности с электронным приложением, входящим в состав ее электронной версии. Такое приложение может содержать материалы, которые невозможно или очень трудно наглядно представить в бумажной версии статьи. Например, различные видеофайлы, демонстрирующие сложные процессы в их динамике, развитие ситуаций, этапы различных сценариев и т. п. Такая форма представления статей уже практикуется в Журнале.

Публикационная политика. В целом редколлегия и редакция стремятся к обеспечению комплексности тематики Журнала, равномерности охвата актуальных проблем современной теории управления, а также такой подаче материалов, чтобы статья имела «дружественный интерфейс к читателю», т. е. чтобы ее содержание было понятно не только автору и его ближайшим коллегам, но и читателям, работающим в данном или смежном направлении теории управления и ее приложений.

Помимо оригинальных научных статей, публикуются и статьи обзорного характера. Редколлегия приветствует обзоры как по только что зарождающимся, но перспективным направлениям, так и по уже сформировавшимся, результаты которых нуждаются в систематизации. Практикуются тематические подборки статей, специальные выпуски Журнала.



Кроме научных статей, в Журнале публикуются отчеты о научных конференциях и материалы, приуроченные к различным памятным датам. Были опубликованы статьи, посвященные 90-летию академика АН СССР Б.Н. Петрова³, 100-летию чл.-корр. АН СССР М.А. Гаврилова, 100-летию академика АН СССР В.А. Трапезникова, 80-летию академиков РАН С.В. Емельянова и Е.А. Федосова и юбилейным датам ряда ученых, внесших достойный вклад в науку. Заметной публикацией стали материалы круглого стола «50 лет в науке», посвященного 75-летию академика НАН Грузии И.В. Прангишвили (организовал и провел круглый стол д-р техн. наук А.А. Амбарцумян). Весьма содержательны в научном плане опубликованные материалы научных чтений памяти видного советского ученого А.М. Петровского.

Значительным событием в жизни редакции стали подготовка и выход в свет специального выпуска Журнала, посвященного 70-летию его учредителя — Института проблем управления им. В.А. Тра-

пезникова РАН. Кроме очерка об истории и нынешних днях Института, в спецвыпуске опубликованы фундаментальные обзорные статьи ведущих ученых Института, посвященные основным направлениям научных исследований, выполняемых коллективом Института. С тех пор прошло уже более трех лет, но интерес читателей к этим статьям не убывает.

Вместо заключения. За 10 лет существования сформировались основные тематические направления Журнала, он занял определенное место среди других изданий, приобрел известность, у него появилось много друзей, сторонников и добровольных помощников — и не только в Институте проблем управления, их география обширна, их численность постепенно растет. Редколлегия и редакция Журнала поздравляют его авторов, читателей и друзей с первым юбилеем! Мы надеемся, что и в следующие десятилетия нашими совместными усилиями Журнал будет еще эффективнее способствовать успешному развитию отечественной науки управления.

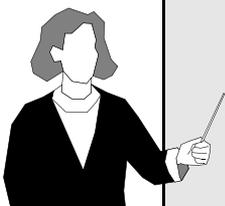
³ Читайте на с. 79 — 85 настоящего номера материалы, посвященные 100-летию академика Б.Н. Петрова.

Редакционная коллегия
Редакция



Читайте в следующем номере

- ✓ **Асратян Р.Э., Лебедев В.Н.** Прокси-серверы в распределенных гетерогенных мультисетевых средах
- ✓ **Ведешенков В.А.** Подход к диагностированию возникшего отказа в цифровых системах со структурой симметричного двудольного графа
- ✓ **Волковицкий А.К., Каршаков Е.В., Павлов Б.В.** Позиционирование подвижных объектов в низкочастотном электромагнитном поле. Ч. 2. Особенности технической реализации
- ✓ **Конев Д.С.** Интеграция инерциально-спутниковых систем на основе инвариантной модели состояния подвижного объекта
- ✓ **Панкова Л.А., Пронина В.А.** Модели текстового поиска на основе теории нечетких множеств
- ✓ **Рубан А.И.** Функционалы чувствительности в задаче Больца для многомерных динамических систем, описываемых интегро-дифференциальными уравнениями с запаздыванием
- ✓ **Сомов Е.И., Бутырин С.А.** Полетная идентификация и силовая гироскопическая стабилизация слабо демпфированной конструкции крупногабаритного спутника
- ✓ **Шестая** международная конференция «Параллельные вычисления и задачи управления»
- ✓ **Шестая** международная конференция «Управление развитием крупномасштабных систем MLSD'2013»



К РЕАЛИЗАЦИИ НЕПРЕРЫВНЫХ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ С АВТОНОМНЫМИ ОПЕРАТОРАМИ В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ¹

А.В. Лакеев, В.А. Русанов, В.А. Козырев

Для непрерывной нелинейной бесконечномерной динамической системы, определенной на языке ее поведения типа «вход — выход» (модель «черного ящика»), предложены различные функционально-аналитические критерии реализации данной системы в сепарабельном гильбертовом пространстве в классе квазилинейных стационарных дифференциальных моделей с программно-позиционным управлением.

Ключевые слова: нелинейная дифференциальная реализация, автономная $(A, B, B^\#)_2$ -модель, M_2 -продолжимость.

ВВЕДЕНИЕ

Основная цель теоретического естествознания — объяснение связанной совокупности наблюдаемых физических процессов при помощи минимального набора постулируемых понятий и выражаемых через них законов. Данная работа выполнена в русле именно этого методологического подхода с дифферентом в математические проблемы [1—11] реализации апостериорных процессов динамических систем (D -систем). Для этого в статье развит качественный подход, позволивший увидеть задачи непрерывной реализации поведения D -системы в новом «стационарно-квазилинейном» свете, отделить вопросы существования дифференциальных реализаций от процедур их вычисления [10], понять, что было недоделано в стационарной постановке [5, 9] и что еще оставалось сделать в нестационарных моделях [8], в частности, какие требуется внести коррективы в теорию M_2 -продолжимости, что, по мнению авторов, позволит несколько по-новому взглянуть на уже известные положения нестационарной дифференциальной квазилинейной реализации и более глубоко и всесторонне в них разобраться.

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке Программы фундаментальных исследований № 15 ОЭММПУ РАН (проект № 2.5).

Задача реализации в ее наиболее общем виде [1, с. 21]: «это просто абстрактная формулировка научного подхода к построению моделей», поэтому далее все дифференциальные модели будут рассматриваться лишь в смысле соответствия (или несоответствия) некоторому абстрактному набору экспериментальных данных, представленных семейством вектор-функций «траектория, программное управление, позиционное управление» — экзогенное поведение динамической системы (D -системы «вход — выход» — определение 1 [6]); все остальные возможные свойства этих моделей остаются в стороне. При этом современное состояние теории дифференциальной реализации таково, что не будет преувеличением сказать: сколько-нибудь исчерпывающее изложение основных ее разделов в рамках вводной части любой работы представляет совершенно неразрешимую задачу. Однако отметим, если смотреть на реализацию непрерывных систем так, как ее формулировал Калман [1, с. 353], то данная проблема по существу представляет задачу *представления*: отображение «вход — выход», заданное в виде свертки, требуется промоделировать системой типа «вход — состояние — выход» минимального динамического порядка. Исследование же данной работы по существу формулируется в «бихевиористической» постановке Виллемса [2] и методологически относится к теории *структурной* идентификации непрерывных D -систем в пространстве состояний:

исходя из произвольного наблюдаемого пучка управляемых траекторий попытаться *точно* смоделировать этот пучок дифференциальной системой с пространством состояний. При таком методологическом подходе, следуя логике «причинно-следственных» связей, «вход» — *программное управление*, а «выход» — *траектория и позиционное управление*. Данная постановка апостериорного математического моделирования не исключает методологическое положение, когда аналитическое представление *a priori* нелинейного закона позиционного управления в структуре D -системы детерминируется не связью вида «state feedback», а характеризует существенную нелинейную компоненту уравнений динамики моделируемой *a posteriori* дифференциальной модели исследуемого физического объекта в классе квазилинейных систем.

Основной поток публикаций по качественной теории реализации развивает математическую парадигму линейных моделей (непрерывных или дискретных); это объясняется не только возможностью воспользоваться богатым аппаратом линейной математики, но и тем, что подобные модели необходимы для локального изучения уравнений динамики нелинейных объектов. И вряд ли вызывает удивление тот факт, что для нелинейных систем апостериорный анализ моделей вне локальной постановки оказываются более ограничительным; даже если речь идет о достаточных условиях реализации модели, на что, например, указывалось в статье [12]. Ситуация оказывается еще более тонкой (сильная и слабая измеримость при нестационарности, неограниченные операторы и т. п.), если апостериорно моделировать *бесконечномерные* нелинейные D -системы с разрывными управлениями из банаховых функциональных пространств. Поэтому данная работа нацелена, прежде всего, на преодоление методологических препятствий при «бесконечномерном» подходе реализации нелинейных непрерывных D -систем с гильбертовыми пространствами состояний и управлений.

Постановка данной работы была обозначена в выводах исследований [8, 13] и представляет собой идейное развитие результатов из публикации [9]. В методологическом плане мотивирующую предпосылку проводимых далее изысканий, в контексте теории структурной идентификации D -систем [6], по существу формулирует альтернатива для структуры автономности операторов уравнений моделируемой динамики системы [1, с. 47]: «в произвольной нестационарной системе наблюдения за прошлым поведением системы могут ничего не говорить о ее будущем». В соответствии с общим теоретико-системным направлением данного подхода основное внимание в статье обращено на геометрическое содержание аналитических положений теории с попыткой представить все результа-

ты в терминах анализа функциональных свойств оператора Релея—Ритца [6—9]. Данный путь изысканий представляется весьма привлекательным, поскольку предлагаемый анализ создает впечатление теоретической глубины, в частности, чтобы прочувствовать бихевиористические различия между стационарной и нестационарной моделями дифференциальной динамики исследуемой *a posteriori* управляемой бесконечномерной нелинейной непрерывной D -системы.

Результаты статьи могут служить указанием на то, в каких практических ситуациях возможно, хотя бы в принципе, рассчитывать на конструктивное решение в классе квазилинейных автономных структур в сепарабельном гильбертовом пространстве задачи дифференциального моделирования поведения «вход — выход» D -системы с программно-позиционным управлением. Конечно, понятие «*существование модели реализации*» является в большей степени чисто качественной характеристикой, которая, как правило, не несет информацию о том, насколько хорошо обусловлены расчеты прикладного характера. Поэтому еще раз отметим, что значение результатов работы нужно видеть и расценивать именно в свете означенной выше возможности моделирования, которая является, по крайней мере, тогда, когда удовлетворены аналитические условия существования математической модели квазилинейной дифференциальной реализации.

1. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ПРЕДПОСЫЛКИ. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ РЕАЛИЗАЦИИ

Везде далее $(X, \|\cdot\|_X)$, $(Y, \|\cdot\|_Y)$, $(Z, \|\cdot\|_Z)$ — вещественные сепарабельные гильбертовы пространства (структуру предгильбертовости [14, с. 64] определяют нормы $\|\cdot\|_X, \|\cdot\|_Y, \|\cdot\|_Z$), $L(Y, X)$ — банахово пространство с операторной нормой $\|\cdot\|_{L(Y, X)}$ всех линейных непрерывных операторов из Y в X (аналогично $(L(X, X), \|\cdot\|_{L(X, X)})$, $(L(Z, X), \|\cdot\|_{L(Z, X)})$), $T := [t_0, t_1]$ — отрезок числовой прямой R с мерой Лебега μ и ν — положительная мера, абсолютно непрерывная относительно μ и определенная на σ -алгебре \wp_ν всех ν -измеримых (лебеговски полных) подмножеств интервала T . В дальнейшем будем часто рассматривать различные μ -отношения на T , введем для них символы $\dot{=}$ — для равенства μ -почти всюду, $\dot{\leq}$ — для упорядочения μ -почти всюду, запись $S \dot{\subset} Q$ для множеств $S, Q \in \wp_\mu$ означает $\mu(S \setminus Q) = 0$.

Пусть $(B, \|\cdot\|)$ — банахово пространство, $\mathfrak{F}_p(T, \nu, B)$ — пространство всех интегрируемых по Бохнеру [14, с. 189] отображений $f: T \rightarrow B$ с нор-



мой $\int_T \|f(\tau)\|^p v(d\tau)^{1/p}$, $p \in [1, \infty)$. Как обычно, через $L_p(T, v, B)$ обозначим банахово фактор-пространство классов v -эквивалентности в $\mathcal{L}_p(T, v, B)$, при этом $AC(T, B) \subset \mathcal{L}_1(T, \mu, B)$ — линейное множество всех абсолютно непрерывных функций (относительно меры μ).

Выделим к рассмотрению дифференциальные модели класса

$$dx(t)/dt := Ax(t) + Bu(t) + B^\# u^\#(x(t)), \quad (1)$$

где $x(\cdot) \in AC(T, X)$ — решение Каратеодори (K -решение), $u(\cdot) \in L_2(T, \mu, Y)$ и $u^\#(x(\cdot)) \in L_2(T, \mu, Z)$ — программное и позиционное (возможно, нелинейное) управления, $(A, B, B^\#) \in L(X, X) \times L(Y, X) \times L(Z, X)$; для удобства тройку вектор-функций $(x, u, u^\#(x))$ из уравнения (1) тоже назовем K -решением, а упорядоченную тройку операторов $(A, B, B^\#)$, согласно терминологии из работы [8], — автономной $(A, B, B^\#)_2$ -моделью.

Нетрудно видеть, что декартово произведение

$$L_2 := L_2(T, \mu, L(X, X)) \times L_2(T, \mu, L(Y, X)) \times L_2(T, \mu, L(Z, X))$$

образует банахово пространство классов μ -эквивалентности всех (автономные + нестационарные) $(A, B, B^\#)_2$ -моделей $t \mapsto (A(t), B(t), B^\#(t))$ с нормой

$$\|(A, B, B^\#)\|_L := \left(\int_T (\|A(\tau)\|_{L(X, X)}^2 + \|B(\tau)\|_{L(Y, X)}^2 + \|B^\#(\tau)\|_{L(Z, X)}^2) \mu(d\tau) \right)^{1/2}.$$

Далее, через H_2 обозначим $L_2(T, \mu, X) \times L_2(T, \mu, Y) \times L_2(T, \mu, Z)$ с нормой

$$\|(g, w, q)\|_H := \left(\int_T (\|g(\tau)\|_X^2 + \|w(\tau)\|_Y^2 + \|q(\tau)\|_Z^2) \mu(d\tau) \right)^{1/2}, \quad (g, w, q) \in H_2,$$

частное следствие [14, с. 64] конструкции $\|\cdot\|_H$: H_2 — гильбертово пространство. Наконец, через $L(H_2, X)$ обозначим банахово пространство с операторной нормой всех линейных непрерывных операторов, действующих из H_2 в X .

Пусть $(A, B, B^\#) \in L_2$. Рассмотрим оператор $\xi: H_2 \rightarrow X$, имеющий представление

$$\xi(g, w, q) := \int_T (A(\tau)g(\tau) + B(\tau)w(\tau) + B^\#(\tau)q(\tau)) \mu(d\tau), \quad (g, w, q) \in H_2; \quad (2)$$

согласно терминологии из [8] интегральный оператор ξ определяет некоторую ξ_2 -модель. Ясно, что $\xi \in L(H_2, X)$. Верно и обратное утверждение (лемма 2 [13]): « $\xi \in L(H_2, X) \Rightarrow$ оператор ξ имеет представление в виде ξ_2 -модели» или, иными словами, нет неразрешимых различий между $(A, B, B^\#)_2$ - и ξ_2 -моделями. В этой парадигме автономность (инвариантность во времени) $(A, B, B^\#)_2$ -модели в терминах ξ_2 -модели имеет простое, но принципиальное, предложение:

$$\begin{aligned} (A, B, B^\#) \in L(X, X) \times L(Y, X) \times L(Z, X) &\Rightarrow \\ \Rightarrow \xi(g, w, q) &= \int_T (Ag(\tau) + Bw(\tau) + B^\#q(\tau)) \mu(d\tau) = \\ &= A \int_T g(\tau) \mu(d\tau) + B \int_T w(\tau) \mu(d\tau) + B^\# \int_T q(\tau) \mu(d\tau), \\ &\forall (g, w, q) \in H_2. \end{aligned} \quad (2')$$

Предложение (2') вытекает из следствия 2 [14, с. 191].

Постановка задачи разрешимости дифференциальной реализации с автономной $(A, B, B^\#)_2$ -моделью: пусть $u^\#: AC(T, X) \rightarrow L_2(T, \mu, Z)$, $\Pi_{u^\#} := \{(x, u, q) \in AC(T, X) \times L_2(T, \mu, Y) \times L_2(T, \mu, Z) : (x, u, q) = (x, u, u^\#(x))\}$, $N \subset \Pi_{u^\#}$ — некоторое фиксированное поведение «вход — выход» D -системы с позиционным законом $x \mapsto u^\#(x)$. Определить в аналитических конструкциях от семейства процессов N необходимые и достаточные условия, при которых N представляет K -решения некоторого дифференциального уравнения (1); в общем случае ограничений на $\text{Card } N$ (мощность семейства N) не накладываем (например, $\text{Card } N \geq \aleph_0$ — алеф-нуль).

2. СУЩЕСТВОВАНИЕ И ЕДИНСТВЕННОСТЬ РЕАЛИЗАЦИИ С АУТОНОМНОЙ $(A, B, B^\#)_2$ -МОДЕЛЬЮ В ВАРИАНТЕ $\text{Card } N = 1$

Для поведения $(x, u, u^\#(x)) \in \Pi_{u^\#}$, отражающего процесс «вход — выход» в исследуемой D -системе, выпишем две μ -непрерывные меры (с учетом [15, с. 107] любая функция $x(\cdot) \in AC(T, X)$ обладает производной $dx(\cdot)/dt$ класса $L_1(T, \mu, X)$):

$$\begin{aligned} v(S) &:= \int_S (\|x(\tau)\|_X^2 + \|u(\tau)\|_Y^2 + \|u^\#(x(\tau))\|_Z^2) \mu(d\tau), \\ &S \in \mathcal{F}_\mu, \\ v_-(S) &:= \int_S \|dx(\tau)/dt\|_X \mu(d\tau), \quad S \in \mathcal{F}_\mu. \end{aligned} \quad (3)$$

Далее считаем, что означенные меры лебеговски расширены на σ -алгебры \wp_{v_-} и \wp_{v_+} . В терминах данных мер рассмотрим пространства $L_2(T, v, R)$ и $L_1(T, v_-, R)$, после чего введем $\mathfrak{a}: L_2(T, v, R) \rightarrow H_2$ и $\zeta: L_1(T, v_-, R) \rightarrow X$ — линейные непрерывные операторы, действующие согласно следующим правилам:

$$\mathfrak{a}(\lambda) := \lambda \cdot (x, u, u^\#(x)), \quad \lambda \in L_2(T, v, R), \quad (4)$$

$$\zeta(\eta) := \int_T (\eta(\tau) dx(\tau)/d\tau) \mu(d\tau), \quad \eta \in L_1(T, v_-, R);$$

в теоретико-множественной модели [16] идентификации систем (1) операторы \mathfrak{a} и ζ — «конструкторы» пространств «входных» и «выходных» сигналов.

Нет такой информации о $(A, B, B^\#)_2$ -модели, которую нельзя было бы извлечь из конструкции соответствующей ей ξ_2 -модели (лемма 2 [13]). Поэтому в аксиоматическом построении [16] теоретико-множественной интерпретации идентификационного процесса для дифференциальной системы (1) в качестве математической модели выступает не форма оператора Коши (прототип определения 1.1 [1, с. 13]), а ее представление в терминах интегральной ξ_2 -модели (реминисценция определения 1.3 [17, с. 22]). При этом в данной интерпретации (см. статью [16]) идентификационный базис задает область определения ξ_2 -модели. Есть и другие веские доводы исследовать геометрию идентификационных базисов, но далее понадобится только результат леммы 1, доказательство которой опускаем (несложная модификация теоремы 7 и следствия 4 из статьи [16]).

Лемма 1. Пусть $(x, u, u^\#(x)) \in \Pi_{u^\#}$, v — мера из (3), \mathfrak{a} — оператор из выражения (4) и пусть Ω — полный образ в H_2 оператора \mathfrak{a} . Тогда Ω — замкнутое подпространство в H_2 , при этом оператор $\mathfrak{a}: L_2(T, v, R) \rightarrow \Omega$ — линейная изометрия.

Замечание 1. Норма $\|(x, y, z)\|_U := (\|x\|_X^2 + \|y\|_Y^2 + \|z\|_Z^2)^{1/2}$ в произведении $X \times Y \times Z = : U$ наделяет последнее гильбертовой структурой. Следовательно, пространства H_2 и $L_2(T, \mu, U)$ равны с точностью до изоморфизма, осуществляющего естественное вложение H_2 в $L_2(T, \mu, U)$, поэтому резонно считать $\Omega \subset L_2(T, \mu, U)$. ♦

С учетом замечания 1 введем на Ω конструкцию интеграла Бохнера [14], что позволяет выде-

лить в подпространстве Ω замкнутое нуль-многообразиие вида

$$W := \left\{ h \in \Omega: \int_T h(\tau) \mu(d\tau) = 0 \in U \right\}; \quad (5)$$

в силу леммы 1 функциональное многообразие W замкнуто в $L_2(T, \mu, U)$ (и в H_2).

Лемма 2. $D := \{d \in U: d = \int_T h(\tau) \mu(d\tau), h \in \Omega\}$ — множество второй категории в себе (с топологией, индуцированной из U).

Доказательство. Достаточно установить (согласно теореме Бэра — Хаусдорфа о категории [14, с. 24]), что D — полное метрическое пространство. С этой целью построим «топологическую копию» множества D . Перейдем к деталям.

$$\text{Так как } \left\{ d \in U: d = \int_T h(\tau) \mu(d\tau), h \in L_2(T, \mu, U) \right\} = U,$$

то к оператору

$$J(h) := \int_T h(\tau) \mu(d\tau), \quad h \in L_2(T, \mu, U),$$

применима теорема Банаха об открытости отображения [14, с. 112]. Таким образом, сужение $J|_\Omega$ — открытое отображение на образ $\text{Im } J|_\Omega$ (т. е. на D), откуда в силу теоремы 8 [18, с. 133] топология в D совпадает с фактор-топологией, задаваемой $J|_\Omega$, что приводит к положению: фактор-пространство $G := \Omega/W$ и линейное многообразие D обладают линейным гомеоморфизмом $J^*: G \rightarrow D$, таким что $J|_\Omega = J^* \circ \pi$, где π — фактор-отображение подпространства Ω на G . С другой стороны, опираясь на лемму 1, представление (5) и пункт (d) теоремы 1.41 [19, с. 39], заключаем: фактор-пространство G — банахово.

Следствие 1. Линейное многообразие D замкнуто в U . Оператор $J|_\Omega$ — открытое отображение подпространства Ω на D . ♦

Условимся обозначать фактор-пространство классов μ -эквивалентности всех вещественных и μ -измеримых на интервале времени T функций через $L(T, \mu, R)$, и пусть $\Psi: AC(T, X) \times L_2(T, \mu, Y) \times L_2(T, \mu, Z) \rightarrow L(T, \mu, R)$ оператор Релея—Ритца [13]:

$$\Psi(g, w, q)(t) := \begin{cases} \|dg(t)/dt\|_X / \|g(t), w(t), q(t)\|_U, \\ \text{если } \|(g(t), w(t), q(t))\|_U \neq 0; \\ 0 \in R, \text{ если } \|(g(t), w(t), q(t))\|_U = 0, \end{cases} \quad (6)$$

где $g \in AC(T, X)$, $w \in L_2(T, \mu, Y)$, $q \in L_2(T, \mu, Z)$.

Оператор Ψ не стеснен рамками своих конструкций из выражения (6), более того, во второй строке он фактически «не обнуляет» информацию о динамических процессах $(x(\cdot), u(\cdot), u^\#(x(\cdot)))$ из $\Pi_{u^\#}$, поскольку имеют место следующие положения:



— каждая функция $x \in AC(T, X)$ μ -почти всюду дифференцируема на интервале T и имеет (лемма 1 [13]) аналитическое представление в форме

$$x(t) = x(t_0) + \int_{[t_0, t]} dx(\tau)/d\tau \mu(d\tau), \quad t \in T;$$

— в силу леммы 3 [13] справедливо включение (по mod μ)

$$\{t \in T: \|(x(t), u(t), u^\#(x(t)))\|_U = 0\} \cdot c \cdot \{t \in T: dx(t)/dt = 0\}, \quad (7)$$

следовательно (в задаче реализации), на множестве моментов времени

$$\{t \in T: \|(x(t), u(t), u^\#(x(t)))\|_U = 0\}$$

функция $t \mapsto \Psi(x, u, u^\#(x))(t)$ согласно первой строке выражения (6) «не теряет информацию» о поведении $(x(\cdot), u(\cdot), u^\#(x(\cdot))) \in \Pi_{u^\#}$ (вне зависимости от факта наличия или отсутствия дифференциальной реализации (1) данного динамического процесса).

В формулировке следующей теоремы (в известном смысле она является пропедевтической к теореме 4, см. далее) выписаны наиболее компактные (на взгляд авторов) соотношения между понятиями, с одной стороны, поведения D -системы как апостериорного динамического процесса «вход — выход», а с другой, как K -решения некоторого дифференциального уравнения (1); см. далее также замечание 5.

Теорема 1. $(x, u, u^\#(x)) \in \Pi_{u^\#}$ — K -решение некоторого уравнения (1) в том и только в том случае, если для соотношений (3)—(6), индуцированных $(x, u, u^\#(x))$, выполняется $\mathfrak{e}^{-1}(W) \subset \text{Ker } \zeta$ совместно с одним (любым) из двух условий:

$$a) \exists c \in (0, \infty): v_-(S) \leq c (\mu(S))^{1/2} (v(S))^{1/2}, \forall S \in \wp_\mu;$$

$$b) \exists c \in (0, \infty): \Psi(x, u, u^\#(x))(t) \leq c.$$

Замечание 2. Подтверждение одного из условий $a)$ или $b)$ обеспечивает (см. замечание 1 [8]) непрерывное [20, с. 322] вложение $\mathfrak{L}_2(T, v, R) \subset \mathfrak{L}_1(T, v_-, R)$, что делает корректным (см. (4)) анализ операции $\mathfrak{e}^{-1}(W) \subset \text{Ker } \zeta$ на классах μ -эквивалентности из $\mathfrak{L}_2(T, v, R)$; во избежание недоразумений следует иметь в виду, что $\mathfrak{L}_2(T, v, R) \subset \mathfrak{L}_1(T, v_-, R)$ еще не обеспечивает факт $\mathfrak{L}_2(T, v, R) \subset \mathfrak{L}_1(T, v_-, R)$ (следствие 1 [13]). Уместно также отметить, что в отличие от задачи дифференциальной реализации в редакции нестационарной $(A, B, B^\#)_2$ -модели (см. п. ϑ) замечания 1 [8]), реализация (1) процесса $(x, u, u^\#(x))$

не гарантирует, но (см. следствие 2) и не отвергает *единственность* представления автономной $(A, B, B^\#)_2$ -модели.

Доказательство теоремы 1. Приняв временно на веру перечисленные в формулировке теоремы 1 факты, покажем, что позиции $a)$ и $b)$ эквивалентны.

• $(a) \Rightarrow b)$. Пусть существует такое $c \in (0, \infty)$, что $v_-(S) \leq c (\mu(S))^{1/2} (v(S))^{1/2}, \forall S \in \wp_\mu$. Рассмотрим на интервале T три абсолютно непрерывные функции:

$$t \mapsto \gamma(t) := \int_{[t_0, t]} \|dx(\tau)/d\tau\|_X \mu(d\tau), \quad t \mapsto \alpha(t) := c^2 \int_{[t_0, t]} \mu(d\tau),$$

$$t \mapsto \beta(t) := \int_{[t_0, t]} (\|x(\tau)\|_X^2 + \|u(\tau)\|_Y^2 + \|u^\#(x(\tau))\|_Z^2) \mu(d\tau).$$

Функции γ, α и β дифференцируемы μ -почти всюду: $d\gamma(t)/dt = \|dx(t)/dt\|_X, d\alpha(t)/dt = c^2, d\beta(t)/dt = (\|x(t)\|_X^2 + \|u(t)\|_Y^2 + \|u^\#(x(t))\|_Z^2)$. Поэтому, приняв $S_t := [t, t + \Delta t], \Delta t > 0$, из факта $v_-(S_t) \leq c (\mu(S_t))^{1/2} (v(S_t))^{1/2}$ согласно (3) приходим к

$$\begin{aligned} \Delta t^{-1}(\gamma(t + \Delta t) - \gamma(t)) &= \Delta t^{-1} \int_{[t, t + \Delta t]} \|dx(\tau)/d\tau\|_X \mu(d\tau) \leq \\ &\leq c \left(\Delta t^{-1} \int_{[t, t + \Delta t]} \mu(d\tau) \right)^{1/2} \left(\Delta t^{-1} \int_{[t, t + \Delta t]} (\|x(\tau)\|_X^2 + \|u(\tau)\|_Y^2 + \|u^\#(x(\tau))\|_Z^2) \mu(d\tau) \right)^{1/2} = \\ &= (\Delta t^{-1}(\alpha(t + \Delta t) - \alpha(t)))^{1/2} (\Delta t^{-1}(\beta(t + \Delta t) - \beta(t)))^{1/2} \end{aligned}$$

и, переходя к пределу при $\Delta t \rightarrow 0$, получаем неравенство

$$\begin{aligned} d\gamma(t)/dt = \|dx(t)/dt\|_X &\leq (d\alpha(t)/dt)^{1/2} (d\beta(t)/dt)^{1/2} = \\ &= c \|(x(t), u(t), u^\#(x(t)))\|_U. \end{aligned}$$

Следовательно (в силу (6) и (7)), справедливо положение $\Psi(x, u, u^\#(x))(t) \leq c$.

• $(b) \Rightarrow a)$. Пусть найдется такое число $c > 0$, что выполнимо $\Psi(x, u, u^\#(x))(t) \leq c$. Тогда, очевидно, $\|dx(t)/dt\|_X \leq c (\|x(t)\|_X^2 + \|u(t)\|_Y^2 + \|u^\#(x(t))\|_Z^2)^{1/2}$ и, следовательно, в силу интегрального неравенства Коши—Буняковского для любого подмножества $S \in \wp_\mu$ имеет место $v_-(S) \leq c (\mu(S))^{1/2} (v(S))^{1/2}$.

Теперь, после краткого отступления, вызванного подтверждением $a) \Leftrightarrow b)$, возвращаемся к основной линии доказательства теоремы 1; разобьем его на две части — «только в том случае, \Rightarrow » и «в том случае, \Leftarrow ».

• (только в том случае, \Rightarrow). Пусть $(x, u, u^\#(x))$ — K -решение некоторого уравнения (1) и $(A, B, B^\#) \in L(X, X) \times L(Y, X) \times L(Z, X)$ — его автономная $(A, B, B^\#)_2$ -модель. Тогда (теорема 1 [13]) имеет место непрерывное вложение $\mathfrak{L}_2(T, v, R) \subset \mathfrak{L}_1(T, v_-, R)$, и справедлив комментарий замечания 2. Используя представление (3),

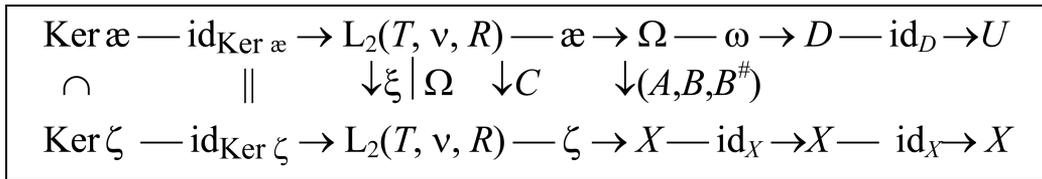


Рис. 1. Диаграмма (к доказательству теоремы 1)

автономную ξ_2 -модель (формула (2')) и уравнение (1), обнаруживаем, что

$$\begin{aligned} \int_T (\lambda(\tau) dx(\tau)/d\tau) \mu(d\tau) &= A \int_T \lambda(\tau) x(\tau) \mu(d\tau) + \\ &+ B \int_T \lambda(\tau) u(\tau) \mu(d\tau) + B^\# \int_T \lambda(\tau) u^\#(x(\tau)) \mu(d\tau), \\ \forall \lambda &\in L_2(T, \nu, R). \end{aligned}$$

Откуда, принимая во внимание (лемма 1), что оператор $\mathfrak{a}: L_2(T, \nu, R) \rightarrow \Omega$ обратим (т. е. $\text{Ker } \mathfrak{a} = 0 \in L_2(T, \nu, R)$) и $(A, B, B^\#): U \rightarrow X$, получаем вложение $\mathfrak{a}^{-1}(W) \subset \text{Ker } \zeta$.

Осталось подтвердить а) или б). Выбираем свойство б), его наличие содержит следующая цепь импликаций (с учетом неравенства Коши — Буняковского и (7)):

$$\begin{aligned} dx(t)/dt &= Ax(t) + Bu(t) + B^\# u^\#(x(t)) \Rightarrow \\ \Rightarrow \|dx(t)/dt\|_X &\leq \|A\|_{L(X, X)} \|x(t)\|_X + \|B\|_{L(Y, X)} \|u(t)\|_Y + \\ + \|B^\#\|_{L(Z, X)} \|u^\#(x(t))\|_Z &\geq \Psi(x, u, u^\#(x))(t) \leq (\|A\|_{L(X, X)}^2 + \\ + \|B\|_{L(Y, X)}^2 + \|B^\#\|_{L(Z, X)}^2)^{1/2} &=: c \in (0, \infty). \end{aligned}$$

- (в том случае, \Leftarrow). Пусть $\mathfrak{a}^{-1}(W) \subset \text{Ker } \zeta$ и, кроме того, отыщется такое положительное число c , что можно утверждать: $\Psi(x, u, u^\#(x))(t) \leq c$; это неравенство обеспечивает (теорема 1 [13]) вложение $\mathfrak{E}_2(T, \nu, R) \subset \mathfrak{E}_1(T, \nu, R)$, поэтому в (4) область определения оператора ζ позволительно сузить до $L_2(T, \nu, R)$. Покажем, что оператор $\zeta: L_2(T, \nu, R) \rightarrow X$ непрерывен. Позиция б) влечет связь

$$\begin{aligned} \|\lambda(t) dx(t)/dt\|_X &\leq c(\lambda^2(t) \|x(t)\|_X^2 + \|u(t)\|_Y^2 + \\ &+ \|u^\#(x(t))\|_Z^2)^{1/2}, \lambda \in L_2(T, \nu, R) \Rightarrow \\ \Rightarrow \left\| \int_T (\lambda(\tau) dx(\tau)/d\tau) \mu(d\tau) \right\|_X &\leq \int_T \|\lambda(\tau) dx(\tau)/d\tau\|_X \mu(d\tau) \leq \\ \leq c \left(\int_T (\lambda^2(\tau) \|x(\tau)\|_X^2 + \|u(\tau)\|_Y^2 + \|u^\#(x(\tau))\|_Z^2) \mu(d\tau) \right)^{1/2} &\leq \\ \leq c(\mu(T))^{1/2} \left(\int_T (\lambda^2(\tau) \|x(\tau)\|_X^2 + \|u(\tau)\|_Y^2 + \|u^\#(x(\tau))\|_Z^2) \mu(d\tau) \right)^{1/2} &= c(\mu(T))^{1/2} \|\lambda\|_{L_2}, \end{aligned}$$

$\|\cdot\|_{L_2}$, — норма в $L_2(T, \nu, R)$. Таким образом, установили непрерывность ζ , что по существу равносильно существованию некоторой ξ_2 -модели (2), необязательно с автономной $(A, B, B^\#)_2$ -моделью; см. далее диаграмму и в ней сужение $\xi|_\Omega$.

Для снятия возможных затруднений, а также облегчения и наглядности дальнейших рассуждений, рассмотрим коммутативную диаграмму, представленную на рис. 1.

Здесь id_\dots — тождественное отображение (индекс — область определения/значений), ξ — оператор ξ_2 -модели (2), ω — оператор интегрирования на функциональном многообразии Ω ; с учетом (5) ясно, что имеет место $\omega = J|_\Omega$ и $\text{Ker } \omega = W$.

Теперь построим линейный оператор C , фигурирующий в диаграмме. Для этого каждому $\eta \in D$ сопоставим такое значение $C(\eta) \in X$, чтобы в целом не нарушалось свойство коммутативности диаграммы, а поскольку предполагаем отношением $\mathfrak{a}^{-1}(W) = \mathfrak{a}^{-1}(\text{Ker } \omega) \subset \text{Ker } \zeta$, то примем $C(\eta) = \zeta(\mathfrak{a}^{-1}(\omega^{-1}(\eta)))$.

Не теряя терпения, изменим несколько вопрос: обладает ли оператор $C: D \rightarrow X$ свойством непрерывности? (Подразумевается, что топология в D индуцирована метрической топологией из U). Оказывается, что ответ положительный.

В самом деле, если E — открытая область в X , то ее прообраз $\zeta^{-1}(E)$ открыт в $L_2(T, \nu, R)$ поскольку (как показано выше) оператор ζ непрерывен. Далее (см. диаграмму), множество $\mathfrak{a}(\zeta^{-1}(E))$, как утверждает лемма 1, открыто в Ω , следовательно $\omega(\mathfrak{a}(\zeta^{-1}(E)))$ — открытая область в D (в силу следствия 1). С другой стороны, как несложно установить (учитывая, что $\mathfrak{a}^{-1}(W) = \mathfrak{a}^{-1}(\text{Ker } \omega) \subset \text{Ker } \zeta$), имеет место $\omega(\mathfrak{a}(\zeta^{-1}(E))) = C^{-1}(E)$, что и подтверждает непрерывность оператора C .

Наконец, структура пространства U позволяет (см. теорему 8.4.2 [21, с. 213]) осуществить линейное непрерывное распространение оператора C до некоторой автономной $(A, B, B^\#)_2$ -модели $(A, B, B^\#): U \rightarrow X$ такой, что

$$\zeta(\mathfrak{a}^{-1}(\omega^{-1}(\eta))) = (A, B, B^\#)(\eta) = C(\eta), \quad \forall \eta \in D.$$

В свою очередь, это означает (согласно (4)) не что иное, как

$$\begin{aligned} \int_T (\lambda(\tau) dx(\tau)/d\tau) \mu(d\tau) &= A \int_T \lambda(\tau) x(\tau) \mu(d\tau) + \\ &+ B \int_T \lambda(\tau) u(\tau) \mu(d\tau) + B^\# \int_T \lambda(\tau) u^\#(x(\tau)) \mu(d\tau), \\ \forall \lambda &\in L_2(T, \nu, R). \end{aligned}$$

Последнее равенство справедливо и для характеристических функций χ_t от подинтервалов $[t_0, t] \subset T$, что в силу (2') приводит к представлению «смещенной



на вектор $x(t_0)$ траектории изучаемого динамического процесса:

$$\begin{aligned} \zeta(\chi_f(x, u, u^\#(x)))(t) &= x(t) - x(t_0) = \\ &= \int_{[t_0, t]} (Ax(\tau) + Bu(\tau) + B^\#u^\#(x(\tau)))\mu(d\tau), \quad t \in T. \end{aligned}$$

Дифференцирование траектории $t \mapsto x(t)$ позволяет заключить, что $(x, u, u^\#(x))$ — K -решение уравнения (1) с операторами $A \in L(X, X)$, $B \in L(Y, X)$, $B^\# \in L(Z, X)$. ♦

Теорема 1 определяет «единичные» процессы в $\Pi_{u^\#}$, обладающие автономной $(A, B, B^\#)_2$ -моделью реализации, при этом ход доказательства показал: свойства $a)$ и $b)$ эквивалентны; слабое место теоремы — необходимо добиться легкости в исчислениях, подтверждающих или опровергающих вложение $\mathfrak{ae}^{-1}(W) \subset \text{Ker } \zeta$. В этой связи пункт (ii) следствия 2 — первый шаг в направлении констатации, что конструктивность данных исчислений может достигаться (например, теорема 1 [10], утверждение 1 [22] и т. п.) в классе конечномерных систем (1).

Следствие 2. (i) Реализация (1) процесса $(x, u, u^\#(x)) \in \Pi_{u^\#}$ обладает единственной автономной $(A, B, B^\#)_2$ -моделью тогда и только тогда, когда $D = U$.

(ii) Если $\dim D < \infty$, то условия $a)$ и $b)$ в теореме 1 можно опустить.

3. ОСНОВНЫЕ ПРИНЦИПЫ M_2 -ПРОДОЛЖИМОСТИ

Определения и конструкции, употребляемые при построении теории реализации, можно получить из небольшого числа общих понятий, поэтому дальнейшее изложение основывается на изучении пространства L_2 , что ставит задачу определения остальных понятий через конструкцию $(A, B, B^\#)_2$ -модели, в частности, это относится к понятиям M_2 -продолжимости [8]. В связи с этим далее вкратце излагаются, с некоторой опорой на интуицию в части решения задачи реализации, формальные определения и некоторые важные положения об общих свойствах распространения M_2 -операторов; естественно собрать немногие нужные понятия вместе.

Определение 1. Пусть $(A, B, B^\#) \in L_2$. Назовем M_2 -оператором линейный оператор $M: H_2 \rightarrow L_1(T, \mu, X)$, имеющий аналитическое представление вида

$$M(g, w, q) := Ag + Bw + B^\#q, \quad (g, w, q) \in H_2.$$

Предложение 1 [8]. M_2 -оператор непрерывен в топологиях от $\|\cdot\|_H$ и $\|\cdot\|_{L_1}$; здесь $\|\cdot\|_{L_1}$ — норма в $L_1(T, \mu, X)$.

Определение 2. Пусть $V \subset H_2$. Линейный оператор $M^\#: \text{Span } V \rightarrow L_1(T, \mu, X)$ назовем M_2 -продолжимым, если и только если $M^\#$ допускает расширение до некоторого M_2 -оператора $M: H_2 \rightarrow L_1(T, \mu, X)$, т. е. $M(y) = M^\#(y), \forall y \in \text{Span } V$. ♦

Не стремясь на данный момент к формулировке исчерпывающего результата по характеристизации свойства M_2 -продолжимости, приведем ее конструкцию в семействе всех линейных непрерывных операторов, действующих из пространства H_2 в $L_1(T, \mu, X)$ (ее очевидная мотивация — предложение 1); впоследствии эта конструкция пригодится (для доказательства предложения 3).

Пусть $S \in \wp_\mu$ и $P_{S, L}: L_1(T, \mu, X) \rightarrow L_1(T, \mu, X)$ — оператор вида: $P_{S, L}(y)(t) := y(t)$, если $t \in S$ и $P_{S, L}(y)(t) := 0 \in X$ при $t \in T \setminus S$ [20, с. 13]. Оператор $P_{S, L}$ — линейный проектор $P_{S, L}^2 = P_{S, L}$ и пространство $L_2(T, \mu, X) \subset L_1(T, \mu, X)$ инвариантно относительно $P_{S, L}$, что делает корректным рассмотрение аналогичного оператора $P_{S, H}: H_2 \rightarrow H_2$.

Предложение 2 [8]. Пусть $E \subset H_2$ — линейное многообразие, инвариантное относительно семейства проекторов $\{P_{S, H}: S \in \wp_\mu\}$ и $M^*: E \rightarrow L_1(T, \mu, X)$ — линейный непрерывный оператор. Тогда существует M_2 -оператор $M: H_2 \rightarrow L_1(T, \mu, X)$, продолжающий M^* (т. е. $M(y) = M^*(y), \forall y \in E$), в том и только в том случае, если

$$M^* \circ P_{S, H}(y) = P_{S, L} \circ M^*(y), \quad \forall S \in \wp_\mu, \forall y \in E, \quad (8)$$

что означает коммутативность следующей диаграммы (рис. 2).

Следствие 3 [8]. Непрерывный линейный оператор $M: H_2 \rightarrow L_1(T, \mu, X)$ является M_2 -оператором тогда и только тогда, когда для любого $S \in \wp_\mu$ справедливо

$$M \circ P_{S, H}(\cdot) = P_{S, L} \circ M(\cdot). \quad \blacklozenge$$

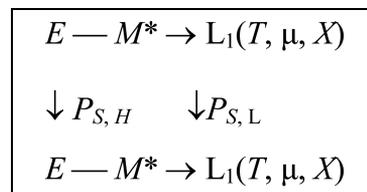


Рис. 2. Диаграмма (к предложению 2)

Пусть $V \subset H_2$ и $M^\#: \text{Span } V \rightarrow L_1(T, \mu, X)$ — некоторый линейный оператор. Чтобы получить с помощью предложения 2 действенный критерий продолжимости $M^\#$ до M_2 -оператора, необходимо последовательно:

- расширить линейную оболочку $\text{Span } V$ до линейного многообразия $E \subset H_2$, инвариантного относительно семейства проекторов $\{P_{S, H}: S \in \wp_\mu\}$;
- построить для оператора $M^\#$ его линейное расширение M^* на образованное линейное многообразие E ;
- показать непрерывность оператора M^* ;
- проверить для линейного расширения M^* выполнение условия (8).

Решение трех последних из перечисленных задач содержит предложение 3, тогда как первая из них — это предмет анализа следующей леммы.

Лемма 3. Пусть $V \subset H_2$ и $E := \text{Span}\{P_{S, H}(y): S \in \wp_\mu, y \in \text{Span } V\}$. Тогда:

а) E — наименьшее линейное множество в H_2 , содержащее $\text{Span } V$ и инвариантное относительно семейства проекторов $\{P_{S, H}: S \in \wp_\mu\}$;

б) если $y \in E$, то найдется натуральное k такое, что существуют $y_1, \dots, y_k \in \text{Span } V$ и $S_1, \dots, S_k \in \wp_\mu$ такие, что $y = \sum_{1 \leq i \leq k} P_{S_i, H}(y_i)$, $S_i \cap S_j = \emptyset$, $i \neq j$ ($i, j = 1, \dots, k$).

Замечание 3. В геометрическом разложении $y = \sum_{1 \leq i \leq k} P_{S_i, H}(y_i)$ можно считать, что $\bigcup_{1 \leq i \leq k} S_i$ исчерпывает весь интервал T , поскольку если $\bigcup_{1 \leq i \leq k} S_i$ — собственное подмножество интервала T , то, обозначив через S_{i+1} множество $T \setminus \bigcup_{1 \leq i \leq k} S_i$ и приняв $y_{i+1} \equiv 0$, получаем разложение вектор-функции $y = \sum_{1 \leq i \leq k+1} P_{S_i, H}(y_i)$, $\bigcup_{1 \leq i \leq k+1} S_i = T$. Таким образом, далее примем, что в представлении $y = \sum_{1 \leq i \leq k} P_{S_i, H}(y_i)$ подмножества $S_1, \dots, S_k \in \wp_\mu$ образуют дизъюнктное разбиение временного интервала T .

Доказательство леммы 3. (а) Инвариантность (и минимальность) линейного множества E следует из вполне прозрачного соотношения $P_{S^*, H} \circ P_{S^{**}, H} = P_{S^* \cap S^{**}, H}$.

(б) Доказательство этого утверждения проведем индукцией по числу k в следующем представлении: $y \in E$, $y = \sum_{1 \leq i \leq k} P_{S_i, H}(y_i)$, $S_i \in \wp_\mu$, $y_i \in \text{Span } V$, $i = 1, \dots, k$.

Индуктивный шаг. Рассмотрим сумму $\sum_{1 \leq i \leq k} P_{S_i, H}(y_i) + P_{S^*, H}(y^*)$, где $S_i \cap S_j = \emptyset$, $i \neq j$, $y_i, y^* \in \text{Span } V$, $i, j = 1, \dots, k$. Положим $S'_i := S^* \cap S_i$, $S''_i := S \setminus S^*$,

$S''' := S^* \setminus \bigcup_{1 \leq i \leq k} S_i$. Тогда подмножества S'_i , S''_i и S''' попарно дизъюнкты и, кроме того, $S_i = S'_i \cup S''_i$, $S^* = S''' \cup (\bigcup_{1 \leq i \leq k} S'_i)$, поэтому

$$P_{S_i, H}(y_i) = P_{S'_i, H}(y_i) + P_{S''_i, H}(y_i), \quad 1 \leq i \leq k,$$

$$P_{S^*, H}(y^*) = \sum_{1 \leq i \leq k} P_{S'_i, H}(y^*) + P_{S''_i, H}(y^*).$$

Последние соотношения позволяют завершить доказательство:

$$\begin{aligned} & \sum_{1 \leq i \leq k} P_{S_i, H}(y_i) + P_{S^*, H}(y^*) = \\ &= \sum_{1 \leq i \leq k} (P_{S'_i, H}(y_i) + P_{S''_i, H}(y_i) + P_{S'_i, H}(y^*)) + P_{S''_i, H}(y^*) = \\ &= \sum_{1 \leq i \leq k} (P_{S'_i, H}(y_i + y^*) + P_{S''_i, H}(y_i)) + P_{S''_i, H}(y^*). \quad \blacklozenge \end{aligned}$$

Легко видеть, что доказательство леммы 3 опиралось исключительно на структуру линейной оболочки, натянутой на множество $\{P_{S, H}(y): S \in \wp_\mu, y \in \text{Span } V\}$, которое по факту нелинейно. Это любопытно хотя и не очень важно, важно другое — предшествующая лемма вкуче с предложением 2 позволяют дать следующую компактную формулировку аналитического результата по M_2 -продолжимости.

Предложение 3. Пусть $V \subset H_2$ и $M^\#: \text{Span } V \rightarrow L_1(T, \mu, X)$ — линейный оператор. Тогда для M_2 -продолжимости оператора $M^\#$ необходимо и достаточно, чтобы в $L_2(T, \mu, R)$ нашлась такая функция $t \mapsto \varphi(t) \geq 0$, что

$$\|M^\#(y)(t)\|_X \leq \varphi(t)\|y(t)\|_U, \quad \forall y \in \text{Span } V. \quad (9)$$

Доказательство. (Необходимо, \Rightarrow). Если $M(g, w, q) := Ag + Bw + B^*q$ — некоторый M_2 -оператор, продолжающий $M^\#$, то, разумеется, имеет место

$$\|M^\#(y)(t)\|_X \leq \|M(t)y(t)\|_X \leq \varphi(t)\|y(t)\|_U, \quad \forall y \in \text{Span } V,$$

$$\varphi(t) = (\|A(t)\|_{L(X, X)}^2 + \|B(t)\|_{L(Y, X)}^2 + \|B^*(t)\|_{L(Z, X)}^2)^{1/2};$$

из сказанного следует, что функция φ принадлежит классу $L_2(T, \mu, R)$.

(Достаточно, \Leftarrow). Пусть $E \subset H_2$ — линейное многообразие из формулировки леммы 3. Рассмотрим линейный оператор $M^*: E \rightarrow L_1(T, \mu, X)$, действующий согласно установки $M^*(y) := \sum_{1 \leq i \leq k} P_{S_i, H} \circ M^\#(y_i)$, где $y, y_i \in E$, $S_i \in \wp_\mu$, $1 \leq i \leq k$, в силу леммы 3 и замечания 3 связаны следующими конструкциями:

$$\begin{aligned} y &= \sum_{1 \leq i \leq k} P_{S_i, H}(y_i), \quad y_i \in \text{Span } V, \quad S_i \cap S_j = \emptyset, \quad i \neq j, \\ & \bigcup_{1 \leq i \leq k} S_i = T, \quad i, j = 1, \dots, k. \end{aligned}$$



Покажем, что оператор M^* определен корректно, т. е. его значение от любой вектор-функции $y \in E$ не зависит от представления $y = \sum_{1 \leq i \leq k} P_{S_i, H}(y_i)$.

