УДК 681.326

КАНОНИЧЕСКИЕ ФОРМЫ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

А.Н. Жирабок

Рассмотрена задача построения канонических форм нелинейных систем, описываемых непрерывными и дискретными динамическими моделями.

Ключевые слова: нелинейные динамические системы, канонические формы, наблюдаемость, управляемость, алгебра функций.

ВВЕДЕНИЕ

Важную роль в теории динамических систем играют системы, имеющие структуру специального вида. Такие структуры под названием канонических форм (КФ) хорошо изучены в теории линейных систем [1—3]. В частности, большой интерес представляют системы, все обратные связи в которых реализованы с использованием вектора выхода; пример такой системы приведен на рис. 1, где символами k, $k - 1$, ..., 1 обозначены блоки интеграторов или многозначных элементов задержки, f_{*i} — функциональный преобразователь, $i = 1, 2, ..., k$. Такое представление полезно в задачах, связанных с анализом вход-выходного поведения системы, построения наблюдателей, соотношений паритета и т. п. [2—5]. В работе [6] КФ были использованы для анализа управляемости системы и решения проблем стабилизации.

Достаточно детально задачи построения КФ изучены для систем с непрерывным временем и гладкими нелинейностями на основе дифференциально-геометрического подхода [6—8]. В то же время системы с дискретным временем и негладкими нелинейностями рассмотрены еще недостаточно. В настоящей работе для решения этой задачи предлагается специальный математический аппарат алгебраического типа, позволяющий с единых позиций рассмотреть системы с непрерывным и дискретным временем, получить условия существования и разработать процедуры построения различных КФ. В работе [9] на основе этого математического аппарата была решена задача построения КФ, представленной на рис. 1.

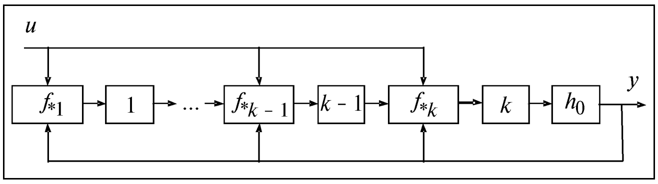

Рис. 1. Идентификационная каноническая форма

1. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Будем рассматривать динамические системы как с непрерывным, так и дискретным временем; ниже соответственно — непрерывные и дискретные системы. Начнем с непрерывного случая. Общая форма описания непрерывных стационарных динамических систем имеет вид нелинейного дифференциального уравнения

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)),\ y(t) = h(x(t)), \qquad (1)$$

где x — n-мерный вектор состояния, u — m-мерный вектор управления (входа), y — l-мерный вектор выхода, f и h — в общем случае нелинейные векторные функции; предполагается, что функция f удовлетворяет ограничениям, связанным с существованием и единственностью решения уравнения (1).

Векторные уравнения (1) эквивалентны системе скалярных уравнений:

$$\dot{x}_i(t) = f_i(x(t), u(t)), \quad i = 1, 2, ..., n,$$

$$y_j(t) = h_j(x(t)), \quad j = 1, 2, ..., l,$$

где x_i и y_j — соответственно i-я и j-я компоненты векторов x и y, f_i и h_j — соответственно i-я и j-я компоненты векторных функций f и h. Векторы x, u и y принадлежат линейным векторным пространствам X, U и Y соответственно. В дальнейшем будем предполагать, что $X \subseteq \mathbf{R}^n$, $U \subseteq \mathbf{R}^m$, $Y \subseteq \mathbf{R}^l$.

Общая форма описания дискретных динамических систем имеет вид нелинейного разностного уравнения

$$x(t + 1) = f(x(t), u(t)), y(t) = h(x(t)), \qquad (2)$$

здесь t — дискретное время: $t = 0, 1, ...$ Мы используем одинаковые обозначения для функций, входящих в описание непрерывных и дискретных систем (f и h), чтобы подчеркнуть общность получаемых для них в дальнейшем результатов.

В общих моделях (1) и (2) мы не накладываем каких-либо особых ограничений на функции f и h, кроме уже оговоренных. Для удобства иногда будем использовать для моделей (1) и (2) компактное обозначение $\Sigma = (X, U, Y, f, h)$.

Предполагается, что искомые КФ имеют общее описание в виде уравнения

$$\dot{x}_*(t) = f_*(x_*(t), u(t)), y(t) = h_*(x_*(t)) \qquad (3)$$

в непрерывном случае и уравнения

$$x_*(t + 1) = f_*(x_*(t), u(t)), y(t) = h_*(x_*(t)) \qquad (4)$$

в дискретном случае; детальное описание функций f_* и h_* будет дано ниже. Компактно КФ будем записывать в виде $\Sigma = (X_*, U, Y, f_*, h_*)$.

Решение задачи будем искать в виде функции φ: $X \to X_*$, реализующий гомоморфизм $\Sigma \to \Sigma_*$, для которого при всех $(x, u) \in X \times U$ выполняются равенства

$$(\partial\varphi/\partial x)f(x, u) = f_*(\varphi(x), u), h(x) = h_*(\varphi(x))$$

для непрерывного и

$$\varphi(f(x, u)) = f_*(\varphi(x), u), h(x) = h_*(\varphi(x)) \qquad (5)$$

для дискретного случаев. Эти общие соотношения могут быть записаны покомпонентно, например, равенство (5) соответствует семейству уравнений

$$\varphi_i(f(x, u)) = f_{*i}(\varphi(x), u), \quad i = 1, 2, ..., k.$$

Для решения поставленной задачи предлагается применять специальный математический аппарат, положенный в основу работ [10, 11]. Коротко изложим его основные положения; необходимые детали и доказательства можно найти в указанных работах.