Пусть $y \in E$ и $y = \sum_{1 \leq i \leq k} P_{S_i, H}(y_i) = \sum_{1 \leq j \leq r} P_{S_j, H}(y_j)$, где $\{S_i\}_{i=1, \dots, k}$ и $\{S_j\}_{j=1, \dots, r}$ — некоторые фиксированные дизъюнктные разбиения интервала T , а $y_i, y_j \in \text{Span } V$, $1 \leq i \leq k$, $1 \leq j \leq r$. Тогда семейство подмножеств $\{S_{ij}: S_{ij} = S_i \cap S_j, 1 \leq i \leq k, 1 \leq j \leq r\}$ также образует разбиение отрезка T . Далее, положим $y_{ij} := y_i - y_j$. Так как $y(t) := y_i(t) := y_j(t)$ в T , то $y_{ij}(t) := 0$ на каждом S_{ij} , поэтому в силу (9) $\|M^\#(y_{ij})(t)\|_X \leq \varphi(t)\|y_{ij}(t)\|_U := 0$ при $t \in S_{ij}$ и, таким образом, $M^\#(y_{ij})(t) := 0$ в S_{ij} . Следовательно, $M^\#(y_i)(t) := M^\#(y_j)(t)$, $t \in S_{ij}$. Но в этом случае, обозначив через $z'(t) := \sum_{1 \leq i \leq k} P_{S_i, L} \circ M^\#(y_i)$ и $z''(t) := \sum_{1 \leq j \leq r} P_{S_j, L} \circ M^\#(y_j)$, для этих функций получаем цепь равенств $z'(t) = M^\#(y_i)(t) := M^\#(y_j)(t) = z''(t)$, $t \in S_{ij}$. Учитывая, что система подмножеств $\{S_{ij}\}_{1 \leq i \leq k, 1 \leq j \leq r}$ образует дизъюнктное разбиение интервала T , приходим к заключению, что имеет место соответствие $z'(t) := z''(t)$ для точек из T , и значит линейный оператор M^* определен корректно.

Для доказательства непрерывности отображения M^* , очевидно, достаточно проверить, что для M^* справедливо соотношение (9) (в этом случае непрерывность оператора M^* следует из интегрального неравенства Гельдера). Пусть (как и прежде) $y = \sum_{1 \leq i \leq k} P_{S_i, H}(y_i)$, $y_i \in \text{Span } V$, где $\{S_i\}_{i=1, \dots, k}$ — разбиение отрезка T . Тогда из $M^*(y) = \sum_{1 \leq i \leq k} P_{S_i, L} \circ M^\#(y_i)$ следует, что $M^*(y)(t) = M^\#(y_i)(t)$, $t \in S_i$, откуда в силу (9) для y_i будет $\|M^*(y)(t)\|_X = \|M^\#(y_i)(t)\|_X \leq \varphi(t)\|y_i(t)\|_U \leq \varphi(t)\|y(t)\|_U$ μ -почти всюду в S_i , а значит и для μ -почти всех точек интервала T . Для завершения доказательства остается подтвердить для оператора M^* свойство (8).

Пусть $y \in E$, $y = \sum_{1 \leq i \leq k} P_{S_i, H}(y_i)$, $y_i \in \text{Span } V$, $S_i \cap S_j = \emptyset$, $i \neq j$, $\cup_{1 \leq i \leq k} S_i = T$, $i, j = 1, \dots, k$ и $S \subset T$. Тогда $P_{S, H}(y) = \sum_{1 \leq i \leq k} P_{S, H} \circ P_{S_i, H}(y_i) = \sum_{1 \leq i \leq k} P_{S \cap S_i, H}(y_i)$, откуда в силу конструкции оператора M^* , введенной выше,

$$\begin{aligned} M^* \circ P_{S, H}(y) &= \sum_{1 \leq i \leq k} P_{S \cap S_i, L} \circ M^\#(y_i) = \\ &= \sum_{1 \leq i \leq k} P_{S, L} \circ P_{S_i, L} \circ M^\#(y_i) = \\ &= P_{S, L} \circ \sum_{1 \leq i \leq k} P_{S_i, L} \circ M^\#(y_i) = P_{S, L} \circ M^*(y). \quad \blacklozenge \end{aligned}$$

Пусть $V \subset H_2$. Линейному оператору $M^\#$: $\text{Span } V \rightarrow L_1(T, \mu, X)$ из формулировки предло-

жения 3 сопоставим² нелинейный оператор Φ : $\text{Span } V \rightarrow L(T, \mu, R)$ вида

$$\begin{aligned} \Phi(g, w, q)(t) &:= \\ &:= \begin{cases} \|M^\#(y)(t)\|_X / \|y(t)\|_U, & \text{если } \|y(t)\|_U \neq 0; \\ 0, & \text{если } \|y(t)\|_U = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Далее в геометрии поглощающего множества следуем [14, с. 42]: множество Q в векторном пространстве L является *поглощающим*, если для любого $y \in L$ можно указать такое $\alpha \in (0, \infty)$, что $\alpha y \in Q$; если L — нормированное пространство, то не только каждая ограниченная окрестность нуля (п. (а) теоремы 1.15 [19, с. 19]), но и ее граница с нулем — поглощающее множество. Через $\text{supp } \phi := \{t \in T: \phi(t) \neq 0\}$ обозначим носитель функции $\phi \in L(T, \mu, R)$; в такой постановке каждый носитель определяется с точностью до множества меры нуль.

Следствие 4. Пусть $V \subset H_2$, $M^\#$: $\text{Span } V \rightarrow L_1(T, \mu, X)$ — линейный оператор и Q — некоторое поглощающее множество в $\text{Span } V$. Тогда M_2 -продолжимость оператора $M^\#$ эквивалентна совместному выполнению условий:

$$\text{supp } \|M^\#(y)\|_X \subset \text{supp } \|y\|_U, \quad \forall y \in Q;$$

$$\exists \varphi \in L_2(T, \mu, R): \Phi(y)(t) \leq \varphi(t), \quad \forall y \in Q.$$

Замечание 4. В контексте использования оператора Релея—Ритца первое условие конструктивно: пусть $M^\#(y) := dg/dt$, $y := (g, w, q) \in AC(T, X) \times L_2(T, \mu, Y) \times L_2(T, \mu, Z)$, тогда $\text{supp } \|dg/dt\|_X \subset \text{supp } \|(g, w, q)\|_U$ — прямое следствие (7).

4. РАЗРЕШИМОСТЬ КВАЗИЛИНЕЙНОЙ РЕАЛИЗАЦИИ ДЛЯ ПУЧКА ПРОЦЕССОВ В ПОСТАНОВКЕ Card $N \leq \infty$

Следствие 4 и замечание 4 наводят на мысль, что метод оператора Релея—Ритца может быть продуктивным в анализе существования реализаций как нестационарных, так и автономных $(A, B, B^\#)_2$ -моделей в обстоятельствах Card $N \leq \infty$; поэтому сейчас подробно исследуем соответствующее построение.

Начнем с небольшого уточнения порядковых свойств пространства $L(T, \mu, R)$. Пусть \leq_L — квазиупорядочение в $L(T, \mu, R)$ такое, что $\phi_1 \leq_L \phi_2$ для $\phi_1, \phi_2 \in L(T, \mu, R)$ тогда и только тогда, когда

² Часто бывает полезно охарактеризовать сложный объект, определяемый многими переменными и параметрами, с помощью скалярной функции. Оператор Φ — пример такого рода. Без особой натяжки его можно назвать *обобщенным оператором Релея—Ритца*; в его конструкции нетрудно угадать, как прототип, оператор (6).

$\phi_1(t) \leq \phi_2(t)$. Наименьшую верхнюю грань функционального подмножества $F \subset L(T, \mu, R)$ обозначим $\sup_L F$, если эта грань существует для F в структуре квазиупорядочения \leq_L .

Следующая теорема опирается на следствие 4, находясь в тесной связи с замечанием 4, так как использует представление оператора $M^\#$ в виде $M^\#(g, w, q) = dg/dt, (g, w, q) \in \text{Span } N, N \subset \Pi_{u^\#}$; доказательство теоремы не приводим, оно — прямая компиляция отмеченных только что положений и теоремы 2 [13].

Теорема 2. Пусть $N \subset \Pi_{u^\#}, Q$ — некоторое поглощающее множество в $\text{Span } N$ и Ψ — оператор Релея—Ритца. Тогда задача реализации разрешима в постановке

$$\exists (A, B, B^\#) \in L_2: dx/dt = Ax + Bu + B^\# u^\#(x), \\ \forall (x, u, u^\#(x)) \in N,$$

в том и только в том случае, если имеет место одно (любое) из условий

$$\exists \varphi \in L_2(T, \mu, R): \Psi(g, w, q) \leq_L \varphi, \forall (g, w, q) \in Q; \\ \exists \sup_L \Psi(Q) \ \& \ \exists \varphi \in L_2(T, \mu, R): \sup_L \Psi(Q) \leq_L \varphi.$$

Замечание 5. Существует — см. п. б) теоремы 17 [23, с. 68] — счетное подмножество $Q^* \subset Q$, такое, что для второго условия теоремы 2 функцию $\phi := \sup_L \Psi(Q)$ определяет следующая sup-конструкция

$$t \mapsto \phi(t) = \sup\{\Psi(g, w, q)(t) \in R: (g, w, q) \in Q^*\}.$$

Заметим, что даже $1 < \text{Card } N < \infty$ влечет $\text{Card } Q$ — мощность континуума; это положение отличает теорему 1 (когда $\text{Card } N = 1$) от теорем 2—4 и дополнительно мотивирует задачу инвариантного расширения реализации из [13]. ♦

Модель $(A, B, B^\#) \in L_2$ из теоремы 2 не обязана быть автономной, поэтому ниже соединим представление функции φ с поиском ответа на вопрос: какой вид имеет верхняя оценка $\sup_L \Psi(Q)$, если $(A, B, B^\#)_2$ -модель в реализации N автономная?

Представление функции φ , связанное с ответом на поставленный вопрос, едва ли не очевидно из свойства б) в формулировке теоремы 1.

Теорема 3. Пусть $N \subset \Pi_{u^\#}$ — поведение D -системы, Q — поглощающее множество в $\text{Span } N$, Ψ — оператор Релея—Ритца и χ_T — характеристическая функция интервала T . Тогда задача дифференциальной реализации в постановке

$$\exists (A, B, B^\#) \in L(X, X) \times L(Y, X) \times L(Z, X): \\ dx/dt = Ax + Bu + B^\# u^\#(x), \forall (x, u, u^\#(x)) \in N$$

имеет решение только в том случае, если отыщется такое число $c > 0$, что

$$\Psi(g, w, q) \leq_L c \chi_T, \forall (g, w, q) \in Q.$$

Доказательство. Если $(A, B, B^\#)$ — некоторая автономная $(A, B, B^\#)_2$ -модель, для которой K -решения уравнения (1) содержат семейство процессов N , то

$$dg(t)/dt = Ag(t) + Bw(t) + B^\# q(t), \forall (g, w, q) \in Q \Rightarrow \\ \Rightarrow \|dg(t)/dt\|_X \leq \|A\|_{L(X, X)} \|g(t)\|_X + \|B\|_{L(Y, X)} \|w(t)\|_Y + \\ + \|B^\#\|_{L(Z, X)} \|q(t)\|_Z, \forall (g, w, q) \in Q \Rightarrow \\ \Rightarrow \Psi(g, w, q)(t) \leq (\|A\|_{L(X, X)}^2 + \|B\|_{L(Y, X)}^2 + \\ + \|B^\#\|_{L(Z, X)}^2)^{1/2} =: c \in (0, \infty), \forall (g, w, q) \in Q. \spadesuit$$

Теорема 3 не имеет обращения и таким образом дает паллиативное решение задачи реализации в классе уравнений (1). Поэтому выясним, какие требуется внести коррективы с целью полной разрешимости данной задачи реализации.

Следуя утверждению леммы 3, минимальное линейное многообразие E_N , содержащее N и инвариантное относительно семейства проекторов $\{P_{S, H}: S \in \wp_\mu\}$, имеет представление $E_N := \text{Span}\{P_{S, H}(y): S \in \wp_\mu, y \in \text{Span } N\}$; удобное совпадение: замыкание $[E_N]$ множества E_N в H_2 линейно (пункт (с) теоремы 1.13 [19, с. 18]) и инвариантно относительно проекторов из $\{P_{S, H}: S \in \wp_\mu\}$. Далее, пусть $\omega_N := J|_{E_N}, \varpi_N := J|[E_N], D_N := \text{Im } \varpi_N$ (образ оператора ϖ_N). Следующая лемма обобщает лемму 2 и следствие 1 (доказательство аналогично выводу леммы 2).

Лемма 4. D_N — множество второй категории в себе (с топологией, индуцированной из U). Оператор $\varpi_N: [E_N] \rightarrow D_N$ — открытое отображение. ♦

Разберем теперь, как действует сужение ξ_2 -модели $\xi_N: E_N \rightarrow X$ в предположении, что ξ_2 -модель существует в контексте общего решения задачи реализации семейства $N \subset \Pi_{u^\#}$ (термин «общего» означает, что $(A, B, B^\#)_2$ -модель реализации не обязана быть автономной). С этой целью введем в рассмотрение линейный оператор $\zeta_N: E_N \rightarrow X$, являющийся алгебраическим расширением с $\{P_{S, H}(y): S \in \wp_\mu, y \in \text{Span } N\}$ на $E_N \subset H_2$ оператора, осуществляющего $P_{S, H}(y) \mapsto \int_S (dg(\tau)/d\tau) \mu(d\tau)$, где $y = (g, w, q) \in \text{Span } N, S \in \wp_\mu$. В общем случае не факт, что оператор ζ_N является непрерывным³, более того, непрерывность ζ_N — эквивалент существования ξ_N , поскольку в этом случае формула (8) — это эквивалент равенства $\zeta_N(y) = \xi_N(y), y \in E_N$ (следствие свойства (3) [14, с. 32]). Теперь самое

³ Подчеркнем, что топологическая структура линейного многообразия E_N индуцирована из H_2 .



время подвести итог: оператор ζ_N непрерывен всякий раз, когда предъявленное семейство процессов N таково, что существует интегральный оператор ζ_N . В такой постановке через η_N обозначим линейное непрерывное распространение ζ_N на $[E_N]$ (теорема 8.4.1 [21, с. 211]). Следующая теорема перекрывает теоремы 1, 3; конструкции Q и Ψ прежние.

Теорема 4. Семейство процессов $N \subset \Pi_{u\#}$ характеризуется K -решениями некоторого уравнения (1) в том и только в том случае, если

$$\text{Ker } \omega_N \subset \text{Ker } \zeta_N$$

и, кроме того, найдется такое вещественное $c > 0$, что справедливо условие а):

$$\Psi(g, w, q) \leq_L c \chi_T, \forall (g, w, q) \in Q,$$

или, что равносильно, условие б):

$$\begin{aligned} v_-(S) &\leq c(\mu(S))^{1/2}(v(S))^{1/2}, \\ v(S) &:= \int_S (\|g(\tau)\|_X^2 + \|w(\tau)\|_Y^2 + \|q(\tau)\|_Z^2) \mu(d\tau), \\ v_-(S) &:= \int_S \|dg(\tau)/d\tau\|_X \mu(d\tau), \\ \forall S \in \wp_\mu, \forall (g, w, q) \in Q. \end{aligned}$$

При этом дифференциальная реализация (1) динамических процессов N будет единственной тогда и только тогда, когда $\text{Im } \varpi_N = U$.

Замечание 6. Каждое из свойств а) или б) в действительности эквивалентно существованию квазилинейной (возможно нестационарной) реализации семейства процессов N , и для каждого из них есть различные методологические основания именно его принять за аналитическую основу в зависимости от контекста решаемой задачи моделирования. При этом необходимо оговориться, что теорема 4 не сводится к «механическому» расширению теоремы 3 по той простой причине, что автономность «в чистом виде», т. е. без свойства ограниченности операторов $A, B, B^\#$ в структуре $(A, B, B^\#)$ -модели дифференциальной реализации (1), характеризует вложение $\text{Ker } \omega_N \subset \text{Ker } \zeta_N$, тогда как свойство а) (равносильно б)) характеризует признак ограниченности данных операторов; в силу этого положения в конечномерных D -системах позиции а) и б) можно опустить.

Доказательство теоремы 4. Не будет преувеличением сказать, что доказательством уже по существу располагаем; его наиболее прозрачный способ доставляет прямая (и от того вполне рутинная) модификация вывода теоремы 1 с заменой в выкладках множества D на D_N , а подпространства Ω на $[E_N]$, соответственно, оператора ε на ϖ_N , а ζ на η_N . Все возможные затруднения при трансформировании вывода теоремы 1 к доказательству теоремы 4 снимаются, как только замечаем, что, во-первых, осуществляется а) \Leftrightarrow б) (см. начало до-

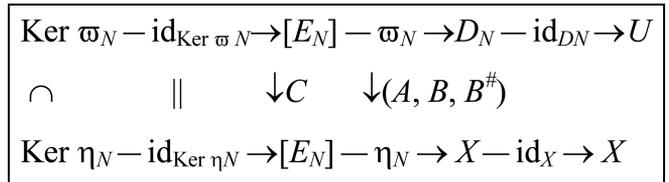


Рис. 3. Диаграмма (к доказательству теоремы 4)

казательства теоремы 1), во-вторых, установление теоремы 4 сводится, ступая почти «след в след» выводу теоремы 1, к подтверждению коммутативности диаграммы (с учетом поправок из доказательства идентичной теоремы 1), представленной на рис. 3.

Таким образом, все, что нам нужно — это установить эквивалентность двух включений (вызванных переходом от многообразия E_N к его замыканию $[E_N]$):

$$\text{Ker } \omega_N \subset \text{Ker } \zeta_N \Leftrightarrow \text{Ker } \varpi_N \subset \text{Ker } \eta_N.$$

С учетом сделанных ранее построений $\text{Ker } \varpi_N \subset \text{Ker } \eta_N \Rightarrow \text{Ker } \omega_N \subset \text{Ker } \zeta_N$ — результат положения, что операторы ϖ_N и η_N суть линейные расширения ω_N и ζ_N . Наоборот, $\text{Ker } \omega_N \subset \text{Ker } \zeta_N \Rightarrow \text{Ker } \varpi_N \subset \text{Ker } \eta_N$ — прямое следствие непрерывности отображений ω_N и ζ_N (для ζ_N это следствие выполнение условия а) или б)). ♦

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В истории естествознания проблемы «оптимизации адекватности» математических моделей, описывающих наблюдаемые физические процессы, всегда были центральными⁴. В этом контексте любая область науки, связанная с математическим моделированием, старается выработать соответствующий аналитический аппарат, в частности, концепция адаптивного управления [1, с. 64] привела к постановкам реализации/идентификации систем, в которых первым шагом исследования является задача существования апостериорной математической модели исследуемого объекта в заданном классе уравнений [1, с. 356]. Поэтому в работе не ставились вопросы построения конкретных процедур дифференциальной реализации; важность данных вопросов не подвергается сомнению, так, например, в работе [10] специализированы результаты структурно-параметрической идентификации на случай нелинейного позиционного управления при неполном измерении вектора состояния, в работе [5] — на случай идентификации части спектра эллиптического оператора волнового динамического процесса нормально-гиперболического типа.

Изложенные в статье идеи можно развить в нескольких направлениях теоретических изысканий

⁴ Достаточно упомянуть «Альмагест» Птолемея и законы Кеплера.

по качественному анализу вопросов существования дифференциальных реализаций непрерывных квазилинейных систем:

— системы с неограниченным интервалом времени T [24];

— гиперболические системы [20, с. 456] (эта задача естественно появляется в связи со многими вопросами прикладной теории реализации [5, 22]);

— M_p -продолжимость и дифференциальные системы с $(A, B, B^\#)_p$ -моделями из L_p , $p \in (1, \infty)$, включая квазилинейные системы с запаздываниями $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_k$ при представлении в уравнении (1) соответствующего закона $u^\#(x(t - \tau_1), x(t - \tau_2), \dots, x(t - \tau_k))$;

— квазилинейные дифференциальные включения [25] в банаховом пространстве X , когда $u^\#(x(t)) \subset Z$ или $u^\#(t, x(t)) \subset Z$ — непустые, не обязательно выпуклые, компактные множества при каждом $(t, x(t)) \in T \times X$;

— парадигмы апостериорного математического моделирования (структурно-параметрической идентификации) нелинейных позиционных законов $u^\#(x)$ в контексте выполнения теорем 2 и 4 с приложением к задачам восстановления внутренних источников/стоков эллипτικο-псевдопараболических систем [26] на базе их нелинейной дифференциальной аппроксимации [27, с. 392].

ЛИТЕРАТУРА

1. Калман Р., Фалб П., Арbib М. Очерки по математической теории систем. — М.: Мир, 1971. — 400 с.
2. Polderman J.W., Willems J.C. Introduction to mathematical systems theory: A behavioral approach. — N.-Y.: Springer-Verlag, 1998. — 424 p.
3. Данеев А.В., Русанов В.А. Об одной теореме существования сильной модели // Автоматика и телемеханика. — 1995. — № 8. — С. 64–73.
4. Данеев А.В., Русанов В.А. Геометрические характеристики свойств существования конечномерных (A, B) -моделей в задачах структурно-параметрической идентификации // Там же. — 1999. — № 1. — С. 3–8.
5. Данеев А.В., Русанов В.А., Русанов М.В. От реализации Калмана—Месаровича к линейной модели нормально-гиперболического типа // Кибернетика и системный анализ. — 2005. — № 6. — С. 137–157.
6. Данеев А.В., Русанов В.А., Шарпинский Д.Ю. Принцип максимума энтропии в структурной идентификации динамических систем. Аналитический подход // Изв. вузов. Математика. — 2005. — № 11. — С. 16–24.
7. Данеев А.В., Лакеев А.В., Русанов В.А. К теории реализации сильных дифференциальных моделей. II // Сибирский журнал индустриальной математики. — 2005. — Т. VIII, № 2. — С. 46–56.
8. Русанов В.А., Козырев В.А., Шарпинский Д.Ю. К теории реализации квазилинейных систем, описываемых дифференциальными уравнениями в гильбертовом пространстве // Кибернетика и системный анализ. — 2008. — № 5. — С. 82–95.
9. Русанов В.А. К качественной теории реализации квазилинейных систем в гильбертовом пространстве // Доклады РАН. — 2008. — Т. 421, № 3. — С. 326–328.
10. Русанов В.А., Шарпинский Д.Ю. К теории структурной идентификации нелинейных многомерных систем // Прикладная математика и механика. — 2010. — Т. 74, вып. 1. — С. 119–132.
11. Heij C., Ran A.C.M., van Schagen F. Introduction to Mathematical Systems Theory: Linear Systems, Identification and Control. — Berlin: Springer-Verlag, 2006. — 166 p.
12. Van der Schaft A.J. On realization of nonlinear systems described by higher-order differential equations // Mathematical Systems Theory. — 1987. — Vol. 19, N 3. — P. 239–275. См. русс. перевод: Ван дер Шафт А. К теории реализации нелинейных систем, описываемых дифференциальными уравнениями высшего порядка // Теория систем. Математические методы и моделирование / Под ред. А.Н. Колмогорова, С.П. Новикова. — М.: Мир, 1989. — С. 192–237.
13. Русанов В.А., Антонова Л.В., Данеев В.А. К обратным задачам нелинейного системного анализа. Бихевиористический подход // Проблемы управления. — 2011. — № 5. — С. 14–21.
14. Иосида К. Функциональный анализ. — М.: Мир, 1967. — 624 с.
15. Массера Х.Л., Шеффер Х.Х. Линейные дифференциальные уравнения и функциональные пространства. — М.: Мир, 1970. — 456 с.
16. Данеев А.В., Русанов В.А. Геометрический подход к решению некоторых обратных задач системного анализа // Изв. вузов. Математика. — 2001. — № 10. — С. 18–28.
17. Месарович М., Такахара Я. Общая теория систем: математические основы. — М.: Мир, 1978. — 312 с.
18. Келли Дж. Общая топология. — М.: Наука, 1981. — 432 с.
19. Рудин У. Функциональный анализ. — М.: Мир, 1975. — 448 с.
20. Красносельский М.А., Забрейко П.П., Пустыльник Е.И., Соболевский П.Е. Интегральные операторы в пространствах суммируемых функций. — М.: Наука, 1966. — 500 с.
21. Вулик Б.З. Введение в функциональный анализ. — М.: Наука, 1967. — 416 с.
22. Русанов В.А., Шарпинский Д.Ю., Козырев В.А. Инструментальный программный комплекс разработки и моделирования алгоритмов идентификации дифференциальных уравнений динамики больших стержневых систем // Приборы и системы. Управление, контроль, диагностика. — 2010. — № 9. — С. 13–17.
23. Канторович Л.В., Акилов Г.П. Функциональный анализ. — М.: Наука, 1977. — 742 с.
24. Колмогоров А.Н. Кривые в гильбертовом пространстве, инвариантные по отношению к однопараметрической группе движений / А.Н. Колмогоров. Избр. тр.: т. 1. Математика и механика. — М.: Наука, 2005. — С. 296–300.
25. Толстоногов А.А. Дифференциальные включения в банаховом пространстве. — Новосибирск: Наука, 1986. — 296 с.
26. Сергиенко И.В., Дейнека В.С. Идентификация параметров эллипτικο-псевдопараболических распределенных систем // Кибернетика и системный анализ. — 2011. — № 4. — С. 28–50.
27. Эйхгофф П. Основы идентификации систем управления. — М.: Мир, 1975. — 687 с.

Статья представлена к публикации членом редколлегии академиком РАН С.Н. Васильевым.

Анатолий Валентинович Лакеев — д-р физ.-мат. наук, вед. науч. сотрудник, Институт динамики систем и теории управления СО РАН, г. Иркутск, ☎ (3952) 45-30-21, ✉ lakeyev@icc.ru,

Вячеслав Анатольевич Русанов — д-р физ.-мат. наук, гл. науч. сотрудник, Институт динамики систем и теории управления СО РАН, г. Иркутск, ☎ (3952) 36-50-93, ✉ V.Rusanov@mail.ru,

Владимир Александрович Козырев — аспирант, Иркутский государственный университет путей сообщения.



АДАПТИВНОЕ УПРАВЛЕНИЕ НЕМИНИМАЛЬНО-ФАЗОВЫМИ ОБЪЕКТАМИ ОПРЕДЕЛЕННОГО КЛАССА¹

И.Б. Фуртат

Рассмотрена задача адаптивного управления с эталонной моделью определенным классом неминимально-фазовых систем. Предположено, что измерению доступны только скалярные вход и выход объекта. Получены условия, зависящие от параметров модели объекта и системы управления, при которых алгоритм управления, разработанный для минимально-фазовых объектов, работоспособен для неминимально-фазовых систем. Полученные решения обобщены для управления объектами с запаздыванием по состоянию. Приведены примеры моделирования.

Ключевые слова: неминимально-фазовый объект, адаптивное управление, сингулярно возмущенная система.

ВВЕДЕНИЕ

Одним из фундаментальных предположений при решении задачи управления объектом в условии неопределенности, когда доступны измерению только скалярные вход и выход объекта, является предположение о его минимально-фазовости. Основная причина требования минимально-фазовости объекта при адаптивном или робастном управлении состоит в построении устойчивого регулятора (см. например, работу [1]).

На сегодняшний день предложено мало решений проблемы управления неминимально-фазовыми объектами со скалярными входом и выходом в условии неопределенности. Так, для управления таким классом объектов в работе [2] используется метод шунтирования. Однако, применение метода [2] может быть только для линейных устойчивых объектов. Причем в условиях возмущений метод [2] не всегда оказывается эффективным из-за регулирования по расширенному сигналу. В работе [3] предложен последовательный компенсатор, который позволяет получить расширенную модель объекта с векторным управлением. Аналогичное

решение предложено также в работе [4]. Однако работы [3, 4] эффективны лишь для стабилизации объекта, который не подвержен воздействию внешних неконтролируемых возмущений.

В статье предложено решение задачи адаптивного управления определенным классом неминимально-фазовых объектов. При решении предполагается, что в объекте управления доступны измерению только скалярные вход и выход объекта. Для синтеза закона управления используется модифицированный алгоритм адаптации высокого порядка [5]. Полученная система управления обеспечивает слежение выхода объекта за эталонным сигналом с требуемой точностью. Получены условия, зависящие от параметров объекта и системы управления, при выполнении которых алгоритм, разработанный для минимально-фазовых систем, работоспособен и для неминимально-фазовых объектов. Решение обобщается для управления объектами с запаздыванием по состоянию. Приведены численные примеры, иллюстрирующие работоспособность алгоритма.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим линейный объект управления, динамические процессы в котором описываются дифференциальным уравнением

$$Q(p)y(t) = kR(p)u(t), \quad p^i y(0) = y_i, \quad i = 1, \dots, n, \quad (1)$$

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 12-08-01183-а), а также в рамках ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 гг., выполняемой в ИПМаш РАН (соглашения № 8846, № 8855) и НИУ ИТМО (соглашения 14.B37.21.0871, 14.B37.21.1480).

где $y(t)$ и $u(t)$ — скалярные выход объекта и сигнал управления соответственно, $Q(p)$ и $R(p)$ — линейные нормированные дифференциальные операторы, $p = d/dt$ — оператор дифференцирования, $k > 0$ — неизвестный коэффициент, y_i — неизвестные начальные условия.

Качество процессов по выходу определим эталонной моделью

$$Q_m(p)y_m(t) = k_m r(t). \quad (2)$$

Здесь $y_m(t)$ — выход эталонной модели, $r(t)$ — ограниченное задающее воздействие, $Q_m(p)$ — известный линейный нормированный дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами, $k_m > 0$ — известный коэффициент.

Предположения. 1. Коэффициенты операторов $Q(p)$ и $R(p)$ и коэффициент k — неизвестные числа, зависящие от вектора неизвестных параметров $\vartheta \in \Xi$, где Ξ — известное замкнутое множество возможных значений данных коэффициентов. 2. Известны $\deg Q(p) = \deg Q_m(p) = n$, $\deg R(p) = m$, относительная степень $\gamma = n - m > 1$. 3. Многочлен $Q_m(\lambda)$ — гурвицев, где λ — комплексная переменная. 4. В системе управления не доступны измерению производные сигналов $y(t)$ и $r(t)$. ♦

Цель управления состоит в поиске закона регулирования, обеспечивающего ограниченность всех сигналов в замкнутой системе и выполнение целевого условия

$$|y(t) - y_m(t)| < \delta \text{ при } t \geq T \quad (3)$$

для всех $\vartheta \in \Xi$, где $T > 0$ — время, начиная с которого должно быть выполнено неравенство (3), $\delta > 0$ — малое число.

2. МЕТОД РЕШЕНИЯ

Представим оператор $R(p)$ в виде произведения

$$R(p) = R^+(p)R^-(p), \quad (4)$$

где $R^+(\lambda)$ и $R^-(\lambda)$ — операторы с положительными и отрицательными вещественными частями корней соответственно, $\deg R^+(p) = m_1$, $\deg R^-(p) = m_2$.

Предположим, что оператор $R^+(p)$ можно представить в виде следующей суммы

$$R^+(p) = R_0(p) + \theta p \Delta R_0(p), \quad (5)$$

где $R_0(\lambda)$ — произвольный известный гурвицевый многочлен, $\deg R_0(p) = m_1$, $\theta > 0$ — малый пара-

метр. Подставим формулы (4) и (5) в уравнение (1) и перепишем его в виде

$$Q(p)y(t) = kR^-(p)R_0(p) \left[1 + \frac{\theta p \Delta R_0(p)}{R_0(p)} \right] u(t). \quad (6)$$

Преобразуем модель (6) к форме уравнений состояния:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + B(u(t) + \sigma(t)), \quad y(t) = L_1 x(t), \\ \dot{z}(t) &= \frac{1}{\theta} Fz(t) + Nu(t), \quad \sigma(t) = L_2 z(t), \end{aligned} \quad (7)$$

где $x(t) \in R^n$, $z(t) \in R^{m_1}$ — векторы состояния медленных и быстрых составляющих соответственно, A , B , F , N , L_1 и L_2 — числовые матрицы, полученные при переходе от уравнения (6) к уравнениям (7). При $\sigma(t) = 0$ передаточная функция первого уравнения системы (7) содержит только отрицательные нули, так как A , B и L_1 зависят от коэффициентов устойчивых многочленов $Q(\lambda)$ и $kR^-(\lambda)R_0(\lambda)$. Передаточная функция второго уравнения системы (7) содержит положительные нули, поскольку F , N и L_2 зависят от коэффициентов устойчивого $R_0(\lambda)$ и неустойчивого $\Delta R_0(\lambda)$ многочленов. Выясним, каким должно быть возмущение $\sigma(t)$, чтобы поведение системы (7) было бы близко к ее поведению при $\sigma(t) = 0$. Для этого воспользуемся первой леммой [6], в соответствии с которой перепишем систему (7) в виде

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + B(u(t) + \sigma(t)), \quad y(t) = L_1 x(t), \\ \theta_1 \dot{z}(t) &= Fz(t) + \theta_2 Nu(t), \quad \sigma(t) = L_2 z(t). \end{aligned}$$

Согласно лемме [6], рассмотрим сначала редуцированную модель последней системы при $\theta_2 = 0$:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + B(u(t) + \bar{\sigma}(t)), \quad y(t) = L_1 x(t), \\ \dot{\bar{z}}(t) &= \frac{1}{\theta_1} F\bar{z}(t), \quad \bar{\sigma}(t) = L_2 \bar{z}(t). \end{aligned} \quad (8)$$

Очевидно, что второе уравнение (8) асимптотически устойчиво, так как матрица F — гурвицева (в силу гурвицевости полинома $R_0(\lambda)$) и $\theta_1 > 0$. Преобразуем первое уравнение системы (8) к виду

$$Q(p)y(t) = kR^-(p)R_0(p)[u(t) + \bar{\sigma}(t)]. \quad (9)$$

Представим операторы $R^-(p)R_0(p)$ и $Q(p)$ в виде сумм:

$$\begin{aligned} R^-(p)R_0(p) &= 1 + \Delta R(p), \\ Q(p) &= Q_m(p) + \Delta Q(p). \end{aligned} \quad (10)$$



Здесь $\Delta R(p)$ и $\Delta Q(p)$ — остатки разложения, $\deg \Delta Q(p) < n$, $\deg \Delta R(p) = m$. Принимая во внимание выражения (2), (9) и (10), сформируем ошибку слежения $e(t) = y(t) - y_m(t)$ в виде

$$Q_m(p)e(t) = k \left(u(t) + \Delta R(p)u(t) - \frac{\Delta Q(p)}{k} y(t) - \frac{k_m}{k} r(t) \right) + \varphi(t), \quad (11)$$

где $Q_m(p)\varphi(t) = R^-(p)R_0(p)\bar{\sigma}(t)$, $\varphi(t)$ — экспоненциально убывающая функция в силу гурвицевости многочлена $Q_m(\lambda)$ и асимптотической устойчивости второго уравнения системы (8).

Для синтеза закона управления, необходимого для выполнения цели управления (3), можно воспользоваться любым из существующих алгоритмов управления объектами в условиях неопределенности (см., например, книгу [1]). Применим модифицированный алгоритм адаптации высокого порядка [5]. В соответствии с работой [5], зададим закон управления $u(t)$ в виде

$$u(t) = T(p)\bar{v}(t) = T\xi(t), \quad v(t) = c^T(t)w(t), \quad (12)$$

где $T(p)$ — линейный дифференциальный оператор, полином $T(\lambda)$ — гурвицев, $\deg T(p) = n - 1$, $\bar{v}(t)$ — оценка вспомогательного управляющего воздействия $v(t)$, T — матрица-строка, составленная из коэффициентов оператора $T(p)$, $\xi(t) = [\bar{v}(t), \dot{\bar{v}}(t), \dots, \bar{v}^{(n-1)}(t)]^T$, $c(t)$ — вектор настраиваемых параметров, $w(t) = [V_u^T(t), V_y^T(t), y(t), v_r(t)]^T$ — вектор регрессии, сформированный с помощью фильтров

$$\begin{aligned} \dot{V}_u(t) &= KV_u(t) + bu(t), \quad V_u(0) = 0; \\ \dot{V}_y(t) &= KV_y(t) + by(t), \quad V_y(0) = 0; \\ \dot{V}_r(t) &= KV_r(t) + br(t), \quad v_r(t) = LV_r(t), \\ &V_r(0) = 0. \end{aligned} \quad (13)$$

Здесь $V_u(t), V_y(t), V_r(t) \in R^{n-1}$ — векторы состояния фильтров, K — матрица в форме Фробениуса с характеристическим многочленом $T(\lambda)$, $b = [0, \dots, 0, 1]^T$ и $L = [1, 0, \dots, 0]$ — вектор и матрица соответствующих размерностей.

Принимая во внимание выражения (12) и (13), уравнение ошибки слежения (11) преобразуем к виду

$$Q_m(p)e(t) = kT(p)[(c(t) - c_0)^T w(t) + \bar{v}(t) - v(t)] + \varphi(t),$$

где c_0 — вектор неизвестных параметров, зависящий от коэффициентов операторов $\Delta R(p)$, $\Delta Q(p)/k$ и отношения k_m/k . Для реализации закона управления (12) введем наблюдатель [7]:

$$\begin{aligned} \dot{\xi}(t) &= G_0\xi(t) + D_0(\bar{v}(t) - v(t)), \quad \bar{v}(t) = L\xi(t), \\ \xi(0) &= 0. \end{aligned} \quad (14)$$

Здесь $\xi(t) \in R^n$, $G_0 = \begin{bmatrix} 0 & I_{n-1} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, I_{n-1} — квадратная единичная матрица порядка $n - 1$ (здесь и далее I_t означает квадратную единичную матрицу порядка t), $D_0 = -[d_1\mu^{-1}, d_2\mu^{-2}, \dots, d_n\mu^{-n}]^T$, $\mu > 0$ — достаточно малая величина, значения d_1, \dots, d_n выбираются из условий гурвицевости матрицы $G = G_0 - \bar{D}L$, $\bar{D} = [d_1, d_2, \dots, d_n]^T$.

Введем в рассмотрение вектор ошибки оценки производных $\bar{\eta}(t) = \Gamma^{-1}[\xi(t) - \zeta(t)]$, $\Gamma = \text{diag}\{\mu^{n-1}, \mu^{n-2}, \dots, \mu, 1\}$, $\zeta(t) = [v(t), \dot{v}(t), \dots, v^{(n-1)}(t)]^T$. Взяв производную по времени от $\bar{\eta}(t)$, с учетом выражения (14) получим

$$\begin{aligned} \dot{\bar{\eta}}(t) &= \mu^{-1}G\bar{\eta}(t) + b v^{(n+1)}(t), \\ \bar{v}(t) - v(t) &= \mu^{n-1}L\bar{\eta}(t). \end{aligned}$$

Преобразуем последнюю систему относительно выходной переменной:

$$\begin{aligned} \dot{\eta}(t) &= \mu^{-1}G\eta(t) + \bar{b} \dot{v}(t), \\ \bar{v}(t) - v(t) &= \mu^{n-1}L\eta(t), \end{aligned} \quad (15)$$

где $\eta_i(t) = \bar{\eta}_i(t) - \mu^{i-n}v^{(i)}(t)$, $i = 2, \dots, n - 1$, $\eta_1(t) = \bar{\eta}_1(t)$, $\bar{b} = [\mu^{1-n}, 0, \dots, 0]^T$. Принимая во внимание формулы (15), преобразуем уравнение ошибки (11) к форме

$$Q_m(p)e(t) = kT(p)[(c(t) - c_0)^T w(t) + \mu^{n-1}L\eta(t)] + \varphi(t), \quad (16)$$

Утверждение 1. Пусть выполнены условия предположений 1—4. Тогда существуют матрица $\Lambda = \Lambda^T > 0$ и числа $\alpha > 0$, $\mu_0 > 0$ такие, что при $\mu < \mu_0$ и $\theta_2 = 0$ система (12)—(16), вместе с алгоритмом адаптации

$$\dot{c}(t) = -\Lambda e(t)w(t) - \alpha c(t), \quad c(0) = c_0, \quad (17)$$

диссипативна и выполнено целевое условие (3). ♦

Поскольку $\varphi(t)$ — ограниченная затухающая функция, то доказательство работоспособности редуцированной системы (12)—(17) аналогично доказательству в работе [5].

Однако, из постановки задачи, объект управления (1) может быть неминимально-фазовым. Поэтому получим условия работоспособности алгоритма (12)—(14) для исходной (нередуцированной) модели (7).

Введем вектор отклонений $\Delta z(t) = z(t) - \bar{z}(t)$ для быстрых составляющих (7) и (8):

$$\Delta \dot{z}(t) = \frac{1}{\theta} F \Delta z(t) + N \dot{u}(t), \quad \Delta \sigma(t) = L_2 \Delta z(t). \quad (18)$$

Тогда уравнение ошибки слежения $e(t)$, записанной в форме уравнений состояния, будет выглядеть как

$$\dot{\varepsilon}(t) = A_m \varepsilon(t) + k B_m [(c(t) - c_0)^T w(t) + \mu^{n-1} L \eta(t)] + B_{m1} \psi(t), \quad e(t) = L \varepsilon(t). \quad (19)$$

Здесь $\varepsilon(t) \in R^n$, A_m , B_m и B_{m1} — числовые матрицы, полученные при переходе от уравнения (16) к уравнению (19) с учетом результатов (18) и $Q_m(p)\psi(t) = R^-(p)R_0(p)\sigma(t)$.

Утверждение 2. Пусть выполнены условия предположений 1—4. Существуют числа $\mu > 0$ и $\theta_0 > 0$ такие, что решениями матричных неравенств:

$$\begin{aligned} A_m^T H_1 + H_1 A_m + 2\bar{k}^2 \mu^{2n-2} H_1 B_m L (H_1 B_m L)^T + \\ + \frac{2}{\mu} H_1 B_{m1} (H_1 B_{m1})^T \leq -Q_1, \\ F^T H_2 + H_2 F + \frac{2\theta_0}{\mu} H_2 N T G_0 (H_2 N T G_0)^T + \\ + 2\theta_0 \mu^{2n-2} H_2 N T D_0 L (H_2 N T D_0 L)^T \leq -Q_2, \\ G^T H_3 + H_3 G + 4\mu I_n + 2H_2 \bar{b} (H_2 \bar{b})^T \leq -Q_3 \end{aligned} \quad (20)$$

являются положительно определенные матрицы H_1 , H_2 и H_3 , где $Q_1 = Q_1^T > 0$, $Q_2 = Q_2^T > 0$, $Q_3 = Q_3^T > 0$, $k \leq \bar{k}$. Тогда при $\theta < \theta_0$ система (12)—(14), (18), (19) диссипативна и выполнено целевое условие (3).

3. ОБОБЩЕНИЕ ДЛЯ ОБЪЕКТОВ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ ПО СОСТОЯНИЮ

Пусть объект управления описывается уравнением:

$$\begin{aligned} Q(p)y(t) + F(p)y(t - \tau) = kR(p)u(t), \\ p^i y(0) = y_i, \quad i = 1, \dots, n, \end{aligned} \quad (21)$$

где все обозначения имеют тот же смысл, что и в уравнении (1), $F(p)$ — линейный дифференциальный оператор, коэффициенты которого зависят от вектора неизвестных параметров $\vartheta \in \Xi$, $\deg F(p) < n$, $\tau > 0$ — известное время запаздывания.

Эталонная модель определена уравнением (2). Цель управления состоит в синтезе непрерывного закона управления, обеспечивающего выполнение целевого условия (3).

Применив процедуру (4), (5), (10) к уравнению (21), получим

$$\begin{aligned} Q_m(p)e(t) = k \left(u(t) + \Delta R(p)u(t) - \frac{\Delta Q(p)}{k} y(t) - \right. \\ \left. - \frac{F(p)}{k} y(t - \tau) - \frac{k_m}{k} r(t) \right) + \varphi(t). \end{aligned} \quad (22)$$

Закон управления зададим в виде (12), где только вектор регрессии формируется как $w(t) = [V_u^T(t), V_y^T(t), V_\tau^T(t), y(t - \tau), y(t), v_r(t)]^T$, а вектор $V_\tau(t)$ является решением уравнения

$$\dot{V}_\tau(t) = K V_\tau(t) + b y(t - \tau), \quad V_\tau(0) = 0. \quad (23)$$

Воспользовавшись наблюдателем (14) и результатом (18), преобразуем уравнение (22) к виду

$$\dot{\varepsilon}(t) = A_m \varepsilon(t) + k B_m [(c(t) - c_0)^T w(t) + \mu^{n-1} L \eta(t)] + B_{m1} \psi(t), \quad e(t) = L \varepsilon(t), \quad (24)$$

где $\varepsilon(t) \in R^n$, A_m , B_m , B_{m1} — числовые матрицы, полученные при переходе от уравнения (22) к уравнению (24) функция $\psi(t)$ аналогична, см. уравнение (19). Структуры уравнений (19) и (24) подобны. Отличия состоят в структуре и размерности векторов $c(t)$, c_0 и $w(t)$. Так, новый вектор неизвестных параметров c_0 зависит от коэффициентов операторов $\Delta R(p)$, $\Delta Q(p)/k$, $F(p)/k$ и отношения k_m/k . Поскольку размерность вектора регрессии $w(t)$ для объектов с запаздыванием, в отличие от объектов без запаздывания, увеличена на n , то и размерность вектора настраиваемых параметров $c(t)$ также увеличена на n .

Утверждение 3. Пусть выполнены условия предположений 1—4 и дополнительные условия, накладываемые на объект управления (21). Существуют числа $\mu > 0$ и $\theta_0 > 0$ такие, что решениями матричных неравенств (20) являются положительно определенные матрицы H_1 , H_2 и H_3 . Тогда при $\theta < \theta_0$ система (12)—(14), (18), (23), (24) диссипативна и выполнено целевое условие (3).



Доказательство утверждения 3 аналогично доказательству утверждения 2, так как отличия систем управления для объектов (1) и (21) заключаются в дополнительном использовании фильтра (23) и функции $y(t - \tau)$.

4. ПРИМЕРЫ

Пример 1. Рассмотрим объект управления

$$(p^3 + a_2p^2 + a_1p + a_0)y(t) = k(1 - \theta p)u(t). \quad (25)$$

Класс неопределенности Ξ задан неравенствами: $-5 \leq a_i \leq 5, i = 0, 1, 2, 1 \leq k \leq 2$. Пусть множество значений для $\theta > 0$ подлежит определению.

Эталонную модель определим уравнением

$$(p + 1)^3 y_m(t) = r(t), \quad r(t) = 1 + 2\sin t. \quad (26)$$

Зададим оператор $T(p)$ в виде $T(p) = p^2 + 2p + 1$ и сформируем фильтры (13) в виде

$$\dot{V}_y(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} V_y(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} y(t), \quad V_y(0) = 0;$$

$$\dot{V}_u(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} (t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t), \quad V_u(0) = 0;$$

$$\dot{V}_r(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} V_r(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} r(t),$$

$$v_r(t) = [1, 0]V_r(t), \quad V_r(0) = 0. \quad (27)$$

Вектор регрессии зададим как $w(t) = [V_y^T(t), V_u^T(t), y(t), v_r(t)]^T$. Выберем $D = [3, 3, 1]^T$ и $\mu = 0,01$, и сформируем наблюдатель (14) в виде

$$\begin{bmatrix} \dot{\xi}_1(t) \\ \dot{\xi}_2(t) \\ \dot{\xi}_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1(t) \\ \xi_2(t) \\ \xi_3(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 \cdot 10^{-2} \\ -3 \cdot 10^{-4} \\ -1 \cdot 10^{-6} \end{bmatrix} (\bar{v}(t) - v(t)),$$

$$\bar{v}(t) = [1 \ 0 \ 0]\xi(t), \quad \xi(0) = 0. \quad (28)$$

Пусть $\Lambda = \text{diag}\{10I_3, 10^{-5}I_2, 10\}$ и $\alpha = 0,01$, тогда закон управления (12) и алгоритмы адаптации (17) сформируем в виде

$$u(t) = \xi_1(t) + 2\xi_2(t) + \xi_3(t), \quad v(t) = c^T(t)w(t), \quad (29)$$

$$\dot{c}(t) = -\text{diag}\{10I_3, 10^{-5}I_2, 10\}e(t)w(t) - 0,01c(t), \quad c(0) = 0.$$

Оценим интервал изменения для θ с помощью неравенств (20), при котором алгоритм управления, разработанный для минимально-фазовых объектов, будет работоспособен и для неминимально-фазовых систем. Для

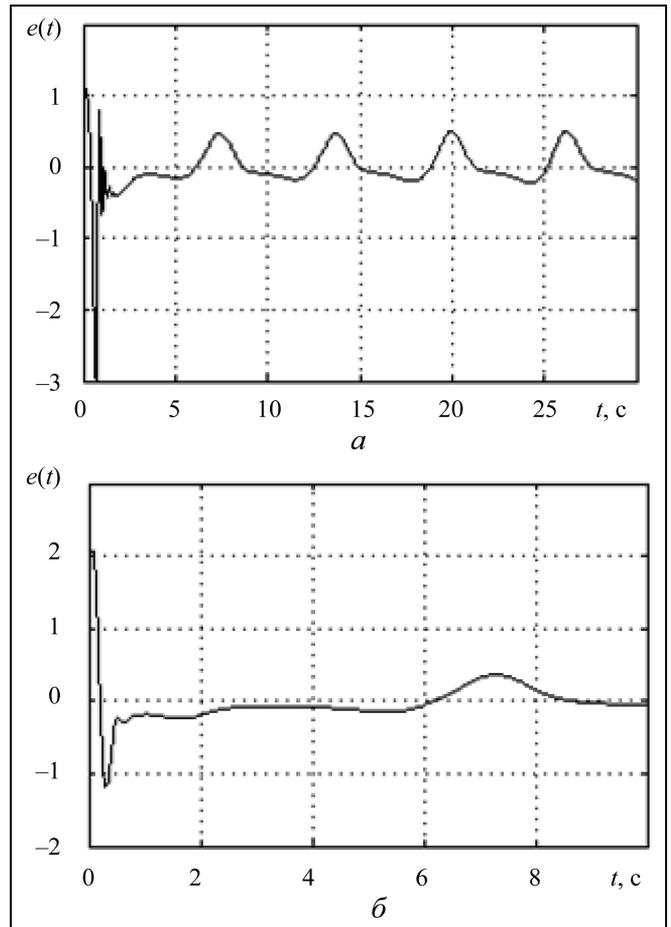


Рис. 1. Переходные процессы по ошибке слежения для объекта (25): а — случай 1; б — случай 2

этого предположим, что объект (25) можно представить в виде (7):

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -a_2 & 1 & 0 \\ -a_1 & 0 & 1 \\ -a_0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x(t) + k \begin{bmatrix} 0 \\ \theta \\ 1 \end{bmatrix} (u(t) + \sigma(t)) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} f(t),$$

$$y(t) = [1 \ 0 \ 0]x(t),$$

$$\dot{z}(t) = -\frac{1}{\theta}z(t) - 2\dot{u}(t), \quad \sigma(t) = z(t).$$

Пусть в неравенствах (20) $Q_1 = 10^{-5}I_3, Q_2 = \theta_0$ и $Q_3 = I_3$. Ради простоты заменим матричные неравенства (20) равенствами. Тогда эти уравнения будут иметь решения при $\theta_0 \in (0; 0,006]$. Значения θ_0 , полученные при моделировании для объекта (24) с параметрами для случая 1: $a_2 = a_1 = a_0 = -5, k = 1$ и случая 2: $a_2 = -3, a_1 = -1, a_0 = 3, k = 2$ лежат в интервале $\theta_0 \in (0; 0,02]$.

Для иллюстрации работоспособности предложенной схемы управления примем, что объект управления начинает функционировать с начальными условиями $y(0) = \dot{y}(0) = \ddot{y}(0) = 1$ и $\theta_0 = 0,02$. На рис. 1 приведены графики изменения ошибки $e(t)$ для объекта (25).

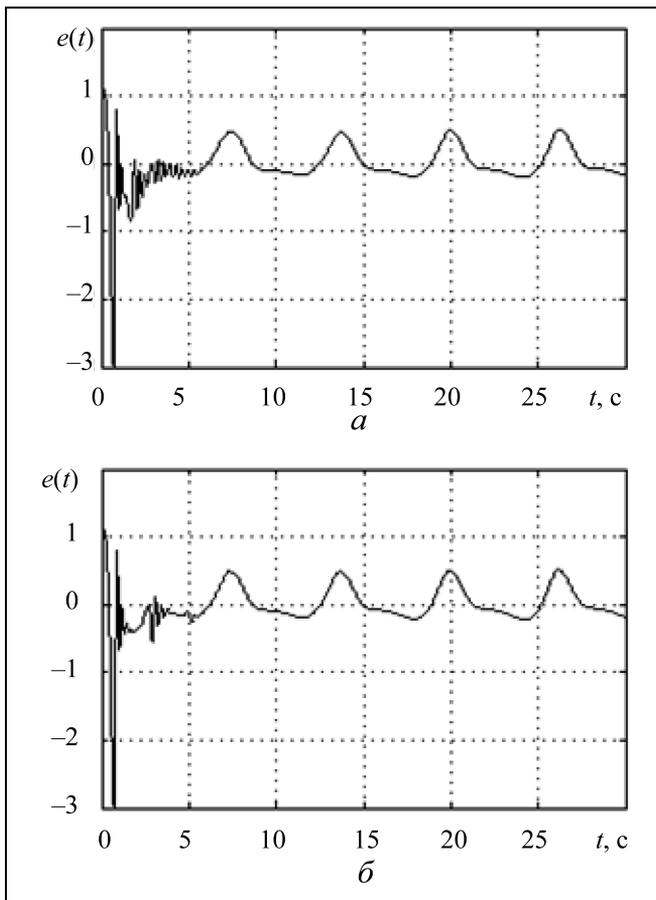


Рис. 2. Переходные процессы по ошибке слежения для объекта (30): а — случай 1; б — случай 2

Пример 2. Рассмотрим объект управления с запаздыванием по состоянию

$$(p^3 + a_2 p^2 + a_1 p + a_0)y(t) + (f_2 p^2 + f_1 p + f_0)y(t - \tau) = k(1 - \theta p)u(t). \quad (30)$$

Класс неопределенности Ξ задан неравенствами, как в примере 1 и дополнительно $|f_i| \leq 2, i = 0, 1, 2$. Эталонную модель определим уравнением (26).