2. АЛГЕБРА ФУНКЦИЙ

Рассматриваемый математический аппарат содержит четыре основные конструкции.

1. Отношение частичного предпорядка $\leqslant$: для произвольных векторных функций α: $X \to S$ и β: $X \to W$ будем записывать $\alpha \leqslant \beta$, если существует функция γ такая, что $\gamma(\alpha(x)) = \beta(x)$ для всех $x \in X$, где S и W — некоторые множества. Если $\alpha \leqslant \beta$ и $\beta \leqslant \alpha$, будем записывать $\alpha \cong \beta$ и говорить, что эти функции строго эквивалентны.

Функции α: $X \to S$ на множестве X соответствует разбиение π_α, в один блок которого включаются те и только те элементы этого множества, которые имеют одинаковые образы по α, т. е. $x \equiv x'(\pi_\alpha) \Leftrightarrow \Leftrightarrow \alpha(x) = \alpha(x')$. Можно показать, что $\alpha \leqslant \beta \Leftrightarrow \pi_\alpha \leqslant \pi_\beta$ и $\alpha \cong \beta \Leftrightarrow \pi_\alpha = \pi_\beta$. Таким образом, между множеством разбиений на X и классами эквивалентных функций существует взаимно однозначное соответствие.

2. Операции $\times$ и $\oplus$:

$$\alpha \times \beta = \max(g|g \leqslant \alpha, g \leqslant \beta),$$
$$\alpha\text{Å}\beta = \min(g|\alpha \leqslant g, \beta \leqslant g).$$

Известно [12], что множество разбиений на X образует решетку, т. е. для любой пары разбиений существует однозначно определенные наибольшая нижняя и наименьшая верхняя грани. Тогда из упомянутого взаимно однозначного соответствия следует, что классы эквивалентных функций также образуют решетку с однозначно определенными элементами $\alpha \times \beta$ и $\alpha \oplus \beta$.

Поскольку $\alpha \times \beta \leqslant \alpha$ и $\alpha \times \beta \leqslant \beta$, то можно показать, что $\alpha \times \beta = \begin{bmatrix}\alpha \\ \beta\end{bmatrix}$. По аналогии, $\alpha \leqslant \alpha \oplus \beta$ и $\beta \leqslant \alpha \oplus \beta$, следовательно, каждая компонента функции $\alpha \oplus \beta$ зависит как от компонент функции α, так и от компонент функции β. Это правило может быть использовано для вычисления функции $\alpha \oplus \beta$ в несложных случаях, например, если $\alpha = x_1 \times x_2x_3$ и $\beta = x_1x_2 \times x_3$, то $\alpha \oplus \beta = x_1x_2x_3$. В общем случае необходимо решать специальные дифференциальные уравнения [11].

Наряду с определением строгой эквивалентности функций, можно говорить об эквивалентности почти везде, когда одно из неравенств $\alpha \leqslant \beta$ и $\beta \leqslant \alpha$ может не выполняться на множестве точек меры нуль. Например, эквивалентными почти везде являются функции $(x_1 + x_2)(x_3 + x_4) \times (x_3 + x_4) \times \times x_3 \times x_4$ и $(x_1 + x_2) \times x_3 \times x_4$. Первая из них строго эквивалентна функции $(x_1 + x_2)(x_3 + x_4) \times x_3 \times x_4$, поскольку $(x_3 + x_4) \times x_3 \times x_4 \cong x_3 \times x_4$; ясно также, что $(x_1 + x_2) \times x_3 \times x_4 \leqslant (x_1 + x_2)(x_3 + x_4) \times x_3 \times x_4$.

Однако обратное неравенство выполняется почти везде, кроме множества точек с условием $x_3 + x_4 = 0$, так как в этом случае знание значения функции $(x_1 + x_2)(x_3 + x_4) \times x_3 \times x_4$ не позволяет определить значение функции $(x_1 + x_2) \times x_3 \times x_4$. Поскольку описанная ситуация не влияет на анализируемые в работе свойства, мы не будем различать рассмотренные виды эквивалентности.

3. Бинарное отношение Δ: $(\alpha, \beta) \in \Delta$, если для некоторой функции γ: $S \times U \to W$ и всех $(x, u) \in X \times U$ справедливо равенство $(\partial\beta/\partial x)(f(x, u)) = \gamma(\alpha(x), u)$ в непрерывном случае и $\beta(f(x, u)) = \gamma(\alpha(x), u)$ в дискретном.

4. Операторы $\mathbf{M}$ и $\mathbf{m}$: $\mathbf{M}(\beta)$ — это максимальная функция, образующая с функцией β пару:

$$(\mathbf{M}(\beta), \beta) \in \Delta, (\alpha, \beta) \in \Delta \Rightarrow \alpha \leqslant \mathbf{M}(\beta);$$

$\mathbf{m}(\alpha)$ — это минимальная функция, с которой функция α образует пару:

$$(\alpha, \mathbf{m}(\alpha)) \in \Delta, (\alpha, \beta) \in \Delta \Rightarrow \mathbf{m}(\alpha) \leqslant \beta.$$

Значения оператора $\mathbf{M}$ могут быть вычислены следующим образом. Если β — скалярная функция и композиция $\beta(f(x, u))$ может быть представлена в виде

$$\beta(f(x, u)) = \sum_{i=1}^{d} a_i(x)b_i(u),$$

где функции $b_1, b_2, ..., b_d$ линейно независимы, то $\mathbf{M}(\beta) = \alpha_1 \times \alpha_2 \times ... \times \alpha_d$. Если $\beta = \beta_1 \times \beta_2 \times ... \times \beta_k$, то $\mathbf{M}(\beta) \cong \mathbf{M}(\beta_1) \times \mathbf{M}(\beta_2) \times ... \times \mathbf{M}(\beta_k)$.

Для вычисления оператора $\mathbf{m}$ в общем случае необходимо решать специальные дифференциальные уравнения [11]. В дискретном случае достаточно следующего интуитивно понятного правила: $\mathbf{m}(\alpha)$— это векторная функция с наибольшим числом функционально независимых компонент, каждая из которых представляет собой композицию переменных, стоящих в левой части уравнения (2), при этом соответствующие композиции правой части этого уравнения выражаются через компоненты функции α.

Основные свойства отношений $\leqslant$ и Δ, операций и операторов состоят в следующем:

1) $\alpha \leqslant \beta \Leftrightarrow \alpha \times \beta \approx \alpha$;

2) $(\alpha \times \beta)\delta = \alpha\delta \times \beta\delta$;

3) если $(\alpha, \beta) \in \Delta$ и $\gamma \leqslant \alpha$, то $(\gamma, \beta) \in \Delta$;

4) если $\alpha \leqslant \beta$, то $\mathbf{m}(\alpha) \leqslant \mathbf{m}(\beta)$;

5) $\mathbf{M}(\alpha \times \beta) \cong \mathbf{M}(\alpha) \times \mathbf{M}(\beta)$;

6) $\mathbf{M}(\mathbf{m}(\alpha)) \geqslant \alpha$, $\mathbf{m}(\mathbf{M}(\beta)) \leqslant \beta$;

7) для системы (2) $\mathbf{m}(\alpha) \leqslant \beta \Rightarrow (\alpha, \beta) \in \Delta$;

8) $\alpha \leqslant \mathbf{M}(\beta) \Rightarrow (\alpha, \beta) \in \Delta$.

3. НАБЛЮДАЕМЫЕ КАНОНИЧЕСКИЕ ФОРМЫ

Начнем с наблюдаемых канонических форм (НКФ), первая из которых — НКФ 1 — приведена на рис. 1, ее покомпонентное описание в непрерывном случае имеет следующий вид:

$$\dot{x}_{*1}(t) = f_{*1}(x_{*k}(t), u(t)),$$

$$\dot{x}_{*i}(t) = f_{*i}(x_{*i-1}(t), x_{*k}(t), u(t)), \quad i = 2, 3, ..., k,$$

$$y(t) = h_0(x_{*k}(t)).$$

В дискретном случае $\dot{x}_{*i}(t)$ заменяется на $x_{*i}(t + 1)$. Число k будем называть размерностью КФ. В работе [9] получен следующий результат.

Теорема 1. *Гомоморфизм* φ: $\Sigma \to \Sigma_*$ *для систем* (1) *и* (2) *существует тогда и только тогда, когда справедливо функциональное неравенство*

$$\mathbf{m}(h \times \mathbf{m}(h \times ... \times \mathbf{m}(h)...)) \leqslant h \qquad (6)$$

(оператор $\mathbf{m}$ *применяется* k *раз,* $k \leqslant n$*).*♦

Как уже говорилось, эта НКФ удобна для приведения системы ко вход-выходному описанию, покажем это на примере следующей дискретной системы:

$$x_1(t + 1) = (x_2(t)(x_3(t) + x_5(t)) + x_4(t))x_4(t)u(t),$$

$$x_2(t + 1) = x_1(t)/x_4(t),$$

$$x_3(t + 1) = x_1(t)x_5(t)/x_4(t) - (x_3(t) + x_5(t))^2 - u(t),$$

$$x_4(t + 1) = x_2(t)(x_3(t) + x_5(t)) + x_4(t),$$

$$x_5(t + 1) = (x_3(t) + x_5(t))^2 - u(t).$$

$$y_1(t) = x_5(t), y_2(t) = x_4(t).$$

Проверим выполнение условия (6) для функции $h(x) = x_5 \times x_4$: $\mathbf{m}(h)(x) = x_1/x_4$, $\mathbf{m}(h \times \mathbf{m}(h))(x) = (x_1/x_4) \times x_2 \times (x_3 + x_5)$, $\mathbf{m}(h \times \mathbf{m}(h \times \mathbf{m}(h)))(x) = (x_1/x_4) \times x_2 \times (x_3 + x_5) \times x_4 \times x_5$. Нетрудно видеть, что при $k = 3$ условие (6) выполняется. Положим $\varphi_1(x) = x_1/x_4$, $\varphi_2(x) = x_2 \times (x_3 + x_5)$, $\varphi_3(x) = x_4 \times x_5$. Найдем описание НКФ 1 заданной системы, для чего положим $x_{*1} = x_1/x_4$, $x_{*2} = x_2$, $x_{*3} = x_3 + x_5$, $x_{*4} = x_4$, $x_{*5} = x_5$:

$$x_{*1}(t + 1) = x_1(t + 1)/x_4(t + 1) = (x_2(t)(x_3(t) + x_5(t)) + x_4(t))x_4(t)u(t)/(x_2(t)(x_3(t) + x_5(t)) + x_4(t)) = x_{*4}(t)u(t),$$