Сформируем фильтры (27) с дополнительным фильтром

$$\dot{V}_\tau(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} V_\tau(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} y(t - \tau), \quad V_\tau(0) = 0.$$

Тогда вектор регрессии определим в виде $w(t) = [V_u^T(t), V_y^T(t), V_\tau^T(t), y(t - \tau), y(t), v_r(t)]^T$. Наблюдатель и закон управления сформируем в виде (28) и (29). Выберем $\Lambda = \text{diag}\{10I_3, 10^{-5}I_2, 10, 10^{-2}I_2\}$ и $\alpha = 0,01$, тогда алгоритмы адаптации (17) примут вид

$$\dot{c}(t) = -\text{diag}\{10I_3, 10^{-5}I_2, 10, 10^{-2}I_2\}e(t)w(t) - 0,01c(t), \quad c(0) = 0.$$

Оценим интервал для θ с помощью неравенств (20). Для этого представим объект (24) в виде:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \begin{bmatrix} -a_2 & 1 & 0 \\ -a_1 & 0 & 1 \\ -a_0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} -f_2 & 0 & 0 \\ -f_1 & 0 & 0 \\ -f_0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x(t - \tau) + \\ &+ k \begin{bmatrix} 0 \\ \theta \\ 1 \end{bmatrix} (u(t) + \sigma(t)) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} f(t), \quad y(t) = [1 \ 0 \ 0]x(t), \\ \dot{z}(t) &= -\frac{1}{\theta}z(t) - 2\dot{u}(t), \quad \sigma(t) = z(t). \end{aligned}$$

Как и в примере 1, положим в неравенствах (20) $Q_1 = 10^{-5}I_3, Q_2 = \theta_0$ и $Q_3 = I_3$. Тогда матричные неравенства (20) будут иметь решения при $\theta_0 \in (0; 0,004]$. Значения θ_0 , полученные при моделировании для объекта (30) с параметрами для случая 1 $a_2 = a_1 = a_0 = -5, k = 1, f_2 = f_1 = f_0 = 2, \tau = 1$ с и случая 2 $a_2 = -3, a_1 = -1, a_0 = 3, k = 2, f_2 = f_1 = f_0 = -1, \tau = 2$ с лежат в интервале $\theta_0 \in (0; 0,02]$. Положим, что объект управления начинает функционировать с начальными условиями $y(0) = \dot{y}(0) = \ddot{y}(0) = 1$ и $\theta_0 = 0,02$. Графики изменения ошибки $e(t)$ приведены на рис. 2.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Решена задача адаптивного управления линейным неминимально-фазовым динамическим объектом со скалярным входом и выходом. Предполагалось, что объект управления можно представить в виде основного контура, описываемого минимально-фазовым звеном, и действующего на него возмущения, описываемого неминимально-фазовым звеном. Далее модель объекта декомпозировалась на систему сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений, где искались ограничения на малый параметр, при которых алгоритм управления работоспособен. Как показали расчеты, эти ограничения зависят от параметров объекта управления и параметров настройки в алгоритме регулирования. Получены условия на нули передаточной функции исходного объекта, при которых алгоритмы, разработанные для минимально-фазовых систем, работоспособны и для неминимально-фазовых объектов.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство утверждения 2. С учетом уравнений (12) и (14), преобразуем формулу (18) к виду

$$\begin{aligned} \Delta \dot{z}(t) &= \frac{1}{\theta} F \Delta z(t) + bT(G_0 \xi(t) + D_0 \mu^{n-1} L \eta(t)), \\ \Delta \sigma(t) &= L_1 \Delta z(t). \end{aligned} \quad (\text{П.1})$$



Перепишем уравнения (15), (19) и (П.1) в виде

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}(t) &= A_m \varepsilon(t) + kB_m(c(t) - c_0)^T w(t) + kB_m \mu^{n-1} L \eta(t) + \\ &\quad + B_{m1} \psi(t), \\ \theta_1 \Delta \dot{z}(t) &= F \Delta z(t) + \theta_2 NT(G_0 \xi(t) + D_0 \mu^{n-1} L \eta(t)) \\ \dot{\eta}(t) &= \mu^{-1} G \eta(t) + \bar{b} \dot{v}(t). \end{aligned} \quad (\text{П.2})$$

Воспользуемся первой леммой [6], взяв в качестве положительно-определенной функции функцию Ляпунова

$$V(t) = \varepsilon^T(t) H_1 \varepsilon(t) + \Delta z^T(t) H_2 \Delta z(t) + \eta^T(t) H_3 \eta(t) + (c(t) - c_0)^T (c(t) - c_0). \quad (\text{П.3})$$

Согласно лемме [6], рассмотрим (П.2) при $\theta_2 = 0$. Тогда второе уравнение (П.2) асимптотически устойчиво в силу гурвицевости матрицы **F**. Значит функция

$\frac{R^-(p)R_0(p)}{Q_m(p)} \sigma(t)$ ограничена в силу гурвицевости многочленов $Q_m(\lambda)$ и $R_0(\lambda)$. В соответствии с утверждением 1, система (П.2) диссипативна, и все переменные в ней ограничены. Тогда $|\psi(t)| < \delta_1$, $|\xi(t)| < \delta_2$, $|\dot{v}(t)| < \delta_3$, $|c(t) - c_0(t)| < \delta_4$, $\delta_i > 0$, $i = 1, \dots, 4$.

Определим теперь значение θ_0 , при котором исходная система диссипативна. Пусть $\theta_1 = \theta_2 = \theta_0$. Возьмем производную по времени от функции (П.3) вдоль траекторий (17) и (П.2):

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &= \varepsilon^T(t) (A_m^T H_1 + H_1 A_m) \varepsilon(t) + \\ &+ 2\varepsilon^T(t) H_1 k B_m (c(t) - c_0)^T w(t) + 2\varepsilon^T(t) H_1 k \mu^{n-1} B_m L \eta(t) + \\ &+ 2\varepsilon^T(t) H_1 B_{m1} \psi(t) + \frac{1}{\theta_0} \Delta z^T(t) (F^T H_2 + H_2 F) \Delta z(t) + \\ &+ 2\Delta z^T(t) H_2 NT(G_0 \xi(t) + D_0 \mu^{n-1} L \eta(t)) + \\ &+ \frac{1}{\mu} \eta^T(t) (G^T H_3 + H_3 G) \eta(t) + 2\eta^T(t) H_3 \bar{b} \dot{v}(t) + \\ &+ 2\dot{c}^T(t) (c(t) - c_0). \end{aligned}$$

Воспользуемся оценками:

$$\begin{aligned} 2\varepsilon^T(t) H_1 k \mu^{n-1} B_m L \eta(t) &\leq 2\bar{k}^2 \mu^{2n-2} \varepsilon^T(t) H_1 B_m L (H_1 B_m L)^T \varepsilon(t) + \\ &+ 2\eta^T(t) \eta(t), \\ 2\varepsilon^T(t) H_1 B_{m1} \psi(t) &\leq \frac{2}{\mu} \varepsilon^T(t) (H_1 B_{m1})^T H_1 B_{m1} \varepsilon(t) + 2\mu \delta_1^2, \\ 2\Delta z^T(t) H_2 NTG_0 \xi(t) &\leq \\ &\leq \frac{2}{\mu} \Delta z^T(t) H_2 NTG_0 (H_2 NTG_0)^T \Delta z(t) + 2\mu \delta_2^2, \\ 2\Delta z^T(t) H_2 NTD_0 \mu^{n-1} L \eta(t) &\leq \\ &\leq 2\mu^{2n-2} \Delta z^T(t) H_2 NTD_0 L (H_2 NTD_0 L)^T \Delta z(t) + 2\eta^T(t) \eta(t), \\ 2\eta^T(t) H_3 \bar{b} \dot{v}(t) &\leq \frac{2}{\mu} \eta^T(t) H_3 \bar{b} (H_3 \bar{b})^T \eta(t) + 2\mu \eta \delta_3^2. \end{aligned}$$

Подставляя эти оценки в производную от функции Ляпунова и учитывая условия (20), получаем

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &\leq -\varepsilon^T(t) Q_1 \varepsilon(t) - \frac{1}{\theta_0} \Delta z^T(t) Q_2 \Delta z(t) - \frac{1}{\mu} \eta^T(t) Q_3 \eta(t) - \\ &- 2\mu(c(t) - c_0)^T (c(t) - c_0) + 2\mu \bar{\delta}, \end{aligned}$$

где $\bar{\delta} = \delta_1^2 + \delta_2^2 + \delta_3^2 + \delta_4^2$. С учетом формулы (П.3) оценим последнее выражение в виде

$$\dot{V}(t) \leq -\chi V(t) + 2\mu \bar{\delta},$$

где $\chi = \min \left\{ \frac{\lambda_{\min}(Q_1)}{\lambda_{\max}(H_1)}, \frac{\lambda_{\min}(Q_2)}{\theta_0 \lambda_{\max}(H_2)}, \frac{\lambda_{\min}(Q_3)}{\mu \lambda_{\max}(H_3)}, 2\mu \right\}$. Решив

данное неравенство, получим $V(t) \leq V(0)e^{-\chi t} + \frac{2\mu}{\chi} (1 - e^{-\chi t}) \bar{\delta}$. Учитывая это выражение, найдем оценку δ в целевом условии (3) при $t = T$:

$$\delta \leq \sqrt{\frac{V(T)}{\lambda_{\min}(H_1)}} \leq \sqrt{\frac{1}{\lambda_{\min}(H_1)} \left(V(0)e^{-\chi T} + \frac{2\mu}{\chi} (1 - e^{-\chi T}) \bar{\delta} \right)}.$$

Очевидно, что условия (20) грубые, но из них видно, что существует значение θ , при котором алгоритм управления, разработанный для минимально-фазовых систем, работоспособен для определенного класса неминимально-фазовых объектов. Из последнего неравенства очевидно, что уменьшая значение μ , можно получить требуемую точность δ в условии (3).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Мирошник И.В., Никифоров В.О., Фрадков А.Л.* Нелинейное и адаптивное управление сложными динамическими системами. — СПб.: Наука, 2000. — 549 с.
2. *Андреевский Б.Р., Фрадков А.Л.* Избранные главы теории автоматического управления с примерами на языке MATLAB. — СПб.: Наука, 1999. — 467 с.
3. *Цыкунов А.М.* Применение адаптивного динамического регулятора для управления объектом по выходу // Тр. междунар. конф. «Идентификация систем и задачи управления» SICPRO'2005 / ИПУ. — М., 2005. — С. 1349—1357.
4. *Novakimyat N., Yang B.-J., Calise A.J.* An adaptive output feedback control methodology for non-minimum phase systems // 41st IEEE Conf. on Decision and Control. — Las Vegas, 2002. — P. 949—954.
5. *Цыкунов А.М.* Модифицированный адаптивный алгоритм высокого порядка для управления линейным объектом по выходу // Автоматика и телемеханика. — 2006. — № 8. — С. 143—152.
6. *Брусин В.А.* Об одном классе сингулярно возмущенных адаптивных систем. 1 // Автоматика и телемеханика. — 1995. — № 4. — С. 119—127.
7. *Atassi A.N., Khalil H.K.* A separation principle for the stabilization of class of nonlinear systems // IEEE Trans. Automat. Control. — 1999. — Vol. 44, N 9. — P. 1672—1687.

Статья представлена к публикации членом редколлегии В.Ю. Рутковским.

Игорь Борисович Фургат — канд. техн. наук, доцент, Институт проблем машиноведения РАН, Санкт-Петербургский национальный исследовательский университет информационных технологий, механики и оптики, ☎ (812) 321-47-66, ✉ cainenash@mail.ru.

АНАЛИЗ СТРУКТУРЫ ГАРМОНИЧЕСКИХ РЯДОВ ДИНАМИКИ НА БАЗЕ АЛГОРИТМА СИНГУЛЯРНОГО РАЗЛОЖЕНИЯ

О.В. Кузьмин, В.С. Кедрин

Исследованы особенности анализа структуры гармонических рядов на базе определения численного ранга, соотносимого с числом сингулярных чисел, существенно отличных от нуля. Проводится параллель между численным рангом сингулярного разложения и конечным рангом простейшего гармонического ряда. Приведены результаты анализа структур аддитивных и мультипликативных моделей гармонических временных рядов.

Ключевые слова: нестационарная система, временной ряд, сингулярное разложение, сингулярный спектр, анализ структуры модели.

ВВЕДЕНИЕ

В целях оперативного управления сложными техническими системами в современных условиях необходимо создание аналитического и алгоритмического аппарата, который позволил бы учесть природу динамики протекающих в них процессов на основании накопленной с течением времени статистической информации о характеристиках системы. Задача осложняется тем, что в реальных системах с течением времени непрерывно изменяются параметры и структурный состав образующих их подсистем. В связи с тем, что классический аппарат спектрального анализа, основанный на преобразовании Фурье, имеет ряд ограничений, весьма затруднено его эффективное применение к анализу сложных динамических процессов, состоящих из большого числа компонент с эволюционирующими во времени частотой и амплитудой. Поэтому в последнее время наибольшую популярность приобретают новые сложные дискретные методы спектрального и гармонического анализа [1–3], позволяющие получать больше информации о динамическом ряде. Наиболее перспективные из них — вейвлет-преобразование и метод, основанный на сингулярном разложении траекторной матрицы развертки.

Вейвлет-преобразование, благодаря подвижным частотно-временным окнам, позволяет одинаково хорошо выявлять низкочастотные и высокочастотные характеристики динамического ряда.

При этом можно выделить как определенную пространственную (временную) частоту, так и ее локализацию в физическом пространстве (времени).

Сингулярное разложение траекторной матрицы развертки (СРМР) [4, 5] позволяет представить исходный динамический ряд с помощью суммы его аддитивных составляющих на основании ортогонального (независимого) базиса. Не умаляя достоинств вейвлет-преобразования, отметим, что аппарат СРМР имеет ряд важных свойств, позволяющих адаптивно применять его к нестационарным выборкам временных рядов [5]:

- допустимость варьирования качества и состава выделяемых составляющих с помощью одного параметра, определяющего длину строки (окна) траекторной матрицы развертки;

- возможность управляемого восстановления исходного процесса по интерпретируемым компонентам, в отличие от практически однозначных компонент Фурье- и вейвлет-преобразований;

- отсутствие для реальных временных рядов граничного эффекта по параметру сдвига, определяемого, например, жесткой фиксацией набора вейвлет-функций;

- представление отдельной собственной сингулярной функции в виде линейного фильтра показывает, что она обладает не комплексной, как в случае Фурье-преобразования, а действительной частотной характеристикой. Это снимает проблемы, связанные с моделированием фазовых сдвигов между составляющими.



Таким образом, аппарат СРМР может быть положен в основу решения проблемы создания новых дискретных алгоритмов анализа состояния сложных процессов. Поэтому в данной работе ставится задача определения особенностей приложения аппарата сингулярного разложения для класса периодических (гармонических) функций, так как данный вид функций имеет наибольшее значение при оценке динамического состояния систем в различных областях науки и техники.

1. СИНГУЛЯРНЫЙ АНАЛИЗ

Аппарат сингулярного анализа основан на разложении временного ряда на простейшие аддитивные составляющие, что позволяет учесть и исследовать его структуру. Суть метода заключается в преобразовании одномерной выборки нестационарного процесса в матрицу развертки с помощью однопараметрической процедуры сдвига элементов ряда:

$$\mathbf{A} = (a_i)_{i=1}^{m+n-1} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ a_2 & a_3 & a_4 & \dots & a_{n+1} \\ a_3 & a_4 & a_5 & \dots & a_{n+2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_m & a_{m+1} & a_{m+2} & \dots & a_{m+n-1} \end{bmatrix} \quad (1)$$

и сингулярного разложения этой ганкелевой матрицы [6] на основании фундаментального соотношения:

$$\mathbf{A} = \mathbf{USV}, \quad (2)$$

где \mathbf{U} — унитарная матрица левых сингулярных векторов размером $m \times m$, \mathbf{V} — унитарная матрица правых сингулярных векторов размером $n \times n$, \mathbf{S} — диагональная матрица размером $m \times n$ с сингулярными неотрицательными числами, расположенными в порядке невозрастания.

Из полученного набора сингулярных чисел матрицы \mathbf{S} в соотношении (2) выбираются те из них, по которым может быть восстановлена совокупность аддитивных составляющих, причем сумма с допустимой ошибкой совпадает с выборкой исходного процесса. Более подробно аппарат сингулярного разложения описан в работах [4, 5].

Пояснить смысл метода сингулярного разложения позволяет метод главных компонент (алгоритм PCA — principal component analysis). Для этого достаточно просто провести параллель между данными двумя методами. Суть метода главных

компонент состоит в представлении матрицы (1) в виде

$$\mathbf{A} = \mathbf{TP}^T + \mathbf{E}, \quad (3)$$

где \mathbf{T} — матрица счетов, которая определяет проекции исходных строк матрицы \mathbf{A} на подпространство главных компонент; \mathbf{P} — матрица нагрузок, которая определяет переход из исходного пространства строк матрицы \mathbf{A} в пространство главных компонент; \mathbf{E} — матрица ошибок (остатков).

Если в соотношении (3) представить матрицу \mathbf{T} в виде $\mathbf{T} = \mathbf{US}$, положить $\mathbf{P}^T = \mathbf{V}$ и считать \mathbf{E} нулевой матрицей, то получим сингулярное разложение (2).

Математическое содержание метода главных компонент — описание пространства данных, заключенных в матрице \mathbf{A} как суммы взаимно ортогональных собственных подпространств \mathbf{t}_i . На основании этого можно говорить о том, что в сингулярном разложении матрица \mathbf{A} определяется через линейную комбинацию ортогональных проекторов на эти подпространства с коэффициентами, равными значениям сингулярных чисел матрицы \mathbf{S} . При этом количество значимых (отличных от погрешности и шума) подпространств будет зависеть от количества сингулярных чисел, существенно отличных от нуля. Это подтверждает положение, сформулированное в фундаментальной работе [7], что сингулярное разложение позволяет ввести практическое понятие численного ранга, так называемого ε -ранга матрицы, который, для некоторого малого $\varepsilon > 0$, определяется по формуле

$$\text{rank}(\mathbf{A}, \varepsilon) = \min_{\|\mathbf{A} - \mathbf{B}\|_2 \leq \varepsilon} (\text{rank}(\mathbf{B})).$$

Количество сингулярных чисел, позволяющих с допустимой погрешностью ε определить $\text{rank}(\mathbf{A}, \varepsilon)$ на фоне остального их количества, характеризует близость ранга исследуемой матрицы \mathbf{A} к матрице \mathbf{B} меньшего ранга. Поэтому сингулярное разложение позволяет раскрыть «скрытую» информацию о значимой структуре исследуемой матрицы \mathbf{A} . Так, оценивая значения сингулярных чисел $s_1 \geq \dots \geq s_r > s_{r+1}$, $s_{r+1} = \dots = s_m \approx 0$, получаем: $\text{rank}(\mathbf{A}) = r$, $\text{range}(\mathbf{A}) = \text{span}\{u_1, \dots, u_r\}$, $\text{null}(\mathbf{A}) = \text{span}\{v_{r+1}, \dots, v_m\}$, где $\text{rank}(\mathbf{A})$ — ранг матрицы \mathbf{A} ; $\text{range}(\mathbf{A})$ — область значений матрицы \mathbf{A} , $\text{range}(\mathbf{A}) = \{\mathbf{y} \in \mathbf{R}^r : \mathbf{y} = \mathbf{Ax}\}$ для некоторого $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^r$; $\text{null}(\mathbf{A})$ — нуль-пространство матрицы \mathbf{A} , $\text{null}(\mathbf{A}) = \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^{m-r} : \mathbf{Ax} = 0\}$.

Отметим, что сингулярное разложение позволяет оценить размерности двух важных подпространств: $\text{range}(\mathbf{A})$ ранга r , содержащего существ-

венную для исследования информацию, и $\text{null}(\mathbf{A})$ ранга $m - r$, содержащего остаточную составляющую, которая может быть интерпретирована как шум или погрешность.

Понятие численного (сингулярного) ранга r позволяет раскрыть и выявить скрытые (латентные) внутренние взаимосвязи между элементами матрицы \mathbf{A} . В случае, если матрица \mathbf{A} является траекторной и характеризует исследуемую временную (пространственную) выборку процесса, то ранг r , определяемый с помощью сингулярного разложения, должен быть связан с числом степеней свободы системы, порождающей исследуемый процесс, т. е. числом переменных, которые определяют фазовое состояние системы. Проиллюстрируем это положение на примере временных рядов, образованных простейшими периодическими (гармоническими) функциями.

2. СИНГУЛЯРНЫЙ АНАЛИЗ ГАРМОНИЧЕСКОГО ВРЕМЕННОГО РЯДА

Пусть исследуемый временной ряд порождается гармонической функцией вида:

$$f(x) = A\cos(\alpha x + \phi) + B\sin(\alpha x + \phi). \quad (4)$$

Определим свойства сингулярного разложения данного ряда, исходя из понятия численного ранга сингулярного разложения, определяемого количеством сингулярных чисел, существенно отличных от нуля.

В работе [8] приведено понятие ранга ряда d , согласно которому любой бесконечный ряд является рядом конечного ранга, если его члены удовлетворяют линейной рекуррентной формуле размерности d , т. е. найдутся такие коэффициенты $a_1, \dots, a_j, \dots, a_d$, что для любого $i > d$ справедливо

$$f_i = \sum_{k=1}^d a_k f_{i-k}, \quad a_d \neq 0. \quad (5)$$

Класс рекуррентных соотношений вида (5) подробно рассмотрен, например, в работе [9]. Частный случай соотношения (5) для исходного гармонического ряда (4) может быть получен на основании решения однородного рекуррентного (разностного) уравнения второго порядка вида

$$y_n = Ky_{n-1} - y_{n-2}, \quad (6)$$

где K — в общем случае произвольная константа.

Для решения уравнения (6) составляется характеристическое уравнение $\lambda^2 - K\lambda + 1 = 0$, $\lambda \neq 0$, из

которого при $|K| < 2$ получаем два комплексно-сопряженных корня:

$$K/2 \pm i\sqrt{1 - K^2/4}. \quad (7)$$

Поскольку $|K| < 2$, можно подобрать такие α , что $K = 2\cos\alpha$. В этом случае из соотношения (7) получаем:

$$\lambda_{1,2} = \cos\alpha \pm i\sqrt{1 - \cos^2\alpha} = \cos\alpha \pm i\sin\alpha = e^{\pm i\alpha}.$$

Решение исходного разностного уравнения (6) в рассматриваемом частном случае имеет вид

$$y_n = C_1\lambda_1^n + C_2\lambda_2^n = C_1e^{in\alpha} + C_2e^{-in\alpha}$$

или

$$y_n = A\cos(\alpha n) + B\sin(\alpha n).$$

Исходя из этого решения, получаем рекуррентную формулу

$$y_i = 2\cos\alpha y_{i-1} - y_{i-2}, \quad (8)$$

которая управляет рядом, порождаемым гармонической функцией вида (4), следовательно, ранг исходного гармонического ряда $d = 2$.

Замечание. В случае $a = \pi k$, $k = 1, 2, 3, \dots$, значения y_i и y_{i-2} в соотношении (8) совпадают. Следовательно, рекуррентная формула примет вид $y_i = \cos\alpha y_{i-1}$ и, соответственно, ранг исходного гармонического ряда $d = 1$. ♦

Предположим, что ранг r сингулярного разложения связан с числом степеней свободы системы d , порождающей исследуемый процесс. Тогда сингулярное разложение заданной гармонической функции (4) должно характеризоваться соотносимым с рангом количеством сингулярных чисел в случае $a \neq \pi k$, $k = 1, 2, 3, \dots$, и одним сингулярным числом при $a = \pi k$, $k = 1, 2, 3, \dots$. Для проверки указанного предположения был проведен численный эксперимент применения метода СРМР к временной выборке, порождаемой гармонической функцией вида (4), с целью исследования количества выделяемых отличных от нуля сингулярных чисел, получаемых при разных параметрах a .

Эксперимент 1. Для расчетов были заданы выборки временных рядов, образованных функцией

$$\begin{cases} f(i) = 0,5\cos(\alpha i) + \sin(\alpha i), i = \overline{1, 51}, \\ \alpha = \pi k/6, k = \overline{1, 12}. \end{cases}$$

Для временных рядов, получаемых путем сдвига параметра α с шагом $\pi k/6$, строилась траекторная матрица \mathbf{A} и проводилось сингулярное разложение с целью определения численного ранга, определяемого количеством сингулярных чисел,



существенно отличных от нуля. Сингулярное разложение формировалось с помощью алгоритма Голуба—Рейнша [10], включенного в состав библиотеки численных вычислений в прикладной математике и науке GSL. Результаты эксперимента представлены на рис. 1. По результатам эксперимента значения третьего и последующего сингулярных чисел являются незначительными относительно первых двух сингулярных чисел. Поэтому можно считать, что $s_3 \approx s_4 \approx \dots \approx 0$, и, соответственно, эти числа относятся к $\text{null}(A)$. На рис. 1 зависимости сингулярных чисел s_3 и s_4 носят информативный характер для графической оценки разделения пространств $\text{range}(A)$ и $\text{null}(A)$. Принятие малых не нулевых значений сингулярных чисел s_3 и s_4 можно объяснить неравномерностью дискретных отсчетов, особенностями дискретного алгоритма сингулярного анализа, а также конечной точностью применяемых в ходе расчета переменных.

Можно сделать следующие *выводы*.

1. Численный ранг r , соотносимый с количеством сингулярных чисел, существенно отличных от нуля, инвариантен к параметру разложения m , а именно, ранг r остается неизменным при различном параметре разложения m , меняются лишь их значения. На основании эксперимента была получена инвариантная зависимость от параметров n и m численного ранга r при разных параметрах a , в случае, если существует $\text{null}(A)$, и $m > d$, представленная на рис. 2.

2. Численный ранг r , определяемый с помощью сингулярного разложения, соотносится с конеч-

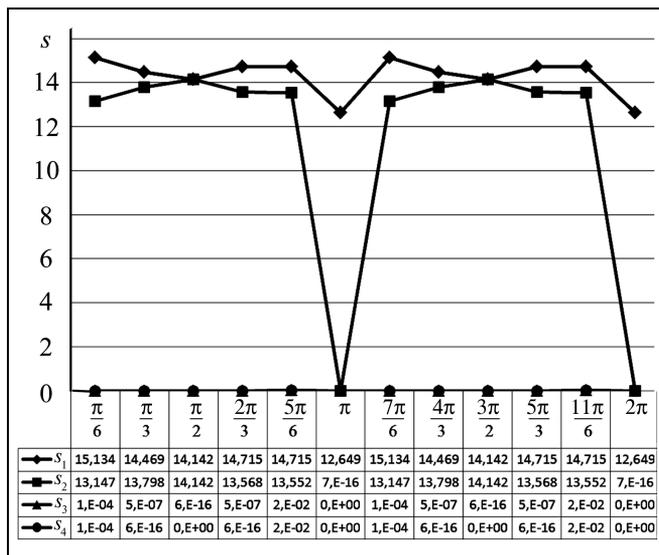


Рис. 1. Зависимость значений сингулярных чисел s , выделяемых в результате сингулярного разложения ($m = 20$) простейшей гармонической функции, при различных параметрах α

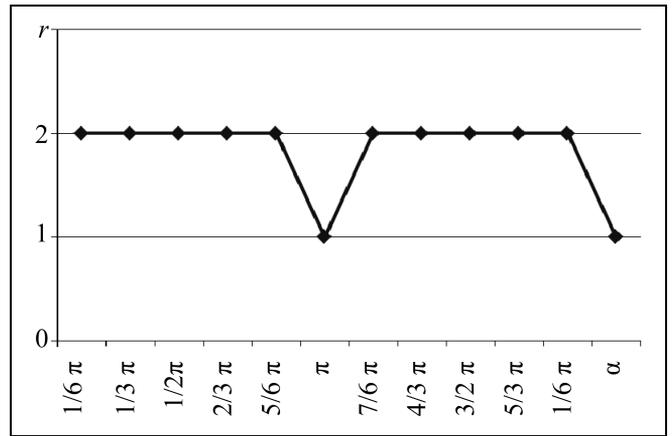


Рис. 2. Зависимость численного ранга r для простейшей гармонической функции от параметра α

ным рангом ряда d для гармонических функций вида (4):

$$a \neq \pi k, \quad k = 1, 2, 3... \Rightarrow r = d = 2;$$

$$a = \pi k, \quad k = 1, 2, 3... \Rightarrow r = d = 1.$$

3. При $a = \pi k/2, k = 1, 2, 3...$, значения двух сингулярных чисел совпадают.

3. СИНГУЛЯРНЫЙ АНАЛИЗ АДДИТИВНОГО ГАРМОНИЧЕСКОГО ВРЕМЕННОГО РЯДА

Пусть исследуемый временной ряд порождается гармонической функцией

$$f(x) = \sum_{i=1}^I A_i \cos(\alpha_i x + \phi) + B_i \sin(\alpha_i x + \phi), \quad (9)$$

где I — число аддитивных составляющих.

Определим свойства сингулярного разложения для заданного ряда, исходя из понятия численного ранга r , соотносимого с количеством сингулярных чисел, существенно отличных от нуля.

В случае, когда $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_I = \alpha$, легко показать, что численный ранг сингулярного разложения будет определяться аналогичным образом, что и для ряда, образованного функцией (4). В данном случае исходную функцию (4) можно преобразовать к виду

$$f(x) = \left(\sum_{i=1}^I A_i \right) \cos(\alpha x + \phi) + \left(\sum_{i=1}^I B_i \right) \sin(\alpha x + \phi).$$

Подставляя $A = \sum_{i=1}^I A_i$ и $B = \sum_{i=1}^I B_i$, получаем

$$f(x) = A \cos(\alpha x + \phi) + B \sin(\alpha x + \phi).$$

Остается открытым вопрос об определении ранга для аддитивного гармонического временного ряда, образованного функцией (9), когда $\alpha_1 \neq \alpha_2 \neq \dots \neq \alpha_I$. В этом случае каждая составляющая $A_i \cos(\alpha_i x + \phi) + B_i \sin(\alpha_i x + \phi)$ будет характеризоваться двумя сингулярными числами при $a_i \neq \pi k$, $k = 1, 2, 3, \dots$. Для ответа на данный вопрос был проведен численный эксперимент применения метода СРМР к временным выборкам аддитивного гармонического временного ряда (9) с целью исследования зависимости численного ранга r от числа аддитивных составляющих I при $\alpha_1 \neq \alpha_2 \neq \dots \neq \alpha_I$ и $\forall a_i \neq \pi k$, $k = 1, 2, 3, \dots$.

Эксперимент 2. Для расчетов были заданы выборки временных рядов, образованных функцией:

$$f_j(i) = \sum_{i=1}^I 0,5 \cos(0,2ji) + \sin(0,2ji), \quad j = \overline{1, 101},$$

с итерационным шагом $I = \overline{1, 10}$.

Вывод. Численный ранг r , соотносимый с количеством сингулярных чисел, существенно отличных от нуля, для аддитивной функции вида (9) прямопропорционален числу суммируемых составляющих i и определяется линейной зависимостью $r = 2I$.

При сингулярном разложении функции:

$$f_j(i) = \sum_{i=1}^{20} 0,5 \cos(0,4ji), \quad j = \overline{1, 201},$$

с параметром разложения $m = 20$ был определен численный ранг $r = 40$, что подтверждает сформулированный вывод.

4. СИНГУЛЯРНЫЙ АНАЛИЗ МУЛЬТИПЛИКАТИВНОГО ГАРМОНИЧЕСКОГО ВРЕМЕННОГО РЯДА

Пусть исследуемый временной ряд порождается гармонической функцией

$$f(x) = \prod_{i=1}^I A_i \cos(\alpha_i x + \phi) + B_i \sin(\alpha_i x + \phi), \quad (10)$$

где I — число мультипликативных составляющих.

Определим свойства сингулярного разложения для заданного ряда, исходя из понятия численного ранга r , соотносимого с количеством сингулярных чисел, существенно отличных от нуля.

В случае, когда $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_I = \alpha$, ситуация не такая однозначная, как для аддитивного ряда. Поэтому был проведен численный эксперимент применения метода СРМР к временным выборкам мультипликативного гармонического времен-

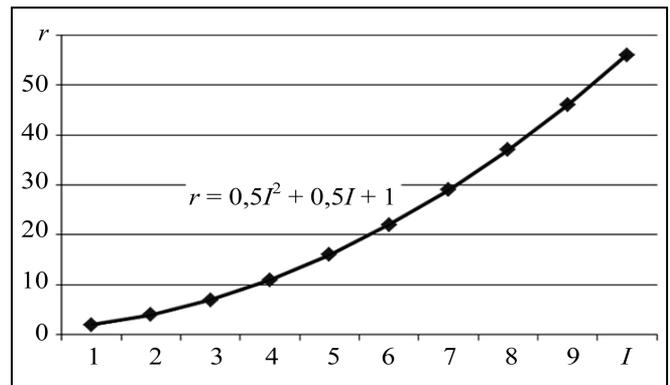


Рис. 3. Зависимость численного ранга r для мультипликативной гармонической функции от числа составляющих при $\alpha_1 \neq \alpha_2 \neq \dots \neq \alpha_I$

ного ряда (10) с целью исследования численного ранга r в зависимости от количества мультипликативных составляющих I при $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_I = \alpha$ и $\forall a_i \neq \pi k$, $k = 1, 2, 3, \dots$.

Эксперимент 3. Для расчетов были заданы выборки временных рядов, образованных функцией

$$f_j(i) = \prod_{i=1}^I 1,5 \cos(0,2ji) + \sin(0,2ji), \quad j = \overline{1, 201},$$

с шагом $I = \overline{1, 10}$.

Вывод. Численный ранг r , соотносимый с количеством сингулярных чисел, существенно отличных от нуля, для мультипликативной функции вида (10) при $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_I = \alpha$ прямопропорционален числу мультипликативных составляющих I и определяется линейной зависимостью $r = 1 + I$.

С целью исследования зависимости численного ранга r от числа I мультипликативных составляющих для выборок временных рядов, образованных функцией (10) при $\alpha_1 \neq \alpha_2 \neq \dots \neq \alpha_I$ и $\forall a_i \neq \pi k$, $k = 1, 2, 3, \dots$, был проведен численный эксперимент применения метода СРМР.

Эксперимент 4. Для расчетов были заданы выборки временных рядов, образованных функцией

$$f_j(i) = \prod_{i=1}^I 0,5 \cos(0,2ji) + \sin(0,2ji), \quad j = \overline{1, 201},$$

с шагом $I = \overline{1, 10}$.

Вывод. Численный ранг r , соотносимый с количеством сингулярных чисел, существенно отличных от нуля, для мультипликативной функции вида (10) определяется функцией (рис. 3) $r = 0,5I^2 + 0,5I + 1$.



При сингулярном разложении функции

$$f_j(i) = \sum_{i=1}^{12} 0,5 \cos(0,4ji), \quad j = \overline{1, 201},$$

с параметрами разложения $m = 100$ был определен численный ранг $r = 79$, что подтверждает сформулированный вывод.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

На основании проведенного экспериментального исследования можно сделать вывод о том, что расширение и модификация классического алгоритма сингулярного разложения позволяет создать новый, достаточно перспективный и наглядный аппарат анализа динамической структуры процесса в локальном квазистационарном состоянии. Он может быть применим не только для аддитивных, но и для мультипликативных моделей, что расширяет возможности классической методики сингулярного разложения. Полученные ключевые зависимости численного ранга r от числа составляющих сложной гармонической функции могут стать основой для разработки новой методологии оперативного анализа состояния и особенностей динамической системы, что актуально для мониторинга параметров управления в режиме реального времени сложных структурно-неустойчивых систем. К этим особенностям, которые, безусловно, нуждаются в проверке и дополнительном уточнении, можно отнести:

— численный ранг r зависит от количества гармонических составляющих и вида модели (аддитивная или мультипликативная);

— численный ранг r имеет устойчивые зависимости изменения, определяемые видом модели, анализ которых позволяет спрогнозировать структурный состав временного (пространственного) ряда, образованного сложной гармонической функцией.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Measuring nonstationarity by analyzing the loss of recurrence in dynamical systems* / C. Rieke, et al. // *Phys. Rev. Lett.* — 2002. — Vol. 88, N 24. — P. 31–35.
2. *Гребенюк Е.А.* Обнаружение изменений свойств нестационарных случайных процессов // *Автоматика и телемеханика.* — 2003. — № 12. — С. 25–41.
3. *Гребенюк Е.А.* Анализ и оперативная диагностика систем, описываемых нестационарными случайными процессами // *Проблемы управления.* — 2003. — № 4. — С. 23–29.
4. *Дойников А.Н., Кедрин В.С., Сальникова М.К.* Методика синтеза математических моделей рядов макроэкономических показателей на основе алгоритмов сингулярного разложения // *Вестник Иркутского гос. техн. ун-та.* — 2006. — № 2. — С. 138–142.
5. *Дойников А.Н., Кедрин В.С., Сальникова М.К.* Моделирование нестационарных процессов с использованием алгоритмов их сингулярного разложения // *Научно-технические ведомости СПбГПУ.* — 2006. — № 5. — С. 143–147.
6. *Воеводин В.В., Кузнецов Ю.А.* Матрицы и вычисления. — М.: Наука, 1984. — 320 с.
7. *Голуб Дж., Ван Лоун Ч.* Матричные вычисления. — М.: Мир, 1999. — 548 с.
8. *Голяндина Н.Э.* Метод «Гусеница»-88А: анализ временных рядов: Учеб. пособие. — СПб.: Изд-во СПбГУ, 2004. — 76 с.
9. *Кузьмин О.В.* Обобщенные пирамиды Паскаля и их приложения. — Новосибирск: Наука; Сибирская издательская фирма РАН, 2000. — 294 с.
10. *Golub G.H., Reinsch C.* Singular Value Decomposition and least squares solutions. In *Handbook for Automatic Computation. Vol. 2: Linear Algebra*, by J.H. Wilkinson and C. Reinsch (Eds.). — N.-Y.: Springer-Verlag, 1971. — P. 134–151.

Статья представлена к публикации членом редколлегии В.Ю. Рутковским.

Олег Викторович Кузьмин — д-р физ.-мат. наук, зав. кафедрой, Иркутский государственный университет, ☎ (3952) 24-22-14, ✉ quzminov@mail.ru,

Виктор Сергеевич Кедрин — канд. техн. наук, доцент, филиал Иркутского государственного университета, г. Братск, ☎ (3953) 44-89-93, ✉ kedrinvs@mail.ru.

Новая книга

Резчиков А.Ф., Твердохлебов В.А. Принцип причинно-следственной декомпозиции динамических систем. — Саратов: ООО «Издательский Центр «Наука»», 2013. — 56 с. (ISBN 978-5-9999-1480-4).

Сформулирован и проанализирован новый принцип причинно-следственной декомпозиции сложных человеко-машинных систем (СЧМС), предназначенный для использования в разработке моделей СЧМС. Принцип применим в каждом из следующих трех самостоятельных направлений декомпозиции: декомпозиции событий, декомпозиции процессов и функционально-структурной декомпозиции СЧМС. Рассмотрено формально-логическое строение языка для представления целей и задач в СЧМС и ее компонентов, а также свойств событий, процессов и компонентов множествами утверждений.

Рецензенты: академик РАН Ю.В. Гуляев, д-р техн. наук В.В. Сафронов.

Книгу можно бесплатно скачать на портале <http://www.twirpx.com>.

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ИННОВАЦИОННЫМ ПРОЦЕССОМ В РАМКАХ ИНТЕГРИРОВАННОЙ СТРУКТУРЫ

Ю.В. Косачев

Рассмотрена задача оптимального управления процессом внедрения на заданном интервале времени инноваций, осуществляемых в рамках вертикально интегрированной финансово-промышленной структуры. С помощью математической модели взаимодействия финансового и промышленного капитала исследована возможность повышения эффективности внедрения инноваций на основе оптимизации управления динамикой инвестирования участниками структуры в венчурный капитал. При этом, одновременно оптимизируется процесс инвестирования производителя с целью повышения экономической эффективности путем снижения издержек, как на этапе коммерциализации инноваций, так и при выпуске новейшей продукции.

Ключевые слова: оптимальное управление, динамическая управляемая система, инновационный процесс, инвестиционное взаимодействие, коммерциализация инноваций, интегрированная финансово-промышленная структура.

ВВЕДЕНИЕ

В современных условиях рыночной экономики крупные интегрированные компании, корпорации вынуждены включаться в олигополистическую конкурентную борьбу, которая ведется не столько за доли рынков или сырья, сколько за открытие новых рынков, путем разработки и внедрения инноваций. Эту смену основных направлений конкурентной борьбы можно отнести к числу наиболее существенных особенностей нынешнего «инновационного» периода. Проявляется это, прежде всего, в расширении инвестирования в интеллектуальный капитал. Выиграть в такой инновационной борьбе не просто, и одна из основных проблем заключается в необходимости вложения огромных финансовых ресурсов в дорогостоящую, рискованную и достаточно длительную коммерциализацию инноваций. Важно отметить, что несравнимо большая часть всех затрат на реализацию инноваций идет именно на их коммерциализацию, т. е. на то, чтобы разработать новейший продукт или технологию и вывести их на рынок для коммерческого использования.

К основным затратам, связанным с внедрением в производственный цикл инноваций, можно, в соответствии с работой [1], отнести: расходы на приобретение научно-технического знания, относящегося к новшеству, которым субъект, внедряющий инновации, ранее не обладал; расходы на «ноу-хау» в области организации, управления, маркетинга; издержки по приспособлению к внешним условиям; инвестиционные затраты на строительство зданий, приобретение и наладку оборудования; наконец, издержки, обусловленные поисковым (рисковым) характером самого инновационного процесса.

Подобные значительные затраты существенно усложняют возможность эффективного внедрения инноваций. Возникает необходимость такой организации процесса вложения финансовых ресурсов, которая позволит достичь каких-то вполне определенных целей относительно развития структуры. В связи с этим, будем рассматривать динамику вложения инвестиций как *управляемый инвестиционный процесс*. Под оптимальным управлением процесса вложения инвестиций понимается такая организация взаимодействия инвесторов, которая способна обеспечить максимальную эф-



фективность экономической структуры, внедряющей в производственный цикл инновации.

В этом смысле наиболее подходящими экономическими субъектами, способными осилить инновационный процесс, являются достаточно крупные интегрированные компании, например, финансово-промышленные корпоративные структуры или группы, обладающие повышенным инвестиционным потенциалом. Это свойство интегрированных структур позволяет им легче преодолевать барьеры при внедрении инноваций. Именно такая вертикально интегрированная финансово-промышленная структура рассматривается в работе в качестве компании, реализующей инновации.

На важность инвестирования в инновационный процесс, а также в долгосрочную динамику было указано еще в работе [2], в которой также определена роль нововведений не только как обеспечивающих экономический рост, но и как придающих ему неравномерный характер. Эту неравномерность можно соотнести со сменой фаз жизненного цикла продукции, технологии или отрасли, имеющих ключевое значение для раскрытия условий эффективной коммерциализации научно-технического достижения. Анализ этих условий включает в себя, в числе прочих, исследование инвестиционных мотиваций субъектов-инвесторов на различных стадиях жизненного цикла.

Основной стратегической целью взаимодействия предприятий и организаций — участников компании, реализующей инновации, должно быть оптимальное распределение инвестиционных усилий между решением краткосрочных и перспективных задач. Простое наращивание операционной прибыли не эффективно в долгосрочной динамике, если не служит созданию новых преимуществ.

Здесь важно ответить на вопрос: как оптимально управлять инвестиционными возможностями компании в долгосрочном периоде, чтобы максимизировать ее экономическую эффективность? Очевидно, что этого невозможно достичь, если не учитывать длительные мотивации инвесторов. Это означает, что стратегия компании на достаточно большом интервале времени должна основываться не на простом наращивании инвестиций, а на оптимальном их распределении во времени. При этом учет долгосрочных мотиваций приводит к необходимости рассмотрения инвестиционного процесса как *нестационарного*.

Отметим, что в современных условиях для увеличения эффективности компании простого сокращения производственных или транзакционных издержек явно недостаточно. Представляется необходимой разработка такой стратегии обеспечения оптимального соотношения действующих и новейших производств компании, которая позво-

лит максимизировать добавленную стоимость уже благодаря внедрению инноваций.

В работе исследуется на модельном уровне задача оптимального управления долговременной динамикой вложения инвестиций в венчурный капитал участниками вертикально интегрированной финансово-промышленной структуры, внедряющей в производственный цикл инновации. Одновременно предполагается оптимизировать управление нестационарным процессом инвестирования производителя корпоративной продукции с целью повышения эффективности структуры путем снижения издержек, причем, как на этапе коммерциализации инноваций, так и на этапе выпуска новейшей конкурентоспособной продукции.

Под оптимальным управлением нестационарным инвестиционным процессом на заданном конечном интервале времени понимается такое распределение множества подинтервалов вложения финансовых ресурсов различными участниками-инвесторами в развитие производства, которое обеспечивает достижение максимальных значений заданных критериев эффективности.

Отметим, что если в статическом аспекте инновация представляет собой конечный результат реализации инновационного проекта, то в динамическом аспекте необходимо рассматривать инновационный процесс. Период, который начинается с выполнения теоретических и прикладных исследований, включает в себя затем последующую разработку и освоение новой научно-технической идеи, разработку новой техники или технологии, наконец, реализацию и распространение новой конкурентоспособной продукции, а заканчивается моментом падения спроса на эту продукцию, будем называть *жизненным циклом инновационного процесса*. Инновационный процесс можно представить как комплекс последовательных работ, содержащих следующие этапы:

- в *фазе создания новаций* анализируется рынок, отбираются инновационные идеи, исследуется возможность их реализуемости с учетом предварительного анализа затрат и рисков, выбирается вариант новой продукции, проводятся соответствующие НИОКР, создаются опытные образцы, предварительно оценивается соотношение между возможной ценой и издержками производства, формируется бизнес-план;
- в *фазе внедрения* осуществляется строительство зданий и сооружений, приобретается или выпускается требуемое оборудование, производится его установка и наладка, осуществляется обучение персонала, выпускается пробная продукция, уточняются издержки, подготавливается полномасштабное производство, координируется деятельность по всей технологической цепочке; с началом фазы внедрения начинается

этап коммерциализации инновации, который заканчивается с последней фазой жизненного цикла;

- в *фазах роста* осуществляется выход продукта на рынок и запуск полномасштабного производства, формируются сбытовые каналы, расширяется производство, проводятся маркетинговые, рекламные и другие мероприятия, устанавливаются конкурентоспособные цены, выбираются способы дистрибуции, продвижения продукции;
- *фаза насыщения* характеризуется устойчиво высоким уровнем производства новой высококачественной продукции, повышением эффективности производства, высокими доходами компании;
- *фаза спада* характеризуется насыщением рынка продукции и падением спроса.

Приведенные фазы процесса реализации инноваций подтверждают вывод о необходимости значительных затрат, а также о том, что реализацию мероприятий по фазам жизненного цикла инновационного процесса необходимо начинать как можно раньше, так как этот процесс еще и достаточно длительный.

Дальнейшее исследование указанных процессов проводится с использованием динамической оптимизационной модели, представляющей собой формализованное представление объекта управления.

1. ИСХОДНЫЕ ПРЕДПОСЫЛКИ МОДЕЛИРОВАНИЯ

Взаимодействие финансового и промышленного капитала способно при его оптимизации повысить эффективность инвестиционного процесса, особенно в случаях капиталоемких процессов, к которым можно уверенно отнести реализацию инновационных проектов. В качестве основы для исследования этих процессов рассматривается базовая экономико-математическая модель финансово-промышленной структуры [3]. Она включает в свой состав производственное предприятие A , производящее основную продукцию «а», производственное предприятие B , которое потребляет эту продукцию, создавая с предприятием A вертикально интегрированную связь, и коммерческий банк B , владеющий частью собственности предприятия B и осуществляющий целевое кредитование производителя A в развитие производства и снижение издержек в расчете на единицу продукции. В качестве функции производственных затрат рассматривается нелинейная неоднородная функция затрат падающей эффективности.

В структуре компании создается венчурное предприятие C , основной задачей которого является разработка инновационного проекта (ИП).

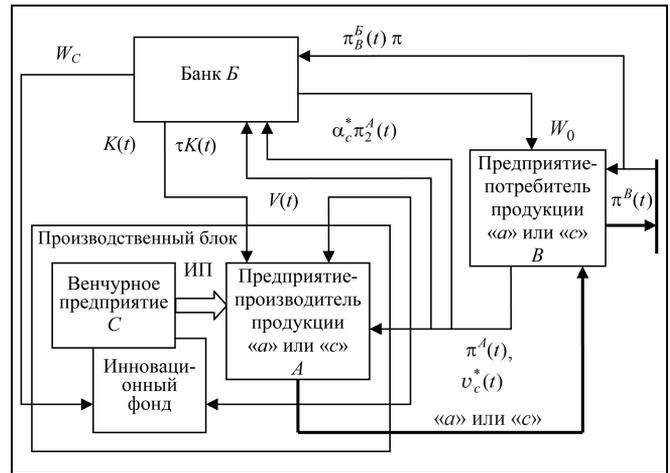


Рис. 1. Схема взаимодействия участников интегрированной структуры

Для осуществления финансирования внедрения инноваций в рамках структуры создается инновационный фонд (ИФ), цель которого состоит в накоплении денежных средств. Эти накопления могут осуществляться за счет внешних и внутренних источников. В дальнейшем в качестве основных инвесторов в модели рассматриваются предприятие-производитель A и банк-кредитор B . Схема взаимодействия участников структуры показана на рис. 1.

Производитель A продает свою продукцию предприятию B по внутренней трансфертной цене p , которая ниже рыночной. Предприятие B использует ее для выпуска своей продукции либо реализует ее на рынке продукта по рыночной цене p_0 . Для увеличения прибыли предприятию A необходимо снижать удельные издержки, например, расширяя свое производство или совершенствуя используемые технологии. Прибыль можно также увеличить благодаря диверсификации производства путем внедрения инноваций, позволяющих выпускать новую продукцию «с», обладающую высокой конкурентоспособностью и платежеспособным рыночным спросом. Оба подхода для своей реализации требуют инвестиций. В рассматриваемой модели указанные подходы применяются совместно.

2. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ ЗАДАЧИ ИССЛЕДОВАНИЯ

Считаем, что задан достаточно длительный планируемый интервал $[t_0, T]$, где t_0 и T — время начала и окончания исследуемого процесса. Структура рассматривается как управляемая динамическая система, когда ее состояние может изменяться



под действием некоторых управлений. Под управлениями понимаются целевые инвестиции в развитие производства либо в развитие инновационного процесса. В качестве основных инвесторов, управляющих динамическим процессом, рассматриваются: предприятие-производитель A , выпускающий в момент t основную продукцию в объеме $y(t)$ и отчисляющий от своей прибыли величину $V(t)$ в развитие своего же производства; банк B , выделяющий, если это требуется в момент t , целевой кредит $K(t)$ производителю по внутренней кредитной ставке τ , которая ниже рыночной ρ . Состояние системы в текущий момент времени $t \in [t_0, T]$ характеризуется скалярным параметром $x(t)$ — уровнем накопления суммарных инвестиционных вложений на момент t . При этом $x(t) = x^p(t) + x^h(t)$, где $x^p(t)$ — инвестиции в развитие производства, $x^h(t)$ — финансовые вложения в реализацию инновационного процесса. Изменяясь во времени, параметр $x(t)$ описывает траекторию изменения состояния системы.