$$x_{*2}(t + 1) = x_2(t + 1) = x_1(t)/x_4(t) = x_{*1}(t),$$

$$x_{*3}(t + 1) = x_{*1}(t)x_{*5}(t),$$

$$x_{*4}(t + 1) = x_{*2}(t)x_{*3}(t) + x_{*4}(t),$$

$$x_{*5}(t + 1) = x_{*3}^2(t) + u(t),$$

$$y_1(t) = x_{*5}(t),\ y_2(t) = x_{*4}(t).$$

Проведя серию временных сдвигов и подстановок правых частей полученных уравнений вместо значений соответствующих переменных в момент времени $t + 1$, нетрудно убедиться в том, что вход-выходное описание системы имеет следующий вид:

$$y_1(t + 3) = u(t + 2) + (y_1(t + 1)y_2(t)u(t))^2,$$

$$y_2(t + 3) = y_2(t + 2) + y_1(t + 1)(y_2(t)u(t))^2.$$

Отметим, что получение аналогичного вход-выходного описания путем подстановок на основе исходной модели — непростая задача из-за громоздкости получаемых выражений и необходимости в связи с этим тщательного их анализа с целью упрощения. Так, например,

$$y_2(t + 1) = x_4(t + 1) = x_2(t)(x_3(t) + y_1(t) + y_2(t)),$$

$$y_2(t + 2) = (x_1(t)/y_2(t))(x_1(t)y_1(t)/y_2(t) -$$
$$- (x_3(t) + y_1(t))^2 - u(t) + y_1(t + 1)) + y_2(t + 1);$$

для переменной y_1 получаются не менее громоздкие выражения. Это подчеркивает эффективность приведения системы к каноническому виду.

Приведем простой иллюстративный пример, показывающий, в каких случаях НКФ 1 не может быть построена. Пусть описание системы имеет следующий вид:

$$x_1(t + 1) = x_2(t) + x_3(t)u(t),$$

$$x_2(t + 1) = x_1(t) + x_2(t),$$

$$x_3(t + 1) = x_1(t) + x_4(t),$$

$$x_4(t + 1) = x_2(t) + x_3(t),$$

$$y_1(t) = x_1(t),\ y_2 = x_2(t).$$

Простые вычисления показывают, что $\mathbf{m}(h)(x) = \mathbf{m}(h \times \mathbf{m}(h))(x) = x_2 \geqslant h(x)$, т. е. условие теоремы 1 не выполняется. Структурная особенность этой системы состоит в том, что в ней имеется контур обратной связи, все переменные которого (x_3 и x_4) не являются компонентами вектора выхода, и одна из переменных (x_3) нелинейно входит в описание. Нетрудно проверить, что если положить $y_3(t) = x_4(t)$, то с новым вектором выхода система может быть приведена к НКФ 1. Отметим, что линейные системы, несмотря на наличие у них контуров обратной связи, не содержат нелинейностей и поэтому всегда приводятся к НКФ 1. Нетрудно проверить также, что, несмотря на невозможность представления в НКФ 1, рассматриваемая система имеет вход-выходное описание.

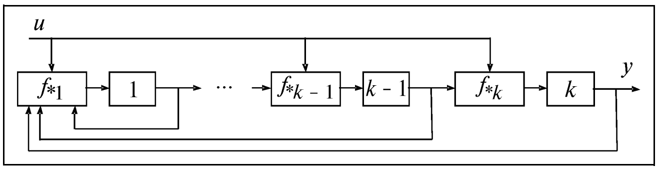

Рис. 2. Наблюдаемая каноническая форма 2

Рассмотрим еще одну наблюдаемую КФ — НКФ 2, известную в теории линейных систем (рис. 2). Ее общее описание дается уравнениями (3) и (4), покомпонентное в непрерывном случае имеет следующий вид:

$$\dot{x}_{*1}(t) = f_{*1}(x_{*1}(t), x_{*2}(t), \ldots, x_{*k}(t), u(t)),$$

$$\dot{x}_{*i}(t) = f_{*i}(x_{*i-1}(t), u(t)),\ i = 2, 3, \ldots, k, \qquad (7)$$

$$y(t) = x_{*k}(t).$$

В дискретном случае производная $\dot{x}_{*i}(t)$ заменяется на $x_{*i}(t + 1)$. В отличие от теоремы 1, здесь имеется только достаточное условие представления системы Σ в НКФ 2.

Теорема 2. *Если для некоторого k справедливо неравенство*

$$h \times \mathbf{M}(h) \times \ldots \times \mathbf{M}^{k-1}(h) \leqslant \mathbf{M}^k(h), \qquad (8)$$

то система (1) *или* (2) *представима в НКФ 2 размерности k.*♦

Д о к а з а т е л ь с т в о (рассмотрим только непрерывный случай, дискретный получается по аналогии). Положим $\varphi_k = h$, $\varphi_{i-1} = \mathbf{M}^i(h)$, $i = 1, 2, \ldots, k - 1$, $\varphi = \varphi_1 \times \varphi_2 \times \ldots \times \varphi_k$, откуда $\varphi_{i-1} = \mathbf{M}(\varphi_i)$, $i = 2, 3, \ldots, k$. По определению оператора $\mathbf{M}$ справедливо включение $(\mathbf{M}(\varphi_i), \varphi_i) \in \Delta$, откуда $(\varphi_{i-1}, \varphi_i) \in \Delta$, что по определению пары функций означает равенство $(\partial\varphi_i/\partial x)f(x, u) = f_{*i}(\varphi_{i-1}(x), u)$ для некоторой функции f_{*i}, $i = 2, 3, \ldots, k$. Из условия (8) следует неравенство $\varphi = \varphi_1 \times \varphi_2 \times \ldots \times \varphi_k \leqslant \mathbf{M}(\varphi_1)$, откуда по определению оператора $\mathbf{M}$ — $(\mathbf{M}(\varphi_i), \varphi_i) \in \Delta$ — и свойству отношения Δ получаем включение $(\varphi, \varphi_1) \in \Delta$, что означает равенство $(\partial\varphi_1/\partial x)f(x, u) = f_{*1}(\varphi(x), u)$ для некоторой функции f_{*1}. Тогда, если положить $x_{*i} = \varphi_i(x)$ и заметить, что $\dot{x}_{*i} = (\partial\varphi_i/\partial x)f(x, u)$, $i = 1, 2, \ldots, k$, получим описание (7). Отсюда следует, что φ — гомоморфизм φ: $\Sigma \to \Sigma_*$, т. е. система Σ представима в НКФ 2.

Известно [1], что для линейных систем НКФ 1 и НКФ 2 эквивалентны. В нелинейном случае это не так; можно показать, что в дискретном случае из условия (6) следует условие (8). Действительно, монотонность оператора $\mathbf{M}$ в дискретном случае позволяет перейти от неравенства $\mathbf{m}(h \times \mathbf{m}(h)) \leqslant h$ к неравенству $\mathbf{M}(\mathbf{m}(h \times \mathbf{m}(h))) \leqslant \mathbf{M}(h)$, что с учетом свойства операторов $\mathbf{M}$ и $\mathbf{m}$ дает неравенство $h \times \mathbf{m}(h) \leqslant \mathbf{M}(h)$, откуда также нетрудно получить соотношения $\mathbf{M}(h \times \mathbf{m}(h)) \leqslant \mathbf{M}^2(h)$ и $h \times \mathbf{M}(h) \leqslant \mathbf{M}^2(h)$. Отсюда по аналогии следует доказываемое утверждение.♦

Обратное в общем случае неверно, следовательно, условие (8) является более жестким по сравнению с условием (6). Это подтверждается также следующим. Можно показать, что условие (8) выполняется для произвольной системы в предположении дифференцируемости функций f и h, причем $k \leqslant n$, что согласуется с результатами теории линейных систем.

Условие (8) может быть проверено с помощью рангового критерия [11]; вид функций f_{*i}, $i = 1, 2, ..., k$, в модели (7) следует из доказательства теоремы 2. Для их определения необходимо в правой части равенства $\dot{x}_{*i} = (\partial\varphi_i/\partial x)f(x, u)$ заменить компоненты вектора x компонентами вектора x_*; это всегда можно сделать согласно определению бинарного отношения Δ. В дискретном случае аналогичным образом рассматривается равенство $x_{*i}(t + 1) = \varphi_i(f(x(t), u(t)))$.

4. УПРАВЛЯЕМЫЕ КАНОНИЧЕСКИЕ ФОРМЫ

4.1. Первая форма

Наряду с рассмотренными наблюдаемыми КФ в теории линейных систем важную роль играют управляемые КФ (УКФ), которые приведены на рис. 3 и 4 (будем называть их УКФ 1 и УКФ 2 соответственно). Получим условия приведения нелинейных систем (1) и (2) к управляемым КФ. Главную роль здесь играет функция ρ, образующая базис всех векторных функций, удовлетворяющих условию

$$(\partial/\partial u)(\rho(f(x, u))) = 0. \qquad (9)$$

Базис понимается в том смысле, что если некоторая функция β удовлетворяет этому условию, то все ее компоненты выражаются через компоненты функции ρ, т. е. $\rho \leqslant \beta$. В непрерывном случае равенство (9) заменяется на

$$(\partial/\partial u)((\partial\rho/\partial x)f(x, u)) = 0.$$

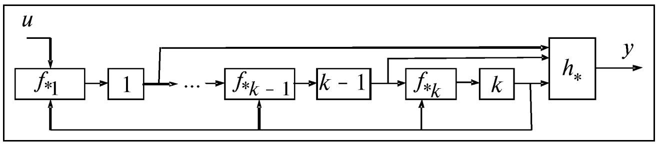

Рис. 3. Управляемая каноническая форма 1

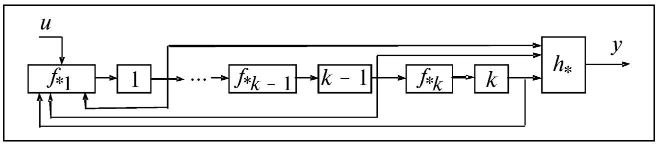

Рис. 4. Управляемая каноническая форма 2

Начнем с УКФ 1; ее покомпонентное описание в соответствии с рис. 3 имеет следующий вид:

$$x_{*1}(t + 1) = f_{*1}(x_{*k}(t), u(t)),$$
$$x_{*i}(t + 1) = f_{*i}(x_{*k}(t), x_{*i-1}(t)), \; i = 2, 3, ..., k, \qquad (10)$$
$$y(t) = h_*(x_*(t)).$$

В непрерывном случае $x_{*i}(t + 1)$ заменяется на $\dot{x}_{*i}$, $i = 1, 2, ..., k$.