Обозначим вектор инновационных параметров $u(x_i^h(t))$. Он определяет объемы финансовых вложений каждым i -м участником структуры в инновационный фонд в момент $t \in [t_0, T]$, $i = 0; 1$. (Здесь индекс $i = 1$ относится к производителю A , $i = 0$ — к банку B). Это могут быть регулярные финансовые инвестиции, разовые вложения, банковские целевые кредиты и т. д. В данном конкретном случае будем считать, что банк B на долевой основе осуществляет единовременное финансовое вложение в ИФ в объеме $W_c = \alpha_c Q_c$, где Q_c — требуемое значение уровня наполнения ИФ, α_c — доля заполнения фонда банком. Производитель A в каждый момент t отчисляет в инновационный фонд от своей прибыли в объеме $V_c(t)$. Таким образом, можно записать: $x_0^h = W_c(\alpha_c)$, $x_1^h(t) = V_c(t)$.

Изменение состояния системы описывается нелинейным дифференциальным уравнением $\dot{x}(t) = f(K(x(t)), V(x(t)), \alpha_c(x(t)), V_c(x(t)), y(x(t)))$. Здесь $K(x(t))$ и $\alpha_c(x(t))$ — управления банка B , $V(x(t))$, $V_c(x(t))$ и $y(x(t))$ — управления производителя A .

Общую постановку задачи оптимального динамического управления системой можно сформулировать следующим образом. С помощью управляющих параметров требуется на интервале $[t_0, T]$ перевести систему из начального состояния $x(t_0) = x_0$ в конечное состояние $x(T)$ таким образом, чтобы максимизировать заданные критерии эффективности. Если указанные оптимизационные задачи

разрешимы, то траекторию состояния системы на планируемом интервале будем называть *равновесной*, а динамическую систему *реализуемой*.

3. ДЕКОМПОЗИЦИЯ ОБЩЕЙ ЗАДАЧИ

Сформулированная общая задача динамического управления представляет собой, по существу, комплекс взаимосвязанных оптимизационных и игровых задач динамического взаимодействия финансового и промышленного капитала интегрированной структуры, решение которых позволит максимизировать экономическую эффективность, и сводится к совместному решению следующих задач.

- Формирование модели накопления инновационного фонда.
- Разработка критериев эффективности, учитывающих характеристики динамического взаимодействия финансового и промышленного капитала в рамках рассматриваемой интегрированной структуры.
- Решение дифференциальной игровой задачи взаимодействия участников при наличии неопределенностей и неконтролируемых параметров.
- Решение задач оптимального управления динамикой инвестиционного взаимодействия участников на заданном интервале при фиксированном значении вектора $u(x_i^h(t))$.
- Расчет равновесных траекторий, оптимизация инновационных параметров.

3.1. Модель накопления инвестиционного фонда

Рассматривается линейная модель с постоянным приростом и известным пороговым значением объема фонда Q_c . Принимается, что если в момент времени $T^* \in [t_0, T]$ достигается пороговое значение уровня накопления фонда, то работы по внедрению инноваций в момент T^* завершаются, и производитель переходит к выпуску новейшей продукции «с», реализуя ее на новом потребительском рынке. Таким образом, весь интервал $[t_0, T]$ разбивается на два этапа: на первом этапе $[t_0, T^*]$ производитель выпускает «традиционную» продукцию «а» и одновременно внедряет инновации; на втором этапе $[T^*, T]$ производится уже новая конкурентоспособная продукция «с».

3.2. Критерии эффективности

Качество управления инвестициями определяется экстремальными значениями специально разрабатываемых критериев, представляющих собой интегральные на интервале $[t_0, T]$ максимальные

гарантированные дисконтированные доходы каждого участника.

Критерий экономической эффективности предприятия-производителя выражается функционалом:

$$J^A(T) = \int_{t_0}^T [\pi^A(x(t, \mathbf{u}), y(t, \mathbf{u}), \mathbf{u}) - V(t, \mathbf{u})] e^{-\mu_1 t} dt \rightarrow \max_{y(t, \mathbf{u}) \in Y, V(t, \mathbf{u}) \in U}.$$

Критерий банка:

$$J^B(T) = \int_{t_0}^T \pi^B(x(t, \mathbf{u}), y(t, \mathbf{u}), \mathbf{u}) e^{-\mu_0 t} dt \rightarrow \max_{K(t, \mathbf{u}) \in K}.$$

Предприятие-потребитель в базовой модели не является инвестором, поэтому для него ограничимся функционалом, определяющим его интегральный доход на заданном интервале:

$$J^B(T) = \int_{t_0}^T \pi^B(x(t, \mathbf{u}), y(t, \mathbf{u}), \mathbf{u}) e^{-\mu_2 t} dt.$$

Здесь π^B , π^A и π^B — функции доходов в момент t соответственно банка B , производителя A и потребителя B , учитывающие все структурные и динамические характеристики исследуемой системы и рассчитываемые при фиксированном значении вектора $\mathbf{u}(x_i^u(t))$; μ_0 , μ_1 и μ_2 — ставки дисконтирования, соответственно банка, производителя и потребителя; ограничения на фазовую переменную: $x(t) \in X$, где X — открытое ограниченное множество; ограничения на управления: $y(t) \in Y$, $K(t) \in K$, $V(t) \in U$, где Y — открытое ограниченное множество, K , U — компактные множества.

3.3. Дифференциальная игровая задача

В исследуемом взаимодействии инвесторов возможны конфликтные ситуации, так как участники имеют собственные цели (критерии), необязательно совпадающие друг с другом, что приводит к появлению неопределенностей. Кроме того, в критериях участников имеются неконтролируемые параметры. Все это приводит к необходимости исследования взаимодействия участников (A и B) в виде коллективной двухкритериальной игровой задачи, которая рассматривается как дифференциальная бескоалиционная игра с противоположными интересами [4]. Рассматривается субъективное описание игры с точки зрения банка B , так как он наиболее информированный участник и может иметь представление о множестве U выборов стра-

тегий предприятия A . Это позволяет банку снизить неопределенность своего знания о последствиях своего выбора. Банк предлагает производителю A некую стратегию его кредитования, которая рассматривается как *программная* стратегия K_t на интервале $[t_0, T]$, зависящая только от времени t :

$$K_t = \{K(t, \mathbf{u}), t_0 \leq t \leq T, K(t, \mathbf{u}) \in K\}.$$

Банк понимает, что производитель A с учетом стратегии K_t выберет свою стратегию V_t , исходя из требования максимизации на заданном интервале своего критерия $J^A(T)$, причем, выбор будет осуществляться не из начального множества выборов U , а из суженного множества $R(K_t) \subset U$. Множество $R(K_t)$ ответных стратегий V_t производителя A будет иметь вид:

$$R(K_t) = \{V_t | J^A(x(t, \mathbf{u}), K_t, V_t) \geq J^A(x(t, \mathbf{u}), K_t, Z) \forall Z \in U\}.$$

Зная, с определенной точностью, такой выбор производителя A , банк B окончательно формирует свою стратегию с использованием гермейеровского обобщенного принципа гарантированного результата, максимизируя свой гарантированный доход $J^B(T)$:

$$J_0^B = \sup_{K_t \in K} \inf_{V_t \in R(K_t)} J^B(x(t, \mathbf{u}), K_t, V_t).$$

Таким образом, окончательное решение дифференциальной игровой задачи тесно связано с необходимостью решения ряда оптимизационных задач.

3.4. Динамические оптимизационные задачи

Данные задачи решаются с помощью вариационных методов при наличии ограничений на управление. Последовательность решения этих задач с использованием базовой модели можно представить следующим образом.

- При заданной в общем виде стратегии банка K_t и заданном интервале $[t_0, T]$, в соответствии с принципом максимума Понтрягина определяется функция $t_1(x(t, \mathbf{u}))$ времени переключения оптимального управления производителя A , при котором достигается максимальное значение критерия предприятия-производителя $J^A(T)$.
- Для полученных двух интервалов оптимального управления A определяются параметрические функции $t_0^*(x(t, \mathbf{u}))$ и $t_1^*(x(t, \mathbf{u}))$ моментов переключения оптимального управления банка B , доставляющие максимум критерию $J^B(T)$.



- Найденные таким образом точки оптимального переключения управлений A и B определяют в аналитическом виде границы четырех интервалов *оптимальной программы инвестирования* производителя. На каждом интервале определяется семейство равновесных траекторий в виде функций от состояния системы $x(t)$ при фиксированном значении $u(x_j^i(t))$. Выполнение оптимальной программы обеспечивает достижение максимальных гарантированных значений заданных критериев эффективности банка B и производителя корпоративной продукции A .

3.5. Определение оптимальных значений инновационных параметров

С учетом начального условия $x(t_0) = x_0$ выделяется искомая равновесная фазовая траектория. В результате решения задач Коши определяются в явном виде точки переключения интервалов оптимальной программы управления, а также показатели эффективности в виде функций от инновационных параметров α_c и V_c . Оптимальные значения α_c^* и V_c^* , определяющие максимальную эффективность инновационного процесса, рассчитываются как $\alpha_c^* = \arg\{\max[J^B(\alpha_c)J^A(\alpha_c)]\}$, $V_c^* = (1 - \alpha_c^*)Q_c/T^*$.

Описание алгоритмов решения указанных выше задач приведено в работе [5].

4. АНАЛИЗ НЕКОТОРЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ МОДЕЛИРОВАНИЯ

Для расчетного варианта приняты следующие основные исходные данные. Рассматривается базовая динамическая модель финансово-промышленной структуры, в которой имеются кредитно-акционерные связи участников (см. рис. 1).

Планируемый интервал: $t_0 = 0$, $T = 11$ лет. Начальное условие фазовой траектории: $x(t_0) = 0$. Рыночные цены: $p_a = 2,0$ условных денежных единиц, $p_c = 2,1$ ед. Внутренняя банковская кредитная ставка $\tau = 17\%$, рыночная кредитная ставка $\rho = 25\%$. Начальный объем кредитного ресурса банка B : $W = 19$ ед. Доля акций предприятия B , которой владеет банк: $\alpha_0 = 0,24$. Акционерная стоимость предприятия B : $Q = 75$ ед. Пороговое значение ИФ: $Q_c = 60$ ед. Ставки дисконтирования: $\mu_0 = 0,3$; $\mu_1 = 0,4$; $\mu_2 = 0,4$. Момент времени $T^* = 5$ лет. Удельные затраты производителя A определяются нелинейной функцией затрат падающей эффективности вида: $\varepsilon_j(x, y) = [A_j \exp(-a_j x) + b_j] y^{\beta_j} + P_j / y$, где j — номер этапа, $j = 1; 2$; P — постоянные затраты, $P_1 = 5$ ед., $P_2 = 5,5$ ед., A_j , a_j и b_j — постоянные коэффициенты.

1. Один из основных результатов расчетов заключается в оптимальной программе инвестиционного взаимодействия на заданном интервале финансового и промышленного капитала. Инвестиции направляются как на развитие производственного процесса и, как следствие, повышение его эффективности, так и на обеспечение эффективной реализации коммерциализации инноваций.

Возможность выполнения такой программы зависит, в частности, от времени, отводимого на разработку инновационного проекта, который должен быть завершен не позднее критического момента T^* , характеризуемого началом падения спроса на действующую продукцию. Именно в этот момент заканчивается 1-й этап ($j = 1$) и происходит диверсификация производства с выходом на начальную фазу нового жизненного цикла ($j = 2$, 2-й этап) по выпуску более конкурентоспособной продукции.

Программа содержит восемь интервалов, границами которых служат моменты переключения оптимального управления кого-либо из участников. Для приведенных выше исходных данных значения этих моментов (в годах):

$$\begin{aligned} t_0 &= 0; & t_{01}^* &= 1,5, & t_{11} &= 3,28; & t_{11}^* &= 3,36; \\ T^* &= 5,0; & t_{02}^* &= 6,58; & t_{12} &= 8,81; & t_{12}^* &= 9,25; \\ & & & & T &= 11,0. \end{aligned}$$

Характеристики изменения параметров оптимальной инвестиционной программы, рассчитанной для обоих этапов, показаны на рис. 2.

Времена переключения рассчитаны при фиксированном значении начального объема кредита банка $W = 19$ ед. и уровня отчисления банка в инновационный фонд $\alpha_c = 0,13$. Предприятие-производитель A в каждую единицу времени способно отчислять от своей прибыли в развитие инновационного процесса величину $V_c = 10$ ед. а доля собственности предприятия B , которой владеет банк B , принята равной $\alpha_0 = 0,24$.

Как видно из графиков, в фазах внедрения жизненных циклов продукции «а» и «с» (соответствующих интервалам управления $[t_0, t_{01}^*]$ и $[T^*, t_{02}^*]$) идет активное наращивание масштабов деятельности обоих инвесторов. Основное значение здесь имеют кредиты банка, так как собственные средства производителя A еще слишком слабы.

В фазах роста (интервалы $[t_{01}^*, t_{11}]$ и $[t_{02}^*, t_{12}]$) интересы партнеров усложняются. Расширившиеся возможности самофинансирования предприятия A из масштабной уже прибыли ослабляет его зависимость от кредитов банка B , поэтому кредитование на этих интервалах прекращается.

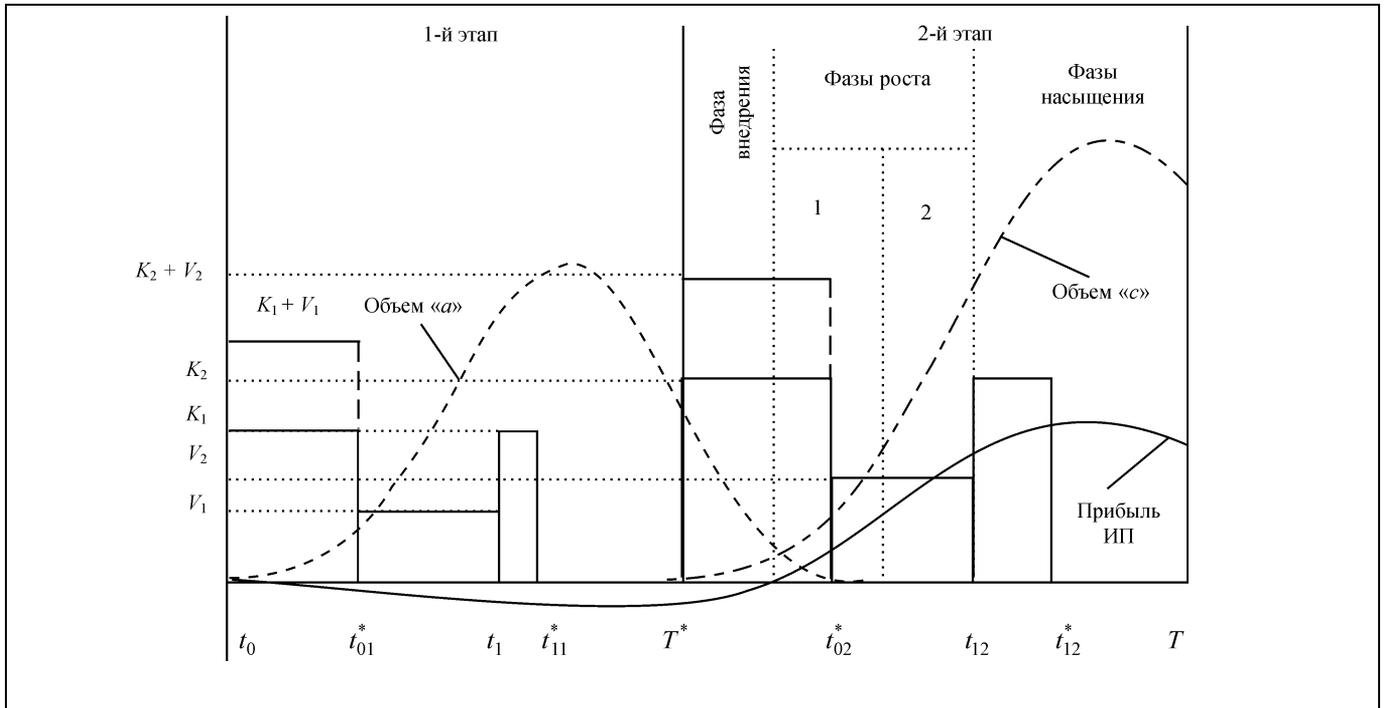


Рис. 2. График оптимальной инвестиционной программы, совмещенной с фазами жизненных циклов

Фазы насыщения ($[t_{11}, T^*]$ и $[t_{12}, T]$) характерны высокими доходами и заинтересованностью производителя в изъятии значительной части прибыли. Момент T^* характеризуется, с одной стороны, все еще высокими доходами, но, с другой, началом падения спроса на устаревающую продукцию «а». В интересах компании более тщательная оценка момента T^* как ориентира к началу внедрения инноваций. Рассматриваемый подход позволяет оценить его значение, обусловленное учетом долгосрочных мотиваций участников.

2. Весьма существенное влияние на эффективность исследуемой системы оказывает инноваци-

онный параметр — доля α_c инновационного фонда, покрываемая банком в виде единовременного отчисления, с правом долевого участия в прибылях производителя на последующих этапах.

На рис. 3 показаны графики изменения максимальных интегральных гарантированных доходов участников, суммарно по двум этапам, в зависимости от изменения доли α_c .

В качестве оптимального значения α_c , доставляющего максимум интегральным критериям J^B , J^A и J^B , как видно из рисунка, можно принять величину $\alpha_c \approx 0,13$, которая соответствует его исходному значению.

3. К параметрам, способным оказывать значительное влияние на эффективность финансово-промышленной структуры и на ее инновационное развитие, относятся также те параметры, которые характеризуют степень интеграции банковского и промышленного капиталов. Это, в частности, доля α_0 , определяющая объем пакета акций потребителя B , которым располагает банк B , а также начальный финансовый ресурс банка W , который направляется целевым образом на кредитование производителя A .

На рис. 4 показаны графики изменения суммарных по двум этапам максимальных доходов участников структуры в зависимости от доли α_0 .

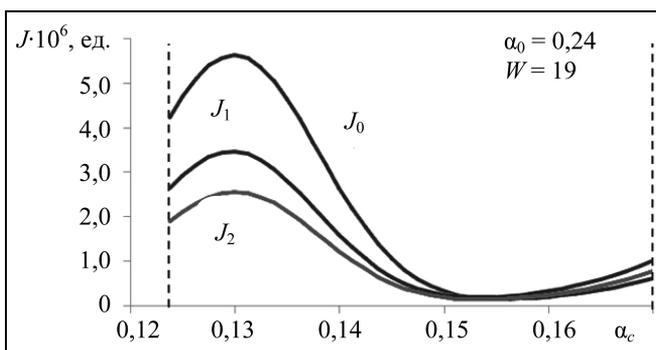


Рис. 3. Графики изменения интегральных дисконтированных гарантированных доходов участников в зависимости от параметра α_c

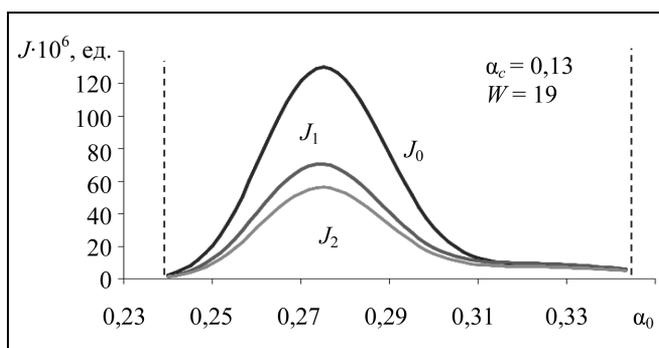


Рис. 4. Графики изменения интегральных дисконтированных гарантированных доходов участников в зависимости от параметра α_0

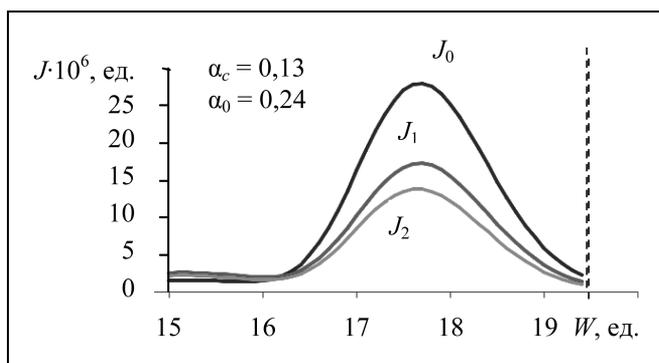


Рис. 5. Графики изменения суммарных максимальных гарантированных дисконтированных доходов участников при изменении ресурса W

В соответствии с рис. 4, максимальные значения критериев приходятся на значение $\alpha_0 \approx 0,275$.

График зависимости интегральных критериев эффективности от начального ресурса банка W представлен на рис. 5. Отметим, что на 1-м этапе часть этого ресурса банк направляет в развитие инновационного фонда, в результате чего, на 2-м этапе, он получает дополнительную прибыль в виде отчислений от прибыли производителя A (пропорционально α_c), а также в виде дивидендов по акциям потребителя B (пропорционально α_0). Если производитель в момент t принимает решение отказаться от банковских кредитов, то в исследуемой модели принимается, что свой ресурс W банк может использовать для приобретения дополнительной доли акций потребителя в расчете на увеличение будущих дивидендов.

Как видно из графиков, наилучшее значение $W \approx 17,5$ ед., при котором рассматриваемые интегральные критерии эффективности приобретают близкие к максимальным значения.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Подводя итог, отметим, что рассмотренная методика оптимального динамического управления инновационным процессом на основе оптимизации внутрикорпоративного инвестиционного взаимодействия участников интегрированной структуры, внедряющей в производственный цикл инновации, позволяет определить те условия, при выполнении которых обеспечивается повышение эффективности как процесса коммерциализации инноваций, так и структуры в целом.

Полученные результаты показывают, что внедрение инноваций, их успешная коммерциализация являются весьма сложным, трудоемким и затратным процессом. При этом качество процесса существенно зависит как от характеристик и параметров системы, внедряющей инновации, так и от оптимальной организации процессов взаимодействия финансового и промышленного капитала структуры. Интегрированная структура играет здесь особую роль, поскольку именно оптимизация внутрикорпоративного инвестиционного взаимодействия финансового и промышленного капиталов структуры способствует образованию тех синергетических эффектов, которые приводят к росту экономической эффективности. Эти возможности интегрированной структуры можно, в частности, интерпретировать, как способность повышать эффективность обеспечения финансовыми ресурсами сферу инновационной деятельности, ведущей к повышению конкурентоспособности отечественной продукции при соблюдении необходимого баланса интересов всех участников.

ЛИТЕРАТУРА

1. Дементьев В.Е. Длинные волны экономического развития и финансовые пузыри. — М.: ЦЭМИ РАН, 2009. — С. 28—31.
2. Шумпетер Й.А. Теория экономического развития. — М.: Директ-Медиа, 2007. — 400 с.
3. Косачев Ю.В. Математическое моделирование интегрированных финансово-промышленных систем. — М.: Логос, 2008. — С. 50—70.
4. Гермейер Ю.Б. Игры с противоположными интересами. — М.: Наука, 1976. — С. 83—107.
5. Косачев Ю.В., Скиба А.К., Хачатуров В.Р. Исследование и оптимизация параметров инновационного развития интегрированной структуры. — М.: ВЦ РАН, 2009. — С. 20—27.

Статья представлена к публикации членом редколлегии Р.М. Нижегородцевым.

Юрий Владимирович Косачев — д-р экон. наук, профессор, Российский государственный гуманитарный университет, г. Москва, ✉ kosayuri@yandex.ru.

ОПТИМИЗАЦИЯ ПОКАЗОВ РЕКЛАМЫ В ПОИСКОВЫХ СИСТЕМАХ

А.Н. Корнетова, А.Я. Червоненкис

Предложен алгоритм отбора объявлений для каждого поискового запроса для показа рекламы по нему. Сформулирована и решена соответствующая оптимизационная задача с учетом ограничений уже существующей системы, таких как сумма денег, списанная со счетов рекламодателей, доля запросов, по которым реклама может быть показана. Критерием оптимальности принята эффективность показов рекламных объявлений, которая определяется удовлетворенностью пользователей и, соответственно, увеличением их внимания к рекламной выдаче на главной странице поиска.

Ключевые слова: коэффициент кликов баннера, реклама на поиске, интернет-реклама, оптимизация, построение алгоритма.

ВВЕДЕНИЕ. СУЩЕСТВУЮЩАЯ СИСТЕМА ПОКАЗОВ РЕКЛАМЫ НА ПОИСКЕ

Правила показа рекламного объявления. Огромное число людей пользуются Интернетом для поиска информации. Обычно Интернет-пользователь делает некоторый запрос, на который он хочет получить ответ, и задача поисковой системы — ответить на запрос наилучшим образом. Чтобы иметь некоторую прибыль от поиска информации, поисковик размещает *рекламные объявления (баннеры)* на странице поисковой выдачи. Поскольку содержание объявлений зависит от запроса пользователя, такая реклама называется контекстной. По запросу составляется список *ключевых фраз*, к которым и привязываются рекламные объявления. Вообще говоря, не все баннеры, отобранные по запросу, могут быть показаны (об этом речь пойдет далее), т. е. отображены на странице поисковой выдачи. Баннеры содержат рекламную информацию о товаре или услуге рекламодателя, а также ссылку на соответствующий сайт. Если пользователь кликает на то или иное объявление, происходит переход на рекламируемый сайт, этот переход называется *кликом*. В случае клика со счета рекламодателя списываются деньги. Общая сумма списываемых со счетов рекламодателей денег оказывается существенной составляющей дохода поисковой компании. Рекламодатель для каждого объявления выставляет ставку, и происходит торг за показ его рекламного объявления на поиске. Другие схемы списаний денег со счетов рекламо-

дателей (например, за показы его объявления или за конверсию — покупку товара на сайте рекламодателя) можно увидеть в работе [1].

Рекламные объявления могут показываться в разных местах поисковой страницы (рис. 1): справа от результатов поиска (*гарантированные показы*), вверху страницы над результатами поиска (*спецразмещение*), внизу страницы и др.

Спецразмещение — наиболее привилегированное место для показа рекламы, оно приоритетно для рекламодателей [2] и самое прибыльное для поисковой системы. Зачастую, для того чтобы попасть в спецразмещение, из-за конкуренции рекламодателю приходится делать достаточно высокую ставку.

Настоящая работа посвящена разработке метода отбора рекламных объявлений для показа в блоке спецразмещения.

Выгодность показа рекламного объявления в спецразмещении для поисковой системы определяется двумя критериями:

— вероятность того, что пользователь кликнет на предъявленное объявление (*кликабельность CTR, Click Through Rate*); можно сказать, что это — степень эффективности показа объявления, его характеристика привлекательности для пользователя;

— *ставка Bid*, назначенная рекламодателем за показ его объявления в спецразмещении.

Детальное описание терминологии поисковой контент-рекламы можно найти в работе [3].

Для вероятности *CTR*, конечно, можно дать только оценку, поскольку как пользователи, так и объявления постоянно меняются. На оценку веро-



ятности клика влияет большое число факторов, которые учитываются в формуле оценки, порождаемой специальными программами машинного обучения. Однако в данной работе мы не будем касаться этого вопроса и примем, что оценка критерия *CTR* для каждой пары «запрос — рекламное объявление» нам дана.

Ожидаемая сумма денег, списываемых со счета рекламодателя за клик пользователя по конкретному баннеру, может быть оценена как *CPM* (Cost Per Million) = $CTR \cdot Bid$. Именно эта величина служит критерием, по которому отбираются кандидаты для показа в спецразмещении. В действительности деньги списываются несколько сложнее — согласно аукциону второй цены [4].

Существуют и другие критерии отбора объявлений:

- сортировка по критерию $Bid \cdot quality + v$, где *quality* — некоторое качество объявления (в нашем случае это предсказываемая оценка *CTR*), а *v* — количественная мера полезности объявления для поисковой системы в качестве обучающего материала и дополнительной информации о качестве (вообще говоря, это некоторое начальное предсказание значений *CTR* для новых баннеров); для новых баннеров значение *v* большое, для старых практически нулевое (так как там уже работает статистическая оценка вероятности *CTR* по истории показов объявления);

Запрос пользователя

Поиск Почта Карты Маркет Новости Словари Блоги Видео Картинки ещё

Яндекс Нашлось 165 млн ответов

toyota в найденном в Москве расширенный поиск

Мои находки Настройка Регион: Москва Войти Помощь

Спецразмещение

Все объявления

Такая Toyota нужна самому!
Спецпредложение от официального дилера! ТЦ Отрадное, ТЦ Коломенское. Спешите toyotanm.ru

Пройдите Тест-драйв TOYOTA!
Выгода на новые TOYOTA до 500 т.р. в Тойота Центр Ясенево! (495) 7777-15 toyota-yasenevo.ru

Автомобили Toyota в Major Auto
Уникальное предложение при покупке автомобиля в салонах официальных дилеров major-toyota.ru

Результаты **все** в рунете в мировом интернете

"Тойота мотор" - автоконцерн

RAV4 Toyota Trade-in
Corolla LC Prado
Camry Highlander

Продажа и техническое обслуживание автомобилей Toyota. Каталог автомобилей с описаниями и техническими данными. Новости компании. Контакты.
Москва, МКАД автомагистраль, 84-й км, стр. 1, вл. 5 +7 (495) 258-34-65 toyota.ru Москва

Toyota — модельный ряд, комплектации, отзывы
Модели и цены 2012 Corolla Camry Land Cruiser
6 298 объявлений о продаже Toyota в Москве
Фотографии, комплектации и цены нового модельного ряда. Официальные дилеры. auto.yandex.ru > Toyota Москва

Завод Toyota в Петербурге приступил к работе в две смены
Завод Toyota в Петербурге планирует удвоить производство по итогам 2012 года В данный момент автозавод выпускает одну модель – Toyota Camry в 12 модификациях и 6 цветах.
REGNUM 14:09 ИА РБК Санкт-Петербург 13:28 Автостат 13:04 Все сообщения 16 news.yandex.ru 53 минуты назад

TOYOTA | ...Центр Сокольники Новорижский Шереметьево - дилер Toyota...
Автомобили Комплектация Hilux Технические характеристики
марка: Toyota; официальный дилер; тип авто: новые, с пробегом; тест-драйв; wi-fi
Автомобили Toyota – Продажа Сервис Запчасти Toyota. ... 18.07.2012. Компания Тойота

Яндекс Директ

Срочный выкуп авто! Звоните!
Хотите продать авто - быстро, с комфортом и за достойные деньги? Звоните! gemo-avto.ru

Выкуп автомобилей Дорого! Срочно!
Выезд оценщика, снятие с учета, эвакуация бесплатно! 15 лет на рынке! mustangavto.com

Успейте купить Toyota!
До 31 августа все автомобили Toyota по старым ценам в Тойота Центр Внуково. toyota-vnuково.ru

Toyota от официального дилера!
Отличные предложения на все модели Toyota у дилера Тойота Центр Кунцево!
Адрес и телефон toyota-kuntsevo.ru

Разместить объявление по запросу «toyota» — 898 887 показов в месяц

Результаты поиска

Показы справа

ММАС
МОСКОВСКИЙ МЕЖДУНАРОДНЫЙ АВТОМОБИЛЬНЫЙ САЛОН

НА СТЕНДЕ JAGUAR LAND ROVER ПАВИЛЬОН 2, ЗАЛ 7

УЗНАЙТЕ БОЛЬШЕ

Рис. 1. Места для показов рекламы на поисковой выдаче

- сортировка по $Bid \cdot quality + v$, где $v = cBid \cdot var(quality)$, c — константа, показывающая, насколько полезно обучение на данном объявлении;
- учет релевантности объявления запросу (с помощью ссылок на сайт рекламодателя) [5];
- в качестве характеристик, от которых зависит ранжирование объявлений (следовательно, и порог входа в спецразмещение), могут быть взяты следующие: насколько фраза, по которой показывается объявление, является широко- или узко-тематической, информация о продавце в розничной торговле, а также информация о бренде, представляемом объявлением [6];
- позиционные модели показа рекламы [7];
- ранжирование вида $Bid^k CTR^l$ в зависимости от степеней k и l может порождать различные виды сортировки: например при $l = 0$ получается сортировка только по ставке, а при $l = k = 1$ — классическая сортировка по критерию CPM [8].

Порог входа в спецразмещение. Условия входа в спецразмещение определяются двумя ограничениями. Прежде всего, число мест для показа рекламных объявлений в спецразмещении ограничено, поэтому в действующей системе для одного запроса допускается показ не более *трех* баннеров. Важно ввести еще один термин: *рекламный хит* — непустое множество баннеров, показанных одновременно по одному запросу пользователя (соответственно, один хит по спецразмещению не может содержать больше трех объявлений). Другое ограничение: считается, что не по всем поисковым запросам нужно показывать спецразмещение, так как объявления не всегда содержат полезную для пользователя информацию и менее релевантны его запросу, чем результаты поиска. Поэтому в системе показов рекламы принято условие, что *покрытие* — доля рекламных хитов со спецразмещением среди всех рекламных хитов — должно быть ограничено сверху. Для этого вводится абсолютный порог входа в спецразмещение. Если CPM баннера (для данного запроса) превышает порог, то это объявление становится кандидатом на показ в спецразмещении, иначе баннер заведомо не будет показан. Порог подбирается так, чтобы часть результатов поиска не сопровождалась рекламой в спецразмещении вообще.

Если число кандидатов, прошедших порог, не больше трех, то все они будут показаны. Если же их число превышает три, то в спецразмещении показываются только три баннера с наибольшим значением CPM .

Таким образом, для показа нового баннера необходимо, чтобы его CPM превзошел абсолютный порог. А если уже имеются три кандидата, то CPM

нового баннера должен превзойти таковой у наихудшего (по критерию CPM) среди имеющихся кандидатов, чтобы вытеснить последнего из списка кандидатов. Это условие определяет *относительный порог* входа в спецразмещение.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Полезность показа рекламных объявлений в спецразмещении для поисковой системы определяется следующими критериями.

- Сумма денег, списываемых со счетов рекламодателей. В этом случае оптимизация правила отбора баннеров в спецразмещение представляется несложной задачей: нужно просто подобрать такое значение абсолютного порога входа, при котором покрытие будет в точности равно заданному ограничению.
- Средняя кликабельность — насколько часто в среднем пользователь кликает на одно из показанных объявлений, что определяет удовлетворенность пользователя, а также эффективность самой рекламы. Эта величина соответствует среднему значению CTR по всем запросам и всем объявлениям, попавшим в спецразмещение. Если эта величина мала, то пользователь просто уйдет в другую поисковую систему.

Подробнее о балансе между ставкой и качеством выдачи (в нашем случае CTR) можно прочесть в работе [7].

Здесь мы ставим задачу максимизации среднего значения CTR при ограничении на суммарный доход поисковой системы, поэтому она ставится как поиск условного максимума средней кликабельности в спецразмещении при условии, что сумма денег должна быть не меньше заданной величины.

Кроме того, сохраняются упомянутые ограничения на покрытие (долю показов со спецразмещением среди всех показов, содержащих рекламу) и на число рекламных объявлений в спецразмещении. Задача состоит в том, чтобы найти правило входа в спецразмещение, доставляющее максимум среднему значению CTR при упомянутых ограничениях. Но ситуация на поиске и рынке рекламы непрерывно меняется во времени, соответственно должны меняться и пороги, для подбора которых была разработана схема, представленная на рис. 2. Рассмотрим ее.

Периодически собирается случайная выборка запросов (см. блок 1 на рис. 2) из общего списка запросов из исторических логов данных за определенный период времени (неделя, месяц). По выборке запросов пользователей для каждого из запросов отбираются баннеры-кандидаты (блок 3) для показов (по фразам запроса). Считается, что

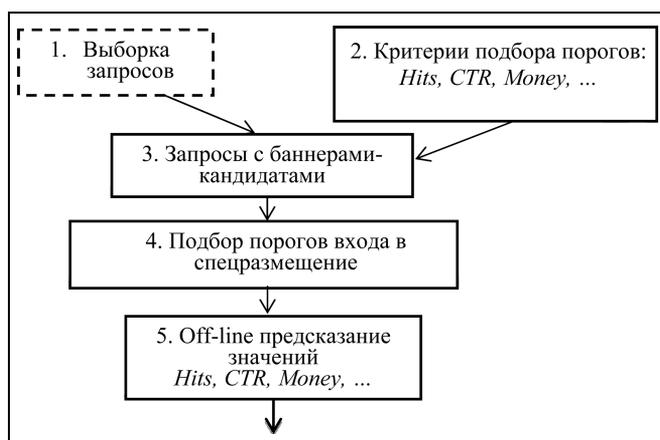


Рис. 2. Схема подбора порогов входа в спецразмещение

для каждого кандидата известна его ставка и предсказание кликабельности (отдельное для спецразмещения и для блока справа).

Критерии подбора порогов (блок 2): *Hits* — покрытие, о котором говорилось во Введении; *CTR* — кликабельность спецразмещения, т. е. число кликов по спецразмещению относительно числа показов рекламы в спецразмещении (считается суммарно по всей выборке запросов); *Money* — количество заработанных на спецразмещении денег (списанных со счетов рекламодателей), при подборе порогов оценивается как $CTR \cdot Bid$.

В блоке 4 реализуется отбор баннеров для их показа в спецразмещении или справа от результатов поиска. Не будем сейчас очень подробно останавливаться, как конкретно происходит отбор баннеров, важно, что после некоторого отсева, каждый баннер (чтобы он мог быть показан в спецразмещении) должен преодолеть порог входа и выдержать конкуренцию со стороны других кандидатов на показ в спецразмещении. Вид порога входа в спецразмещение, а также его подбор — сложная алгоритмическая и вычислительная задача, которую мы будем обсуждать далее.

Как только оптимальный порог получен, у нас есть off-line предсказание изменения системы по основным ее характеристикам. Также у нас появляется возможность запустить on-line эксперимент для проверки полученных off-line предсказаний. Если предсказания подтверждаются, то правило применяется ко всему потоку запросов, иначе выясняются причины расхождения. Пороги должны пересчитываться всякий раз при изменении формулы оценки *CTR*, при изменении требований на сумму денег или покрытие, а также по прошествии определенного времени.

Другие, не оптимальные модели, рассмотрены в работах [9, 10].

2. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Сначала поставим задачу следующим образом: как для заданной выборки запросов и заданного списка баннеров найти оптимальную расстановку этих баннеров в спецразмещении для показа по этим заданным запросам.

Считаем, что ставки (*Bid*) для всех баннеров известны, а также известны оценки вероятности клика (*CTR*) для каждой пары «запрос — баннер» (если данный баннер в принципе не может быть совмещен с определенным ответом на запрос, то полагаем, что оценка *CTR* равна нулю). Считаем также, что заданы ограничения: минимальная сумма денег, которая должна поступить от рекламодателей, максимальное покрытие — доля результатов поиска, сопровождаемых спецразмещением, а также максимальное число баннеров (*k*) в каждом хите по спецразмещению. При этих ограничениях будем искать такую расстановку баннеров в спецразмещении, которая обеспечивает максимум средней кликабельности — среднего значения *CTR*.

Задачу будем решать в том приближении, когда рекламодатель платит за клик по своей ставке, а не по правилу аукциона второй цены (сами деньги будут слегка завышены, но разницу в характеристиках мы можем достаточно точно проследить).

Полагаем, что в нашей выборке имеется *M* запросов, которые мы будем нумеровать индексом *j*, $1 \leq j \leq M$, и задан список из *N* баннеров, нумеруемых индексом *i*, $1 \leq i \leq N$. Обозначим далее:

Bid_i — ставка, назначенная рекламодателем за *i*-й баннер; все ставки неотрицательны, т. е. $Bid_i \geq 0$;

CTR_{ij} — оценка вероятности клика при размещении *i*-го баннера над результатами поиска на *j*-й запрос. Величины Bid_i и CTR_{ij} считаем заданными.

Введем далее бинарную переменную t_{ij} , такую что $t_{ij} = 1$ означает, что *i*-й баннер размещен над результатом поиска на *j*-й запрос, и $t_{ij} = 0$ в противном случае. Именно оптимальные значения этой переменной мы будем искать.

Тогда $TSUM = \sum_{i,j} t_{ij}$ будет означать суммарное число показов рекламных объявлений в спецразмещении по данной выборке запросов, а

$$CTR_0(t) = \sum_{i,j} CTR_{i,j} \cdot t_{i,j} / TSUM \quad (1)$$

— среднюю кликабельность — среднее значение по *CTR* по этим баннерам. Именно эту величину мы хотим максимизировать при заданных ограничениях.

Ограничение по суммарному доходу. Математическое ожидание суммы денег, списываемых со счета рекламодателя, равно вероятности клика на

данный баннер по заданному запросу, умноженной на ставку рекламодателя, выставленную для этого баннера, в случае его показа в спецразмещении. Если же он не показан, то и денег он принести не может. За оценку вероятности клика мы принимаем заданное значение CTR . Таким образом, сумма денег принимает значение $Bid_k \cdot CTR_{i,j} \cdot t_{i,j}$, где i — номер баннера, j — номер запроса из нашей выборки. Тогда общая сумма денег, списываемых с рекламодателей по нашей выборке запросов, определяется как

$$MONEY(t) = \sum_{i,j} Bid_i \cdot CTR_{i,j} \cdot t_{i,j}$$

Мы требуем, чтобы эта сумма была не меньше заданного значения MON_{\min} . Таким образом, ограничение принимает вид

$$MONEY(t) \geq MON_{\min} \quad (2)$$

Ограничение на покрытие. Напомним, что покрытием мы называем долю запросов, по которым в спецразмещении показано хотя бы одно рекламное объявление, среди всех результатов поиска, по которым была показана реклама. Формально, для этого введем еще одну бинарную переменную

$$\tau_j = \begin{cases} 1, & \text{если } \sum_i t_{ij} > 0, \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

т. е. $\tau_j = 1$, если над результатом поиска размещен хоть один баннер, и $\tau_j = 0$ в противном случае. Тогда ограничение на покрытие примет вид

$$Hit(t) = \sum_j \tau_j / M \leq Hit_{\max} \quad (3)$$

Ограничение на число баннеров, размещаемых над каждым результатом поиска. Считаем, что это число не должно превышать k :

$$\forall j \sum_i t_{ij} \leq k \quad (4)$$

Итак, задача формально ставится следующим образом: максимизировать по бинарным переменным t_{ij} функцию (1) при ограничениях (2)—(4). Это задача дискретного программирования.

3. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ЗАДАННОЙ ВЫБОРКИ ЗАПРОСОВ И БАННЕРОВ

3.1. Переход от дискретной задачи к непрерывной

Сформулированная точная постановка задачи относится к классу задач дискретной оптимизации. Решать такие задачи трудно, обычно их ре-

шение требует комбинаторного перебора. Но, если такую задачу «погрузить» в непрерывное пространство, то часто для ее решения удастся воспользоваться хорошо разработанными методами оптимизации в непрерывном пространстве искомых переменных. Мы также воспользуемся этим приемом и заменим бинарные переменные t_{ij} на непрерывные t_{ij} , подчиненные дополнительному ограничению: $0 \leq t_{ij} \leq 1$. Эта замена корректна, потому что, как мы увидим, при максимизации нашего критерия переменные все равно принимают крайние значения 0 или 1 (за исключением вырожденных случаев, которые будут отмечены далее). Поэтому решение непрерывной задачи совпадет с решением дискретной [1].

3.2. Общий принцип — метод множителей Лагранжа

Согласно методу множителей Лагранжа, если требуется найти максимум некоторой функции $F(x)$ при ограничениях $\varphi_i(x) = 0$, то можно эту задачу заменить на задачу поиска безусловного максимума функции $F^*(x) = F(x) - \sum \lambda_i \varphi_i(x)$, причем коэффициенты λ_i подбираются так, чтобы в точке максимума $F^*(x)$ все ограничения $\varphi_i(x) = 0$ выполнялись точно.

Если же ограничения имеют вид неравенств $\varphi_i(x) \leq 0$, то согласно теории Куна—Таккера [2] метод множителей Лагранжа модифицируется следующим образом. По-прежнему, ищется безусловный максимум функции $F^*(x) = F(x) - \sum \lambda_i \varphi_i(x)$, а коэффициенты подбираются так, чтобы выполнялись три условия:

- точка максимума функции $F^*(x)$ должна удовлетворять ограничениям $\varphi_i(x) \leq 0$,
- коэффициенты должны быть неотрицательны ($\lambda_i \geq 0$),
- коэффициент λ_i должен быть равен нулю, если в точке максимума функции $F^*(x)$ соответствующее ограничение не достигает предельного значения, т. е. $\varphi_i(x) < 0$.

На самом деле можно не все ограничения заменять слагаемыми в критерии, а часть из них оставить как ограничения [1], т. е. искать условный максимум функции

$$F^*(x) = F(x) - \sum_{i=1}^m \lambda_i \varphi_i(x)$$

при ограничениях $\varphi_i(x) \leq 0$, $i = m + 1, \dots, n$. Требования к подбору коэффициентов остаются теми же, что были перечислены ранее.



Именно этим приемом, когда часть ограничений переводится в критерий (с последующим удовлетворением ограничений путем выбора соответствующих множителей Лагранжа), а часть сохраняется, мы и будем пользоваться в дальнейшем.

3.3. Применение метода множителей Лагранжа к решению поставленной задачи

3.3.1. Добавление в критерий ограничения по деньгам

Итак, требуется найти максимум по t функции $CRIT_0(t) = \sum CTR_{i,j} \cdot t_{i,j} / TSUM$ при ограничениях (2)–(4) и ограничении $0 \leq t_{ij} \leq 1$. Сначала переведем в критерий (с помощью множителя Лагранжа $\lambda_1 \geq 0$) только ограничение (2). Запишем его в форме $\varphi(x) \leq 0$:

$$MON_{\min} - MONEY(t) \leq 0,$$

где $MONEY(t) = \sum_{(i,j)} Bid_i \cdot CTR_{i,j} \cdot t_{i,j}$.

Получим новый критерий

$$CRIT_1(t) = \sum CTR_{i,j} \cdot t_{i,j} / \sum t_{i,j} - \lambda_1 (MON_{\min} - MONEY(t))$$

и будем искать его максимум при учете остальных ограничений.

3.3.2. Дополнительное ограничение

Если бы наш критерий представлял собой сумму функций, каждая из которых зависит только от одной переменной $t_{i,j}$, то можно было бы оптимизировать каждую из этих функций по отдельности — провести декомпозицию задачи. Но в нашем случае это не так, поскольку знаменатель $TSUM = \sum_{i,j} t_{i,j}$ в слагаемых $\sum CTR_{i,j} \cdot t_{i,j} / \sum t_{i,j}$ зависит сразу от всех переменных. Для того чтобы все же добиться декомпозиции, предлагается следующее.

А. Сначала зафиксировать знаменатель $TSUM = \sum_{i,j} t_{i,j}$ дополнительным требованием $TSUM = T_0$, где T_0 — некоторая назначенная положительная константа, и найти максимум $CRIT_1(t)$ с учетом этого дополнительного ограничения. Этот максимум будет зависеть от назначенного значения T_0 .

Теперь наш критерий приобретает вид:

$$CRIT_1(t) = \sum CTR_{i,j} \cdot t_{i,j} / T_0 - \lambda_1 \left(MON_{\min} - \sum_{i,j} Bid_i \cdot CTR_{i,j} \cdot t_{i,j} \right),$$

и действительно становится суммой функций, зависящих только от одной переменной t_{ij} .

Решая задачу, найдем значения переменных t_{ij} , доставляющие условный максимум критерия $CRIT_1(t)$ при заданных λ_1 и T_0 .

Б. Перебором по T_0 найти то значение $T_{0(опт)}$, при котором достигается максимум критерия $CRIT_1(t)$.

Переведем с помощью множителя Лагранжа и новое дополнительное ограничение в критерий. Получим:

$$CRIT_2(t) = \sum CTR_{ij} \cdot t_{ij} / T_0 - \lambda_1 \left(MON_{\min} - \sum_{i,j} Bid_i \cdot CTR_{ij} \cdot t_{ij} \right) - \lambda_2 \left(\sum_{i,j} t_{ij} - T_0 \right)$$

при ограничениях

$$0 \leq t_{ij} \leq 1, \forall j \sum_i t_{ij} \leq k, \quad Hit(t) = \sum_j \tau_j / M \leq Hit_{\max}$$

3.4. Оптимизация критерия $CRIT_2(t)$ при оставшихся ограничениях

Итак, на данном шаге мы должны максимизировать критерий

$$CRIT_2(t) = \sum CTR_{i,j} \cdot t_{i,j} / T_0 - \lambda_1 \left(MON_{\min} - \sum_{i,j} Bid_i \cdot CTR_{i,j} \cdot t_{i,j} \right) - \lambda_2 \left(\sum_{i,j} t_{i,j} - T_0 \right),$$

считая величины λ_1 , λ_2 и T_0 фиксированными.

Объединяя слагаемые, зависящие от t_{ij} , и вынося за скобки t_{ij} , получим

$$CRIT_2(t) = \sum_{i,j} t_{ij} \left(\frac{CTR_{ij}}{T_0} + \lambda_1 Bid_i \cdot CTR_{ij} - \lambda_2 \right) +$$

const,

где величина const от переменных t_{ij} не зависит. Видим, что наш критерий действительно представляет собой сумму функций, каждая из которых линейно зависит только от одной переменной t_{ij} .

Шаг 1. Теперь найдем максимум критерия $CRIT_2(t)$ по переменным t_{ij} с учетом только одного ограничения: $0 \leq t_{ij} \leq 1$.

Ясно, что при этом переменная t_{ij} должна принять значение «ноль», если коэффициент при ней отрицателен. Действительно, в этом случае вклад в критерий $CRIT_2(t)$ от слагаемого $t_{ij}(CTR_{ij}/T_0 + \lambda_1 Bid_i \cdot CTR_{ij} - \lambda_2)$ будет отрицательным при любом положительном значении t_{ij} , а при $t_{ij} = 0$ этот вклад будет нулевым.

Если же этот коэффициент положителен, то без учета остальных ограничений переменная t_{ij} должна принять значение 1. Действительно в этом слу-

чае вклад в критерий будет максимальным (и положительным) при $t_{ij} = 1$.

В случае же, когда этот коэффициент в точности равен нулю при некоторых значениях пары (i, j) , мы получаем, что $CRIT_2(t)$ не зависит от t_{ij} . При естественных значениях входных параметров точное равенство коэффициента нулю возможно только в вырожденных случаях. Но при подборе значений коэффициентов Лагранжа может оказаться необходимым выбрать дробное значение t_{ij} . Однако на практике такое возможно только для очень малого числа пар (i, j) . Действительно, мы подбираем совсем небольшое число неопределенных коэффициентов, и обеспечить точное равенство коэффициента нулю можно тоже в очень малом числе случаев. Учитывая, что в нашем пуле содержатся тысячи элементов, замена значения t_{ij} на 0 или 1 в этих случаях практически не влияет на значение критерия.

Но остальные ограничения могут сделать предъявление i -го баннера на j -й запрос все же недопустимым, т. е. все же придется положить $t_{ij} = 0$.

Обозначим $F_{ij}(\lambda, T_0)$ коэффициент при t_{ij} :

$$F_{ij}(\lambda, T_0) = CTR_{ij}/T_0 + \lambda_1 Bid_i \cdot CTR_{ij} - \lambda_2.$$

Тогда кандидатами на вход в спецразмещение будут те баннеры, для которых $F_{ij} > 0$ или, иначе,

$$CTR_{ij}/T_0 + \lambda_1 Bid_i \cdot CTR_{ij} > \lambda_2.$$

Таким образом, величина λ_2 может считаться абсолютным порогом на попадание в спецразмещение.

Составим теперь для каждого (j -го) запроса список кандидатов баннеров на вход в спецразмещение, упорядочив их в порядке убывания величин $F_{ij}(\lambda)$. Некоторые из списков могут оказаться пустыми, если для всех i окажется, что $F_{ij}(\lambda) \leq 0$.

Шаг 2. Теперь учтем ограничение на количество баннеров, размещаемых сверху от результатов поиска:

$$\forall j \sum_i t_{ij} \leq k.$$

Если количество баннеров в списке кандидатов для j -го запроса меньше k , то это ограничение выполнится автоматически. Иначе, для максимизации нашего критерия $CRIT_2(t)$ следует оставить в каждом списке ровно k кандидатов с максимальным значением $F_{ij}(\lambda)$, т. е. первые k элементов списка. Для остальных элементов положить $t_{ij} = 0$. Назовем этот укороченный список *списком для показа*.

Шаг 3. Остается ограничение на покрытие:

$$Hit(t) = \sum_j \tau_j / M \leq Hit_{max}$$

или

$$\sum_j \tau_j \leq Hit_{max} \cdot M,$$

т. е. в спецразмещении должно присутствовать не более, чем в $Hit_{max} \cdot M$ результатах поиска. Если и так количество запросов с непустым списком для показа меньше, чем $Hit_{max} \cdot M$, то ограничение выполнится автоматически. В противном случае часть списков следует обнулить.