Теорема 3. *Система* (2) *представима в УКФ 1 размерности k, если и только если для некоторой функции* $\alpha \geqslant \rho$ *справедливы неравенства*

$$\mathbf{m}(\alpha \times (\rho \oplus \mathbf{m}(\alpha \times (\rho \oplus \mathbf{m}(\alpha \times ... \\ ... \times \mathbf{m}(\alpha)...))))) \leqslant \alpha, \qquad (11)$$

$$\mathbf{m}(\alpha) \times (\rho \oplus \mathbf{m}(\alpha \times \mathbf{m}(\alpha))) \times ... \\ ... \times (\rho \oplus \mathbf{m}(\alpha \times (\rho \oplus \mathbf{m}(\alpha \times (\rho \oplus \mathbf{m}(\alpha \times ... \\ ... \times \mathbf{m}(\alpha)...)))))) \leqslant h \qquad (12)$$

(*оператор* $\mathbf{m}$ *в первом выражении и последнем сомножителе второго выражения применяется k раз*).♦

Доказательство. *Необходимость.* Пусть функция φ дает искомое представление, т. е. с учетом описания (10) справедливы уравнения $\varphi_i(f(x, u)) = f_{*i}(\varphi_k(x), \varphi_{k-1}(x))$, $i = 2, 3, ..., k$; $\varphi_1(f(x, u)) = f_{*1}(\varphi_k(x), u)$, $h(x) = h_*(\varphi(x))$. Положим $\alpha = \varphi_k$ и запишем соотношения, следующее из приведенных равенств: $(\alpha \times \varphi_{i-1}, \varphi_i) \in \Delta$, $(\alpha, \varphi_1) \in \Delta$ и $\varphi_i \geqslant \mathbf{m}(\alpha \times \varphi_{i-1})$, $i = 2, 3, ..., k$, $\varphi_1 \geqslant \mathbf{m}(\alpha)$. Так как $(\partial/\partial u)\varphi_i(f(x, u)) = (\partial/\partial u)f_{*i}(\varphi_k, \varphi_{i-1}(x)) = 0$, то согласно определению функции ρ с учетом равенства (9) получаем $\varphi_i \geqslant \rho$, откуда $\varphi_i \geqslant \rho \oplus \mathbf{m}(\alpha \times \varphi_{i-1})$, $i = 2, 3, ..., k$. При $i = 2$ из $\varphi_2 \geqslant \rho \oplus \mathbf{m}(\alpha \times \varphi_1)$ с учетом $\varphi_1 \geqslant \mathbf{m}(\alpha)$ получаем $\varphi_2 \geqslant \rho \oplus \mathbf{m}(\alpha \times \mathbf{m}(\alpha))$; при $i = 3$ — $\varphi_2 \geqslant \rho \oplus \mathbf{m}(\alpha \times (\rho \oplus \mathbf{m}(\alpha \times \mathbf{m}(\alpha))))$ и т. д. При $i = k$ с учетом $\varphi_k = \alpha$ получаем условие (11). Так как $\varphi \leqslant h$, то отсюда следует $\varphi_1 \times \varphi_2 \times ... \times \varphi_k \leqslant h$, что с учетом выражений для компонент функции φ дает условие (12).

Достаточность. Пусть справедливы условия теоремы. Положим $\varphi_1 = \mathbf{m}(\alpha)$, $\varphi_i = \rho \oplus \mathbf{m}(\alpha \times \varphi_{i-1})$, $i = 2, 3, ..., k - 1$, $\varphi_k = \alpha$, $\varphi = \varphi_1 \times \varphi_2 \times ... \times \varphi_k$, откуда следует $\rho \leqslant \varphi_i$, $\mathbf{m}(\alpha \times \varphi_{i-1}) \leqslant \varphi_i$, $i = 2, 3, ..., k - 1$. Из условия (11), неравенства $\rho \leqslant \alpha$ и определения функции φ_k следует $\rho \leqslant \varphi_k$, $\mathbf{m}(\alpha \times \varphi_{k-1}) \leqslant \varphi_k$. В дискретном случае неравенство $\mathbf{m}(\alpha \times \varphi_{i-1}) \leqslant \varphi_i$ влечет включение $(\alpha \times \varphi_{i-1}, \varphi_i) \in \Delta$, откуда следует существование функции f_{*i} такой, что $\varphi_i(f(x, u)) = f_{*i}(\varphi_k(x), \varphi_{i-1}(x), u)$, $i = 2, 3, ..., k$. Так как $\rho \leqslant \varphi_i$, то $(\partial/\partial u)\varphi_i(f(x, u)) = (\partial/\partial u)f_{*i}(\varphi_k(x), \varphi_{i-1}(x), u) = 0$, т. е. функция f_{*i} не зависит от вектора u и, следовательно, $\varphi_i(f(x, u)) = f_{*i}(\varphi_k(x), \varphi_{i-1}(x))$, $i = 2, 3, ..., k$. При $i = 1$ из равенства $\varphi_1 = \mathbf{m}(\alpha) = \mathbf{m}(\varphi_k)$ следует существование функции f_{*1} такой, что $\varphi_1(f(x, u)) = f_{*1}(\varphi_k, u)$. Из условия (12) после ряда подстановок функций φ_i друг в друга получаем неравенство $\varphi \leqslant h$, или $h_*\varphi = h$ для некоторой функции h_*. Тогда, если положить $x_{*i} = \varphi_i(x)$ и заметить, что $x_{*i}(t + 1) = \varphi_i(f(x(t), u(t))) = f_{*i}(\varphi_k(x(t)), \varphi_{i-1}(x(t)))$, $i = 2, 3, ..., k$, и $x_{*1}(t + 1) = \varphi_1(f(x(t), u(t))) = f_{*1}(\varphi_k(x(t), u(t)))$, то в итоге получим описание (10). ♦

Анализ доказательства необходимости теоремы показывает, что оно справедливо и для непрерывных систем, так как в нем не используются специфические свойства таких систем; в доказательстве достаточности используется свойство $\mathbf{m}(\alpha) \leqslant \beta \Rightarrow (\alpha, \beta) \in \Delta$, справедливое только в дискретном случае.

Алгоритм 1 (проверка выполнения условий (11) и (12)).

1. Если $h \leqslant \mathbf{M}(h)$, то условия теоремы выполняются тривиальным образом при $k = 1$ на одном блоке элементов задержки, который будет содержать l отдельных элементов задержки; выход каждого из них совпадает с некоторым выходом системы.

2. Положить $\alpha = \rho$.

3. Найти минимальное значение i, при котором выполняется неравенство (12). Если при этом i выполняется неравенство (11), перейти к п. 5.

4. Положить $\alpha =: \alpha \oplus \mathbf{m}(\alpha \times (\rho \oplus \mathbf{m}(\alpha \times (\rho \oplus \mathbf{m}(\alpha \times ... \times \mathbf{m}(\alpha)...)))))$ (оператор $\mathbf{m}$ применяется i раз) и перейти к п. 3.

5. Положить $k = i$.

Выполнение неравенств, предусмотренных алгоритмом, может быть проверено (для дифференцируемых функций f и h) на основе рангового критерия. Ясно, что $k \leqslant n$; равенство достигается в случае, когда исходная система уже реализована в УКФ 1.

4.2. Вторая форма

Перейдем к УКФ 2, представленной на рис. 4; детальное ее описание имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} &\dot{x}_{*1}(t) = f_{*1}(x_{*1}(t), x_{*2}(t), ..., x_{*k}(t), u(t)), \\ &\dot{x}_{*i}(t) = f_{*i}(x_{*i-1}(t)), \quad i = 2, 3, ..., k, \\ &y(t) = h_*(x_*(t)); \end{aligned} \qquad (13)$$

в дискретном случае производная $\dot{x}_{*i}(t)$ заменяется на $x_{*i}(t + 1)$.

Теорема 4. *Если для некоторой функции* α *справедливы неравенства*

$$\rho \leqslant \alpha \times \mathbf{M}(\alpha) \times ... \times \mathbf{M}^{k-2}(\alpha), \qquad (14)$$

$$\alpha \times \mathbf{M}(\alpha) \times ... \times \mathbf{M}^{k-1}(\alpha) \leqslant h \times \mathbf{M}^k(\alpha), \quad (15)$$

то система (1) *или* (2) *представима в УКФ 2 размерности* k.♦

Доказательство (рассмотрим только непрерывный случай, дискретный получается по аналогии). Положим $\varphi_k = \mathbf{M}^0(\alpha) = \alpha$, $\varphi_{k-i} = \mathbf{M}^i(\alpha)$, $i = 1, 2, ..., k - 1$, $\varphi = \varphi_1 \times \varphi_2 \times ... \times \varphi_k$, откуда $\varphi_{i-1} = \mathbf{M}(\varphi_i)$, $i = 2, 3, ..., k$. Из условия (14) следует соотношение $\rho \leqslant \mathbf{M}^i(\alpha)$, $i = 0, 1, ..., k - 2$, которое с учетом равенств $\varphi_k = \alpha$ и $\varphi_{k-i} = \mathbf{M}^i(\alpha)$ дает условие $\rho \leqslant \varphi_i$, $i = 2, 3, ..., k$. Из равенства $\varphi_{i-1} = \mathbf{M}(\varphi_i)$ следует существование функции f_{*i} такой, что $(\partial\varphi_i/\partial x)f(x, u) = f_{*i}(\varphi_{i-1}(x), u)$, $i = 2, 3, ..., k$. Из определения функции ρ и неравенства $\rho \leqslant \varphi_i$ тогда следует $(\partial/\partial u)f_{*i}(\varphi_{i-1}(x), u) = 0$, т. е. функция f_{*i} не зависит от вектора u и, следовательно, $(\partial\varphi_i/\partial x)f(x, u) = f_{*i}(\varphi_{i-1}(x))$, $i = 2, 3, ..., k$. Из условия (15) следует соотношение $\varphi = \varphi_1 \times \varphi_2 \times ... \times \varphi_k \leqslant \mathbf{M}(\varphi_1)$, что означает выполнение равенства $(\partial\varphi_1/\partial x)f(x, u) = f_{*1}(\varphi(x), u)$ для некоторой функции f_{*1}. Также из условия (15) следует $\varphi \leqslant h$, откуда $h_*\varphi = h$ для некоторой функции h_*. Положим $x_{*i} = \varphi_i(x)$, откуда $\dot{x}_{*i} = (\partial\varphi_i/\partial x)f(x, u) = f_{*i}(\varphi_{i-1}(x))$, $i = 2, 3, ..., k$, $\dot{x}_{*1} = (\partial\varphi_1/\partial x)f(x, u) = f_{*1}(\varphi_1(x), u)$, что в итоге дает описание (13). ♦

Преобразуем условие (14). Из неравенства $\rho \leqslant \mathbf{M}^i(\alpha)$ благодаря свойствам операторов $\mathbf{m}$ и $\mathbf{M}$ следует $\mathbf{m}^i(\rho) \leqslant \alpha$, $i = 0, 1, ..., k - 2$, что можно записать в виде одного условия $\rho \oplus \mathbf{m}(\rho) \oplus ...$

... $\oplus$ $\mathbf{m}^k(\rho) \leqslant \alpha$. Обратный переход к неравенству (14) возможен только для дискретных систем из-за немонотонности оператора **M** в непрерывном случае. С учетом этого обстоятельства предлагается следующий алгоритм.