Обозначим $R_j(\lambda)$ вклад в критерий для каждого запроса от баннеров, вошедших в список:

$$R_j(\lambda) = \sum_i (CTR_{ij}/T_0 + \lambda_1 Bid_i \cdot CTR_{ij} - \lambda_2),$$

где сумма для каждого запроса берется только по баннерам, вошедшим в список для показа.

Ясно, что максимум критерия будет достигнут, если мы оставим только $Hit_{max} \cdot M$ списков с наибольшим значением $R_j(\lambda)$. Иными словами, если мы упорядочим списки в порядке убывания $R_j(\lambda)$, то следует оставить только $Hit_{max} \cdot M$ первых списков (если, конечно их хватит, иначе оставляем все). Обозначим $\lambda_{3\text{ опт}}$ минимальное значение $R_j(\lambda)$ по всем оставшимся спискам. Тогда будут оставлены только те списки, для которых $R_j(\lambda) \geq \lambda_3$. Разумеется, величина λ_3 будет зависеть от принятых значений λ_1, λ_2 и T_0 .

Теперь можно окончательно зафиксировать оптимальные значения t_{ij} :

$$\begin{cases} t_{ij} = 1, \text{ если } i\text{-й баннер вошел в оставленный} \\ \text{усеченный список для } j\text{-го запроса,} \\ t_{ij} = 0 \text{ в противном случае.} \end{cases}$$

Этот результат мы получили для заданных значений λ_1, λ_2 и T_0 . Обозначим через $t_{\text{опт}}(\lambda_1, \lambda_2, T_0)$ вектор, составленный из значений t_{ij} этого решения.

3.5. Выбор необходимого значения λ_2

Теперь мы должны найти то значение коэффициента λ_2 , при котором действительно выполнится наше дополнительное ограничение $TSUM = T_0$.

Заметим, что зная значения t_{ij} , мы можем подсчитать величину $TSUM = \sum_{i,j} t_{ij}$, причем значение $TSUM$ (как и значения t_{ij}) будет зависеть от зафиксированных значений λ_1, λ_2 и T_0 . Но нас сейчас бу-



дет интересоваться только зависимостью $TSUM$ от лагранжева коэффициента λ_2 , считая по-прежнему значения λ_1 и T_0 фиксированными. Перебирая все значения λ_2 , мы можем попытаться добиться равенства $TSUM(\lambda_2) = T_0$. Конечно, может случиться, что ни при каком значении λ_2 это равенство не выполнится (в силу целочисленности T_0 или по иной причине, но такие значения объявим недопустимыми). Найденное значение $\lambda_{2\text{опт}}(\lambda_1, T_0)$ (абсолютного порога) будет зависеть от λ_1 и T_0 . Ему будет соответствовать решение $t_{\text{опт}}(\lambda_1, \lambda_{2\text{опт}}(\lambda_1, T_0), T_0)$.

3.6. Выбор оптимального значения T_0 путем максимизации критерия $CRIT_1(t)$

Теперь нам нужно избавиться от дополнительного ограничения $TSUM = T_0$, поскольку оно не входит в число ограничений исходной постановки задачи. Сделать это можно с помощью максимизации критерия

$$CRIT_1(t, \lambda_1, T_0) = \sum CTR_{ij} t_{ij} / T_0 - \lambda_1 (MON_{\min} - MONEY(t))$$

путем перебора по всем допустимым значениям T_0 при фиксированном значении λ_1 . При этом в качестве t_{ij} должны браться значения, найденные при $\lambda_2 = \lambda_{2\text{опт}}(\lambda_1, T_0)$. Это значение заведомо обеспечивает равенство $TSUM(\lambda_1, \lambda_2, T_0) = T_0$ в силу операции, описанной в п. 3.5.

Обозначим $T_{0\text{опт}}(\lambda_1)$ то значение T_0 , при котором достигается максимум критерия $CRIT_1$. Оно будет зависеть от значения λ_1 . Ему будут соответствовать значения $\lambda_{2\text{опт}}(\lambda_1, T_{0\text{опт}})$, $\lambda_{3\text{опт}}$ и решение $t_{\text{опт}}(\lambda_1, \lambda_{2\text{опт}}(\lambda_1, T_{0\text{опт}}), T_{0\text{опт}}(\lambda_1))$.

3.7. Оптимизация критерия $CRIT_0(t)$: выбор требуемого значения λ_1

Найденные значения $T_{0\text{опт}}$, $\lambda_{2\text{опт}}$, $\lambda_{3\text{опт}}$ и $t_{\text{опт}}$ будут зависеть от параметра λ_1 . Согласно теории Куна—Таккера, для максимизации нашего основного критерия $CRIT_0(t)$ остается выбрать правильное значение параметра $\lambda_1 \geq 0$. Его нужно выбрать так, чтобы выполнилось ограничение $MONEY(t) \leq MON_{\min}$. Он может быть отличен от нуля, если только неравенство по деньгам переходит в равенство:

$$MONEY(t) = MON_{\min}. \quad (5)$$

При $\lambda_1 = 0$ в критерии $CRIT_1(t)$ деньги вообще не учитываются, и если при этом вырученных де-

нег хватает, то неравенство по деньгам выполнится автоматически. Если же денег не хватает, то следует увеличивать λ_1 , пока не выполнится равенство $MONEY(t) = MON_{\min}$. Вырученные деньги с ростом λ_1 , во всяком случае, не убывают, так как величина $MONEY$ входит в критерий $CRIT_1(t)$ все с большим весом. Если же при сколь угодно большом значении λ_1 денег все равно не хватает, то задача вообще неразрешима. В нормальном случае перебором по λ_1 найдем то значение $\lambda_{1\text{опт}}$, при котором выполнится равенство (5). Соответственно определяются значения $T_{0\text{опт}}(T_{0\text{опт}}(\lambda_{1\text{опт}}), \lambda_{2\text{опт}}(\lambda_{1\text{опт}}, T_{0\text{опт}}))$ и решение $t_{\text{опт}}(\lambda_{1\text{опт}}, \lambda_{2\text{опт}}, T_{0\text{опт}})$, и задача будет решена полностью.

Заметим, что если уже выбраны параметры (пороги) $\lambda_{1\text{опт}}$, $T_{0\text{опт}}$, $\lambda_{2\text{опт}}$, и $\lambda_{3\text{опт}}$, то для заданного (j -го) запроса определить, какие баннеры должны войти в спецразмещение по этому запросу (определить $t_{j\text{опт}}$), можно, не обращая внимания на другие запросы. Для этого нужно:

1) вычислить значение

$$F_{ij} = CTR_{ij} / T_{0\text{опт}} + \lambda_{1\text{опт}} Bid_i \cdot CTR_{ij} - \lambda_{2\text{опт}}$$

для всех баннеров, совместимых с данным запросом;

2) составить список кандидатов для показа в спецразмещении, в него поместить только те баннеры, для которых

$$CTR_{ij} / T_{0\text{опт}} + \lambda_{1\text{опт}} Bid_i \cdot CTR_{ij} > \lambda_{2\text{опт}}$$

(этот список может быть и пустым);

3) если число кандидатов больше k , то сократить список, оставив в нем только k баннеров с наибольшим значением F_{ij} ; это и будет список для показа;

4) подсчитать значение

$$R_j(\lambda) = \sum_i (CTR_{ij} / T_{0\text{опт}} / T_{0\text{опт}} + \lambda_{1\text{опт}} Bid_i \cdot CTR_{ij} - \lambda_{2\text{опт}}),$$

где сумма берется по баннерам из списка кандидатов.

5) если эта величина меньше $\lambda_{3\text{опт}}$, то обнулить список, и для данного запроса не показывать никаких баннеров в спецразмещении. Иначе показать все баннеры из списка для показа, т. е. положить $t_{j\text{опт}} = 1$, остальные значения t_{ij} обнулить.

В этой возможности определить значение $t_{j\text{опт}}$, не обращая внимания на другие запросы, и есть смысл декомпозиции.

4. ФОРМАЛЬНОЕ ОПИСАНИЕ АЛГОРИТМА ПОДБОРА ПОРОГОВ ВХОДА В СПЕЦРАЗМЕЩЕНИЕ

Запишем общий алгоритм подбора порогов для показа объявлений в спецразмещении.

Положим: M — общее число запросов; N — общее количество баннеров-кандидатов в выборке запросов; Hit_{\max} — максимальное допустимое покрытие, MON_{\min} — минимальные деньги, которые должны быть выручены от показа баннеров в спецразмещении по нашей выборке запросов.

Для каждого запроса и баннера-кандидата дано:

CTR_{ij} — прогноз оценки CTR (кликабельности) объявления;

Bid_i — ставка рекламодателя по i -му баннеру.

Цикл по λ_1 (например, от 0 вверх).

Вырученные деньги с ростом λ_1 не убывают, т. е. можно сказать, что λ_1 — параметр, регулирующий поступление денег от рекламодателей.

Цикл по T_0

T_0 — общее число показов рекламы в спецразмещении по всей выборке запросов.

Цикл по λ_2 .

Величина λ_2 может считаться абсолютным порогом на попадание в спецразмещение, она регулирует число показов в хите по одному запросу.

Цикл по запросам j .

По всем баннерам-кандидатам i для запроса j :

обнулить списки;

вычислить $F_{ij} = CTR_{ij}/T_0 + \lambda_1 CPM_{ij} - \lambda_2$;

если $F_{ij} > 0$, то попытаться включить пару (i, j) в j -й список:

Если в j -м списке объектов меньше чем k , то включить баннер i в список, иначе попытаться вытеснить худший по F_{ij} и вставить i -й, а если текущий баннер хуже всех по критерию F_{ij} , то не включать его.

Вычислить вклад в суммарный критерий баннеров, вошедших в список для показа в спецразмещении:

$R_j = \sum F_{ij}$ (сумма по баннерам, вошедшим в список).

Положить:

$$\tau_j = \begin{cases} 1, & \text{если список кандидатов на показ не пустеет,} \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Конец цикла по запросам j .

Упорядочить списки для запросов j в порядке убывания R_j .

Оставить только первые $Hit_{\max} \cdot M$ из них (выполнение ограничения по покрытию), остальные обнулить (в том случае, если хитов хватает, в противном случае оставить все хиты).

Запомнить $\lambda_3 = \min_j R(j)$.

Положить

$$t_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если пара } (i, j) \text{ включена в список и оставлена для показа,} \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Вычислить $TSUM = \sum_{i,j} \tau_{ij}$ (величина $TSUM$ будет зависеть от параметров $\lambda_1, \lambda_2, T_0$).

Менять λ_2 , пока не будет достигнуто $TSUM = T_0 \pm \varepsilon$. Положить $\lambda_{2\text{опт}} = \lambda_2$.

Запомнить $\lambda_3, \lambda_{2\text{опт}}$, списки t_{ij} (т. е. баннеры, отобранные для показа)

Конец цикла по λ_2 .

Вычислить

$$CRIT_1(\lambda_1, \lambda_{2\text{опт}}, T_0) = \sum_{i,j} t_{ij} (CTR_{ij}/T_0 - \lambda_1 (MON_{\min} - MONEY(t))).$$

Менять T_0 , чтобы достигнуть $\max_{T_0} CRIT_1(t)$.

Положить $T_{0\text{опт}}$ то значение T_0 , при котором достигнут $\max_{T_0} CRIT_1$.

Запомнить $\lambda_3, \lambda_{2\text{опт}}, T_{0\text{опт}}, MONEY(t)$.

Конец цикла по T_0 .

Менять λ_1 , пока $MONEY(t) < MON_{\min}$.

Конец цикла по λ_1 .

В конце работы алгоритма мы получаем четыре величины $\lambda_{1\text{опт}}, T_{0\text{опт}}, \lambda_{2\text{опт}}$ и $\lambda_{3\text{опт}}$, которые будут использоваться для работы с новыми запросами.



5. РАБОТА С НОВЫМИ ЗАПРОСАМИ

Рассмотрим, каким образом мы будем использовать полученные с помощью описанного в § 4 алгоритма величины $\lambda_{1\text{опт}}$, $T_{0\text{опт}}$, $\lambda_{3\text{опт}}$, $\lambda_{2\text{опт}}$ для обработки нового запроса, поступившего от пользователя в систему показов рекламных объявлений.

Ранее было отмечено, что если данные величины уже получены, то для каждого запроса из выборки запросов можно определить, какие баннеры должны быть показаны в спецразмещении, не обращая внимания на другие запросы. Мы рассчитываем на то, что используемая выборка запросов достаточно велика, чтобы результат подбора порогов применялся в тех же условиях, в которых собиралась эта выборка. Тогда, в силу закона больших чисел, если мы будем применять те же правила к новым запросам, то интегральные критерии — среднее значение CTR , CPM и покрытие — будут достаточно близки к значениям, полученным по выборке запросов. В то же время параметры были подобраны так, чтобы наш главный критерий — среднее значение CTR по спецразмещению — достиг максимума при заданных ограничениях на среднее значение CPM и покрытие. Поэтому и на новых данных с достаточной точностью в среднем критерий будет достигать максимума, а ограничения выполняться.

Итак, получив новый запрос, нужно выполнить следующие действия.

1. Отобрать баннеры-кандидаты для возможных показов (по фразам запроса). Для каждого из этих баннеров известно значение ставки Bid_i и прогноз кликабельности CTR_{ij} , где i — индекс баннера, а j — индекс запроса.

2. Вычислить значение $F_{ij} = CTR_{ij}/T_{0\text{опт}} + \lambda_{1\text{опт}} \cdot Bid_i \cdot CTR_{ij} - \lambda_{2\text{опт}}$ для всех полученных в п. 1 баннеров.

3. Составить список кандидатов на показ в спецразмещении. В этот список для показа поместить только те баннеры, для которых $F_{ij} > 0$. Этот список может быть и пустым (в этом случае в спецразмещении не будет показано ни одного баннера).

4. Если число кандидатов больше k , то сократить список, оставив в нем только k баннеров с наибольшим значением F_{ij} .

5. Подсчитать значение $R_j = \sum_i F_{ij}$, где сумма берется по всем баннерам из усеченного списка.

6. Если $R_j < \lambda_{3\text{опт}}$, то обнулить список, и для данного запроса не показывать никаких баннеров в спецразмещении. Иначе показать в спецразмещении все баннеры из усеченного списка.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Итак, рассмотрена проблема отбора баннеров-кандидатов для показа в спецразмещении для заданных ограничений по деньгам, а также по покрытию с целью максимизации средней клика-

бельности баннеров в спецразмещении. Предложен алгоритм отбора, а также формула входа в спецразмещение. Однако в действительности разработанный алгоритм отбора показателей сложнее, чем описано в данной работе. Например, рассмотрены такие модификации, как:

— сортировка по ставке Bid_i при показе объявлений;

— упрощение и ускорение самого алгоритма подбора порогов для входа в спецразмещение (изложенный в данной статье алгоритм достаточно сложен по объему переборов);

— разные модели для клика по объявлению (в том числе учет зависимости вероятности клика от позиции баннера).

На данный момент предложенный алгоритм уже применяется для некоторой части рекламных показов в спецразмещении. В результате покрытие увеличилось на 0,5 %, доход на 0,9 %, а значение CTR увеличилось на 4,53 %. Но все это будет изложено в отдельной публикации.

ЛИТЕРАТУРА

1. Fain D.C., Pedersen J.O. Sponsored search: A brief history. — URL: <http://www.asis.org/Bulletin/Dec-05/pedersen.html> (дата обращения 17.01.2013).
2. Kumar R., Mahdian M., Li E., et al. Systems and methods for exploring new sponsored search listings of uncertain quality. — 2009.
3. Graepel T., Candela J.Q., Borchert T., Herbrich R. Web-scale bayesian click-through rate prediction for sponsored search advertising in microsoft's bing search engine // Proc. of ICML. — 2010. — P. 13–20.
4. Edelman B., Ostrovsky M., and Schwarz M. Internet advertising and the generalized second price auction: Selling billions of dollars worth of keywords // American Economic Review. — 2007. — Vol. 97. — Iss. 1. — P. 242–259.
5. Feng J., Bhargava H.K., Pennock D.M. Implementing Sponsored Search in Web Search Engines: Computational Evaluation of Alternative Mechanisms // Inform Journal on Computing. — 2007. — Vol. 19, N 1. — P. 137–148.
6. Ghose A., Yang S. An Empirical Analysis of Search Engine Advertising: Sponsored Search in Electronic Markets // Net Institute Working Paper. — 2009. — May 25.
7. Graepel H., Candela J.Q., Borchert T., Herbrich R. Web-scale Bayesian click-through rate prediction for sponsored search advertising in Microsoft's Bing search engine // Proc. of the 27th Intern. Conf. on Machine Learning ICML 2010.
8. Lahaie S., M. Pennock D.M. Revenue analysis of a family of ranking rules for keyword auctions // Proc. of the 8th ACM conf. on Electronic commerce, 2007. — P. 50–56.
9. Richardson M., Dominowska E., and Ragno R. Predicting clicks: Estimating the click-through rate for new ads // Proc. of the 16th Intern. World Wide Web Conf (WWW — 2007). — ACM Press, 2007.
10. Zhu Z. A., Chen W., Minka T., et al. A novel click model and its applications to online advertising // In Proc. Of WSDM, 2010. — P. 321–330.
11. Поляк Б.Т. Введение в оптимизацию. — М.: Наука, 1983. — 384 с.
12. Линейные неравенства и смежные вопросы / Сб. статей под ред. Г.У. Куна, А.У. Таккера. — М.: Иностранная литература, 1959. — 469 с.

Статья представлена к публикации членом редколлегии Ф.Т. Алескеровым.

Анна Николаевна Корнетова — разработчик, компания «Яндекс»; аспирант, Национальный исследовательский институт — Высшая школа экономики, г. Москва, ✉ akornet@yandex-team.ru,

Алексей Яковлевич Червоненкис — канд. физ.-мат. наук, вед. науч. сотрудник, Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, г. Москва, ☎ (495) 334-88-20, ✉ chervnks@ipu.ru.

ЗАДАЧА ОПТИМАЛЬНОГО ПЛАНИРОВАНИЯ РАБОТ ПО ОБНОВЛЕНИЮ ЖЕЛЕЗНОДОРОЖНОЙ ЛИНИИ: ПОСТАНОВКА, АЛГОРИТМЫ РЕШЕНИЯ

Ю.О. Петровец, Д.Л. Андрианов

Рассмотрена задача долгосрочного оптимального планирования работ по обновлению железнодорожной инфраструктуры. Предложен алгоритм решения задачи, основанный на идее метода ветвей и границ и применении динамического программирования для получения нижних оценок ветвей.

Ключевые слова: железнодорожная инфраструктура, задачи оптимального планирования, метод ветвей и границ, динамическое программирование.

ВВЕДЕНИЕ

Путевое хозяйство железных дорог является наиболее капиталоемкой, трудоемкой и материалоемкой отраслью железнодорожного транспорта. Например, в России в путевом хозяйстве сосредоточено 54 % всех основных фондов железных дорог, а затраты материалов на капитальные работы в путевом хозяйстве составляют более половины от соответствующих затрат всех хозяйств железной дороги [1]. В этой связи крайне важно искать пути рационального использования имеющихся средств. В данной статье будет рассмотрена задача оптимизации расходов железнодорожной компании путем правильного выбора сроков проведения работ.

Благодаря чему можно добиться экономии? При правильном определении момента обновления актива (примеры активов — рельсы, шпалы, балластный слой, стрелочные переводы и пр.) можно избежать дополнительных расходов на техническое обслуживание (ТО) и/или необязательных экономических потерь, связанных с вводом временных ограничений на скорость передвижения. При организации более крупных проектов можно снизить себестоимость работ благодаря эффекту масштаба, а также сократить время, в течение которого линия, на которой проводятся работы, будет закрыта. Кроме того, при удачном выборе сроков проекта можно добиться экономии средств путем совместного обновления активов.

Возникающая задача оказывается нетривиальной ввиду, как правило, очень большого числа неизвестных, наличия целочисленных ограничений

и специфического характера функций, описывающих динамику основных показателей. Есть способы представить данную задачу как задачу линейного целочисленного программирования [2, 3], однако, эффективность данного подхода требует проверки.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Железнодорожная линия — это крупный инфраструктурный объект, состоящий из большого числа относительно непротяженных участков пути (сегментов). В исследуемой задаче деление на сегменты основано на инженерных соображениях: все характеристики, определяющие износ железнодорожных активов (радиус кривизны, дата последнего обновления, трафик и пр.) в пределах всей длины сегмента должны быть полностью идентичны [4]. Сегмент состоит из одного или нескольких, обычно не более трех, активов, которые обновляются или ремонтируются целиком на всей длине сегмента.

Пронумеруем все сегменты и активы. Введем обозначения: S — множество номеров всех сегментов, s — число сегментов, A — множество номеров всех активов, A_j — множество номеров активов на сегменте j , a — число всех активов, a_j — число активов на сегменте j , \underline{a}_j и \bar{a}_j — наименьший и наибольший номера актива на сегменте j . Схематически структура линии представлена на рис. 1.

Рассмотрим износ линии в моменты времени $1, \dots, T$. Предполагается, что один момент времени — это календарный или финансовый год, а

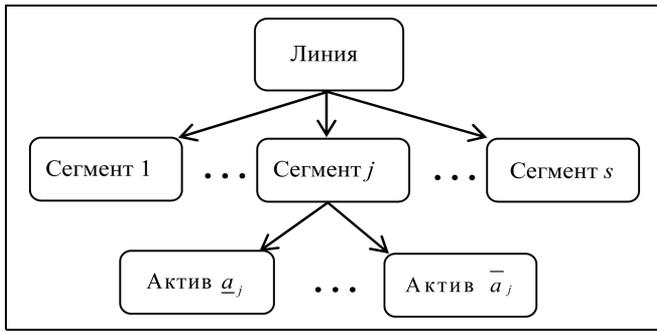


Рис. 1. Структура железнодорожной линии

длина прогнозного периода равна нескольким десяткам лет. Железнодорожная компания оказывает на износ управляющее воздействие в виде периодического обновления активов [5]. Введем оператор управления $u: \{1, \dots, T\} \rightarrow \{0, 1\}^n$, где $\{0, 1\}^n$ — вектор из n элементов, каждая компонента которого равна 0 или 1. Будем понимать $u_k(t)$ как решение обновить, если $u_k(t) = 1$ или не обновить, если $u_k(t) = 0$, актив k в момент времени t .

Все характеристики износа конкретного актива могут быть однозначно определены по его сроку службы. Далее, говоря об износе, будем подразумевать возраст актива (в годах). Обозначим $x: \{0, \dots, T\} \rightarrow \mathbb{N}^a$ — оператор, определяющий износ линии. А именно, будем понимать $x_k(t)$ — возраст актива k в момент времени t . Динамика износа определяется как

$$x_k(t) = \varphi(u_k(t), x_k(t-1)) = \begin{cases} x_k(t-1) + 1, & u_k(t) = 0, \\ 1, & u_k(t) = 1, \end{cases} \quad k \in A, \quad t \in \{1, \dots, T\}, \quad (1)$$

$$x_k(0) = x_k^0, \quad k \in A. \quad (2)$$

Введем ограничения на максимальный и минимальный срок службы:

$$x_k(t) \in X_k^t \subset \mathbb{N}, \quad k \in A, \quad t \in \{1, \dots, T\}. \quad (3)$$

В зависимости от износа и управления могут быть однозначно определены следующие показатели деятельности железнодорожной компании: расходы на обновление, расходы на ТО, экономические потери. Все показатели вычисляются для каждого сегмента, в зависимости от состояния его активов. Для удобства введем обозначения:

$$u^j(t) = (u_{a_j}(t), \dots, u_{\bar{a}_j}(t)), \quad x^j(t) = (x_{a_j}(t), \dots, x_{\bar{a}_j}(t)), \quad j \in S, \quad t \in \{1, \dots, T\}.$$

Расходы на обновление на сегменте j в момент времени t определяются функцией $f_j^{sr}(u^j(t), t)$, $j \in S, t \in \{1, \dots, T\}$.

Эти расходы обладают важной особенностью — они зависят от сочетания обновляемых активов. Эта особенность является одной из ключевых предпосылок для оптимизации, так как позволяет путем объединения работ по обновлению разных видов активов на одном сегменте уменьшить суммарную стоимость обновления. Справедливо неравенство

$$\sum_{k \in A_j} u_k(t) f_j^{sr}(e^j(k - a_j + 1), t) \geq f_j^{sr}(u^j(t), t), \quad j \in S, \quad t \in \{1, \dots, T\},$$

где $e^j: \{1, \dots, a_j\} \rightarrow \{0, 1\}_j^a$ определяется равенствами

$$e^j(i) = \begin{cases} e_k^j(i) = 1, & k = i, \\ e_k^j(i) = 0, & k \neq i, \end{cases} \quad j \in S.$$

Расходы на ТО на сегменте j в момент времени t определяются функцией

$$f_j^{sm}(x^j(t), t) = \sum_{k \in A_j} f_k^{am}(x_k(t), t), \quad j \in S, \quad t \in \{1, \dots, T\},$$

где $f_k^{am}(x_k(t), t)$ — расходы на ТО отдельного актива k в момент времени t .

Расходы на ТО начинают стремительно возрастать после превышения активом срока службы как из-за удорожания, так и из-за учащения работ отдельных видов [6, 7].

Возникновение экономических потерь связано с уменьшением пропускной способности, вызванной вводом ограничений на скорость передвижения пассажирских и грузовых поездов. Чем больше срок службы актива, тем больше вероятность, что ограничение будет введено.

Вероятность ввода ограничения в результате чрезмерного износа актива k в момент времени t

$$P(ATSR_{k,t}) = f_k^{ah}(x_k(t), t), \quad k \in A, \quad t \in \{1, \dots, T\}$$

считается равной нулю, если срок службы актива меньше инженерного срока.

Сегмент может состоять из нескольких активов, и ограничение вводится в том случае, если хотя бы один актив не удовлетворяет требованиям безопасности. Ввод ограничений в результате чрезмерного износа одного актива считается статистически независимым от износа другого актива. Математическое ожидание экономических потерь на сегменте j в момент времени t запишем в виде

$$\begin{aligned} f_j^{sh}(x^j(t), t) &= \\ &= P(ATSR_{a_j,t} \text{ или } \dots \text{ или } ATSR_{\bar{a}_j,t}) f_j^{tsr}(t), \quad j \in S, \quad t \in \{1, \dots, T\}, \end{aligned}$$

где $f_j^{sr}(t)$ — размер экономических потерь (в случае ввода ограничения) на сегменте j в момент времени t .

Известно, что работы по обновлению активов лучше объединять в *проекты*. Это позволяет учесть: эффект экономии от масштаба, сокращение времени и соответственно расходов из-за неиспользования линии, недовольство пользователей железнодорожных услуг. Поэтому добавляются ограничения на паузы между обновлениями:

$$\begin{aligned} \|u(t)\| \cdot \|u(t - \psi)\| &= 0, \quad t \in \{1, \dots, T\}, \\ \psi &\in \{1, \dots, \rho\}, \quad t - \psi > 0, \end{aligned} \quad (4)$$

где $\rho > 1$ — пауза между обновлениями.

Для решения проблем, связанных с ограниченностью прогнозного периода, вводятся штрафы за обновление активов раньше рекомендованного срока:

$$\begin{aligned} f_j^{sp}(u^j(t), x^j(t-1), t) &= \sum_{k \in A_j} f_k^{ap}(u_k(t), x_k(t-1), t) = \\ &= \sum_{k \in A_j} u_k(t) f_j^{sr}(e^j(k - a_j + 1), t) \times \\ &\times \frac{x_k(t-1) + 1}{f_k^{life}(t - x_k(t-1) - 1)}, \quad j \in S, \quad t \in \{1, \dots, T\}, \end{aligned}$$

где $f_j^{life}(\tau)$ — функция, определяющая срок службы актива k , при условии, что в последний раз он был обновлен в момент времени τ , а

$$\begin{aligned} z_k(t) &= \omega(x_k(t-1)) = x_k(t-1) + 1, \\ k &\in A, \quad t \in \{1, \dots, T\}. \end{aligned} \quad (5)$$

Целевая функция

$$\begin{aligned} &\sum_{t=1}^T \sum_{j \in S} f_j^s(u^j(t), x^j(t), z^j(t)) = \\ &= \sum_{t=1}^T \sum_{j \in S} (f_j^{sm}(x^j(t), t) + f_j^{sr}(u^j(t), t) + \\ &+ f_j^{sh}(x^j(t), t) + f_j^{sp}(u^j(t), z^j(t), t)) \rightarrow \min. \end{aligned} \quad (6)$$

Чтобы не усложнять запись, будем полагать, что все слагаемые содержат множитель дисконтирования.

2. АНАЛИЗ ЗАДАЧИ КАК ЗАДАЧИ ДИНАМИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Сформулированная задача представляет собой задачу динамического программирования, в которой T — число шагов (этапов), u — управляющее

воздействие, x и z — фазовые переменные, а множество допустимых процессов управления

$$\begin{aligned} G = \{(u, x, z) : u : \{1, \dots, T\} \rightarrow \{0, 1\}^a, \\ x, z : \{0, \dots, T\} \rightarrow N^a, (1)–(5)\} \end{aligned}$$

(здесь и далее для упрощения выражений вместо громоздких формул иногда будем писать их порядковые номера).

Несмотря на то, что формально задача относится к хорошо известному классу задач, воспользоваться напрямую для ее решения общепринятым методом — принципом оптимальности Беллмана — не представляется возможным ввиду так называемого «проклятия размерности» [8].

Отметим несколько особенностей числа состояний системы, касающихся его определения:

— оно зависит от числа активов a ; с помощью принципа оптимальности за разумное время можно найти решение только при a не больше трех—четырёх;

— оно ограничено из-за наличия ограничений (3);

— его можно резко сократить, если для некоторого подмножества моментов времени $B \subset \{1, \dots, T\}$ дополнительно ввести ограничения вида $u(t) = \text{col}(0, \dots, 0)$, $t \in B$.

Для иллюстрации этих особенностей рассмотрим два примера. В первом из них (рис. 2) представлена динамика числа состояний для одного сегмента из 1—3 активов при следующих условиях: все активы были обновлены в $t = 0$, максимальный срок службы всех активов 50 лет, пауза между обновлениями 5 лет.

Видно, что число состояний системы для трех активов существенно больше, чем для двух или

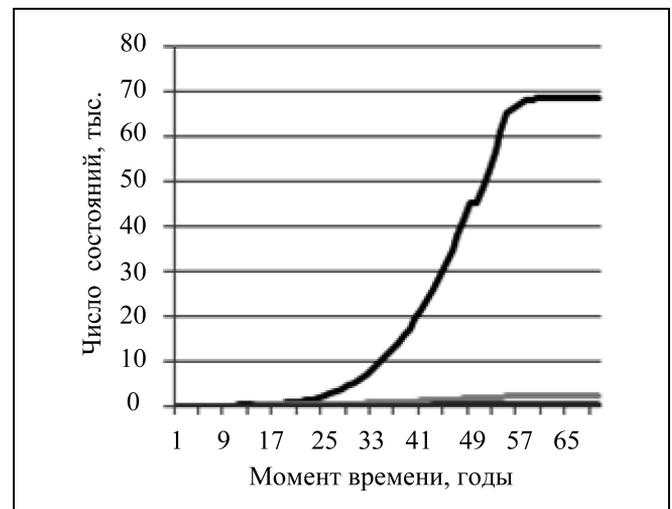


Рис. 2. Пример 1: динамика числа состояний:

— 3 актива, — 2 актива, — 1 актив

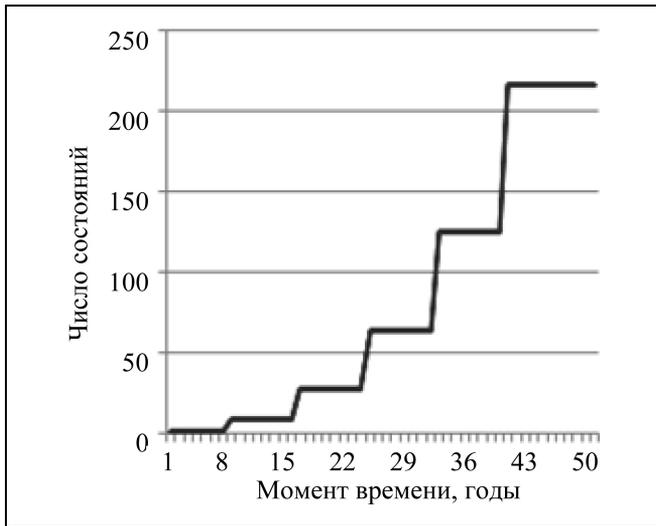


Рис. 3. Пример 2: динамика числа состояний

одного. Начиная с некоторого момента, число состояний стабилизируется. В случае трех активов максимальное число состояний равно 68 660. Если запретить обновления в некоторые годы $B = \{1, \dots, T\} \setminus \{8, 16, 24, 32, 40, 48\}$, то максимальное число состояний системы из трех активов будет значительно меньше — 216 (рис. 3). Данное свойство будет использовано при решении задачи методом ветвей и границ.

3. ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ВЕТВЕЙ И ГРАНИЦ

3.1. Вектор проектов

Под проектами допустимого управления u будем понимать булев вектор $p = \text{col}(\max u(1), \dots, \max u(T))$; т. е. проект применительно к отдельному активу означает лишь возможность или разрешение провести обновление, а не сам факт обновления.

Процессом управления, удовлетворяющим вектору проектов $p = \text{col}(p_1, p_2, \dots, p_t)$, $t \leq T$, будем называть процесс (u, x, z) , принадлежащий множеству

$$G_p = \{(u, x, z) \in G : u(t) = \text{col}(0, \dots, 0), \forall t : p_t = 0\}.$$

Очевидно,

$$\begin{aligned} \min_u \{(6) | (u, x, z) \in G\} &\equiv \\ &\equiv \min_p \{ \min_u \{(6) | (u, x, z) \in G_p\} \}. \end{aligned}$$

Заметим, что для фиксированного вектора проектов p , элементы которого являются проектами некоторого допустимого управления u , задача «рас-

падается» на множество небольших подзадач оптимизации работ для каждого сегмента:

$$\min_u \{(6) | (u, x, z) \in G_p\} = \sum_{j \in S} \left(\min_{u^{s_j}} \left\{ \sum_{t=1}^T f_j^s(u^{s_j}(t), x^{s_j}(t), z^{s_j}(t)) | (u^{s_j}, x^{s_j}, z^{s_j}) \in G_p^{s_j} \right\} \right),$$

где $G_p^{s_j} = \{(u, x, z) : u : \{1, \dots, T\} \rightarrow \{0, 1\}^{a_j}, x, z : \{0, \dots, T\} \rightarrow \mathbb{N}^{a_j}, (7)–(10)\}$,

$$u(t) = \text{col}(0, \dots, 0), \forall t : p_t = 0, \quad (7)$$

$$\begin{aligned} x_k(t) &= \varphi(u_k(t), x_k(t-1)), \quad z_k(t) = \omega(x_k(t-1)), \\ k &\in \{1, \dots, a_j\}, \quad t \in \{1, \dots, T\}, \end{aligned} \quad (8)$$

$$x_k(0) = x_{k+a_j-1}^0, \quad k \in \{1, \dots, a_j\}, \quad (9)$$

$$x_k(t) \in X_{k+a_j-1}^t, \quad k \in \{1, \dots, a_j\}, \quad t \in \{1, \dots, T\}. \quad (10)$$

Каждая такая подзадача достаточно тривиально решается методом динамического программирования, о чем говорилось выше.

Идея ввода дополнительных ограничений с помощью вектора (векторов) проектов может оказаться конструктивной, если существует априорная информация о том, какие моменты времени больше всего подходят для реализации проектов. Если же такой информации нет, то попытки экстенсивным способом перебрать все возможные векторы проектов, скорее всего, окажутся неудачны, так как их число может оказаться очень велико. Например, при $T = 50$, $\rho = 5$ число векторов может достигать 153 315.

3.2. Процедуры ветвления

Осуществить поиск наилучшего вектора проектов можно с помощью метода ветвей и границ. Рассмотрим два варианта процедуры ветвления. Условно говоря, первый вариант отвечает на вопрос «Что должно произойти в следующий момент времени?». Процедура ветвления множества допустимых процессов управления схематически представлена на рис. 4.

Второй вариант отвечает на вопрос «Когда необходимо организовать следующий проект?». Для того чтобы сузить перечень моментов времени, в которые может быть организован проект, но при этом не исключить оптимального решения, можно предложить процедуру ветвления, показанную на рис. 5. Она должна при необходимости обеспечивать перебор всех векторов проектов. Однако данной процедурой исключаются из рассмотрения все векторы, в которых число подряд идущих

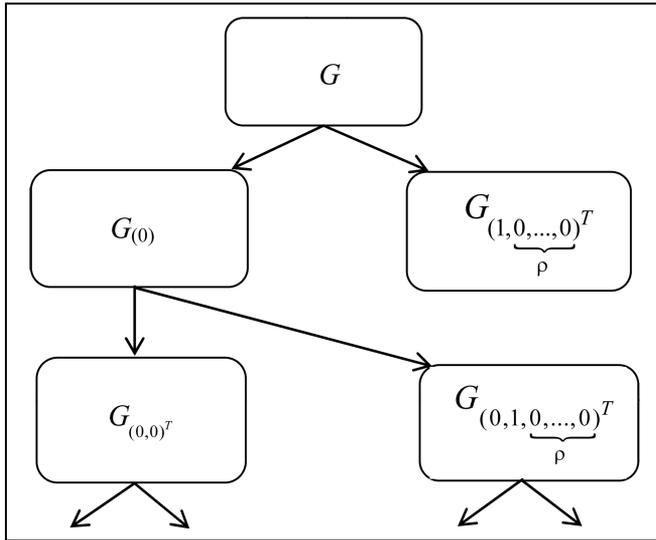


Рис. 4. Процедура ветвления (первый вариант)

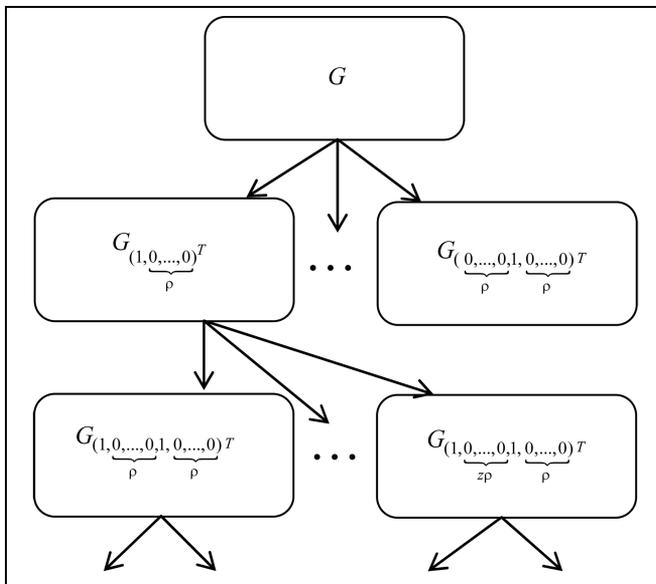


Рис. 5. Процедура ветвления (второй вариант)

нулевых элементов превосходит 2ρ . Это допустимо ввиду следующего свойства задачи (1)–(6): *если* $p^0, p^1 \in \{0, 1\}^T : p_t^0 \leq p_t^1, \forall t \in \{1, \dots, T\}$, *то* $\min_u \{(6)|(u, x, z) \in G_p^0\} \geq \min_u \{(6)|(u, x, z) \in G_p^1\}$. Это справедливо, поскольку $G_p^0 \subseteq G_p^1$.

3.3. Оценивание ветви

Для получения нижней оценки ветви в методе ветвей и границ обычно искусственно расширяют область допустимых процессов управления таким образом, чтобы можно было легко получить реше-

ние на этой области [9]. В этом случае полученное решение будет гарантированно «не хуже», чем решение исходной задачи.

Рассмотрим произвольную ветвь b . Будем искать оценку в виде

$$\begin{aligned} & \min_u \{(6)|(u, x, z) \in G_b\} \geq \\ & \geq \sum_{j \in S} \min_{u^{s_j}} \left\{ \sum_{t=1}^{d_b} f_j^s(u^{s_j}(t), x^{s_j}(t), z^{s_j}(t), t) + \right. \\ & \quad \left. + M_j(x^{s_j}(d_b), d_b)|(u^{s_j}, x^{s_j}, z^{s_j}) \in F_b^{s_j} \right\}, \end{aligned}$$

где d_b — число элементов в векторе b и

$$\begin{aligned} F_b^{s_j} &= \{(u, x, z) : u : \{1, \dots, d_b\} \rightarrow \{0, 1\}^{a_j}, \\ & \quad x, z : \{0, \dots, d_b\} \rightarrow \mathbb{N}^{a_j}, \text{ (11)–(14)}\}, \end{aligned}$$

$$u(t) = \text{col}(0, \dots, 0), t \in \{1, \dots, d_b\} : b_t = 0, \text{ (11)}$$

$$\begin{aligned} x_k(t) &= \varphi(u_k(t), x_k(t-1)), z_k(t) = \omega(x_k(t-1)), \\ & \quad k \in \{1, \dots, a_j\}, t \in \{1, \dots, d_b\}, \text{ (12)} \end{aligned}$$

$$x_k(0) = x_{k+a_j-1}^0, k \in \{1, \dots, a_j\}, \text{ (13)}$$

$$x_k(t) \in X_{k+a_j-1}^t, k \in \{1, \dots, a_j\}, t \in \{1, \dots, d_b\}, \text{ (14)}$$

а $M_j(x^\tau, \tau)$ — любая функция, удовлетворяющая условию:

$$\begin{aligned} M_j(x^\tau, \tau) &\leq \min_{u^{s_j}} \left\{ \sum_{t=\tau+1}^T f_j^s(u^{s_j}(t), x^{s_j}(t), \right. \\ & \quad \left. z^{s_j}(t), t)|(u^{s_j}, x^{s_j}, z^{s_j}) \in G_{x^\tau, \tau}^{s_j} \right\}, \text{ (15)} \end{aligned}$$

где $G_{x^\tau, \tau}^{s_j} = \{(u, x, z) : u : \{\tau+1, \dots, T\} \rightarrow \{0, 1\}^{a_j},$
 $x, z : \{\tau, \dots, T\} \rightarrow \mathbb{N}^{a_j}, \text{ (16)–(19)}\}$,

$$x(\tau) = x^\tau, \text{ (16)}$$

$$\begin{aligned} x_k(t) &= \varphi(u_k(t), x_k(t-1)), z_k(t) = \omega(x_k(t-1)), \\ & \quad k \in \{1, \dots, a_j\}, t \in \{\tau+1, \dots, T\}, \text{ (17)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|u(t)\| \cdot \|u(t-\psi)\| &= 0, t \in \{\tau+1, \dots, T\}, \\ \psi &\in \{1, \dots, \rho\}, t-\psi > \tau, \text{ (18)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_k(t) &\in X_{k+a_j-1}^t, k \in \{1, \dots, a_j\}, \\ & \quad t \in \{\tau+1, \dots, T\}. \text{ (19)} \end{aligned}$$

Таким образом, нахождение оценки сводится к решению s задач оптимизации работ на сегменте на периоде $t \in \{1, \dots, d_b\}$ с терминальным членом. Решение данных задач упрощается благодаря на-



личию ограничений (11). Эффективность оценки будет определяться сложностью вычисления функций $M_j(x^\tau, \tau)$, а также грубостью приближения (15). Точный минимум в формуле (15) также является оценкой, однако для его определения могут потребоваться ресурсоемкие вычисления (например, как случай трех активов, см. рис. 2).

Для сокращения объема вычислений целесообразно найти функции $f_j^{ss}(u, x, z, t) : \{0, 1\}_j^a \times \mathbb{N}_j^a \times \mathbb{N}_j^a \times \{1, \dots, T\} \rightarrow \mathbb{N}$, сепарабельные по элементам векторов u, x и z , т. е. такие, чтобы для любых u, x, z, t выполнялось

$$f_j^s(u, x, z, t) \geq f_j^{ss}(u, x, z, t) = \sum_{k=1}^{a_j} f_j^{ak}(u_k(t), x_k(t), z_k(t), t), \quad j \in S,$$

где $f_j^{ak}(u, x, z, t) : \{0, 1\} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \{1, \dots, T\} \rightarrow \mathbb{N}$, $j \in S, k \in \{1, \dots, a_j\}$.

В этом случае для получения оценки нужно решить локальные задачи оптимизации для каждого отдельного актива, размерность которых принципиально меньше (случай одного актива (см. рис. 2). При использовании сепарабельной функции опять расширяется множество процессов управления из-за ограничения (18), т. е. оценка становится более грубой.

Функции $f_j^{sm}(x, t)$ и $f_j^{sp}(u, z, t)$ сепарабельны. В качестве функции всюду не превосходящей $f_j^{sr}(u, t)$ и сепарабельной по элементам вектора управления u можно использовать следующую функцию

$$f_j^{ssr}(u, t) = \sum_{k=1}^{a_j} u_k(f_j^{sr}(e^j(k), t) - \max_{v \in \{0, 1\}^{a_j} \setminus \text{col}(0, \dots, 0)} \left\{ \left(\sum_{m=1}^{a_j} v_m f_j^{sr}(e^j(m), t) - f_j^{sr}(v, t) \right) \middle/ \sum_{m=1}^{a_j} v_m \right\}), \quad j \in S.$$

Смысл этой функции заключается в том, что при обновлении конкретного актива всегда используются расходы на обновление за вычетом максимально возможной экономии от совместного обновления в пересчете на один актив.

Утверждение 1. Для любого $n \in \mathbb{N}$ справедливо неравенство

$$P(A_1 \text{ или } \dots \text{ или } A_n) \geq \sum_{i=1}^n \frac{1 - (1 - P(A_i))^n}{n}, \quad (20)$$

где A_1, \dots, A_n — любые независимые события.

Доказательство. Применим метод математической индукции. Для $n = 1$: $P(A_1) \equiv P(A_1)$. Предполагаем, что для некоторого $n = k$ выполняется

$$P\left(\text{Событие } B \text{ (} A_1 \text{ или } \dots \text{ или } A_k \text{)}\right) \geq \sum_{i=1}^k \frac{1 - P^k(\bar{A}_i)}{k} \Rightarrow \Rightarrow \sum_{i=1}^k \frac{P^k(\bar{A}_i)}{k} \geq P(\bar{B}).$$

Тогда для $n = k + 1$, с одной стороны, можно записать

$$P(A_1 \text{ или } \dots \text{ или } A_k \text{ или } A_{k+1}) = = 1 - P(\bar{B})P(\bar{A}_{k+1}) \geq 1 - P(\bar{B}).$$

С другой стороны, выполняется

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{k+1} \frac{1 - P^{k+1}(\bar{A}_i)}{k+1} &= 1 - \sum_{i=1}^k \frac{P^{k+1}(\bar{A}_i)}{k+1} - \frac{P^{k+1}(\bar{A}_{k+1})}{k+1} \leq \\ &\leq 1 - \sum_{i=1}^k \frac{P^k(\bar{A}_i)}{k} - \frac{P^{k+1}(\bar{A}_{k+1})}{k+1} \leq \\ &\leq 1 - P(\bar{B}) - \frac{P^{k+1}(\bar{A}_{k+1})}{k+1} \leq 1 - P(\bar{B}). \end{aligned}$$

Откуда следует справедливость неравенства (20). Утверждение 1 доказано. ♦

Заметим, если вероятности событий A_1, \dots, A_n равны, то неравенство (20) обращается в тождество. Таким образом, в качестве функции, сепарабельной по x и всюду не превосходящей $f_j^{sh}(x, t)$, можно использовать функцию

$$f_j^{ssh}(x, t) = \frac{f_j^{tsr}(t)}{a_j} \sum_{k=1}^{a_j} \left(1 - (1 - f_{k+a_j-1}^{ah}(x_k, t))^{a_j} \right), \quad j \in S.$$

3.4. Программные способы ускорения вычислений

Рассмотрим некоторые особенности алгоритма, которые могут позволить проводить компьютерные вычисления быстрее:

- организация параллельных вычислений;
- кэширование значений функций $M_j(x^\tau, \tau)$;
- повторное использование решений.

Очевидно, что при вычислении ветви можно искать решения подзадач оптимизации для каждого сегмента в отдельном потоке, что позволит создать масштабируемое приложение.

Также нет необходимости каждый раз рассчитывать значения функции $M_j(x^\tau, \tau)$, если для ее вычисления используются сепарабельные функции, описанные в п. 3.3. Вместо этого стоит один раз вычислить значения этой функции для всех возможных параметров x^τ и τ .

Параметры и время расчета

Линия	Время, с	Число неизвестных	Пауза
71	258	331 600	5
16	134	249 700	5
98	98	150 250	5
21	66	263 200	8
15a	43	102 550	5
23b	36	337 800	10
32	35	191 050	10
83	32	146 350	10
55	32	132 400	10
85	30	148 650	10

При ветвлении узла дерева решений можно повторно использовать результаты, полученные на предыдущем шаге. Необходимо пересчитывать не все этапы динамического программирования, а только те, которые уточняются в новой ветви. Данным приемом целесообразно воспользоваться при поиске решения с помощью «жадного» алгоритма. Иначе для железнодорожных линий с большим числом сегментов хранение всех матриц стоимостей перехода может требовать большого объема оперативной памяти.

4. ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ

Данная модель и метод оптимизации были применены в компании «Vanedanmark» (Дания). На реальных данных, описывающих железнодорожную сеть этой страны, были определены оптимальные проекты на прогнозном периоде, равном 50-ти годам.

Общее число неизвестных равно 5 249 950. Чистое время расчета задач оптимизации для 49 линий составило 20 мин 23 с. Расчет производился в четыре потока на компьютере с параметрами: Intel® Core i5 CPU K 655 @ 3,20 ГГц 3,19 ГГц; 16 Гб RAM; x64. Приложение написано на языке C# под .NET Framework 4 и интегрировано в АК «Прогноз-5» [10]. В таблице показаны основные параметры и время десяти наиболее продолжительных расчетов (в таблице приведены официальные номера линий Датской железной дороги). Видно, что пауза между обновлениями оказывает большее влияние, чем число неизвестных.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Сформулирована задача оптимального планирования работ по обновлению инфраструктуры железнодорожной линии. Данная задача может содержать сотни тысяч неизвестных, что осложняет

применение классических методов решения, таких как принцип оптимальности Беллмана. Однако используя специфические особенности постановки, удается предложить алгоритм поиска решения, основанный на методе ветвей и границ, показавший высокую эффективность на реальных данных.

Дальнейшие исследования могут быть посвящены обобщению задачи для всей железнодорожной сети с учетом ресурсных ограничений и анализу специфики обновления нетипичных объектов инфраструктуры (мостов, тоннелей и др.), а также рассмотрению различных методик определения экономических потерь.

ЛИТЕРАТУРА

1. Петров Ю.Д., Купоров А.И., Шкурина Л.В. Планирование в структурных подразделениях железнодорожного транспорта. — М.: Высшее образование, 2008. — 340 с.
2. Поносков Д.А., Чадов А.Л. К вопросу о вычислительной сложности нахождения решения одного класса задач целочисленного программирования // Тр. 2-й междунар. конф. «Трехмерная визуализация научной, технической и социальной реальности. Технологии высокополигонального моделирования» / УдГУ. — Ижевск, 2010. — Т. 1. — С. 125—127.
3. Муртаф Б. Современное линейное программирование. — М.: Мир, 1984. — 224 с.
4. Carretero J., Gonzalez J., Perez J., Romera R. Optimal railway infrastructure maintenance and repair policies to manage risk under uncertainty with adaptive control / Universidad Carlos III de Madrid, 2006. — 15 p.
5. Цыгичко В.Н. Руководителю — о принятии решений. — 2-е изд. — М.: Инфра-М, 1996. — 272 с.
6. Riessberger K. Key elements in the maintenance of high speed track // Railway Gazette International. — 1989. — Vol. 145, N 3. — P. 147—149.
7. Mlinaric T.J., Pirnar M. Optimizing track infrastructure availability // Promet — Traffic & Transportation. — 2009. — Vol. 21, N 2. — P. 113—121.
8. Беллман Р. Динамическое программирование. — М.: Иностранная литература, 1960. — 400 с.
9. Зайченко Ю.П. Исследование операций. — Киев: Вища школа, 1975.
10. Свидетельство Российского агентства по патентам и товарным знакам № 2005610980 от 22.04.2005 об официальной регистрации программы для ЭВМ / Д.Л. Андрианов, Г.К. Полушкина и др.

Статья представлена к публикации членом редколлегии В.Н. Бурковым.

Юрий Олегович Петровец — аспирант, Пермский государственный национальный исследовательский университет; вед. специалист, ЗАО «Прогноз», г. Пермь, ☎ (342) 240-36-63, доб. 11-58, ✉ petrovets@prognoz.ru,

Дмитрий Леонидович Андрианов — д-р физ.-мат. наук, зав. кафедрой, профессор, Пермский государственный национальный исследовательский университет; ген. директор, ЗАО «Прогноз», г. Пермь, ☎ (342) 237-17-53, ✉ andrianov@econ.psu.ru.

ПОЗИЦИОНИРОВАНИЕ ПОДВИЖНЫХ ОБЪЕКТОВ В НИЗКОЧАСТОТНОМ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОМ ПОЛЕ.

Ч. I. Базовый алгоритм относительного позиционирования

А.К. Волковицкий, Е.В. Каршаков, Б.В. Павлов

Решена задача относительного позиционирования подвижного объекта в низкочастотном электромагнитном поле. Изложены теоретические предпосылки углового и пространственного относительного позиционирования, а также базовый алгоритм решения. Приведены практические результаты, полученные для высокоточного определения расстояний и углов в системе «самолет-буксировщик — буксируемый объект».

Ключевые слова: относительное позиционирование, электромагнитная система, подвижный объект.

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность развития методов точного определения координат и углов ориентации того или иного объекта по отношению к некоторой заданной системе координат трудно переоценить. Определение пространственных и угловых координат движущихся объектов лежит в основе решения многих важных научных и технических задач. Управление мобильными роботами, беспилотными и пилотируемыми летательными аппаратами невозможно без точного определения их пространственных координат и угловой ориентации.

Особое место занимают задачи высокоточного управления объектами: маневрирование вблизи поверхности земли, выполнение посадки летательного аппарата, осуществление взаимодействия объектов в группе, стыковка подвижных объектов и пр. Для решения такого рода задач требуется особая точность определения навигационных параметров в весьма ограниченной в пространстве зоне взаимодействия [1].

Среди систем относительного позиционирования важное место занимают низкочастотные электромагнитные системы. Первые упоминания о них относятся к 1970 гг. [2]. Теоретические предпосылки функционирования электромагнитных сис-

тем позиционирования основываются на свойствах магнитного поля, возбуждаемого искусственными источниками, а именно: зависимостью модуля вектора напряженности от расстояния до источника и зависимостью направления этого вектора от углового положения приемника относительно источника.

Идея метода состоит в генерации детерминированного переменного магнитного поля в зоне перемещений позиционируемого объекта и измерении компонент вектора напряженности этого поля подвижным приемником. Сопоставление результатов векторных измерений с расчетными или экспериментально измеренными параметрами пространственного распределения значений вектора напряженности поля позволяет определить положение подвижного объекта. В классической постановке для решения этой задачи применяются корреляционно-экстремальные методы [3].

Устройства, работающие на принципах электромагнитного позиционирования, весьма разнообразны по назначению и особенностям конструкции, однако общим для них является прием сигналов искусственного источника (или системы источников) магниточувствительным приемником (или системой приемников). В частности, такие устройства применяются для контроля положения головы пилота в кабине летательного аппарата для

визирования на отражающее стекло его шлема дополнительной информации, в некоторых системах виртуальной реальности, в медицинских приборах (определяется положение миниатюрного приемника-капсулы внутри тела пациента). В России основные теоретические и практические результаты по электромагнитному позиционированию получены М.В. Желамским [4, 5].

Для определения координат при электромагнитном позиционировании в классической постановке используется априорная информация о пространственной структуре поля, которая либо вычисляется, либо синтезируется путем трехмерного картографирования, а для расчета координат применяются итерационные методы [4].

Для решения задачи относительного позиционирования Р. Смит [6] предложил следующий подход. Пусть поле возбуждения есть поле единственного точечного магнитного диполя. Тогда компоненты поля в любой точке пространства в системе координат, связанной с диполем, выражаются вполне определенными соотношениями [7]. При заданных параметрах магнитного момента диполя из этих соотношений можно определить параметры взаимного расположения передатчика и приемника, однако лишь при условии, что компоненты векторов момента магнитного диполя передатчика и напряженности магнитного поля определены в одной и той же системе координат. Поскольку разработки Р. Смита посвящены оценке положения буксируемого объекта относительно самолета-буксировщика, такой подход в некотором смысле оправдан. И самолет-буксировщик, и буксируемый объект в обычных условиях полета ориентируются в пространстве вдоль траектории своего движения, наклон которой к горизонту невелик и обычно не превышает $2-4^\circ$. Хотя для корректной работы предложенного метода и требуется сторонняя информация о взаимной ориентации передатчика и приемника, применительно к данному случаю можно в первом приближении полагать, что направление осей чувствительности приемника неизменно относительно системы координат передатчика.

В свете изложенного весьма привлекательным представляется распространение метода Р. Смита на общий случай произвольного пространственного и углового движения приемника относительно передатчика. Решению этой задачи и посвящена настоящая статья.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть в некоторой точке пространства, совмещенной с началом произвольно выбранной базовой системы координат (рис. 1), располагается точечный магнитный диполь с дипольным момен-

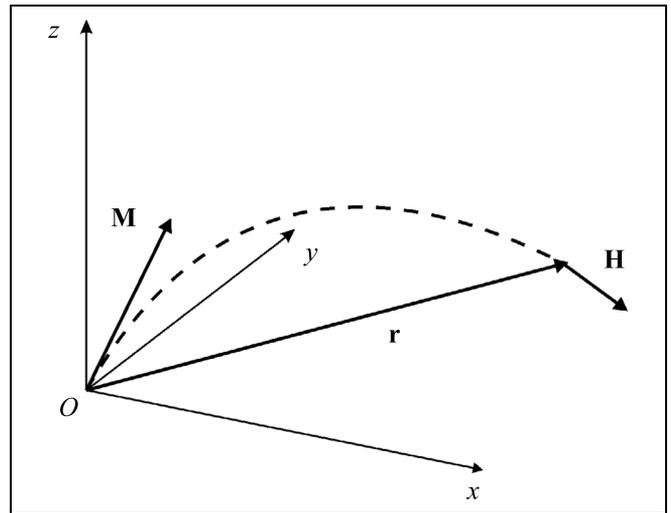


Рис. 1. Поле точечного магнитного диполя

том, заданным вектором \mathbf{M} . Тогда в произвольной точке пространства, координаты которой в базовой системе координат задаются радиус-вектором \mathbf{r} , вектор напряженности магнитного поля \mathbf{H} определяется выражением [7]

$$\mathbf{H} = \frac{1}{4\pi|\mathbf{r}|^3} (3\mathbf{e}_R(\mathbf{e}_R, \mathbf{M}) - \mathbf{M}),$$

которое тождественными преобразованиями может быть приведено к более удобному виду

$$\mathbf{H} = \frac{1}{4\pi|\mathbf{r}|^3} (3\mathbf{e}_R\mathbf{e}_R^T - \mathbf{E})\mathbf{M} = \mathbf{\Omega}(\mathbf{r})\mathbf{M},$$

где $\mathbf{e}_R^T\mathbf{e}_R = (\mathbf{e}_R, \mathbf{e}_R) = 1$, $\mathbf{e}_R\mathbf{e}_R^T = \begin{pmatrix} e_x e_x & e_x e_y & e_x e_z \\ e_y e_x & e_y e_y & e_y e_z \\ e_z e_x & e_z e_y & e_z e_z \end{pmatrix}$,

$$\mathbf{e}_R = \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|}.$$

Здесь \mathbf{e}_R — единичный вектор, направленный вдоль вектора \mathbf{r} , $\mathbf{\Omega}(\mathbf{r})$ — действительная матрица, определяющая связь между вектором напряженности поля \mathbf{H} в точке \mathbf{r} и вектором момента возбуждающего диполя \mathbf{M} , \mathbf{E} — единичная матрица.

Матрица $\mathbf{\Omega}(\mathbf{r})$ является невырожденной везде, где она определена, т. е. везде, кроме точки $\mathbf{r} = 0$. Следовательно, везде существует и обратная матрица, $\mathbf{\Theta}(\mathbf{r})$, такая что $\mathbf{M} = \mathbf{\Theta}(\mathbf{r})\mathbf{H}$, где $\mathbf{\Theta}(\mathbf{r}) = \mathbf{\Omega}^{-1}(\mathbf{r}) = = 2|\mathbf{r}|^3(3\mathbf{e}_R\mathbf{e}_R^T - 2\mathbf{E})$. При фиксированном направлении вектора \mathbf{e}_R с изменением расстояния меняется только модуль вектора \mathbf{H} как $1/|\mathbf{r}|^3$. Очевидно, таким же свойством обладает и матрица $\mathbf{\Theta}(\mathbf{r})$: при



фиксированном направлении \mathbf{e}_R с изменением расстояния меняется только модуль вектора \mathbf{M} как $|\mathbf{r}|^3$.

Идея предлагаемого метода определения пространственных и угловых координат может быть представлена следующим образом. Разместим в начале некоторой базовой системы координат три точечных источника переменного магнитного поля, работающие на разных частотах, чтобы вектор напряженности поля каждого из них можно было измерить независимо от двух других (рис. 2).

Пусть также в некоей произвольной точке пространства, определяемой в базовой системе координат радиус-вектором \mathbf{r} , располагается измеритель векторов магнитного поля, оси чувствительности которого взаимно перпендикулярны и задают систему координат приемника, в общем случае развернутую относительно осей базовой системы координат на углы, определяемые ортогональной матрицей \mathbf{R} , $\mathbf{R}^{-1} = \mathbf{R}^T$. Тогда векторы поля каждого из трех передающих диполей, измеряемые этим приемником, определяются как

$$\mathbf{H}_i = \mathbf{R}\Omega(\mathbf{r})\mathbf{M}_i, \quad i = 1, 2, 3.$$

Для каждого из трех векторов измеренного поля значение вектора возбуждающего момента в системе координат приемника определяется как

$$\mathbf{M}_i = \Theta(\mathbf{r})\mathbf{R}^T\mathbf{H}_i, \quad i = 1, 2, 3. \quad (1)$$

Систему из этих трех алгебраических уравнений можно решить относительно элементов матрицы $\mathbf{R}\Omega(\mathbf{r})$ или $\Theta(\mathbf{r})\mathbf{R}^T$ при известных значениях \mathbf{M}_i и \mathbf{H}_i в какой-нибудь одной из систем координат. Однако такое решение не представляет практического интереса, поскольку при этом элементы матриц \mathbf{R}^T и $\Theta(\mathbf{r})$ по отдельности оказываются не определенными.

Поставим задачу: найти решение, которое позволит определить именно элементы каждой из

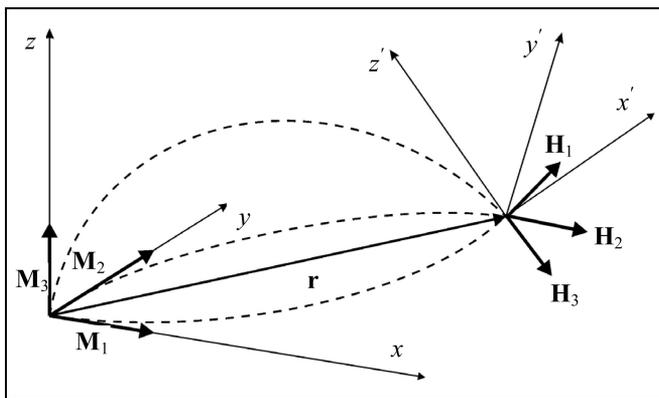


Рис. 2. К постановке задачи позиционирования

матриц — и $\Theta(\mathbf{r})$, и \mathbf{R} , что, в свою очередь, позволит вычислить и компоненты вектора, задающего положение точки измерения в системе координат диполей, и углы поворота системы координат приемника относительно системы координат, заданной системой диполей передатчика.

2. РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ОТНОСИТЕЛЬНОГО ПОЗИЦИОНИРОВАНИЯ

Пользуясь тем, что значения скалярных произведений векторов не зависят от поворота системы координат, а также преобразованием (1), выпишем выражения для скалярных произведений

$$\begin{aligned} (\mathbf{M}_i, \mathbf{M}_j) &= (\mathbf{M}_i^T \mathbf{R}^T)(\mathbf{R} \mathbf{M}_j) = \\ &= (\mathbf{H}_i^T \mathbf{R} \Theta^T(\mathbf{r}) \mathbf{R}^T)(\mathbf{R} \Theta(\mathbf{r}) \mathbf{R}^T \mathbf{H}_j), \\ & \quad i, j = 1, 2, 3; \quad j \geq i. \end{aligned} \quad (2)$$

Система уравнений (2) интересна тем, что уравнения справедливы при любом значении ортогональной матрицы \mathbf{R} , и, в то же время, само значение этой матрицы исключено из уравнений автоматически, так как скалярное произведение векторов и квадраты их длины инвариантны к любому повороту системы координат. Полученные выражения содержат только известные величины и искомые элементы матрицы $\Theta(\mathbf{r})$. После раскрытия скобок и необходимых тождественных преобразований система (2) приобретает вид:

$$\begin{aligned} &3e_x e_x (H_{ix} H_{jx}) + 3e_x e_y (H_{ix} H_{jy} + H_{jx} H_{iy}) + \\ &+ 3e_x e_z (H_{ix} H_{jz} + H_{jx} H_{iz}) + 3e_y e_y (H_{iy} H_{jy}) + \\ &+ 3e_y e_z (H_{iy} H_{jz} + H_{jy} H_{iz}) + 3e_z e_z (H_{iz} H_{jz}) + \frac{(\mathbf{M}_i, \mathbf{M}_j)}{4\pi^2 |\mathbf{r}|^6} = \\ &= 4(H_{ix} H_{jx} + H_{iy} H_{jy} + H_{iz} H_{jz}); \\ & \quad i, j = 1, 2, 3, \quad j \geq i. \end{aligned} \quad (3)$$

включая условие нормировки $e_x e_x + e_y e_y + e_z e_z = 1$.

Полученная система уравнений нелинейна и избыточна, поскольку имеется семь уравнений при четырех неизвестных e_x , e_y , e_z и $|\mathbf{r}|$. Однако при замене переменных:

$$\begin{aligned} v_1 &= e_x e_x, & v_2 &= e_x e_y, & v_3 &= e_x e_z, \\ v_4 &= e_y e_y, & v_5 &= e_y e_z, \\ v_6 &= e_z e_z, \\ v_7 &= \frac{1}{4\pi |\mathbf{r}|^6}, \end{aligned} \quad (4)$$

система (3) превращается в систему линейных уравнений и может быть однозначно решена относительно этих новых переменных любым удобным методом, в том числе, и методом исключе-

ний Гаусса, после чего с точностью до знака могут быть получены значения $e_x = \pm v_1^{1/2}$, $e_y = \pm v_4^{1/2}$, $e_z = \pm v_6^{1/2}$.

Найденные абсолютные значения направляющих косинусов, с учетом возможных вариантов расстановки знаков, задают в базовой системе координат передатчика восемь возможных направлений расположения приемника. Кроме того, полученные значения переменных $v_2 = e_x e_y$, $v_3 = e_x e_z$, $v_5 = e_y e_z$ не должны противоречить выбираемым знакам направляющих косинусов. В таблице символически показано возможное сочетание знаков направляющих косинусов и знаков переменных v_2 , v_3 , v_5 .

В соответствии с таблицей решению системы уравнений (3) относительно переменных (4) удовлетворяют две симметрично расположенные точки возможного положения измерителя, что отвечает свойству четности для функции поля точечного диполя, расположенного в начале системы координат: $\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \mathbf{H}(-\mathbf{r})$.

Располагая теперь информацией о пространственном положении каждой из двух получившихся в результате решения точек в системе координат передатчика, нетрудно определить и параметры матрицы поворота \mathbf{R} , являющейся матрицей ориентации системы координат приемника относительно системы координат передающих диполей. Для этого следует решить систему уравнений поля (1), полагая теперь известными коэффициенты оператора $\Theta(\mathbf{r})$, относительно элементов матрицы \mathbf{R} .

Обе полученные точки соответствуют возможному положению точки измерения поля. Более того, для обеих точек матрица поворота чувствительных осей приемника относительно базовой системы координат оказывается одинаковой.

Итак, задача позиционирования решена. Зная параметры векторов дипольных моментов трех пе-

редающих диполей в базовой системе координат и значения векторов напряженности поля в системе координат приемника, удалось с точностью до направления вдоль прямой вычислить значение радиуса-вектора положения точки измерения в базовой системе координат и коэффициенты матрицы поворота системы координат приемника относительно базовой. Задача выбора одной актуальной точки из двух потенциально возможных может быть решена с привлечением весьма грубой дополнительной информации. Например, если передатчик располагается на земле, а приемник на борту движущегося в воздухе летательного аппарата, то выбор единственной точки очевиден.

Соответствующая описанному методу система углового и пространственного относительного позиционирования представляет собой низкочастотный магнитный маяк.

3. ЭЛЕКТРОМАГНИТНАЯ СИСТЕМА ОТНОСИТЕЛЬНОГО ПОЗИЦИОНИРОВАНИЯ АЭРОЭЛЕКТРОРАЗВЕДЧНОГО КОМПЛЕКСА ЕМ4Н

Работоспособность изложенного метода была проверена при полетах с электроразведочной системой ЕМ4Н [8, 9].

Аэроэлектроразведочный комплекс ЕМ4Н предназначен для дистанционного определения электромагнитных характеристик геологической среды (сопротивление, проводимость, поляризуемость), зная которые, можно получить ценную информацию о геологическом строении изучаемого района.

Передатчик, установленный на борту самолета или вертолета, диполь которого представляет собой воздушную катушку с вертикальным вектором момента, возбуждает в пространстве переменное магнитное поле. Индукционный приемник располагается в специальной гондоле, буксируемой за самолетом при помощи троса-кабеля длиной 80 м.

Главная особенность электроразведочной системы такого типа заключается в том, что без привлечения дополнительной информации о взаимном расположении передатчика и приемника невозможно решить задачу отделения вторичного поля, пришедшего от горных пород, от первичного поля, создаваемого передатчиком, а также от поля отклика от проводящих элементов фюзеляжа летательного аппарата, располагающегося также в поле возбуждения. Интеграция в состав комплекса электромагнитной системы относительного позиционирования позволила определить угловые и пространственные параметры взаимного положения передатчика и приемника, что, в свою очередь, позволило выделить сигнал отклика от гео-

Определение знаков направляющих косинусов

e_x	e_y	e_z	$e_x e_y$	$e_x e_z$	$e_y e_z$
-	-	-	+	+	+
+	+	+			
-	+	+	-	-	+
+	-	-			
-	-	+	+	-	-
+	+	-			
-	+	-	-	+	-
+	-	+			

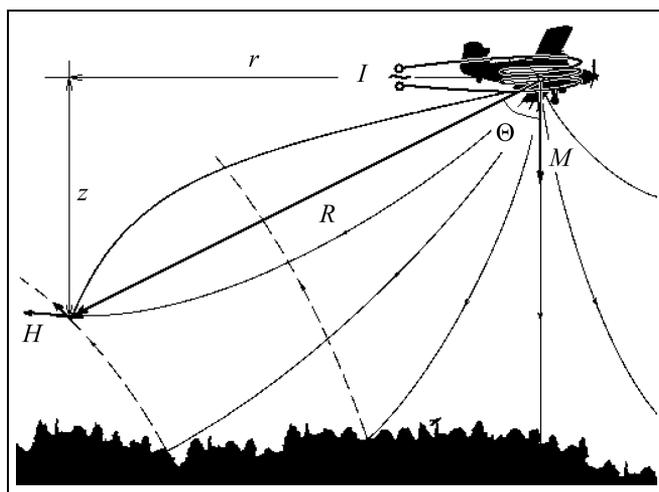


Рис. 3. К пояснению принципа действия электроразведочной системы EM4H

логической среды, необходимый для дальнейшей геолого-геофизической интерпретации. Принцип работы системы поясняется рис. 3.

Для обеспечения работы системы относительного позиционирования в дополнение к основному вертикальному зондирующему диполю, на борту летательного аппарата установлены два ортогональных горизонтальных диполя, а в программном обеспечении комплекса реализован изложенный ранее алгоритм относительного позиционирования. В результате для каждой точки измерения оказываются вычисленными параметры взаимного пространственного расположения и взаимной угловой ориентации приемника и передатчика.

Для оценки точности предложенного метода на борту летательного аппарата и в выпускной гондоле были установлены ГНСС-приемники, что позволило в дифференциальном режиме определить расстояние между летательным аппаратом и гондолой с высокой точностью.

При выполнении полетов для проверки работоспособности алгоритмов было специально нарушено главное условие метода Р. Смита. Буксируемая гондола была искусственно дестабилизирована. Обычно, обладающая хорошей аэродинамикой и ориентированная вдоль траектории движения, в условиях дестабилизации гондола совершала сложное колебательное движение в значительном диапазоне углов.

Качество работы алгоритмов системы относительного позиционирования можно определить путем сравнения геометрических параметров, полученных в ходе этого эксперимента различными методами. Результаты сравнения приведены на графиках.

На рис. 4. показано сравнение вычисленных значений углов и расстояния между передатчиком и приемником. Хорошо видно, что счисление расстояния между передатчиком и приемником по методу Р. Смита не вполне адекватно, особенно в условиях динамичного углового движения буксируемой гондолы. В то же время видно, что значения расстояний, вычисленные с помощью алгоритмов электромагнитной системы позиционирования вполне соответствуют длинам векторов базовой линии, полученным с помощью дифференциального режима ГНСС.

Незначительное их расхождение не является ошибкой и обусловлено тем, что антенна ГНСС-приемника на фюзеляже вертолета располагается не в точке эффективного центра дипольной возбуждающей системы, а также тем, что и в буксируемой гондоле положение антенны смещено относительно центра чувствительности индукционного датчика.

На рис. 4 также приведены результаты вычислений значения угла направления на гондолу — Θ , измеренного относительно направления вертикального диполя передатчика для электромагнитных методов, и относительно местной вертикали для ГНСС. Из рисунка также видно, что значение

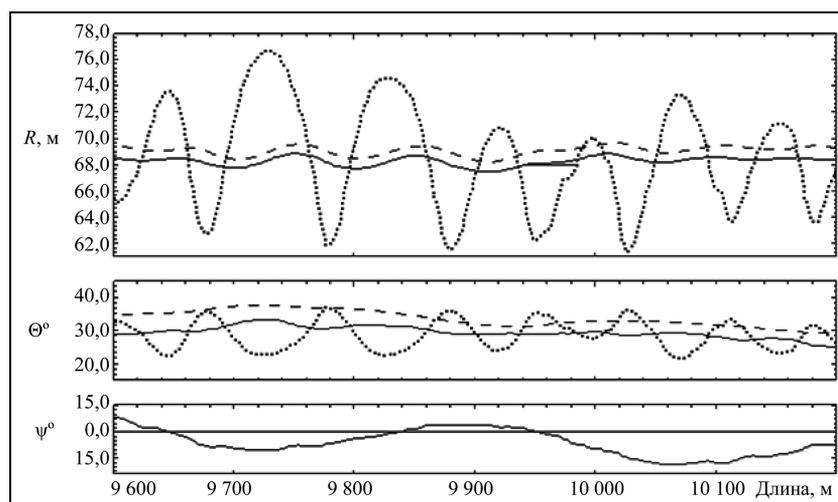


Рис. 4. Счисление расстояний и углов относительного позиционирования: --- R_{GPS} — длина базовой линии между передатчиком и приемником, измеренное с помощью дифференциального режима ГНСС; — R_{EM} — расстояние, вычисленное с использованием алгоритмов электромагнитной системы относительного позиционирования; ····· R_{Sm} — значение расстояния, вычисленное по методу Р. Смита

угла определяется по методу Р. Смита с существенными ошибками, обусловленными влиянием эволюций гондолы. В то же время, при сравнении с результатами дифференциального режима ГНСС видно, что значение этого угла, вычисленное с помощью электромагнитной системы относительного позиционирования, определено достаточно точно. Незначительное расхождение кривых также не является следствием ошибок, а обусловлено тем, что при дифференциальном ГНСС-счислении значение угла определяется в географической системе координат, в то время как электромагнитная система относительного позиционирования вычисляет этот угол в системе координат, связанной с летательным аппаратом. Таким образом, расхождение обусловлено изменением углов тангажа вертолета и гондолы.

Приведенное на нижнем графике изменение значения угла Ψ отклонения гондолы от продольной вертикальной плоскости не измеряется ни средствами ГНСС, ни по методу Р. Смита, но вполне уверенно вычислено по предложенному методу.

Из приведенных данных хорошо видно, что метод, предложенный Р. Смитом, в условиях динамичного полета теряет адекватность. Вычисленные по этому методу значения расстояний и углов в системе «передатчик — приемник» отклоняются от измеренных с помощью дифференциальной пары ГНСС-приемников весьма значительно, что, безусловно, является следствием ошибочности предположения о параллельности осей чувствительности приемных рамок осей системы координат передатчика. В то же время, сопоставление результатов определения геометрических параметров, полученных с помощью реализованного в системе EM-4N алгоритма электромагнитного относительного позиционирования с результатами дифференциального ГНСС-счисления показывает их хорошее соответствие. Незначительные отличия в значениях полученных параметров вполне объяснимы и возникают прежде всего из-за того, что дифференциальное ГНСС-счисление вектора базовой линии осуществляется в географической системе координат, в то время как счисление геометрических параметров в электромагнитной системе относительного позиционирования — в системе координат, связанной с передатчиком (летательным аппаратом), а также из-за того, что антенны ГНСС-приемников и на летательном аппарате, и на буксируемой гондоле размещены в точках, не совпадающих с расположением эффективного центра системы передающих диполей и центра чувствительности приемных рамок, соответственно.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Теоретически доказано, что зная свойства передающей дипольной системы и измерив параметры векторов поля в произвольной точке пространства, можно, решая систему линейных уравнений, определить с точностью до направления вдоль прямой длину и направляющие косинусы радиуса-вектора положения точки измерения в системе координат, связанной с передатчиком, а также углы поворота чувствительных осей приемника в этой системе.

Результаты, полученные в ходе летных экспериментов с помощью низкочастотной магнитной системы относительного позиционирования, показали высокую эффективность применяемых алгоритмов и в настоящее время внедрены в практику применения электроразведочной системы EM4N, что, в свою очередь, обеспечивает высокое качество получаемой геофизической информации.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Радиогеодезические* и электрооптические измерения / В.Д. Большаков, Ф. Деймлих, А.Н. Голубев, В.П. Васильев. — М.: Недра, 1985. — 303 с.
2. *Raab F.H. Remote Object Position Locater / USA Patent 405488, G01S 3/02. The Austin Company, 1977.*
3. *Желамский М.В.* Первый отечественный магнитный трекер для целеуказания // Датчики и системы. — 2011. — № 1. — С. 9—15.
4. *Желамский М.В.* Полное позиционирование подвижных объектов при помощи одной измерительной системы // Авиакосмическое приборостроение. — 2006. — № 8. — С. 9—17.
5. *Желамский М.В.* Первая отечественная система магнитного позиционирования // Датчики и системы. — 2009. — № 1. — С. 2—7.
6. *Smith R.S.* Tracking the Transmitting-Receiving Offset in Fixed-Wing Transient EM Systems: Methodology and Application // Exploration Geophysics. — 2001. — N 32. — P. 014—019.
7. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теоретическая физика: уч. пособие в 10 т. Т. II. Теория поля. — М.: Наука, 1988. — 512 с.
8. *Волковицкий А.К., Каршаков Е.В., Мойлайнен Е.В.* Низкочастотная индуктивная аэроразведочная система EM-4N // Записки Горного института. — 2009. — Т. 183. — С. 224—227.
9. *Павлов Б.В., Волковицкий А.К., Каршаков Е.В.* Низкочастотная электромагнитная система относительной навигации и ориентации // Гиропропия и навигация. — 2010. — № 1 (68). — С. 3—15.

Статья представлена к публикации членом редколлегии В.Н. Афанасьевым.

Андрей Кириллович Волковицкий — вед. инженер,
☎ (495) 334-90-80, ✉ avolkovitsky@yandex.ru,

Евгений Владимирович Каршаков — канд. физ.-мат. наук,
ст. науч. сотрудник, ☎ (495) 334-90-80, ✉ karshak@mail.ru,

Борис Викторович Павлов — д-р техн. наук, гл. науч. сотрудник,
☎ (495) 334-93-51, ✉ pavlov@ipu.ru,

Институт проблем управления им. В.А.Трапезникова РАН,
г. Москва.



СИНТЕЗ НЕЛИНЕЙНОГО ЗАКОНА УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ ПЕРЕЗАКРУТКИ УПРУГОГО СПУТНИКА СЛАБЫМИ ВНУТРЕННИМИ МОМЕНТАМИ¹

Е.И. Сомов

Рассмотрены принципиальные аспекты синтеза закона управления для перезакрутки спутника с целью совмещения вектора угловой скорости, направленного по оси наибольшего момента инерции его корпуса, с произвольно заданным направлением в инерциальной системе координат. Используются только слабые внутренние управляющие моменты, которые формируются силовым гироскопическим комплексом с ограниченными ресурсами.

Ключевые слова: космический аппарат, внутренние управляющие моменты, перезакрутка.

ВВЕДЕНИЕ

По легенде, осознав значение своего открытия свойств рычага, выдающийся древнегреческий математик, механик и инженер Архимед в III веке до н. э. воскликнул: «Дайте мне точку опоры, и я переверну Землю!». В данной статье решается близкая по смыслу задача, но рассматривается «переворот» применительно к перспективной космической технике и без какой-либо «точки опоры». Академик В.М. Матросов кратко называл эту проблему «задачей Титова» в связи с его учеником Г.П. Титовым (ОАО «Информационные спутниковые системы им. акад. М.Ф. Решетнева»), который впервые сформулировал ее в 2000 г. для специалистов в области теоретической механики и теории управления движением.

Современные спутники с 15-летним сроком активного существования для высокоточной коррекции их орбитального движения оснащаются двигательной установкой на основе плазменных РД, которые имеют высокий удельный импульс и большое энергопотребление. При проектировании малых спутников (массой от 500 до 1000 кг, например, спутников связи на базе платформы «Экспресс-1000» ИСС им. акад. М.Ф. Решетнева), рационально применять только плазменные РД во

всех режимах управления как поступательным, так и вращательным движением КА. Однако такому подходу свойственны ограничения [1]:

— при групповом выводе малых спутников в процессе отделения их от ракеты-носителя каждый КА может обладать вектором начальной угловой скорости *произвольного направления* с модулем до 20°/с; при таком вращении КА электроэнергия, требуемая для его бортового оборудования, обеспечивается панелями солнечных батарей или химическими аккумуляторами, причем энергия, генерируемая фотоэлементами панелей, зависит от угла между нормалью к их активной поверхности и направлением на Солнце;

— плазменные РД обладают малыми значениями тяги (~0,03...0,1 Н) и, следовательно, способны создавать только малые управляющие моменты, что обуславливает длительное время, необходимое для успокоения КА;

— плазменные РД могут использоваться на борту КА только после некоторого временного интервала T_a их технологической подготовки для активизации, который в зависимости от типа РД может составлять от нескольких часов до нескольких суток после отделения;

— строгие требования, предъявляемые к массе системы управления движением малого спутника, приводят к тому, что доступный вектор кинетического момента СГК на основе реактивных маховиков либо гироскопов существенно меньше по модулю вектора КМ корпуса спутника в момент его отделения.

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 11-08-01037) и Отделения ЭММПУ РАН (Программа фундаментальных исследований № 14).

Принятые сокращения:

КА — космический аппарат;
 КМ — кинетический момент;
 РД — реактивный двигатель;
 СГК — силовой гироскопический комплекс;
 ССК — связанная с корпусом КА система координат;
 ТТ — твердое тело.

Проблема состоит в обеспечении такого движения КА после его отделения, при котором удовлетворяются энергетические условия работоспособности системы управления *без использования* плазменных РД. Далее после временного интервала T_a активизации плазменные РД способны завершить успокоение КА и установить его ориентацию относительно направления на Солнце.

Подход к решению этой проблемы основывается на двух принципиальных положениях:

- плазменные РД применяются как для управления ориентацией КА и разгрузки СГК от вектора накопленного КМ, так и для управления поступательным движением центра масс КА — решения задачи коррекции его орбитального движения;
- в начальном режиме движения КА сразу же после его отделения применяется только СГК малой массы, имеющий малые ресурсы по доступному вектору КМ, без включения плазменных РД в контур управления.

В момент времени отделения t_0 вектор КМ корпуса КА $\mathbf{K}_0 \equiv \mathbf{J}\boldsymbol{\omega}(t_0) = \mathbf{G}_0$ имеет произвольное направление, поэтому главная задача состоит в совмещении этого вектора с осью Oy максимального момента инерции корпуса КА, используя при этом только СГК, имеющего малые ресурсы по размерам областей вариации векторов его кинетического $\mathbf{H}(t)$ и управляющего $\mathbf{M}(t)$ моментов. Существенно нелинейные динамические процессы возникают при перемещении вектора $\mathbf{G}(t) = \mathbf{J}\boldsymbol{\omega}(t) + \mathbf{H}(t)$ суммарного КМ механической системы относительно ССК $Oxyz$. При этом на борту КА включается малогабаритный датчик Солнца, с помощью которого определяется направление на Солнце в ССК, и, при необходимости, панели солнечных батарей разворачиваются на некоторый угол γ^p , где $0 \leq \gamma^p \leq 270^\circ$. В результате предлагаемой перезакрутки корпуса КА вектор его угловой скорости будет направлен по оси Oy ССК, которая перпендикулярна оси вращения панелей.

В предельных случаях, в зависимости от начальных положений вектора \mathbf{G} и орта \mathbf{S} направления на Солнце, панели солнечных батарей будут освещаться Солнцем либо непрерывно, когда век-

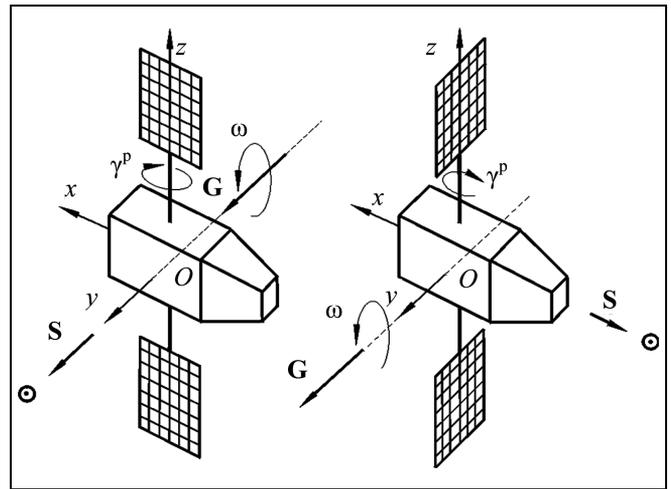


Рис. 1. Расположения космического аппарата относительно Солнца

торы \mathbf{G} и \mathbf{S} совмещены, либо периодически, когда эти векторы перпендикулярны (рис. 1). На этом этапе миссии спутника СГК формирует *внутренние* управляющие моменты и плазменные РД не используются. На следующем этапе начальных режимов системы управления плазменные РД включаются и создают *внешние* управляющие моменты для полного успокоения спутника. Современное состояние рассматриваемой научной проблемы подробно представлено в предыдущих работах [2, 3]. В данной статье намеренно рассматриваются только принципиальные аспекты синтеза нелинейного закона управления для совмещения оси Oy ССК с вектором КМ спутника при отсутствии всех внешних возмущающих моментов. Решение данной весьма непростой задачи теоретической механики и теории управления движением основывается на строгом доказательстве устойчивости требуемого вращения КА. Полученные результаты компьютерной имитации нелинейных колебаний при перезакрутке упругого КА, которые затухают на завершающем этапе этого процесса, подтверждают эффективность предложенного закона управления КА только внутренними моментами, реализуемыми СГК.

1. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ

Модель динамики КА как свободного твердого тела с одной закрепленной точкой и некоторым СГК имеет известный вид:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{K}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{G} &= \mathbf{M} \equiv -\dot{\mathbf{H}}; & \mathbf{K} &= \mathbf{J}\boldsymbol{\omega}; \\ \mathbf{G} &= \mathbf{K} + \mathbf{H}. \end{aligned} \quad (1)$$



Здесь векторы-столбцы \mathbf{G} , $\mathbf{K} = \{K_x, K_y, K_z\}$ и $\mathbf{H} = \{H_x, H_y, H_z\}$ соответствующих векторов КМ представлены в ССК и для простоты предполагается, что в ССК Ox_cz_c тензор инерции корпуса КА вместе с неподвижным СГК является диагональным, т. е. $\mathbf{J} = \text{diag}\{J_x, J_y, J_z\}$. Рассматриваются СГК двух типов — на основе четырех реактивных маховиков по схеме GE и на основе четырех гиродинов по схеме $2-SPE$, представленных в приборной канонической системе координат на рис. 2. Форма выпуклых областей допустимой вариации вектора КМ таких СГК определяется углами γ^w и γ^g соответственно, а их требуемое расположение достигается положением приборной системы координат $Ox_c^g y_c^g z_c^g$ в ССК.

При наличии ограничений на модули векторов кинетического момента и управляющего момента каждого реактивного маховика

$$|\mathbf{h}_p(t)| \leq h^{\max}, \quad |\mathbf{M}_p(t)| \leq M^{\max}, \quad p = 1, \dots, 4,$$

либо ограничений на модуль скорости поворота каждого гиродина относительно оси его подвеса

$$|\dot{\beta}_p(t)| \leq u^{\max}, \quad p = 1, \dots, 4,$$

векторы кинетического \mathbf{H} и управляющего $\mathbf{M} \equiv -\dot{\mathbf{H}}$ моментов СГК будут ограничены.

Простейшая модель динамики КА как свободного упругого тела с СГК при стандартных обозначениях представляется в векторно-матричном виде

$$\begin{bmatrix} \mathbf{J} & \mathbf{D}_q \\ \mathbf{D}_q^t & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{\omega}} \\ \dot{\mathbf{q}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{M} - \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{G} \\ -(\delta/\pi)\boldsymbol{\Omega}\dot{\mathbf{q}} - \boldsymbol{\Omega}^2\mathbf{q} \end{bmatrix},$$

где вектор КМ механической системы $\mathbf{G} = \mathbf{K} + \mathbf{H} + \mathbf{D}\dot{\mathbf{q}}$ и диагональная матрица $\boldsymbol{\Omega}$ составлена из собственных парциальных частот упругих колебаний конструкции КА.

2. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть в начальный момент t_0 вектор КМ $\mathbf{H}(t_0)$ силового гироскопического комплекса равен нулю. Модуль вектора КМ корпуса КА как твердого тела в начальный момент времени t_0 предполагается ограниченным, т. е. $\|\mathbf{K}_0\| \leq k_0^*$, где $k_0^* > 0$, но направление этого вектора произвольное. Поэтому в момент времени $t = t_0$ модуль вектор КМ $\mathbf{G}_0 = \mathbf{K}_0$ всей механической системы также ограничен:

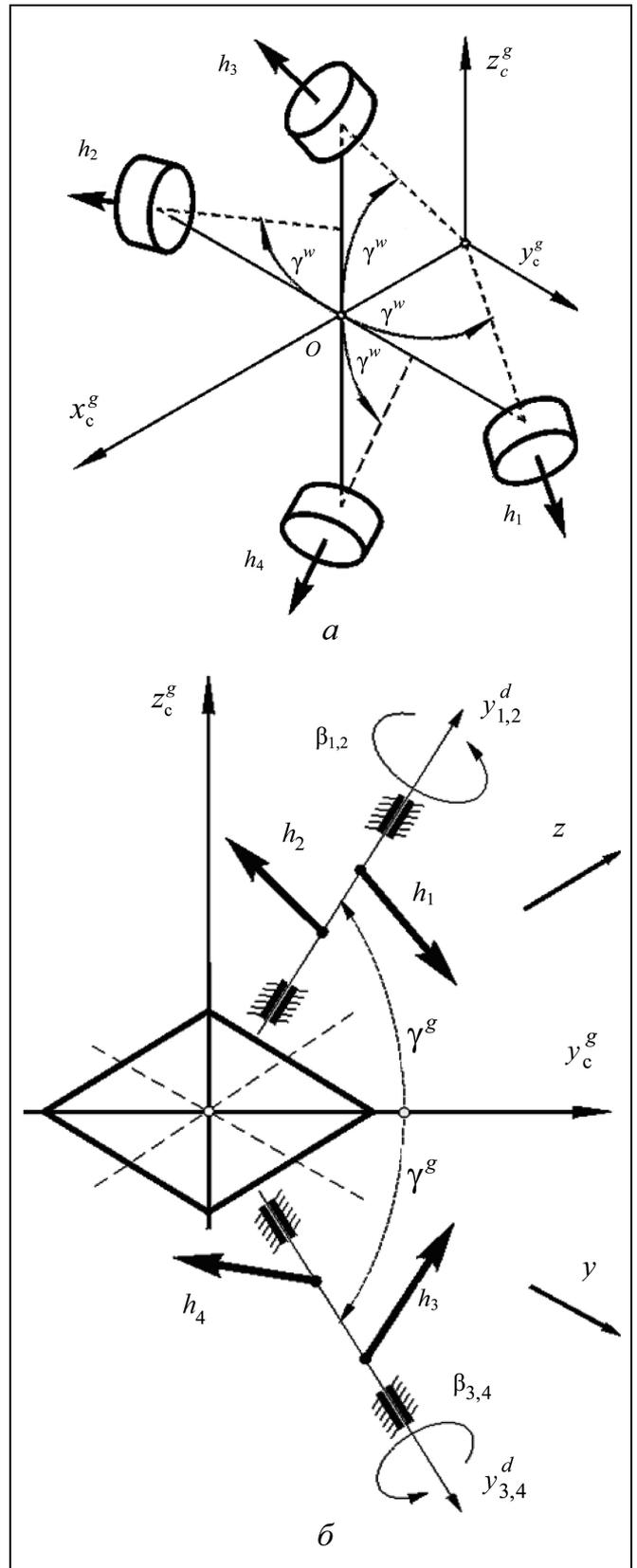


Рис. 2. Схема силового гироскопического комплекса на основе: а — реактивных маховиков; б — гиродинов

$\|\mathbf{G}_0\| \equiv g_0 \leq g_0^* = k_0^*$. Инерционные параметры спутника считаются известными и предполагается возможность измерения векторов $\boldsymbol{\omega}(t) = \{\omega_x, \omega_y, \omega_z\}$ и $\mathbf{H}(t)$. Введем фиксированный в ССК орт $\mathbf{f} = \mathbf{e}_y = \{0, 1, 0\}$, который направлен по оси Oy максимального момента инерции корпуса КА либо противоположен ему, тогда орт $\mathbf{f} = -\mathbf{e}_y = \{0, -1, 0\}$. Проблема состоит в синтезе закона управления СГК $\mathbf{M} = \mathbf{M}(\boldsymbol{\omega}, \mathbf{H})$, который обеспечивает выполнение условий $\mathbf{K}_f = \mathbf{J}\boldsymbol{\omega}_f$, $\boldsymbol{\omega}_f = \boldsymbol{\omega}_f \mathbf{f}$, $\mathbf{H}_f = \mathbf{H}_f \mathbf{f}$ с заданной точностью в некоторый момент времени $t = T_f$, где $\mathbf{K}_f = \mathbf{K}(T_f)$; $\boldsymbol{\omega}_f = \boldsymbol{\omega}_f(T_f)$; $\mathbf{H}_f = \mathbf{H}(T_f)$ и $\mathbf{H}_f = \mathbf{H}(T_f)$, в частности, $\mathbf{H}_f = 0$. В последнем случае, учитывая равенство $J_y \omega_f + \mathbf{H}_f = g_0$, получаем соотношение $\omega_f = g_0/J_y$.

После решения этой принципиальной проблемы должна быть решена задача распределения вектора управляющего момента СГК $\mathbf{M} = \mathbf{M}(\boldsymbol{\omega}, \mathbf{H})$ с избыточным числом реактивных маховиков либо гиродинов между этими электромеханическими исполнительными органами. Решение такой задачи опубликовано в работе [3], и поэтому в силу ограниченности объема статьи здесь не приводится.

3. СИНТЕЗ НЕЛИНЕЙНОГО ЗАКОНА УПРАВЛЕНИЯ

В соответствии с классическими законами теоретической механики при отсутствии внешних моментов вектор суммарного КМ $\mathbf{G}(t) = \mathbf{J}\boldsymbol{\omega}(t) + \mathbf{H}(t)$ механической системы «ТТ + СГК» неподвижен в инерциальной системе координат, но кинетическая энергия вращательного движения ТТ может изменяться внутренними моментами [4]. Орт $\mathbf{g}(t) \equiv \{g_i(t)\} \equiv \mathbf{G}(t)/g_0$ указанного вектора КМ также неподвижен в инерциальной системе координат, но в ССК этот орт перемещается в соответствии с уравнением

$$\dot{\mathbf{g}}(t) = -\boldsymbol{\omega}(t) \times \mathbf{g}(t). \quad (2)$$

Пусть в процессе вращательного движения КА по измерениям векторов $\boldsymbol{\omega}(t)$ и $\mathbf{H}(t)$ в ССК вычисляются следующие функции:

- значение орта $\mathbf{g}(t) = \mathbf{G}(t)/g_0$ суммарного КМ механической системы;
- значение вектора $\boldsymbol{\xi}(t) = \mathbf{g}(t) \times \mathbf{f}$;
- значение орта $\mathbf{e}_\xi(t) = \boldsymbol{\xi}(t)/\|\boldsymbol{\xi}(t)\|$ при $\|\boldsymbol{\xi}(t)\| = S_\varphi(t) \equiv \sin\varphi(t) \geq \varepsilon_1 = \text{const} > 0$;
- косинус угла $\varphi(t)$ между ортами $\mathbf{g}(t)$ и \mathbf{f} , т. е. $C_\varphi(t) \equiv \cos\varphi(t) = \langle \mathbf{g}(t), \mathbf{f} \rangle$.

Будем также считать, что в момент времени t_0 вычисляется фиксированный индикатор $a_f = \text{Sgn} C_\varphi(t_0)$ направления орта \mathbf{f} в ССК, где $\text{Sgn} x = 1$ при $x \geq 0$ и $\text{Sgn} x = -1$ при $x < 0$. В результате орт \mathbf{f} в ССК вычисляется по соотношению $\mathbf{f} = a_f \mathbf{e}_y$. В ССК векторное рассогласование $\boldsymbol{\eta}(t)$ между действительным и требуемым положениями вектора угловой скорости КА представляется в виде

$$\boldsymbol{\eta}(t) \equiv \delta\boldsymbol{\omega}(t) = \boldsymbol{\omega}(t) - \boldsymbol{\omega}_f \mathbf{f}. \quad (3)$$

При обозначении $\zeta(t) = \mathbf{g}(t) - \mathbf{f}$ в качестве меры близости ортов $\mathbf{g}(t)$ и \mathbf{f} принимается функция

$$v_p(t) \equiv v_p(\zeta(t)) = \zeta^2(t)/2 = 1 - \langle \mathbf{g}(t), \mathbf{f} \rangle \gg 0. \quad (4)$$

Эта скалярная функция принимает положительные значения при всех $\mathbf{g}(t) \neq \mathbf{f}$ и обращается в нуль только при совпадении указанных ортов. При указанном ранее выборе орта \mathbf{f} в виде $\mathbf{f} = a_f \mathbf{e}_y = a_f \{0, 1, 0\}$ всегда выполняется условие $v_p(t_0) \leq 1$. Учитывая стандартные векторные тождества $\langle \mathbf{a}, (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \rangle \equiv \langle \mathbf{b}, (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) \rangle \equiv \langle \mathbf{c}, (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \rangle$ и соотношение для локальных производных векторов в ССК $\dot{\zeta}(t) = \dot{\mathbf{g}}(t) = -\boldsymbol{\omega}(t) \times \mathbf{g}(t)$ в силу уравнения (2) и неподвижности орта \mathbf{f} в ССК, а также выражения $\boldsymbol{\omega}(t) = \boldsymbol{\eta}(t) + \boldsymbol{\omega}_f \mathbf{f}$ из определения (3), производная функции (4) получается в виде

$$\dot{v}_p(t) = \langle \zeta(t), \dot{\zeta}(t) \rangle = \langle \boldsymbol{\xi}(t), \boldsymbol{\eta}(t) \rangle. \quad (5)$$

Векторы $\boldsymbol{\xi}(t)$ и $\zeta(t)$, характеризующие близость ортов $\mathbf{g}(t)$ и \mathbf{f} , связаны между собой важными тождествами:

$$\boldsymbol{\xi}^2 \equiv \zeta^2(1 - \zeta^2/4); \quad \zeta^2 \equiv 2\xi^2/(1 + (1 - \xi^2)^{1/2}), \quad (6)$$

причем вектор $\boldsymbol{\xi}(t)$ изменяется в ССК в соответствии с векторным уравнением

$$\dot{\boldsymbol{\xi}}(t) = \boldsymbol{\eta}(t) - \boldsymbol{\phi}, \quad \boldsymbol{\phi} \equiv \mathbf{g}(\mathbf{f}, \boldsymbol{\eta}) - \boldsymbol{\eta}(\mathbf{f}, \zeta), \quad (7)$$

где использовано векторное тождество $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{a}, \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$. Учитывая, что в ССК $\dot{\boldsymbol{\eta}}(t) = \dot{\boldsymbol{\omega}}(t)$ согласно выражению (3), а также соотношения

$$\begin{aligned} \mathbf{G}(t) &= g_0 \mathbf{g} = g_0 \mathbf{f} + g_0(\mathbf{g} - \mathbf{f}) = \mathbf{K}_f + \mathbf{H}_f + g_0 \zeta, \\ \mathbf{v} \equiv \mathbf{J}\boldsymbol{\eta} - g_0 \zeta &= -(\mathbf{H} - \mathbf{H}_f), \quad \dot{\mathbf{v}} \equiv \mathbf{J}\dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{G}, \end{aligned}$$

векторное уравнение (1) представляется в простейшей форме

$$\dot{\mathbf{v}}(t) = \mathbf{J}\dot{\boldsymbol{\eta}}(t) - g_0 \dot{\zeta}(t) = \mathbf{M} = -\dot{\mathbf{H}}. \quad (8)$$

Определенно положительная скалярная функция $v_e = v^2/(2j_h) = (\mathbf{H} - \mathbf{H}_f)^2/(2j_h)$, где постоянная



величина j_h представляет инерционные свойства СГК, характеризует кинетическую энергию СГК в его движении относительно требуемого положения равновесия в ССК. Требуемое движение ТТ $\mathbf{O}_\eta \equiv \{\xi = \mathbf{0}; \eta = \mathbf{0}\}$ представляется также в виде $\mathbf{O}_v \equiv \{\xi = \mathbf{0}; \mathbf{v} = \mathbf{0}\}$ в силу тождеств (6).

Введем обозначение $\rho^2 = \xi^2 + \eta^2$ и рассмотрим сначала случай движения ТТ в малой области $\mathbf{O} \equiv \{\|\xi\| < \varepsilon_1\} \cap \{\|\rho\| < \varepsilon_\rho\}$, когда не проявляются ограничения на вектор управляющего момента $\mathbf{M} = -\dot{\mathbf{H}}$. Для определения структуры закона формирования вектора управляющего момента СГК $\mathbf{M} = \mathbf{M}(\omega, \mathbf{H})$ введем функцию Ляпунова

$$V(\zeta, \eta) = abv_\rho(\zeta) + (a/j_h)\langle \mathbf{v}, \mathbf{P}\xi \rangle + v_e(v), \quad (9)$$

где матрица \mathbf{P} определенно положительна и $a > 0$, $b > 0$ — постоянные параметры. С учетом тождеств (6) при большом значении параметра b функция (9) является определенно положительной в отношении переменных $\zeta(\xi)$ и η . Ее производная с учетом выражений (5) и (8) имеет вид

$$\dot{V} = ab\langle \xi, \eta \rangle + [\langle \mathbf{M}, \boldsymbol{\mu} \rangle + \langle \mathbf{v}, \mathbf{P}\dot{\xi} \rangle]/j_h, \quad (10)$$

где вектор $\boldsymbol{\mu} = \mathbf{v} + a\mathbf{P}\xi$. В области \mathbf{O} закон управления СГК принимается в виде

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}_\xi \equiv -qj_h\mathbf{D}\boldsymbol{\mu} = -m[\xi + k\mathbf{D}\mathbf{v}] \quad (11)$$

с параметрами $q > 0$, $m = qj_h a > 0$, $k = 1/a > 0$ и определенно положительной матрицей $\mathbf{D} = -\mathbf{P}^{-1}$.