Алгоритм 2 (проверка выполнения условий (14) и (15) в дискретном случае).

1. Если $h \leqslant \mathbf{M}(h)$, то решение будет таким же, как в п. 1 алгоритма 1.

2. На основе равенства (9) найти функцию ρ и минимальное $i \geqslant 2$ такое, что $\rho \times \mathbf{M}(\rho) \times ... \times \mathbf{M}^{i-1}(\rho) \geqslant h \times \mathbf{M}^i(\rho)$.

3. Положить $\delta = \rho \oplus m(\rho) \oplus ... \oplus \mathbf{m}^{i-2}(\rho)$.

4. Найти минимальное $j \geqslant i$ такое, что $\delta \times \mathbf{M}(\delta) \times \mathbf{M}^{j-1}(\delta) \leqslant h \times \mathbf{M}^j(\delta)$; если $j \neq i$, перейти к п. 3 с $i = j$.

5. Положить $k = i$, $\alpha = \delta$.

Выполнение неравенств, предусмотренных алгоритмом, может быть проверено (для дифференцируемых функций f и h) на основе рангового критерия [11], как и в алгоритме 1, $k \leqslant n$.

Процедура построения всех рассмотренных КФ сводится к поиску соответствующей функции φ и построению гомоморфного образа — искомой КФ — по изложенным в доказательстве теорем правилам.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе получены условия преобразования нелинейных систем к различным каноническим формам, обобщающим известные КФ для линейных систем. Полученные условия не требуют гладкости функций, входящих в описание исходной системы. Особенность примененного для решения этих задач математического аппарата заключается в том, что он с единой точки зрения позволяет рассматривать системы с непрерывным и дискретным временем. Канонические формы являются удобным инструментом для решения многих теоретических и практических задач. В частности, с помощью КФ, в которой все обратные связи реализованы с помощью вектора выхода, можно легко получить вход-выходное описание дискретной системы, что необходимо для диагностирования на основе соотношений паритета.

Отметим, что термин «наблюдаемые» в рассмотренных НКФ не совсем отвечает действительности, а используется по аналогии с соответствующим термином теории линейных систем, поскольку структуры рассмотренных нелинейных КФ соответствуют аналогичным структурам линейных систем. Дело в том, что ни НКФ 1, ни НКФ 2 в общем случае ненаблюдаемы; достаточным условием их наблюдаемости может служить следующее требование к функции f_{*i} в модели (7): $f_{*i}(x_{*i-1}, u) = \sigma_i x_{*i-1} + f'_{*i}(u)$, $\sigma_i \neq 0$ — постоянный коэффициент, $f'_{*i}(u)$ — некоторая функция, $i = 2, 3, ..., k$ (аналогичное условие — для НКФ 1, где дополнительно требуется, чтобы функция h_0 была взаимно однозначной). Действительно, это можно проверить по критериям работы [11], построив функцию, аналогичную матрице наблюдаемости. Аналогичным образом обстоит дело с УКФ 1 и УКФ 2 — в общем случае они неуправляемы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Андреев Ю.Н.* Управление конечномерными линейными объектами. — М.: Наука, 1976. — 424 с.
2. *Квакернаак Х., Сиван Р.* Линейные оптимальные системы управления. — М.: Мир, 1977. — 650 с.
3. *Мироновский Л.А.* Аналоговое и гибридное моделирование. Многомерные системы. — Л.: ЛИАП, 1986. — 88 с.
4. *Birk J., Zeitz M.* Extended Luenberger observer for nonlinear multivariable systems // Int. J. Control. — 1988. — Vol. 47, N 6. — P. 1823—1836.
5. *Жирабок А.Н.* Функциональное диагностирование на основе соотношений паритета // Автоматика и телемеханика. — 1998. — № 2. — С. 133—143.
6. *Мирошник И.В., Никифоров В.О., Фрадков А.Л.* Нелинейное и адаптивное управление сложными динамическими системами. — СПб.: Наука, 2000. — 549 с.
7. *Isidori A.* Nonlinear control systems. — London: Springer-Verlag, 1989. — 476 p.
8. *Zeitz M.* Controllability canonical (phase-variable) form for nonlinear time-invariant systems // Int. J. Control. — 1983. — Vol. 37, N 6. — P. 1449—1457.
9. *Жирабок А.Н., Шумский А.Е.* О преобразованиях нелинейных динамических систем // Техническая кибернетика. — 1994. — № 6. — С. 25—30.
10. *Жирабок А.Н., Шумский А.Е.* Функциональное диагностирование непрерывных динамических систем, описываемых уравнениями с полиномиальной правой частью // Автоматика и телемеханика. — 1987. — № 8. — С. 154—164.
11. *Жирабок А.Н., Шумский А.Е.* Управляемость, наблюдаемость, декомпозиция нелинейных динамических систем. — Владивосток: ДВГТУ, 1993. — 127 с.
12. *Гретцер Г.* Общая теория решеток. — М.: Мир, 1982. — 456 с.

Статья представлена к публикации членом редколлегии В.Ю. Рутковским.

Жирабок Алексей Нилович — д-р техн. наук, профессор, Дальневосточный государственный технический университет, г. Владивосток, ☎ (4232) 45-08-64, e-mail: zhirabok@mail.ru.