Теорема. Для требуемого движения \mathbf{O}_η модели механической системы (7), (8) с законом управления (11) гарантируется свойство экспоненциальной устойчивости

$$\rho(t) \leq \rho(t_0)\beta \exp(-\alpha(t - t_0)), \quad \alpha > 0, \quad \beta > 0, \quad (12)$$

для произвольного вектора начальных условий $\{\xi(t_0), \eta(t_0)\} \in \mathbf{O}_0 \subset \mathbf{O}$ при выборе достаточно большого параметра $q(g_0) > 0$.

Доказательство. Производная (10) функции (9) с учетом соотношения (11) представляется в виде

$$\dot{V} = -qa^2\langle \xi, \mathbf{P}\xi \rangle + a(b\langle \xi, \eta \rangle - 2q\langle \xi, \mathbf{J}\eta \rangle) - q\langle \mathbf{v}, \mathbf{D}\mathbf{v} \rangle + (a/j_h)\langle \mathbf{v}, \mathbf{P}(\eta - \phi) \rangle, \quad (13)$$

где вектор $\mathbf{v} = \mathbf{J}\eta - g_0\zeta$ и векторная функция ϕ определена выражением (7). Учитывая представление $\langle \mathbf{v}, \mathbf{D}\mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{D}\mathbf{J}\eta, \mathbf{J}\eta \rangle - 2g_0\langle \mathbf{D}\mathbf{J}\eta, \zeta \rangle + g_0^2\langle \mathbf{D}\zeta, \zeta \rangle$ и аналогичные представления других членов в соотношении (13), а также тождеств (6), и применяя общеизвестную лемму Шура, можно убедиться в справедливости мажорирования $\dot{V} \leq -W(\xi, \eta)$, где скалярная функция $W(\xi, \eta)$ оп-

ределенно положительна в отношении векторных переменных ξ и η при больших значениях положительных параметров b и q , зависящих от модуля g_0 вектора \mathbf{G} КМ системы. По аналогии с подходом Е.Я. Смирнова [5] доказывается, что $W(t) \equiv W(\xi(t), \eta(t)) \Rightarrow 0$ и функция $V(t)$ монотонно уменьшается. Оценка (12) выводится с помощью мажорирования функций V и W квадратичными формами ($a_1\rho^2 \leq V \leq a_2\rho^2$, $a_1 > 0$; $b_1\rho^2 \leq W \leq b_2\rho^2$, $b_1 > 0$) с параметрами $\alpha = b_1/(2a_2)$ и $\beta = (a_2/a_1)^{1/2}$. ♦

Благодаря тождеству $\mathbf{v} \equiv \mathbf{J}\eta - g_0\zeta = -(\mathbf{H} - \mathbf{H}_f)$ закон управления (11) представляется в очень простом виде $\mathbf{M} = \mathbf{M}_\xi \equiv -m[\xi(t) - k\mathbf{D}(\mathbf{H} - \mathbf{H}_f)]$ для вектора состояния системы из малой окрестности требуемого движения ТТ \mathbf{O}_η . Вне этой окрестности такой закон управления неэффективен в силу наличия многообразий стационарных движений гиростата [6], которые существуют при условиях $\mathbf{M}_\xi = \mathbf{J}\dot{\eta} - g_0\dot{\zeta} \equiv \mathbf{0}$, $\mathbf{J}\eta - g_0\zeta = \mathbf{c}$ и $a\mathbf{P}\xi = -\mathbf{c}$, когда постоянный вектор $\mathbf{c} \neq \mathbf{0}$. Поэтому необходимо применять другие простые законы управления для наискорейшей перезакрутки КА, без «застревания» его движения на всех многообразиях, отличных от требуемого движения \mathbf{O}_η , с учетом ограниченности вектора момента $\mathbf{M} = -\dot{\mathbf{H}}$ силового гироскопического комплекса.

При обозначениях $\mathbf{M}_\xi^r = -m[\mathbf{e}_\xi(t)\text{Sgn}C_\varphi(t) - k\mathbf{D}(\mathbf{H}(t) - \mathbf{H}_f)]$, $\mathbf{M}^r = -M^*\{\text{Sng}g_i(t), i = x, y, z\}$, где $M^* > 0$ — большой постоянный параметр, предлагается простой закон управления

$$\mathbf{M} = \begin{cases} \mathbf{M}_\xi, & \|\xi\| < \varepsilon_1, \\ \mathbf{M}_\xi^r, & \varepsilon_1 \leq \|\xi\| \leq \varepsilon_2, \\ \mathbf{M}^r, & \|\xi\| > \varepsilon_2, \end{cases} \quad (14)$$

где, например, параметры $\varepsilon_1 = 0,1$ (угол $\varphi = 6^\circ$) и $\varepsilon_2 = 0,5$ (угол $\varphi = 30^\circ$).

4. РЕЗУЛЬТАТЫ КОМПЬЮТЕРНОЙ ИМИТАЦИИ

С применением закона управления (14) была выполнена тщательная компьютерная имитация движения КА при его перезакрутке, при этом были приняты значения диагональных элементов тензора инерции ТТ $J_x = 2900$, $J_y = 3600$, $J_z = 670$ кг·м² [2] и следующие условия: в начальный момент времени t_0 вектор КМ механической системы $\mathbf{G}_0 = \mathbf{K}_0$ с модулем $|\mathbf{G}_0| = g_0 = 300$ Н·м·с направлен по орту $\mathbf{f} = \{0, 0, 1\}$ в ССК, т. е. в ССК $\mathbf{g}(t_0) = \{0, 0, 1\}$, а

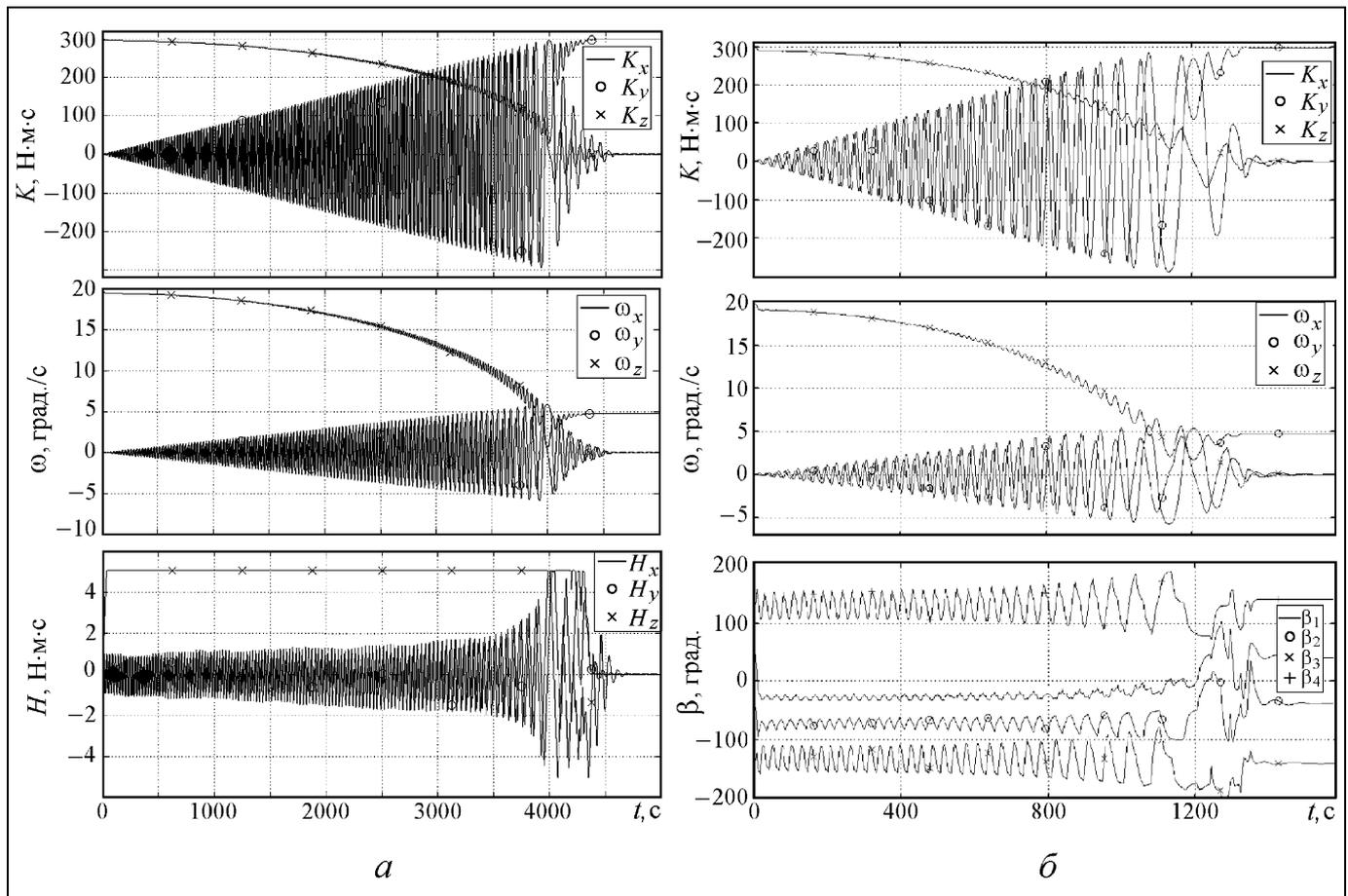


Рис. 3. Перезакрутка космического аппарата как твердого тела:
 а — с помощью трех реактивных маховиков; б — с помощью четырех гироскопов

требуемое положение орта $\mathbf{g}(T_f)$ в ССК задано значением $\mathbf{g}(T_f) = \{0, 1, 0\}$, т. е. в инерциальной системе координат ось вращения КА нужно развернуть на угол 90° . Здесь для простоты и ясности были исследованы две простейшие схемы СГК:

- классическая схема СГК на основе трех реактивных маховиков, $M^m = 0,15 \text{ Н} \cdot \text{м}$ и $h^m = 5 \text{ Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с}$;
- каноническая схема СГК на основе четырех гироскопов, $\gamma^p = \pi/4$; $|\mathbf{h}_p(\beta_p)| = h_g = 7,5 \text{ Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с}$ и $u^m = 10^\circ/\text{с}$.

На рис. 3 и 4 представлены полученные результаты по динамике указанной перезакрутки КА как твердого и упругого тела, соответственно. Здесь четко виден асимптотический характер стремления переменных состояния КА и СГК к требуемым значениям при завершении перезакрутки. Просмотр анимации пространственного движения КА как ТТ в рассматриваемом режиме доступен на сайте журнала <http://ru.mtas.ru> в электронном Приложении к настоящей статье.

При практической реализации предложенного подхода необходимо учитывать, что для обеспечения освещенности панелей солнечных батарей угол γ^p их ориентации относительно корпуса КА может быть произвольным, следовательно, тензор инерции спутника в ССК не будет диагональным. Поэтому при формировании вектора управления СГК необходимо выполнять основные расчеты в главных центральных осях инерции текущей конфигурации конструкции КА с пересчетом вектора управления на исполнительные органы СГК, оси которых зафиксированы в ССК.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Выполнен синтез закона управления для перезакрутки спутника с целью совмещения вектора угловой скорости, направленного по оси наибольшего момента инерции его корпуса, с произвольно заданным направлением в инерциальной системе координат. При этом использованы сла-

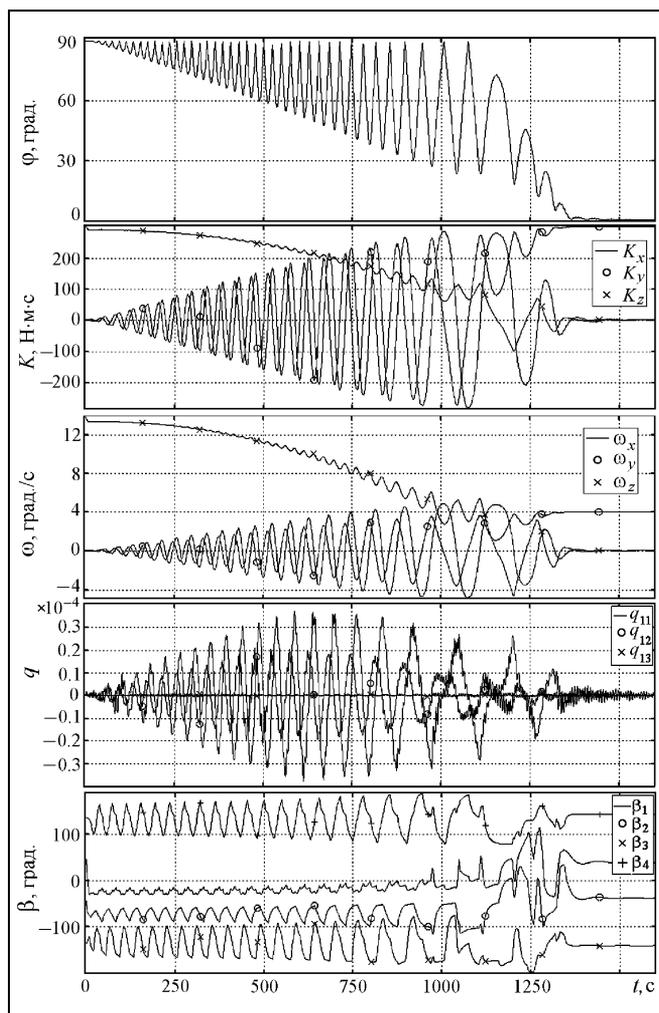


Рис. 4. Перезагрузка упругого космического аппарата с помощью силового гироскопического комплекса на основе четырех гироскопов

бые внутренние управляющие моменты, формируемые силовым гироскопическим комплексом с ограниченными ресурсами. Предложенный простой нелинейный закон управления обеспечивает асимптотическую устойчивость требуемого углового движения спутника. Эффективность предложенного подхода подтверждена результатами тщательной компьютерной имитации.

ЛИТЕРАТУРА

1. Titov G.P., Somov Ye.I., Rayevsky V.A. Nonlinear dynamics of small-mass gyromoment AOCs with plasma thrusters for communication satellites // Proc. of 5th ESA International conference on Guidance, Navigation and Control Systems. Noordwijk: ESTEC. — 2003. — P. 541–550.
2. Somov Ye.I., Titov G.P., Butyrin S.A., Rayevsky V.A., Kozlov A.G. Strongly nonlinear dynamics of a gyrostator respinup by weak control // Proc. of IEEE / EPCS / IUTAM Intern. Conf. on Physics and Control. Saint Petersburg: IPME of RAS. — 2003. — Vol. 1. — P. 127–132.
3. Somov Ye.I., Titov G.P., Butyrin S.A., Rayevsky V.A., Kozlov A.G. Robust control of a spacecraft respinup by weak internal forces // Proc. of 16th IFAC World Congress, Prague. 2005. — Oxford: Elsevier Science. — P. 1–6. <http://www.ifac-papersonline.net/Detailed/29270.html> (дата обращения: 11.12.2012).
4. Лурье А.И. Аналитическая механика. — М.: Физматлит, 1961. — 824 с.
5. Смирнов Е.Я. Некоторые задачи математической теории управления. — Л.: Изд-во ЛГУ, 1981.
6. Hall C.D. Spinup dynamics of gyrostats // Journal of Guidance, Control, and Dynamics. — 1995. — Vol. 18, N 5. — P. 1177–1183.

Статья представлена к публикации членом редколлегии В.Ю. Рутковскийм.

Евгений Иванович Сомов — канд. техн. наук, нач. отдела «Наведения, навигации и управления движением», НИИ проблем надежности механических систем, Самарский государственный технический университет, ☎ (846) 278-44-88, ✉ e_somov@mail.ru.



VII Международная конференция «Управление развитием крупномасштабных систем» 30 сентября — 2 октября 2013 г.

Направления работы конференции

- Проблемы управления развитием крупномасштабных систем, включая ТНК, госхолдинги и госкорпорации
- Методы и инструментальные средства управления инвестиционными проектами и программами
- Имитация и оптимизация в задачах управления развитием крупномасштабных систем
- Управление топливно-энергетическими, экономическими и другими системами
- Управление транспортными системами
- Управление развитием крупномасштабных технических комплексов и систем в отраслях народного хозяйства
- Управление региональными, городскими, муниципальными системами
- Управление объектами атомной энергетики и другими объектами повышенной опасности
- Информационное и программное обеспечение систем управления крупномасштабными производствами
- Мониторинг в задачах управления крупномасштабными системами

Приглашаются ведущие ученые и специалисты НИИ, вузов, государственных и коммерческих структур.

Регистрация участников на сайте <http://mlsd2013ipu.ru/>

Справки: ✉ kuzn@ipu.ru, instepan@ipu.ru, ☎ (495) 334-91-69, (495) 334-90-50.

МОДЕЛЬ И ДИНАМИЧЕСКИЕ ОЦЕНКИ УПРАВЛЯЕМОСТИ И КОМФОРТАБЕЛЬНОСТИ ДВИЖЕНИЯ МНОГОКОЛЕСНОГО МОБИЛЬНОГО РОБОТА¹

А.П. Алисейчик, В.Е. Павловский

Исследована управляемость и динамика шестиколесного мобильного робота, предназначенного для быстроходного движения по неровной поверхности, и рассмотрен синтез его управления. Управляемость в работе понимается не в классическом смысле, а в смысле физической управляемости, когда во время движения аппарата сохраняется реальная возможность управления им без потери контакта с опорой и устойчивости, без ударов и т. п., комфортабельность — в смысле достаточной минимизации вертикальных ускорений. Выполнен анализ зависимости комфортабельности движения от различных характеристик подвески. Предложена и исследована модель динамики шестиколесного робота на основе программного комплекса «Универсальный механизм».

Ключевые слова: шестиколесный аппарат, мобильный робот, моделирование движения, система моделирования «Универсальный механизм».

ВВЕДЕНИЕ

В данной работе изучается модель шестиколесного робота, способного достаточно быстро перемещаться по неровной поверхности. Создание роботов, перемещающихся по бездорожью или по поверхности с препятствиями, важно как для наземной робототехники при работе в условиях отсутствия дорог в сложных средах, например, при исследовании вулканов и т. п., так и для космической отрасли, например, исследования Луны и других планет с помощью транспортных роботов [1]. Проблема построения аппаратов, в том числе автоматических (роботов), способных перемещаться по неровной поверхности, связана с решением ряда задач.

Одна из них — задача перемещения по местности со значительными препятствиями. Ей разработчики уделяют большое внимание, их усилия направлены на создание и исследование аппаратов с повышенной профильной проходимостью. История разработки экипажей, а затем и роботов по-

вышенной проходимости насчитывает несколько десятилетий. Так, в 1986 г. советскими учеными был спроектирован аппарат для ликвидации последствий Чернобыльской аварии. Однако он не был предназначен для развития высоких скоростей, в его конструкции отсутствовала подвеска, что для скоростных аппаратов неприемлемо.

Существуют и другие решения задачи передвижения по сложной неровной поверхности. Один из современных примеров — аппарат с «ломающимся» корпусом французской компании «Robosoft» [2]. Модель рассчитана в большей степени на преодоление сложных неровностей, нежели на развитие высокой скорости, у аппарата также отсутствует подвеска. Другими современными примерами роботов повышенной проходимости служат американский аппарат «LandShark» [3] и отечественный мобильный робот легкого класса ТМ-3 [4], разработанный в МГТУ им. Н.Э. Баумана. Эти аппараты предназначены для движения по пересеченной местности со средними скоростями.

Другая важная задача — разработка быстроходных аппаратов, способных перемещаться по неровной поверхности со скоростями, сравнимыми со скоростями движения по обычным гладким дорогам. Здесь весьма важным элементом колес-

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (гранты № 10-07-00409, 10-01-00160).



ных роботов становится подвеска колес аппарата. В статье [5] приведена одна из возможных классификаций таких аппаратов, в соответствии с которой предмет исследования данной работы можно определить как «мягкая двухрычажная независимая пружинная пассивная подвеска». Такую подвеску начали применять в 1930-х гг., и она постоянно совершенствуется. Ее используют для задних колес как гоночных, так и обычных автомобилей, так как с ней кузов менее подвержен воздействию неровностей дороги, возможна регулировка углов развала и схождения, обеспечиваются минимальные перемещения колес (поперечные, угловые при ходе вверх и вниз). Благодаря независимому восприятию неровностей, подвеска позволяет экипажу в более широкой области параметров движения оставаться в устойчивом состоянии, что улучшает сцепление с дорогой, сохраняет управляемость.

Цель настоящей работы заключается в получении и исследовании оценок управляемости и комфортабельности движения аппарата на основе компьютерной модели. Она базируется на результатах исследований [5–12] в данной области и продолжает исследования адаптивных многоколесных роботов, начатые в работах [13, 14].

1. МОДЕЛЬ ШЕСТИКОЛЕСНОГО РОБОТА

В системе моделирования «Универсальный механизм» (УМ) [15, 16] была построена модель шестиколесного робота, включающая в себя четыре субмодели: модель подвески колес, модель блока управления, модель контакта колеса с дорогой и, наконец, модель неровностей дороги. Моделировалось движение робота с различными скоростями. Результаты далее представлены в виде рабочей модели робота и двумерных диаграмм, отражающих зависимости вертикальных ускорений конкретных точек его корпуса от динамических характеристик аппарата. Приведенные зависимости позволяют определить характеристики подвески, минимизирующие изучаемые функционалы в зависимости от вертикальных ускорений корпуса. Опишем кратко упомянутые субмодели.

1.1. Модель подвески

Смоделированная подвеска обеспечивает расположение ступицы колеса параллельно плоскости борта корпуса (такая подвеска применяется во внедорожных автомобилях типа «багги»). Параллельность ступицы каждого колеса и борта корпуса обеспечивают четыре цилиндрических шарнира, расположенные в углах параллелограмма подвески колеса. Однако оказалось, что такая конструкция неудобна для моделирования, так как наличие разрезанных шарниров ($A - B - C - D - A$) (рис. 1) отрицательно влияет на скорость и точность вы-

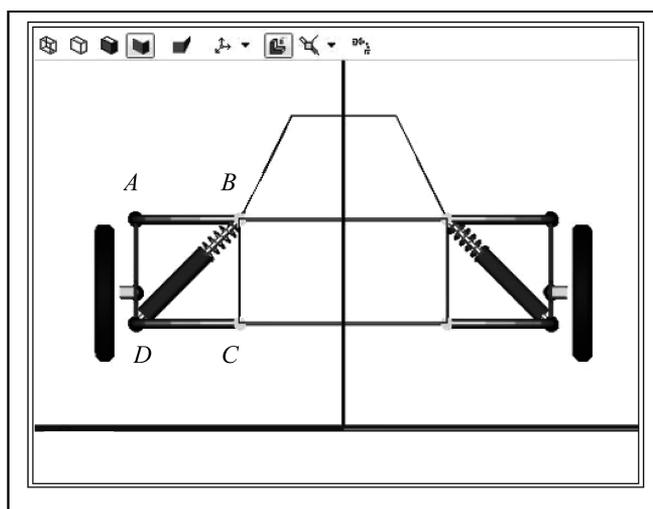


Рис. 1. Базовая модель подвески: вид спереди

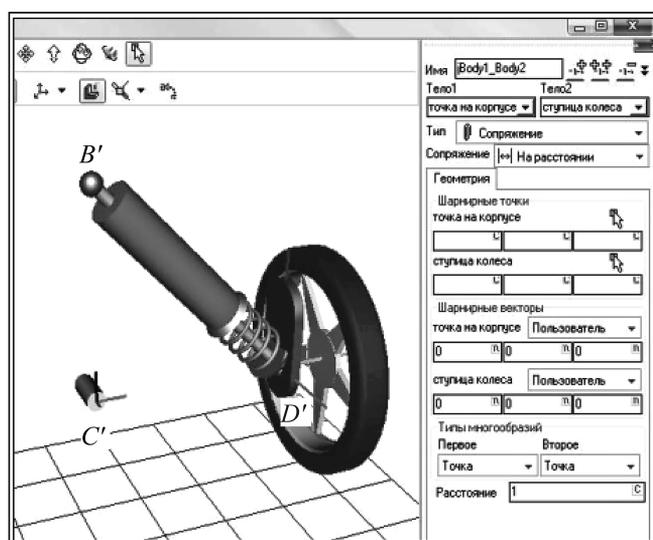


Рис. 2. Эквивалентная модель подвески

числений. Так, например, при интегрировании методом Парка (неявный метод второго порядка с переменным/постоянным шагом) погрешность достигала 10 % от характерного размера подвески. Поэтому далее, чтобы избавиться от разрезанных шарниров и получить возможность применения метода Адамса — Бэшфорта — Моултона (явный метод в форме РЕСЕ: прогноз — оценивание — коррекция — оценивание) примем следующее допущение: вместо цепи из четырех шарниров вводится эквивалентная система (рис. 2) один обобщенный шарнир и «сопряжение» [17] (специальный термин УМ). Далее, пусть имеется неподвижная система координат (СК) $OXYZ$ и две подвижные $oxyz$ и $o'x'y'z'$, связанные с корпусом и ступицей соответственно. Начало координат o лежит в центре ниж-

ней плоскости корпуса аппарата, в ней же лежат точки крепления подвески C и C' (см. рис. 1 и 2). Ось ox лежит в этой же плоскости и параллельна продольной оси аппарата, ось oy ей перпендикулярна и лежит в той же плоскости, ось oz ортогональна осям ox и oy и дополняет систему до правой тройки. Точка o' системы $o'x'y'z'$ совпадает с точкой D' , в начальный момент времени оси СК $o'x'y'z'$ соответственно параллельны осям СК $oxyz$.

Шарнир между корпусом и ступицей колеса для передних и задних колес реализует три «выключенные» [17] степени свободы СК $o'x'y'z'$ относительно СК $oxyz$: поступательные — вдоль векторов y и z и вращательную — вокруг вектора z . Для средних колес — две степени свободы: поступательные — вдоль векторов y и z . Сопряжения служат связями. В данном случае сохраняется расстояние между точками C' корпуса и D' ступицы колеса (в локальных СК), что сохраняет ту же кинематическую схему, что и на рис. 1. Ступица колеса (СК $o'x'y'z'$) относительно корпуса движется плоскопараллельно в плоскости oyz (плоскости корпуса на рис. 1), так как вращательные степени обобщенного шарнира «выключены». Также между точками B (B') корпуса и D (D') ступицы колеса назначена биполярная линейная сила [17]: $F = -c(r - r_0) - d\dot{r}$, где c — коэффициент жесткости пружины, r и r_0 — длина пружины в растянутом и нерастянутом состояниях, d — коэффициент диссипации демпфера.

Геометрические характеристики подвески выбираются из следующих соображений:

- расстояние $|C'D'| = \rho$ от колеса до корпуса максимизируется, так как это минимизирует поперечный крип (проскальзывание) $\rho - \sqrt{\rho^2 - h^2}$, где h — вертикальный ход подвески при ее работе (что ясно из геометрических соображений), который, в свою очередь, отрицательно влияет на управляемость аппарата и износ колес (покрышек);

- расстояние $|AD|$ между вилками подвески (см. рис. 1) также максимизируется для повышения прочности конструкции.

1.2. Метод и модель управления

Момент, контролирующий поворот управляемых колес, вводится как шарнирный момент, направленный вдоль оси z на передние ступицы и вдоль оси z — на задние как функция вида

$$M_{\text{пов}} = -c_{\text{пов}}(\mu \pm s) - d_{\text{пов}}(\dot{\mu} \pm w).$$

Здесь знак « $-$ » соответствует передним, а знак « $+$ » задним колесам, $c_{\text{пов}}$ и $d_{\text{пов}}$ — коэффициенты жесткости и демпфирования системы управления, имеют физический смысл жесткости и демпфирования удержания рулевого колеса блоком управле-

ния, μ и $\dot{\mu}$ — реальные, а s и w — требуемые углы поворота и угловая скорость в управляемом шарнире, которые рассчитываются в процессе моделирования для выполнения заданных маневров. Для средних колес во вращательный шарнир, связывающий ступицу колеса с кузовом, момент для управления скоростью продольного движения и момент для блокировки колес вдоль оси oy' вводятся одновременно: $M_{\text{блок}} = M_{\text{ск}} - \gamma x - \delta v$, где γ и δ — параметры жесткости и демпфирования при блокировании колес. Управляющий скоростью движения момент вычисляется следующим образом: $M_{\text{ск}} = c_y(v_0 - v)$, где v_0 и v — начальная и требуемая скорости, c_y — коэффициент усиления следящей системы.

Для того чтобы мгновенные центры скоростей колес находились в одной точке (что уменьшит проскальзывание и при моделировании приведет к увеличению скорости интегрирования), управляемые колеса должны поворачиваться на разные углы. Эти углы рассчитываются из соображения, что при повороте углы внешних колес лежат в интервале $(0, 30)^\circ$ и равны между собой, а внутренние поворачиваются на угол, обеспечивающий совпадение мгновенных центров скоростей.

Из рис. 3 видно, что при моделировании следует минимизировать a/b — отношение расстояния между управляемыми колесами к расстоянию между передними и средними колесами. Далее, для наглядности формул, при $a = b$ получим выражение угла α через угол β : $\text{tg} \alpha = \frac{\text{tg} \beta}{1 + \text{tg} \beta}$.

$$\text{Пусть } h(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0. \end{cases}$$

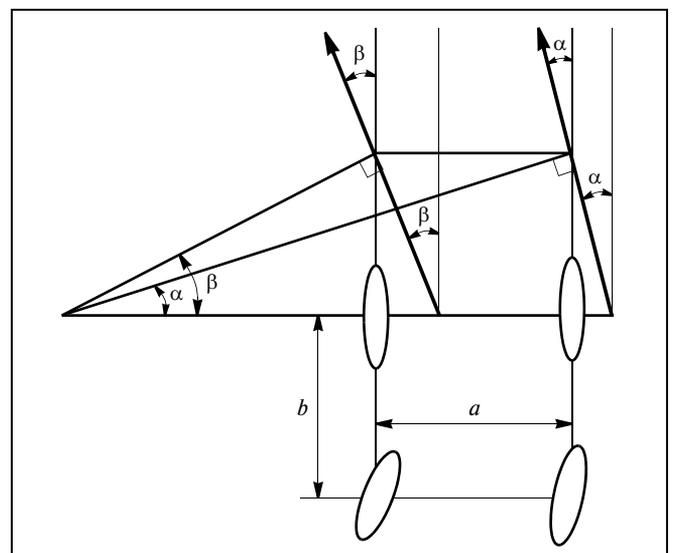


Рис. 3. Управляемые углы α и β



Тогда управляющий момент для правого колеса

$$M = -c \left(x \pm h(s)s + h(-s) \arctg \left(\frac{\operatorname{tg} s}{1 + \operatorname{tg} s} \right) \right) - d \left(v \pm h(s)w + h(-s) \frac{2w}{3 + 2 \sin 2s + \cos 2s} \right).$$

Аналогично вычисляется момент для левого колеса. Для правого и левого поворотов это выражение для управляемых углов записано одновременно при помощи функции $h(x)$, в знаке « \pm » берется « $-$ » для передних, а « $+$ » — для задних колес. На самом деле, управляемый «Универсальным механизмом» угол $\alpha \neq s$, где α — угол поворота «воображаемого колеса», расположенного посередине между передними колесами, а именно

$$\alpha = h(s) \arctg \left(\frac{2 \sin s}{\cos s \left(2 + \frac{\sin s}{\cos s} \right)} \right) + h(-s) \arctg \left(\frac{2 \sin s}{\cos s \left(2 - \frac{\sin s}{\cos s} \right)} \right),$$

но в данной работе для уменьшения времени интегрирования это различие считается малым.

В качестве модели блока управления используются:

- модель управления без обратной связи; профиль продольной скорости и рулевого управления задается в файле УМ;

- модель Мак-Адама — одна из наиболее эффективных и распространенных компьютерных моделей блока управления [6].

В основе модели Мак-Адама лежат упрощенные линейные уравнения движения автомобиля — с двумя степенями свободы. Угол поворота рулевого колеса выбирается из условий минимизации отклонения прогнозируемой траектории экипажа от заданной (желаемой) траектории. Эта модель значительно быстрее интегрируется, в отличие от модели с прогнозированием второго порядка [15, 16], и дает возможность более широко исследовать влияние подвески на управляемость аппарата.

Управление u — желаемое значение угла поворота колеса — является кусочно-постоянной функцией [16]. Рассматривается экипаж в момент времени t_k , для которого рассчитывается очередное значение управления. Не нарушая общности полученных далее решений, положим $t_k = 0$. Введем инерциальную СК $O_v X_v Y_v$, связанную с текущим положением экипажа. Начало отсчета этой СК совпадает с текущим положением середины передней оси, ось абсцисс — с продольной осью экипажа.

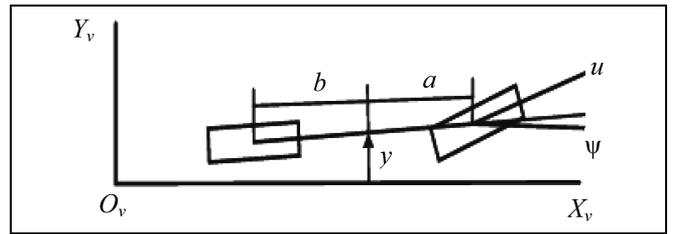


Рис. 4. Упрощенная модель автомобиля

При заданном значении u упрощенная модель автомобиля, представленная на рис. 4, имеет две степени свободы: поперечное отклонение центра масс y и угол поворота вокруг вертикальной оси ψ . Модель построена в соответствии с работой [11].

Линейные уравнения движения в введенных переменных имеют вид:

$$\begin{aligned} \dot{y} &= v_x \psi + v_y, & \dot{\psi} &= \omega_z, \\ M \dot{v}_y &= -\frac{C_f + C_r}{v_x} \dot{y} + \left(\frac{C_r b - C_f a}{v_x} - M v_x \right) \omega_z + C_f u, \\ I_z \dot{\omega}_z &= \frac{C_r b - C_f a}{v_x} \dot{y} - \frac{C_f a^2 + C_r b^2}{v_x} \omega_z + C_f a u. \end{aligned}$$

Здесь v_x и v_y — проекции скорости центра масс на продольную и поперечную оси экипажа; ω_z — угловая скорость относительно вертикальной оси, a и b — расстояния от центра масс до передней и задней оси, M и I_z — масса и момент инерции экипажа относительно вертикальной оси; C_f и C_r — приведенные (суммарные) коэффициенты сопротивления боковому уводу передних и задних колес. Наблюдаемой величиной служит поперечная координата центра передней оси $y_v = y + a\psi$. В векторном виде:

$$\dot{X} = AX + Bu, \quad y_v = C^T X,$$

$$X = \begin{pmatrix} y \\ \psi \\ v_y \\ \omega_z \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & v_x & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{C_f + C_r}{M v_x} & \frac{C_r b - C_f a}{M v_x} - v_x \\ 0 & 0 & \frac{C_r b - C_f a}{I_z v_x} & -\frac{C_f a^2 + C_r b^2}{I_z v_x} \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ C_f / M \\ C_f a / M \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

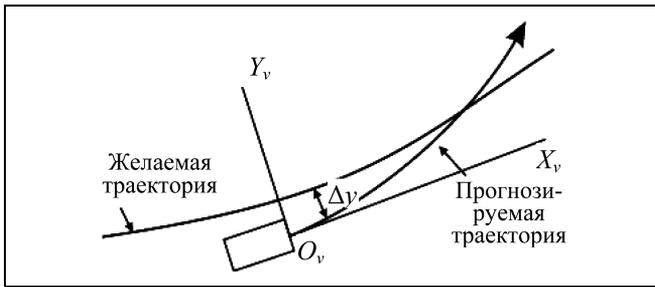


Рис. 5. Прогнозируемая и желаемая траектории

Общее решение этой системы уравнений, согласно [16] с учетом предположения $u = \text{const}$ имеет вид

$$X(t) = e^{At}X_0 + u \int_0^t e^{A(t-\tau)} B d\tau, \quad y_v = F(t)X_0 + g(t)u.$$

Здесь X_0 — матрица-столбец начальных условий, а также введены матрица-строка $F(t)$ размером 1×4 и скалярная функция $g(t)$:

$$F(t) = Ce^{At}, \quad g(t) = \int_0^t F(\tau) B d\tau.$$

Пусть $y_d(t)$ — желаемая траектория. Определим управление u , минимизирующее отклонение прогнозируемой траектории $\Delta y(t) = y_d(t) - y_v(t)$ от желаемой (рис. 5) на интервале времени прогноза T_p . В качестве функционала, характеризующего отклонение, рассматривается выражение

$$J(u) = \int_0^{T_p} (\Delta y(\tau))^2 d\tau = \int_0^{T_p} (y_d(\tau) - F(\tau)x_0 - g(\tau)u)^2 d\tau.$$

Его экстремум достигается при $u = \int_0^{T_p} (y_d(\tau) - F(\tau)X_0)g(\tau) d\tau \left/ \int_0^{T_p} g^2(\tau) d\tau \right.$ можно упростить, заменив интегралы конечными суммами. Для этого интервал прогноза T_p разделяется на N подинтервалов равной длины. На каждом из них $u = \sum_{i=1}^n (y_d(t_i) - F(t_i)X_0)g(t_i) \left/ \sum_{i=1}^n g^2(t_i) \right.$, $t_i = iT_p/N$. В таком виде берется управление — это приближенная модель по схеме Мак-Адама.

1.3. Модель контакта колеса с дорогой

Модели контактных сил позволяют по параметрам колеса (вертикальная жесткость, демпфиро-

вание, продольный, поперечный крип, угол развала и др.) и по известным кинематическим параметрам шины в каждый момент времени, рассчитанной программой моделирования, получить значения сил и моментов, действующих в контакте между колесом и дорогой. Известно достаточно большое число моделей контактных сил. В настоящей работе используется модель «Магическая формула Пасейки» (Pacejka magic formula) [10].

Общий вид кривых для «магической формулы»:

$$Y(x) = D \sin(\text{Carctg}(Bx - E(Bx - \text{arctg}(Dx)))) + S_v, \\ x = X + S_h,$$

где $Y(x)$ может быть продольной (F_x) или поперечной (F_y) силой или восстанавливающим моментом (M_z), а X — продольный (для F_x) или поперечный (для F_y , M_z) крип. В соответствии с работами [7, 8], коэффициенты «магической формулы» есть функции вертикальной нагрузки на колесо F_z и угла развала γ , а также коэффициентов $a_0 \dots a_{15}$, $b_0 \dots b_{10}$, $c_0 \dots c_{17}$, определенных на основе экспериментальных данных, они взяты согласно работам [15, 16].

1.4. Модель неровностей дороги

В качестве неровностей взята базовая поверхность пакета УМ «Бульжник в удовлетворительном состоянии» [16], растянутая по вертикали, чтобы максимальные «кочки» достигали четверти радиуса колеса. На графике (рис. 6) по оси абсцисс отложен натуральный параметр σ траектории движения, H — высота неровностей «кочки».

2. СХЕМА МОДЕЛИРОВАНИЯ. ОПИСАНИЕ ЭКСПЕРИМЕНТОВ

Для каждого вектора параметров в УМ строился сеанс моделирования, применялась технология зондирования многомерного пространства параметров аппарата. По всем параметрам была взята равномерная сетка. Вычисления проводились на

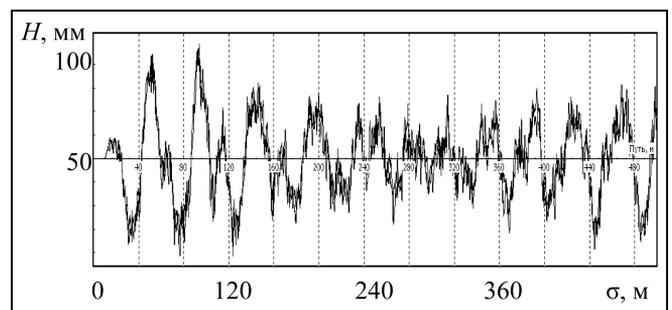


Рис. 6. График неровностей



нескольких ЭВМ (кластере), эта технология реализована в современных версиях УМ.

Изучались по вертикальному ускорению характеристики комфортабельности движения в зависимости от коэффициентов жесткости и диссипации подвески:

- общепринятая (см. стандарт ISO 2631) характеристика качества подвески — среднеквадратичное отклонение вертикального ускорения некоторой точки корпуса [8] —

$$R_{MS} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (X_i - \bar{X})^2}{N-1}}, \quad (1)$$

где N — число расчетных точек, $N > 1$, $i = 1, \dots, N$, \bar{X} — среднее арифметическое выборки значений вертикального ускорения по расчетным точкам;

- общая характеристика комфортабельности движения — интеграл модуля вертикального ускорения некоторой точки корпуса за модельное время —

$$I_1 = \int_{t_k}^{t_{k+1}} |a_z(t)| dt, \quad (2)$$

- сумма интегралов за модельное время модулей вертикального ускорения некоторой точки корпуса, превышающих заданное значение $a_{\text{крит}}$ — предлагаемая характеристика износа —

$$I_2 = \sum_k \int_{t_k}^{t_{k+1}} |a_z(t)| dt, \quad (3)$$

где $\forall k: |a_z(t)| a_{\text{крит}}, \forall t \in [t_k, t_{k+1}] \subset [0, T]$;

- максимальный модуль вертикального ускорения за время движения (максимальное воздействие по ускорению на аппарат) — предлагаемая характеристика возможности или риска поломок —

$$W_{\text{abs}} = \max_t |a_z(t)|. \quad (4)$$

Выполнены три серии экспериментов.

1. Коэффициент жесткости пружины подвески — 10 000 кг/с² (фиксирован), коэффициент диссипации 120 кг/с (фиксирован), масса экипажа изменялась в диапазоне 57—95 кг, скорость — в диапазоне 3—12 м/с. За 1 ч на четырех компьютерах проведено 154 вычислительных эксперимента с модельным временем 12 с каждый, исследовались зависимости оценок функционалов (1)—(4) от скорости экипажа и массы.

2. Скорость — 8,3 м/с (фиксирована). Масса экипажа — 76 кг (фиксирована), коэффициент жесткости пружины изменялся в диапазоне

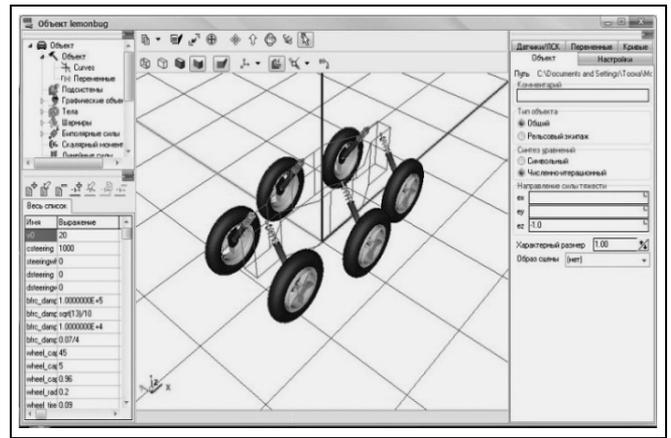


Рис. 7. Вид модели аппарата

1000—150 000 кг/с², коэффициент диссипации — в диапазоне 0—120 кг/с, исследовались зависимости оценок функционалов R_{MS} , I_1 , I_2 и W_{abs} от коэффициентов жесткости и диссипации.

3. Аппарат двигался по «σ-образной» траектории с увеличивающейся кривизной с управлением в соответствии с моделью Мак-Адама. Искалась область параметров c и d , при которых с фиксированными параметрами управления аппарат на максимальной скорости проходит всю траекторию с сохранением управляемости и не перевернувшись.

Вид модели аппарата показан на рис. 7. Расстояние между передними колесами выбрано равным расстоянию между передней и средней осями. Поскольку в модели аппарата отсутствует существенная часть подвески автомобиля — стабилизатор поперечной устойчивости, то расстояние между средними колесами увеличено, чтобы компенсировать его отсутствие.

Исследовались функционалы (1)—(4). С увеличением функционала (1) резко растет хаотичность сил, действующих на аппарат, что приводит к большим погрешностям системы управления и пр. При исследовании функционала (2) важно учитывать, что минимальное значение ускорений, на которое реагирует вестибулярный аппарат, или порог раздражения, различен для разных людей и меняется в зависимости от продолжительности действия ускорения. Средние значения порога раздражения: 0,11...0,12 м/с² для линейных колебаний и 20 с⁻² для угловых при продолжительности действия 0,8 с, а при продолжительности действия 0,22 с — 800 с⁻² (см. ГОСТ 31319—2006 «Вибрация. Измерение общей вибрации и оценка ее воздействий на человека»). При этом произведение ускорения на латентный период реакции вестибулярного аппарата постоянно. Эти параметры отслеживались в моделировании.

3. АНАЛИЗ РЕЗУЛЬТАТОВ

Построена упрощенная модель (корпус с одним колесом связан пружиной с гасителем) зависимости модуля вертикального ускорения точки $(0, 0, 0)$ корпуса от скорости (рис. 8). По оси абсцисс отложена скорость, по ординате — модуль вертикального ускорения. Наблюдается общее свойство функционалов (1)—(4) — зависимость максимума модуля (огibaющей) вертикального ускорения от скорости почти квадратичная.

Для всего экипажа исследована зависимость функционала (2) от массы, оказалось, что она не существенна. Исследовалась зависимость от скорости, типовой вид функционала (1) приведен на рис. 9. При скоростях более 13 м/с аппарат переворачивается, чем и объясняются случайные малые значения функционала (1). «Срезы» по массе/скорости могут быть приближены квадратичной функцией от скорости, погрешность приближения вызвана поперечной и продольной качкой экипажа, поэтому дерево экспериментов здесь строится при постоянной скорости, обеспеченной блоком управления, и постоянной массе аппарата.

По параметрам подвески исследовались функционалы (1)—(3) (если аппарат предназначен для перевозки людей или тонкой аппаратуры, это исследование важно). На рис. 10 представлена полученная зависимость функционала (2) от коэффициентов жесткости и диссипации, а на рис. 12 — интеграл от «среза» вертикального ускорения, реализованного функцией $S(a) = \left(\frac{1}{\pi} \arctg(10(a-l)) + 0,5\right)a$, где a — модуль вертикального ускорения, l — ве-

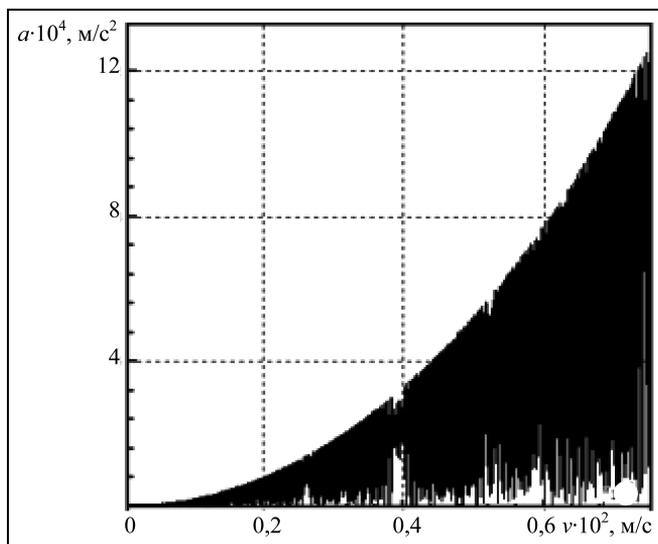


Рис. 8. Зависимость модуля вертикального ускорения от скорости (для одного колеса)

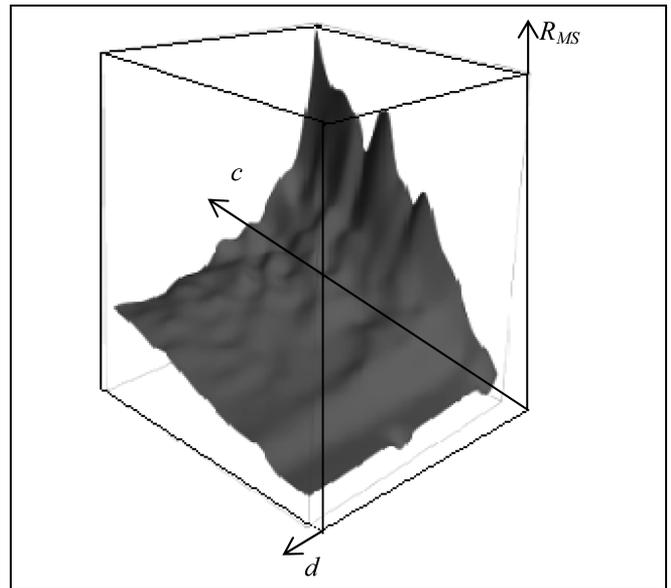


Рис. 9. Изометрический вид функционала (1)

личина, ниже которой ускорения не учитываются, доставляют учет ускорений, превышающих допустимые значения. Функционал (4) показывает, может ли аппарат эффективно проехать по данной поверхности без риска повреждений — с ограничением максимума вертикального ускорения.

На рис. 10 изолиния L_1 соответствует столкновению корпуса робота с поверхностью. Граница L_2 близка к области, где значения функционала достаточно велики (возможен отрыв от поверхности, переворот). Изолинии аналогичны и для прочих функционалов. В зависимости от требуемых ускорений и границ безопасности оптимальные значения коэффициентов жесткости и диссипации следует выбирать между изолиниями L_1 и L_2 функционалов (1)—(4).

Как показывают диаграммы (см. рис. 10 и 11), области приемлемых значений характеристик подвески незамкнутые — допустимые значения параметров подвески не ограничены. Видно, что учащение сетки существенно не изменяет картину. Поэтому уменьшать шаг сетки, если необходимо знать функционал более точно, следует только в областях интереса. Нулевые значения на правой границе, соответствующие минимальным значениям коэффициента жесткости, возникают из-за остановки эксперимента (нижняя часть корпуса коснулась земли). Функционал (4) имеет важное значение, так как часто его допустимое значение указано в техническом руководстве к аппаратуре, установленной на корпусе робота, или ограничена. На соответствующей диаграмме больше хаотичности, так как (4) — случайная величина с



большей дисперсией, но и на ней видны те же закономерности, что и на предыдущих диаграммах. При выборе оптимальных характеристик подвески следует учитывать и другие факторы, такие как сцепление с дорогой, влияющее на управляемость аппарата. Эти зависимости исследовались в третьей серии экспериментов.

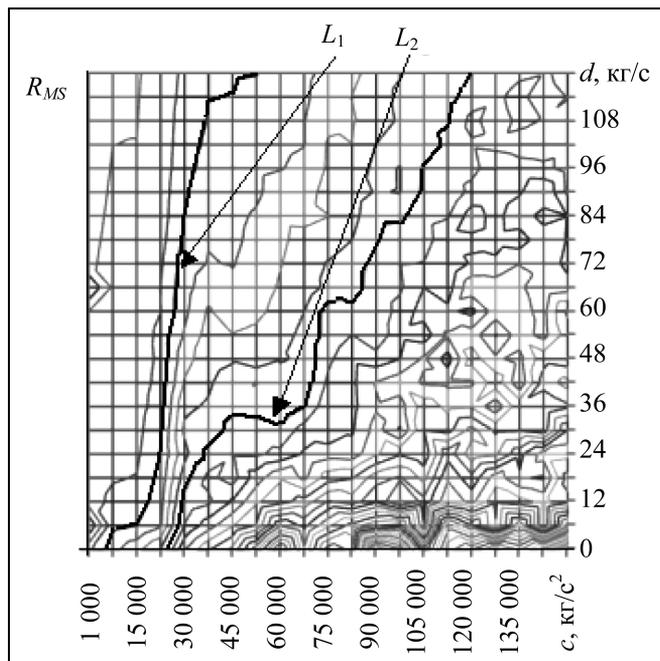


Рис. 10. Зависимость функционала (1) от коэффициентов c и d : L_1 — граница зоны безопасности, L_2 — граница зоны приемлемых значений R_{MS}

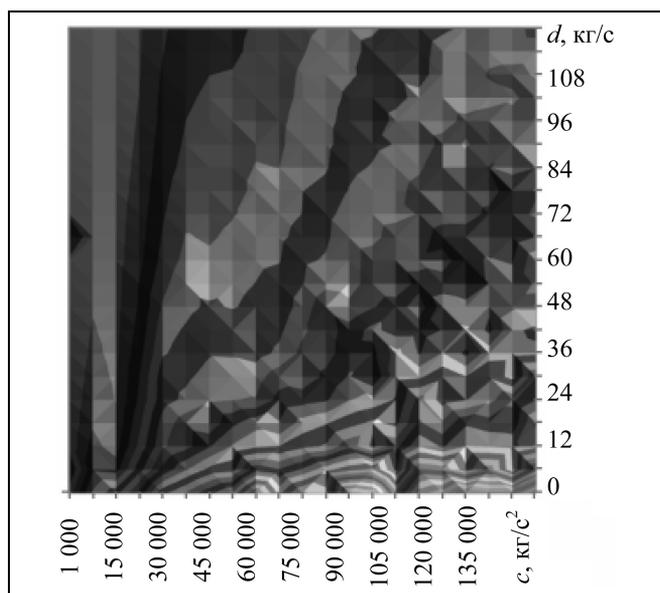


Рис. 11. Зависимость функционала (2) от коэффициентов жесткости и диссипации

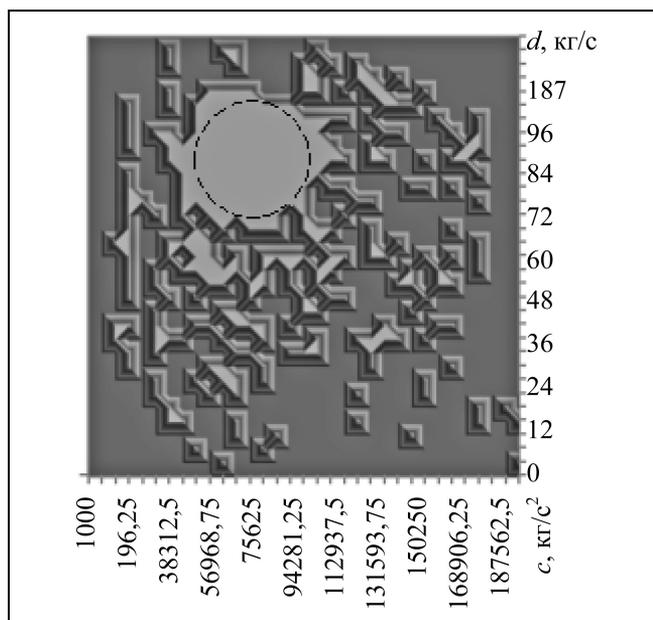


Рис. 12. Область оптимальных параметров устойчивости (без отрыва) на траектории

На рис. 12 изображена диаграмма индикатора пройденного пути по σ -образной траектории с управлением в соответствии с моделью Мак-Адама. Скорость экипажа — 9 м/с. Моделирование дает замкнутую область (на рис. 12 она аппроксимирована штриховой окружностью) параметров c и d , в которой аппарат проехал всю траекторию с сохранением управляемости, без отрыва от поверхности. Приблизительно в «центре масс» этой области

функционал $J(u) = \int_0^T (\Delta y(\tau))^2 d\tau$, где $\Delta y(t)$ — отклонение прогнозируемой траектории $y_v(t)$ от желаемой $y_d(t)$ на интервале времени прогноза T_p , достигает своего минимума.

Эта область лежит в области оптимальных для комфортабельного движения параметров диаграмм, представленных на рис. 10 и 11. Параметры подвески следует выбирать в центре представленной области.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Получены и исследованы оценки управляемости и комфортабельности движения аппарата на основе построенной компьютерной модели. Создана модель «многоколесный аппарат — блок управления — колесо — дорога», минимизирующая время проведения численных экспериментов. Для модели двухрычажной подвески разработаны методические приемы, позволяющие оптимизировать процессы интегрирования. Разработана модель блока управления, допускающая движение с уменьше-

нием поперечного крива при движении по ровной поверхности.

Для быстроходного робота найдена зависимость характеристик динамической комфортабельности движения от параметров подвески и указана область, из которой следует выбирать оптимальные для поставленной задачи коэффициенты жесткости и диссипации подвески.

По полученным диаграммам можно выбирать динамические параметры экипажа, позволяющие минимизировать функционалы вертикального ускорения. Сформулированы рекомендации по выбору некоторых геометрических характеристик аппарата. Указаны области приемлемых параметров подвески. Например, для робота массой 75 кг и длиной 95 см (это характерные размеры современных исследовательских роботов), если максимум ускорения не должен превышать 24 м/с^2 , оптимальные коэффициент жесткости 82 500 кг/с^2 и коэффициент диссипации 150 кг/с .

В целом зависимость функционалов качества подвески от скорости близка к квадратичной и может быть ею аппроксимирована.

Предлагаемая модель может быть эффективно использована для определения оптимальных значений параметров быстроходного робота в зависимости от функционала качества. По наиболее важному в конкретной задаче функционалу на соответствующей диаграмме выбирается область целесообразных значений характеристик подвески для реализации динамически комфортабельного движения.

ЛИТЕРАТУРА

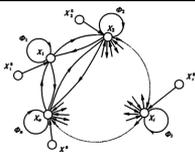
1. URL: http://ru.wikipedia.org/wiki/Лунная_база (дата обращения: 10.12.2012).
2. URL: <http://www.robosoft.fr> (дата обращения: 10.12.2012).
3. URL: <http://www.blackirobotics.com/> (дата обращения: 10.12.2012).

4. URL: <http://www.robotmobot.ru/> (дата обращения: 10.12.2012).
5. Космонавтика XXI века / И.С. Болховитинов и др. // Земля и Вселенная. — 1991. — № 5.
6. Динамика системы «дорога — шина — автомобиль — водитель» / Под ред. А.А. Хачатурова. — М.: Машиностроение, 1976. — 536 с.
7. Раймпель Й. Шасси автомобиля. Рулевое управление. — М.: Машиностроение, 1987. — 232 с.
8. Раймпель Й. Шасси автомобиля: Конструкции подвесок. — М.: Машиностроение, 1989. — 328 с.
9. Bakker E., Pacejka H.B. and Lidner L. A New Tire Model with Application in Vehicle Dynamics Studies // Proc. 4th Int. Conf. Automotive Technologies, Monte Carlo, SAE paper 890087, 1989.
10. Pacejka H.B. and Bakker E. The Magic Formula Tire Model. Proc. 1st International Tire Colloquium, Delft, 1991. Vehicle System Dynamics 21 (Suppl.) (1991). — P. 1—18.
11. Новожилов И.В., Павлов И.С. Приближенная модель колесного экипажа // Изв. РАН. Механика твердого тела — 1997. — № 2. — С. 196—204.
12. Чобиток В.В. Ходовая часть танков. Подвеска // Техника и вооружение. — 2005. — № 7. — С. 43—51.
13. Павловский В.Е., Шишканов Д.В. Исследование динамики и синтез управления колесными аппаратами с избыточной подвижностью // Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша РАН. — 2006. — № 12. — 28 с.
14. Павловский В.Е., Алисейчик А.П. Методика исследования динамической комфортабельности движения многоколесного мобильного робота // Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша РАН. — 2010. — № 84. — 27 с.
15. Погорелов Д.Ю. О численных методах моделирования движения систем твердых тел // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 1995. — № 4. — С. 501—506.
16. URL: http://www.universalmechanism.com/download/60/rus/g_s_um_automotive.pdf (дата обращения: 10.12.2012).
17. URL: http://www.universalmechanism.com/download/60/rus/02_um_technical_manual.pdf (дата обращения: 10.12.2012).

Статья представлена к публикации членом редколлегии Б.В. Павловым.

Антон Павлович Алисейчик — вед. программист, Российский государственный гуманитарный университет, г. Москва, ✉ atooha@gmail.com,

Владимир Евгеньевич Павловский — д-р физ.-мат. наук, зав. лабораторией, Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, г. Москва, ✉ vlpavl@mail.ru.



X Всероссийская школа-конференция молодых ученых «УПРАВЛЕНИЕ БОЛЬШИМИ СИСТЕМАМИ»

Основные направления работы конференции

- Фундаментальные математические основы теории управления.
- Управление организационными и социально-экономическими системами.
- Информационные технологии в управлении.
- Управление техническими системами, технологическими процессами и промышленными установками.

Время и место проведения

5—7 июня 2013 г., г. Уфа, база отдыха в одном из живописных уголков Республики Башкортостан.

Подробная информация, образцы и сроки предоставления докладов можно найти на сайте gatu.ac.ru/ubs2013.

УДК 629.78(092)

ВИЦЕ-ПРЕЗИДЕНТ АКАДЕМИИ НАУК СССР АКАДЕМИК БОРИС НИКОЛАЕВИЧ ПЕТРОВ (к 100-летию со дня рождения)



Борис Николаевич Петров родился 11 марта 1913 г. в Смоленске. Его мать, Вера Владимировна, была врачом; отец, Николай Георгиевич, — бухгалтером. Вскоре после революции в нашей стране вспыхнула эпидемия тифа. Вера Владимировна, отдававшая все свое искусство врача борьбе с эпидемией, сама заразилась и умерла в 1919 г. В 1929 г. умер и Николай Георгиевич. Заботы о воспитании Бориса в значительной мере легли на сестер его родителей — Елену Георгиевну и Марию Владимировну.

Окончив в феврале 1930 г. школу, Борис Николаевич некоторое время работал счетоводом в колхозе, а осенью уехал в Москву, где был принят в фабрично-заводское училище им. С. Орджоникидзе и стал токарем.

В 1933 г. Борис Николаевич поступил в Московский энергетический институт.

В 1939 г. после окончания МЭИ с отличием Борис Николаевич по предложению В.С. Кулебакина был направлен на работу в Комитет телемеханики и автоматики АН СССР, на базе которого позже В.С. Кулебакиным был создан Институт автоматики и телемеханики АН СССР (ИАТ), ныне Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН. В этом институте Б.Н. Петров прошел путь от инженера до академика, работая в нем до последних дней своей жизни.

Первые работы молодого ученого были посвящены автоматизации процесса непрерывной разливки металла из мартена.

В 1945 г. Борис Николаевич защитил диссертацию на тему «Анализ автоматических копировальных систем», за которую ему сразу была присуждена ученая степень доктора технических наук. В своей диссертации он предложил оригинальную теорию построения автоматических копировальных систем широкого класса и новые принципы построения высокоточных копировальных систем для изготовления сложных изделий.

Борис Николаевич создал метод структурных преобразований схем автоматических систем и разработал адекватный математический аппарат — алгебру структурных схем. Много позже, уже в последние годы жизни, он снова вернулся к этой проблематике в работах, выполненных совместно со своими учениками из Уфимского авиационного института.

Весьма глубокие исследования были проведены Борисом Николаевичем в области интегрирования нелинейных дифференциальных уравнений. Эти работы привели к открытию, которое Н.Н. Лузин назвал «феноменом Б.Н. Петрова».

Б.Н. Петров — один из основоположников теории инвариантности. Им были установлены необходимые условия физической осуществимости условий абсолютной инвариантности. Сейчас эти условия широко известны в мировой литературе как принцип двухканальности Б.Н. Петрова.

В исследованиях, выполненных совместно с учениками, Б.Н. Петровым открыт новый класс систем — системы двукратной инвариантности, дано решение проблемы инвариантности в системах с переменной структурой, сделано обобщение условий инвариантности на случай статистически заданных возмущений, развиты идеи двухканальности в информационных и измерительных устройствах.

В 1950—1960 гг. Борис Николаевич провел широкие теоретические и экспериментальные работы в области нелинейных сервомеханизмов. В результате руководимая им группа разработала основы теории этого класса автоматических систем, развила методы расчета и исследования сервомеханизмов с запаздыванием и с несколькими нелинейностями.

С 1955 г. под руководством и при непосредственном участии Б.Н. Петрова развивались методы построения нелинейных систем автоматического управления с переменной структурой, которые представляют собой качественно новый класс систем управления, обеспечивающих высокую статическую и динамическую точность управления.

В работах Бориса Николаевича и его учеников по теории беспоисковых самонастраивающихся систем дана общая постановка и решение задачи анализа и синтеза систем такого класса. Предложены концепция обобщенного настраиваемого объекта, разработан метод синтеза алгоритмов адаптации, поставлена проблема оптимизации систем с моделью путем выбора оптимальной модели.

Дальнейшим развитием теории самонастраивающихся систем стала теория координатно-параметрического управления.

Под руководством и при участии Бориса Николаевича впервые в СССР разработаны и созданы самонастраивающиеся системы управления для нескольких классов ракет Главного конструктора И.С. Селезнева.

Борис Николаевич возглавлял также новое в теории управления направление, связанное с информационным подходом.

Широко известны его труды, посвященные нестационарным системам, синтезу алгоритмов наблюдения неизмеряемых координат системы, алгоритмической процедуре синтеза управлений линейными объектами с произвольными свойствами

и неполной степенью наблюдаемости. Большой интерес представляют его исследования по синтезу алгоритмов управления как обратной задачи динамики. Важнейшее место в деятельности Б.Н. Петрова заняли задачи теории автоматического управления подвижными объектами. Истоки этого можно искать в том, что свою педагогическую деятельность Борис Николаевич начал созданием в 1944 г. в МАИ курса лекций «Автоматика мотора и винта».

Проблемам управления двигательными установками баллистических ракет Б.Н. Петров уделял пристальное внимание всю свою творческую жизнь ученого и инженера.

Работы в этой области ввели его в круг творцов практической космонавтики. Полученные им и его коллективом результаты носили основополагающий характер, были реализованы и созданные на их основе системы управления стали составной частью всех крупных жидкостных ракет разработки главных конструкторов С.П. Королева, М.К. Янгеля, В.Н. Челомея, В.Ф. Уткина.

С академиком С.П. Королевым Борис Николаевич начал работать в 1950-х гг., выполняя исследования и разрабатывая системы регулирования для первой межконтинентальной баллистической ракеты Р-7 и для предваряющей основную разработку ракеты-лаборатории М5-РД. Б.Н. Петров часто был участником-консультантом на заседаниях знаменитого Совета главных конструкторов, возглавляемого С.П. Королевым. Первые конструктивные результаты в исследовании динамики жидкостных реактивных двигателей (ЖРД) и его электронном аналоговом моделировании были получены Борисом Николаевичем с сотрудниками по просьбе В.П. Глушко в 1950—1951 гг. для разрабатываемого стотонного двигателя.

В 1954 г. Институту автоматики и телемеханики постановлением правительства было поручено возглавить исследования в части управления двигательной установкой, разрабатываемой С.П. Королевым межконтинентальной составной двухступенчатой ракеты Р-7. Б.Н. Петров стал научным руководителем этих работ.

Решение проблемы построения систем управления тягой ЖРД и синхронизации опорожнения баков ракеты сложной архитектуры было остро необходимо и сопровождалось немалыми трудностями, которые сопутствовали созданию принципиально новых систем, начиная «с нулевого уровня», без какой-либо предыстории и при полном отсутствии прототипов систем и литературных источников.

Работы Б.Н. Петрова и его учеников по методологии разработки математических моделей ЖРД



и анализу динамики двигателя как объекта управления и проблемы управляемости ЖРД имели приоритетный характер и составили раздел теории ЖРД, охватывающий ряд принципиально новых задач, возникших при создании ракеты Р-7 и всех последующих крупных жидкостных ракет.

В целом, Б.Н. Петров взял на себя ответственность за идеологию создания принципиально новых терминальных систем управления расходом топлива ЖРД, которые существенно повышали энергетiku ракеты благодаря резкому сокращению гарантийных запасов топлива. Он был научным руководителем работ по таким системам для всех крупных жидкостных ракет, начиная с королевской Р-7 и для всех последующих крупных боевых ракет и ракет-носителей космических аппаратов.

Важное направление работ Б.Н. Петрова, начиная с 1956 г., заключалось в разработке теории и систем управления искусственными спутниками Земли (ИСЗ).

По инициативе и под руководством Д.Е. Охцимского в нашей стране в те годы начали создаваться гравитационные системы ориентации ИСЗ. Это пассивные системы, не требующие для создания восстанавливающих моментов расхода какого-либо вида энергии. Однако при отделении спутника от ракеты-носителя возникали значительные возмущения и требовалось разработать простую и экономичную систему предварительного успокоения.

Под руководством Б.Н. Петрова была разработана структура и теория оригинальной релейной системы предварительного успокоения, в которой высокая экономичность достигалась путем введения специальной связи, компенсирующей петлю гистерезиса релейной характеристики, и выбора соответствующего соотношения ограничения датчиков угловой скорости и углового положения ИСЗ.

Дальнейшее развитие этого направления связано с разработкой теории и систем управления деформируемых космических аппаратов. К последним относятся ИСЗ с присоединенными гибкими элементами (панели солнечных батарей большой площади, выносные радиоантенны). Проблема эта возникла в начале 1960-х гг., когда американский спутник «Эксплуорер-1» из-за рассеяния энергии закрутки, вызванной упругостью четырех штыревых антенн, после вывода на орбиту достаточно быстро потерял устойчивость. С тех пор и до настоящего времени к этой проблеме привлечено пристальное внимание ученых и инженеров во многих странах мира, где разрабатываются ИСЗ. В Институте проблем управления работы в этой области проводились совместно с Научно-произ-

водственным объединением прикладной механики (Главный конструктор — академик М.Ф. Решетнев) в связи с разработкой спутников на геосинхронной орбите и систем ориентации для них.

Результаты, полученные под руководством Б.Н. Петрова и при его участии, нашли применение при проектировании и создании систем управления спутников связи на геосинхронной орбите серий «Радуга» и «Горизонт» и спутников непосредственного телевидения серии «Экран».

Существенный научный вклад Б.Н. Петров внес в создание многоместных пилотируемых кораблей-спутников, автоматических станций, запускаемых к Луне, систем мягкой посадки автоматических аппаратов на Луну.

Нельзя не упомянуть о международном проекте «Союз — Аполлон» (СССР — США). Над подготовкой полета по этому проекту в течение более пяти лет работали большие коллективы советских и американских ученых, инженеров, конструкторов в различных областях. Координацию работ советских коллективов осуществлял Совет «Интеркосмос», и Б.Н. Петров, будучи председателем Совета, внес большой личный вклад в решение многочисленных организационных, научных и технических проблем.

Б.Н. Петров всю свою творческую жизнь работал в тесном контакте с ведущими деятелями нашей ракетно-космической науки и техники — С.П. Королевым, В.П. Глушко, М.К. Янгелем, В.Н. Челомеем, В.Ф. Уткиным, М.Ф. Решетневым, В.П. Мишиным, Б.Е. Чертоком, Н.А. Пилюгиным и другими первопроходцами нашего ракетостроения и космонавтики. Он по праву вошел в состав когорты основоположников отечественной космонавтики. Он участвовал в большинстве пусков в Капустинском Яре и Байконуре в период становления и первых работ С.П. Королева по освоению космического пространства. Неоднократно участвовал в работе государственной комиссии по пускам. Многолетний творческий контакт связывал Бориса Николаевича с М.В. Келдышем. Б.Н. Петров участвовал в разработке и обсуждении космических программ нашей страны. В период разработки отечественной многоцветной космической системы Б.Н. Петров активно участвовал в формировании облика корабля «Буран».

Академик Б.Н. Петров выполнял колоссальный объем научно-организационной и педагогической работы. Им написано около 200 публицистических и научно-популярных статей по крупным научным проблемам, связанным с развитием автоматики, вычислительной техники, автоматизации эксперимента, программного управления космическими исследованиями. Он поддерживал все новое и пер-

спективное в науке, не раз отмечал важность развития математической или абстрактной теории систем, которая, как он выражался, раздвигает горизонты науки об управлении.

В 1953 г. Б.Н. Петров был избран членом-корреспондентом АН СССР, в 1960 г. — академиком.

Борис Николаевич был не только крупным ученым, автором восьми монографий по теории управления, но и выдающимся организатором науки. С 1963 г. он бессменно был академиком-секретарем Отделения механики и процессов управления АН СССР, а в 1979 г. его избрали вице-президентом Академии наук СССР.

Борис Николаевич был талантливым педагогом. Свою педагогическую деятельность, как уже упоминалось ранее, он начал в Московском авиационном институте в 1944 г. на кафедре «Автоматическое управление и стабилизация самолетов». С 1950 г. и до последних дней своей жизни он возглавлял эту кафедру, преобразованную позднее в кафедру «Системы автоматического управления летательными аппаратами». Лекции Бориса Николаевича всегда пользовались успехом у студентов. Благодаря его постоянной и кропотливой работе на кафедре сложился высококвалифицированный научно-педагогический коллектив, ее учебный план стал образцом для многих вузов страны.

Под руководством Б.Н. Петрова выросли крупные коллективы специалистов. Созданная им большая научная школа успешно развивает актуальные проблемы современной теории управления. Многие его ученики защитили диссертации, стали известными учеными и инженерами, возглавляют кафедры, различные научные и промышленные организации.

Советское правительство высоко оценило заслуги Бориса Николаевича Петрова. Ему было присвоено звание Героя Социалистического Труда, он был награжден пятью орденами Ленина, орденами Октябрьской Революции, Трудового Красного Знамени, Красной Звезды, удостоен Ленинской премии и Государственных премий СССР.

Его деятельность нашла широкое международное признание. Он был действительным членом

Международной Академии астронавтики, иностранным членом Чехословацкой, Венгерской, Болгарской и Польской академий наук, был удостоен ряда иностранных орденов, золотой медали Национального центра космических исследований Франции.

Все, чего достиг Борис Николаевич, он достиг благодаря большому труду. Борис Николаевич работал очень много, любил работать, получал удовольствие от работы. Он был всесторонне образованным человеком. Прекрасно знал художественную литературу, искусство. В часы отдыха любил рисовать, и для художника-любителя его картины были великолепны¹.

Безвременная смерть унесла его, полного творческих сил. Он умер 23-го августа 1980 г. Имя Бориса Николаевича Петрова навсегда останется в анналах отечественной науки об управлении и космонавтике.

В ноябре 1980 г. вышло постановление Правительства об увековечении памяти Б.Н. Петрова. Президиум АН СССР учредил золотую медаль имени Б.Н. Петрова (с 1993 г. — премия), присуждаемую за выдающиеся работы в области теории и систем автоматического управления, а также в области экспериментальных исследований по освоению космического пространства. Одна из площадей Москвы названа именем академика Б.Н. Петрова и одному из научно-исследовательских кораблей Академии наук присвоено имя академика Б.Н. Петрова. На зданиях Института проблем управления и Московского авиационного института установлены мемориальные доски в память Бориса Николаевича Петрова.

В.Ю. Рутковский

Владислав Юльевич Рутковский — д-р техн. наук, зав. лабораторией, Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН,
☎ (495) 334-87-30, ✉ rutkov@ipu.ru.

¹ См. репродукции картин Б.Н. Петрова на третьей полосе обложки.



ВЗАИМОСВЯЗЬ ФУНДАМЕНТАЛЬНОЙ НАУКИ, ПРИКЛАДНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ И ПРАКТИКИ ПРОЕКТИРОВАНИЯ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ

В.П. Иванов

На основе анализа многолетней деятельности коллектива научных сотрудников, возглавляемого академиком Б.Н. Петровым, излагаются некоторые соображения о взаимосвязи фундаментальной науки, прикладных исследований и практики проектирования систем управления.

Ключевые слова: фундаментальные и прикладные исследования, ракетно-космическая техника, проектирование бортовых систем управления.

*Светлой памяти
Бориса Николаевича Петрова посвящается*

ВВЕДЕНИЕ

Имя Бориса Николаевича Петрова и вся его деятельность в области управления, несомненно, заслуживают самых высоких эпитетов, характеризующих его как человека и ученого. В данной статье мы попытаемся на примере его научного пути показать полезность сочетания фундаментальных и прикладных исследований в работе научных коллективов.

Учителями и руководителями Б.Н. Петрова в начале его научного пути были академики Н.Н. Лузин и В.С. Кулебакин. Полученные глубокие знания способствовали формированию Б.Н. Петрова как ученого-теоретика. Вся деятельность Б.Н. Петрова в области теории управления отличалась новизной решаемых проблем, глубиной исследований. Спектр его научных интересов был очень широк. Им был создан метод структурных преобразований схем автоматических систем [1] и разработан адекватный им математический аппарат — алгебра структурных преобразований. Весьма глубокие исследования проведены Б.Н. Петровым в области методов интегрирования нелинейных дифференциальных уравнений и устойчивости нестационарных динамических систем. Им были установлены границы применимости результатов академика С.А. Чаплыгина [2].

Вместе с тем, в деятельности Б.Н. Петрова и руководимого им коллектива научных сотрудников Института автоматики и телемеханики¹ АН СССР (ИАТ) значительное место занимали исследования в области управления объектами ракетно-космической тех-

ники (РКТ). Эти исследования, направленные на решение проблем управления в конкретной, хотя и достаточно широкой и важной сфере деятельности, в соответствии со сложившимися представлениями можно отнести к прикладной науке. Важно, что проведение упомянутых исследований потребовало глубокого изучения проблематики ракетно-космической техники, охватывающей не только физические принципы действия, но и вопросы технологии и производства объектов РКТ.

1. НЕКОТОРЫЕ СООБРАЖЕНИЯ О ВЗАИМОСВЯЗИ ФУНДАМЕНТАЛЬНОЙ НАУКИ ОБ УПРАВЛЕНИИ И ПРИКЛАДНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ В ПРЕДМЕТНЫХ ОБЛАСТЯХ

В настоящее время в науке управления сложно сформулировать четкие правила по разграничению фундаментальных и прикладных исследований. Фундаментальная и прикладная науки образуют единый организм, обе части которого взаимодействуют друг с другом. Тем не менее, разделение научных исследований на фундаментальные и прикладные имеет место. Фундаментальные исследования характеризуются более высоким уровнем общности полученных результатов. Прикладная наука обычно связывается с исследованиями предметных областей. Наука об управлении охватывает различные сферы человеческой деятельности, включающие в себя технику, экономику, медицину, биологию и др.

Очевидна ценность и полезность развития как фундаментальной, так и прикладной науки. Отсутствие результатов исследований общего характера может привести к потере ориентации в направлении естественного развития науки. Прикладные исследования в предметных областях обогащают науку, расширяя

¹ Ныне Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН.

диапазон постановок задач управления, и позволяют осуществлять связь науки с производством. Такая связь, с одной стороны, способствуют внедрению фундаментальных результатов в технологию производства, а с другой — инициирует проведение новых фундаментальных исследований в интересах создания новой техники и технологии ее производства.

Творческое начало имеет место как в фундаментальных, так и в прикладных исследованиях. Получение фундаментальных результатов связано со способностью обобщения имеющегося опыта, абстрагирования от частного и генерацией идей на языке наиболее общего уровня. Несомненно, что это наиболее эффективный путь развития науки. Способность получения новых результатов в прикладных исследованиях требует погружения исследователя в язык конкретной области. Нередко новый результат, полученный в прикладной области, имеет общее значение для науки. Однако исследователи — непосредственные участники данной конкретной разработки, не видят этой общности. С другой стороны, специалист в области фундаментальной науки, не зная языка прикладной области, не сможет понять сути и важности нового результата. Увидеть общее в частном результате и сформулировать его на языке фундаментальной науки сможет исследователь универсального типа, имеющий опыт в фундаментальных и прикладных исследованиях. Существует и обратная задача передачи фундаментальных результатов в предметную область.

Внедрение фундаментальных результатов предполагает перевод этих результатов на язык прикладной области. Фактическое внедрение требует соответствующей корректировки конструкторской документации и технологии производства. Сотрудники научных организаций, как правило, стремятся ограничиться передачей научных результатов, стараясь не ввязываться в работу, связанную с фактическим внедрением. Непосредственные участники производства, сталкиваясь с необходимостью разбираться в нововведениях, обычно предпочитают использовать, пусть менее эффективные, но более понятные самостоятельные решения. В такого рода противоречии заключается основная причина слабого внедрения научных результатов в сферу производства.

Яркими примерами глубокого проникновения фундаментальной науки в технологию производства служат атомный и ракетно-космический проекты Советского Союза, к реализации которых были привлечены крупные ученые и научные коллективы.

2. ОПЫТ КОЛЛЕКТИВА НАУЧНЫХ СОТРУДНИКОВ, ВОЗГЛАВЛЯЕМОГО Б.Н. ПЕТРОВЫМ, В ЧАСТИ ФУНДАМЕНТАЛЬНЫХ И ПРИКЛАДНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ ПРИ РАЗРАБОТКЕ БОРТОВЫХ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ РАКЕТ-НОСИТЕЛЕЙ

Начало творческой деятельности Б.Н. Петрова пришлось на время, когда наша страна совершила гигантский прорыв, открыв человечеству дорогу в космос. В этом прорыве значительную роль сыграла со-

ветская наука. В проблемах, связанных с созданием ракет-носителей, весомую долю занимали задачи теории автоматического управления подвижными объектами. Глубокие знания в этой области и высокая эрудированность Б.Н. Петрова позволили ему активно включиться в разработку новых, уникальных для того времени, задач автоматического управления, участвовать в разработке и обсуждении космических программ наряду с ведущими деятелями ракетно-космической науки и техники.

В процессе совместной работы с конструкторами-ракетчиками Б.Н. Петров уделял большое внимание проблеме построения бортовых терминальных систем управления жидкостных ракет, повышающих энергетические характеристики путем управления их двигательными установками. В течение многих лет Борис Николаевич был научным руководителем разработок многих бортовых терминальных систем. Участие в этих работах потребовало адаптации коллектива научных сотрудников ИАТ, руководимого Б.Н. Петровым, к условиям работы в режиме опытно-конструкторской разработки. Новые принципы построения и методы синтеза получали воплощение в конструкторской документации и технологии разработки систем управления. Помимо участия в разработке эскизных проектов, создания алгоритмов управления, максимально приближенных к условиям их реализации на бортовых вычислительных средствах, формирования эксплуатационных характеристик систем управления на основе оценки их динамики и точности, опытно-конструкторская разработка включает в себя создание документации, регламентирующей технологию стендовой и натурной отработки. В состав такой документации входят тестовые примеры для контроля правильности функционирования бортового программного обеспечения, имитационные программные модули для проведения предпускового моделирования, методики адаптации алгоритмов управления к условиям конкретного пуска, оценки функционирования системы управления при стендовых и натуральных испытаниях.

Создаваемые при участии сотрудников Института бортовые системы управления стали своеобразным полигоном для практического применения научных результатов и инициировали постановки новых задач управления.

При создании систем управления расходом топлива ракет-носителей использовались результаты общей теории управления. В частности, при синтезе алгоритмов управления применялись методы фильтрации и оптимального управления, для анализа динамики и точности систем — методы статистического моделирования. Впервые в ракетной технике были применены принципы терминального и порогово-дискретного управления.

В процессе разработки конкретных бортовых систем и исследований различных задач терминального управления возникло понимание, что бортовые терминальные системы имеют свою специфику и занимают определенное место в общем ряду систем автоматичес-



кого управления. Практические задачи, возникающие в ракетно-космической технике, послужили толчком к разработке теории бортовых систем терминального управления и систематическому изложению теории и накопленного опыта в специальной монографии [3]. Основная особенность развитых методов синтеза заключается в том, что все они инициированы практическими нуждами проектирования бортовых систем управления и учитывают реальные условия эксплуатации объектов ракетно-космической техники.

В последние годы развита теория отказоустойчивых бортовых терминальных систем [4]. Сформулирован принципиально новый подход к синтезу, заключающийся в том, что состояние системы с частичным отказом рассматривается как одно из допустимых ее состояний, которое должно учитываться при выборе алгоритма управления. В идеологию построения алгоритма управления закладывается способность сохранения приемлемого качества при появлении отказов. Отказоустойчивые системы синтезируются в классе систем управления с многоуровневой структурой, из которой могут быть образованы каналы управления различного уровня сложности, адекватные сложившимся условиям функционирования. В синтезируемом алгоритме управления предусматриваются возможности диагностики состояний системы с отказами и перестройки на новые условия работы. Важно, что повышение надежности системы в данном случае обеспечивается без привлечения дополнительных аппаратных средств.

Принимая во внимание, что в ракетно-космической технике сохраняется относительно низкая для техносферы надежность действия средств выведения, был выполнен цикл научных работ в обеспечение безопасности эксплуатации объектов ракетно-космической техники средствами управления. В основе этих работ лежит концепция управления безопасностью по обобщенному критерию, учитывающему различные факторы риска [5]. Обеспечение безопасности охватывает основные этапы жизненного цикла объектов, начиная от формирования проектного облика, до этапа сопровождения эксплуатации. Здесь используются средства проектно-технического и эксплуатационно-технического управления. В системах управления совершенствуются их принципы действия с приоритетом критерия безопасности и реализуются отказоустойчивые алгоритмы формирования управления.

Сформулировано новое направление в области создания перспективных ракетных средств гарантированного выведения, которое охватывает наиболее критичные для безопасности объекта задачи управления массо- и теплообменными процессами в баках и магистралях двигателя, определяющими устойчивый режим выделения энергии большой мощности в жидкостных двигателях.

Основные результаты теории терминальных систем управления были использованы при создании бортовых систем для космических ракет-носителей «Союз», «Протон-М», «Зенит», «Энергия-Буран», обеспечив-

ших реализацию отечественных космических программ и международных проектов («Союз — Аполлон», «Морской старт»), а также для вновь создаваемых, перспективных средств выведения — семейства РН «Ангара», РН «Союз-СТ», разгонного блока КВТК.

Современный уровень развития техники, особенно в области производства информационных систем и систем управления, требует постоянного притока нововведений и характеризуется чрезвычайно быстрой сменой технологий. Для того, чтобы оперативно отвечать новым условиям, фундаментальная и прикладные науки должны быть тесно связаны с научно-производственными центрами (НПЦ), где формируются технологии производства. Научные коллективы, не растворяясь в НПЦ, должны участвовать в создании технологий, реализующих нововведения, совместно с НПЦ. Такое тесное взаимодействие значительно облегчает внедрение научных результатов. В этом случае употребление слова «внедрение» в обычном понимании становится ненужным, так как результаты научных исследований естественным образом вписываются в процесс создания системы управления.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Не умоляя значения разработки проблем фундаментальной теории управления как наиболее эффективного пути развития науки, важно отметить существенную роль прикладных исследований, тесно связанных с практикой проектирования и технологией создания информационных и управляющих систем. Прикладные исследования расширяют возможности применения теории и тем самым обогащают науку управления.

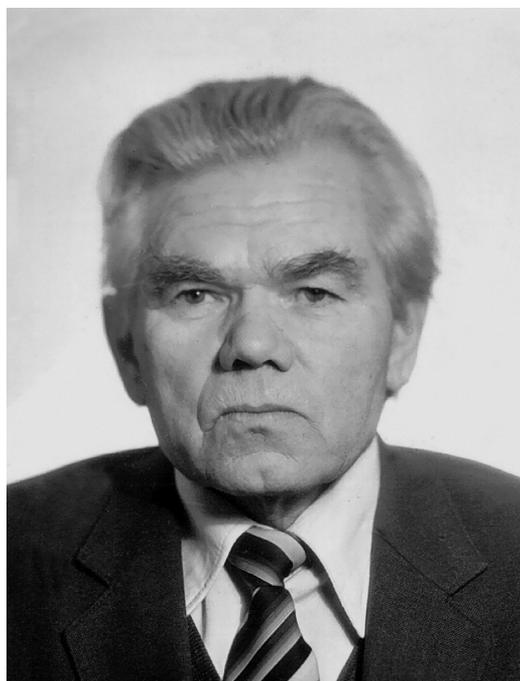
ЛИТЕРАТУРА

1. Петров Б.Н. О построении и преобразовании структурных схем // Изв. АН СССР. ОТН. — 1945. — № 12. — С. 1146—1162.
2. Петров Б.Н. Граница применимости теоремы С.А. Чаплыгина о дифференциальном неравенстве к линейным уравнениям с обыкновенными производными второго порядка // Докл. АН СССР. — 1946. — Т. 51, № 4. — С. 251—254.
3. Петров Б. Н., Портнов-Соколов Ю. П., Андриенко А. Я., Иванов В. П. Бортовые терминальные системы управления. — М.: Машиностроение, 1983. — 200 с.
4. Иванов В.П., Каблова Е.Б. Принципы и методы построения отказоустойчивых алгоритмов бортовых систем управления // Третья междунар. конф. по проблемам управления / ИПУ РАН [Электронный ресурс: 1 опт. диск]. — 2006., с. 892—900.
5. Портнов-Соколов Ю.П. Управление риском — приоритетная дисциплина в теории управления XXI века // Датчики и системы. — № 11. — 2003.

Статья представлена к публикации членом редколлегии Б.В. Павловым.

Владимир Петрович Иванов — д-р техн. наук, гл. науч. сотрудник, Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН,
☎ (495) 334-87-60, ✉ vladguc@ipu.ru.

ПАВЕЛ ПАВЛОВИЧ ПАРХОМЕНКО (к 90-летию со дня рождения)



Исполнилось 90 лет Павлу Павловичу Пархоменко — одному из старейших сотрудников и крупнейших ученых Института проблем управления РАН, члену редколлегии журнала «Проблемы управления». Ветеран Великой Отечественной войны П.П. Пархоменко принадлежит к тому поколению ученых, которое своими трудами и умением организовывать научные коллективы создало широкую известность Институту как передовой организации в науке управления.

П.П. Пархоменко родился 9 февраля 1923 г. в г. Нежине (Украина). В 1949 г. окончил электротехнический факультет Киевского политехнического института, затем по распределению работал на гидроэлектростанциях Северного Кавказа. В 1955 г. поступил в аспирантуру Института автоматики и телемеханики АН СССР (ныне Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН), его научным руководителем был профессор (позднее член-корреспондент АН СССР) М.А. Гаврилов. В 1959 г. защитил кандидатскую диссертацию «Машинизация процессов анализа устройств релейно-

го действия», а в 1969 г. — докторскую диссертацию «Методы и средства технической диагностики и вопросы синтеза структур релейных устройств» по специальности «Техническая кибернетика».

В 1970 г. ему присвоено звание профессора, в 1984 г. он избран членом-корреспондентом АН СССР по отделению «Информатика, вычислительная техника и автоматика» (специальность «Элементная база, материалы вычислительной техники и диагностика»).

П.П. Пархоменко — видный специалист в области теории дискретных устройств и систем, комбинаторики и технической диагностики. Им предложены принципы построения систем тестового и функционального диагностирования, проектирования новых объектов с учетом требований их диагностического обеспечения. Выполненное им развитие основ теории вопросников расширило круг задач по оптимизации процедур диагностирования.

В течение тридцати лет, до 1994 г., П.П. Пархоменко заведовал лабораторией технической диагностики и отказоустойчивости Института проблем управления РАН. Под его руководством лаборатория разработала логические анализаторы релейно-контактных схем и ряд образцов программно-управляемых машин для автоматизированной проверки различных технических объектов (телефонной аппаратуры, электровозов, самолетов, систем управления ракет и др.). Он стал инициатором и автором первых в нашей стране разработок универсальной (работающей по сменной программе) аппаратуры автоматизированного контроля сложных изделий в условиях их производства и эксплуатации. Аппаратура применялась в промышленности, две модификации проверочной машины ПУМА выпускались серийно. Разработки привлекли внимание и активизировали решение задач автоматизации контроля в разных областях народного хозяйства. Новизна тематики привлекла в лабораторию многих молодых инженеров.

В начале 1960-х гг. П.П. Пархоменко был главным инициатором рождения новой научной дисциплины в СССР — технической диагностики



(и впоследствии отказоустойчивости). Он стал признанным лидером этого нового направления в нашей стране (недаром его называют отцом русской технической диагностики!), создал Всесоюзную школу-семинар по технической диагностике, влиться в ряды которой было заветной мечтой многих сотен не только молодых инженеров, но и зрелых исследователей. Он сумел создать удивительный научный и рабочий климат этих школ, который способствовал быстрому росту квалификации «школьников», появлению групп исследователей и инженеров-диагностов во многих научных и крупных проектных организациях, учебных институтах, на промышленных предприятиях. Значительно выросла публикационная активность по проблемам технической диагностики. В ряде технических вузов стали читаться курсы по технической диагностике. С 1973 по 1991 г. под его бессменным руководством проведено 18 школ и 6 Всесоюзных совещаний по технической диагностике и отказоустойчивости. Почти 100 «учеников» школы-семинара защитили кандидатские диссертации, а более 20 стали докторами наук. Пожалуй, все они опирались на помощь и советы П.П. Пархоменко, и все «школьники» искренне считают себя его учениками, и это очень большая честь.

Под руководством П.П. Пархоменко защищено 20 кандидатских диссертаций. Он автор и соавтор более 100 публикаций, в том числе двух монографий, многих изобретений и патентов.

Павел Павлович и сейчас ведет активную научную деятельность. Руководит исследованиями по фундаментальной тематике, является председателем секции технических средств автоматики и вычислительной техники Ученого совета ИПУ РАН, членом двух диссертационных советов, заместителем

главного редактора журнала «Автоматика и телемеханика».

В годы Великой Отечественной войны командир стрелкового отделения сержант П.П. Пархоменко воевал на Первом Украинском и Первом Белорусском фронтах, прошел боевой путь от Днепра до Буга. После тяжелого ранения в 1944 г. был демобилизован.

П.П. Пархоменко награжден медалью «За победу над Германией», орденами Отечественной войны и Трудового Красного Знамени, а также юбилейными медалями. Павел Павлович отличается широтой и глубиной знаний во многих смежных областях своей деятельности. Павел Павлович очень внимательно и доброжелательно относится к работам коллег не только в нашей стране, но и за рубежом, и ему отвечают взаимностью. К нему постоянно обращаются за советом и помощью, и он никому не отказывает. Он любит жизнь во всех ее проявлениях. Он не только Ученый, но и прекрасный Инженер-изобретатель, замечательный Человек, добрый, принципиальный и строгий. Немалая заслуга принадлежит ему в создании и поддержании той особенной творческой атмосферы, которую ветераны Института называют «иатовским» духом.

Руководя молодежным коллективом, Павел Павлович никогда не отставал от своих сотрудников в свободное от работы время: катался с ними на горных лыжах, играл в волейбол, участвовал в институтских спортивных олимпиадах. Совершенно естественно, что в Институте П.П. Пархоменко пользуется огромным уважением, поскольку его высокие научные и организаторские способности органически сочетаются с такими определяющими его чертами, как коммуникабельность, порядочность, приветливость, чувство юмора.

***Дорогой Павел Павлович!
Поздравляем Вас с юбилеем и желаем здоровья на многие годы!
Творческих Вам успехов!***

*Редакционная коллегия
Редакция*

CONTENTS & ABSTRACTS

«CONTROL SCIENCES» JOURNAL TENTH ANNIVERSARY. 2

ON REALIZATION OF QUASI-LINEAR SYSTEMS DESCRIBED BY STATIONARY DIFFERENTIAL EQUATIONS IN HILBERT SPACE 7
Lakeev A.V., Rusanov V.A., Kozerev V.A.

A continuous nonlinear infinite-dimensional dynamic system is considered. The system is defined in terms of the language of its behavior of «input-output» (a model of «black box») type. Various functional-analytical criteria of realization of this system in the separable Hilbert space in the class of quasi-linear stationary differential models with program-positional control are proposed.

Keywords: nonlinear differential realization, autonomous $(A, B, B^{\#})_2$ -model, M_2 -extension.

ADAPTIVE CONTROL OF SOME CLASS OF NON-MINIMUM PHASE PLANTS 19
Furtat I.B.

The problem of adaptive control with reference model for some class of non-minimum phase systems is considered. It is assumed that only scalar input and output of the plant are measurable. The conditions that depend on parameters of the plant and the control system under which the control algorithm, designed for minimum phase plants, is functional for non-minimum phase systems are derived. The solutions are generalized to plants with delay. Examples of simulations are given.

Keywords: non-minimum phase plant, adaptive control, singularly-perturbed system.

ANALYSIS OF HARMONIC STRUCTURE OF TIME SERIES BASED ON SINGULAR VALUE DECOMPOSITION ALGORITHM 26
Kuzmin O.V., Kedrin V.S.

The paper is devoted to research of features of structure analysis of harmonic series based on the definition of numerical rank correlated with the number of singular values significantly different from zero. The parallel between the numerical rank of the singular value decomposition and the final rank of a simple harmonic series is drawn. The results of analysis of patterns of additive and multiplicative models of harmonic time series are provided.

Keywords: time-dependent system, time series, singular value decomposition, singular spectrum, model structure analysis, separability.

OPTIMAL MANAGEMENT OF INNOVATION WITHIN THE FRAMEWORK OF THE INTEGRATED STRUCTURE. 32
Kosachev Yu.V.

The paper considers the problem of optimum management of innovation implementation process at the specified time interval within vertically integrated financial and industrial organization. Using a mathematical model of interaction between financial and industrial capital, the possibility of enhancing the effectiveness of innovation based on optimizing the structure of investment dynamics in venture capital is investigated. It is noted that at the same time the manufacturer's investment process is optimized to increase economic efficiency by reducing costs both at the stage of innovation commercialization and production of innovative products.

Keywords: optimal control, dynamic managed system, innovation, investment, commercialization of innovation, integrated financial and industrial organization.

OPTIMIZING ADVERTISEMENTS DISPLAY FOR TOP AD PLACEMENT IN SPONSORED SEARCH 40
Kornetova A.N., Chervonenkis A.Ya.

Every day a large number of ads from advertisers enters the search engine displaying ads machine. The main purpose of advertiser's ad is to be shown on the main search results page of the search engine (sponsored search) for such queries, that suites the main topic of the corresponding ad. The paper describes a new algorithm of ad selection for each search query to show on. The appropriate optimization problem was formulated, constructed and solved within the constraints of the current system, such

as the total money derived from advertisers, and the proportion of queries, which ad can be shown. The criterion of optimality is the efficiency of advertising impressions, which is defined by users satisfaction and, therefore, the increase of their attention to the sponsored search on the main search page.

Keywords: click-through rate, sponsored search, Web advertising, CTR, optimization, algorithm construction.

OPTIMAL PLANNING OF RENOVATION OF RAILWAY LINE: FORMULATION, ALGORITHMS FOR SOLVING 50
Petrovets Yu.O., Andrianov D.L.

The paper presents the long-term optimal control problem arising in planning of railway infrastructure renewal. The paper also considers the method of solving based on the idea of branch and bound algorithm using dynamic programming approach to obtain bounds.

Keywords: railway infrastructure, optimal planning, brunch and bound algorithm, dynamic programming.

POSITIONING OF MOVING OBJECTS IN LOW-FREQUENCY ELECTROMAGNETIC FIELD. PART I. Base algorithm of relative positioning 57
Volkovitskiy A.K., Karshakov E.V., Pavlov B.V.

The paper considers the method of relative positioning of moving object in a field of low-frequency electromagnetic source. Theoretical basis and base algorithm of angular and linear relative positioning are given. Practical results of high-precision distance and angles measuring in «towing aircraft — towed object» system are presented.

Keywords: relative positioning, electromagnetic system, moving object.

SYNTHESIS OF NONLINEAR CONTROL LAW FOR A FLEXIBLE SATELLITE RESPINUP BY WEAK INTERNAL TORQUES 63
Somov Ye.I.

The paper considers principle aspects of control law synthesis for respinup of a satellite to combine the angular rate vector, directed on its body maximum inertia axis, with any given unit into inertial reference frame. Only weak internal torques are applied and the torques are generated by gyromoment cluster with bounded resources.

Keywords: spacecraft, internal control torques, respinup.

MULTI-WHEELED MOBILE ROBOT MODEL AND DYNAMIC ASSESSMENT OF CONTROLLABILITY AND OPERATIONAL COMFORT. 70
Aliseychik A.P., Pavlovsky V.E.

The paper examines the controllability and dynamics of the six-wheel mobile robot, designed for high-speed driving on rough surfaces, and its control synthesis. The analysis of the dependence of movements comfort on various characteristics of the suspension has also been conducted. Six-wheel robot dynamics model, based on the software package «Universal Mechanism» is investigated.

Keyword: six-wheel machine, motion simulation, «Universal mechanism».

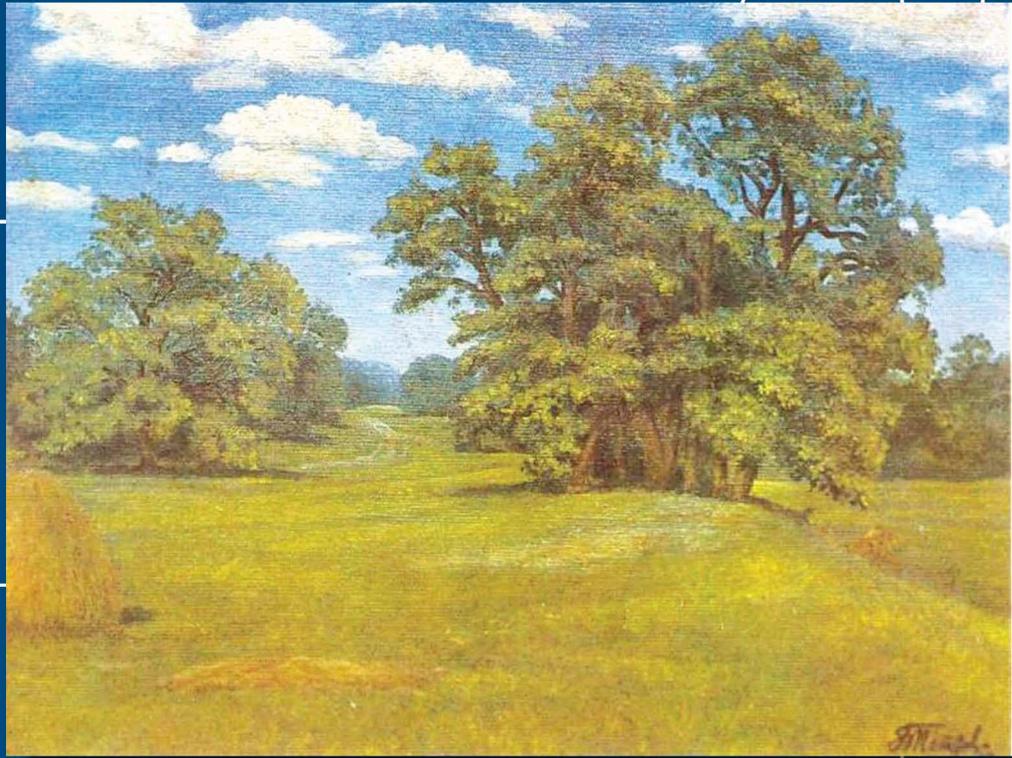
VICE-PRESIDENT OF THE USSR ACADEMY OF SCIENCES ACADEMICIAN BORIS PETROV (on the 100th anniversary of birth) 79

RELATIONSHIP BETWEEN FUNDAMENTAL SCIENCE, APPLIED RESEARCH AND CONTROL SYSTEMS DESIGN PRACTICE 83
Ivanov V.P.

On the basis of analysis of long-term collective researches, led by Boris Petrov, some thoughts on relationship between fundamental science, applied research and control systems design practice are given.

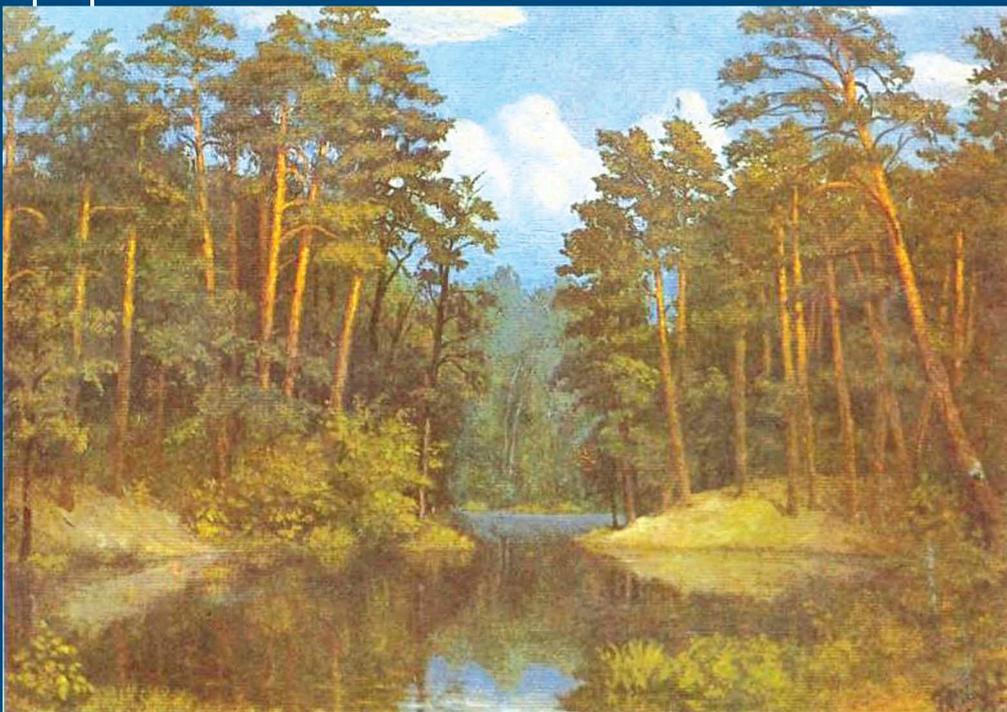
Keywords: fundamental and applied research, rocket and space technology, on-board control system design.

PAVEL PAVLOVICH PARKHOMENKO (on the 90th anniversary of birth) 86



Дубы в Конче-Заспе под Киевом.
1972 г. Холст. Масло

Академик Б.Н. Петров
(1913–1980)
(см. стр. 82)



Сосны.
1975 г. Холст. Масло

