

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ПОИСКА ОБЛАСТИ СХОДИМОСТИ ДВИЖЕНИЯ ЧАСТНОГО СЛУЧАЯ РЕЛЕЙНОЙ НЕСТАЦИОНАРНОЙ СИСТЕМЫ¹

С.Д. Земляков, Е.А. Данилова

Введены понятия критической функции нестационарности и предельной области сходимости. Предложена методика построения предельной области сходимости для частного случая. Аналитические результаты сопровождаются иллюстративными примерами и подтверждены результатами математического моделирования.

Ключевые слова: релейная нестационарная система, критическая функция нестационарности, предельная область сходимости, асимптотическая устойчивость, фазовая плоскость.

ВВЕДЕНИЕ

В задачах управления нестационарными объектами [1] возникает необходимость построения области сходимости движения, определяемого следующей математической моделью (ММ)

$$\tau \ddot{\varepsilon} + \dot{\varepsilon} = N\varepsilon + \beta(t, \varepsilon, c), \quad (\text{B.1})$$

где $\varepsilon \in R^n$ — вектор, $\tau > 0$ — постоянная скалярная величина, N — постоянная матрица $n \times n$, $c \in R^n$ — постоянный вектор некоторых конструктивных параметров объекта или системы управления, допускающий целенаправленный выбор своих элементов, $\beta(t, \varepsilon, c)$ — вектор с нулевыми элементами за исключением последнего, т. е. $\beta_j = 0$ ($j = \overline{1, (n-1)}$), $\beta_n = -\rho(t)\text{sign}(c^T \varepsilon)$, $\rho(t)$ — скалярная функция, определяемая неравенствами $0 \leq \rho(t) \leq \rho^{\max}$. Назовем ее функцией нестационарности.

Предполагается, что в ММ (B.1) движения системы вектор ε доступен измерению. При $\tau = 0$ ММ (B.1) запишем в виде

$$\dot{y} = Ny + \beta(t, y, c). \quad (\text{B.2})$$

Уравнение (B.2) будем называть редуцированной ММ системы в отличие от ММ (B.1), которую будем называть полной ММ изучаемой системы управления.

В работе [1] сформулированы две задачи изучения движения системы, определяемой ММ (B.1):

1) для редуцированной ММ движения (B.2) отыскать условия на вектор конструктивных параметров c , при которых движение

$$y(t) \equiv 0 \quad (\text{B.3})$$

асимптотически устойчиво в целом;

2) пусть первая задача решена, требуется отыскать диапазон возможных значений параметра τ

$$0 < \tau \leq \tau^0, \quad \tau^0 = \text{const}, \quad (\text{B.4})$$

при котором движение системы с ММ (B.1) обладает областью сходимости, включающей в себя движение $\varepsilon(t) \equiv 0$.

Под областью сходимости понимается некоторая замкнутая область в пространстве состояний системы с ММ (1), в которую движение системы, начавшись в любой начальной точке при $t = t_0$, входит при некотором $t^* \geq t_0$ и далее, при $t \geq t^*$, из этой области не выходит.

Физический смысл этих двух задач заключается в следующем. Часто для нелинейной нестационарной ММ системы управления при возможности измерения полного вектора состояния удается получить алгоритмы управления, обеспечивающие требуемое движение системы, например, асимпто-

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 08-08-00512) и Программы фундаментальных исследований № 15 Отделения ЭММПУ РАН.



тическую устойчивость некоторого желаемого движения. Однако, практически, измерение полного вектора состояния, как правило, невозможно. Добавление различного вида наблюдателей все равно приводит к изучению движения системы с полной и редуцированной ММ [2]. Если решены обе указанные задачи, то может оказаться, что область сходимости и значение параметра τ^0 в неравенствах (В.4) вполне приемлемы для практической реализации нелинейной нестационарной системы управления при неполном измеряемом векторе состояния. Отсюда возникает необходимость получения области сходимости (если таковая существует) и значения τ^0 в неравенствах (В.4) (если таковое существует) и оценки их в смысле реализуемости.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В статье [1] для частного случая $n = 1$ доказана асимптотическая устойчивость в целом движения (В.3) редуцированной ММ системы $\dot{y} + a_0 y = -\rho(t)\text{sign}y$, где $a_0 = \text{const} > 0$.

Для полной ММ системы

$$\tau \ddot{\varepsilon} + \dot{\varepsilon} + a_0 \varepsilon = -\rho(t)\text{sign}\varepsilon \quad (1)$$

на фазовой плоскости с координатами

$$x_1 = \varepsilon, \quad x_2 = \dot{\varepsilon} \quad (2)$$

построена область сходимости $G(x_1, x_2)$ (рис. 1), соответствующая неравенству

$$\tau < 1/(4a_0). \quad (3)$$

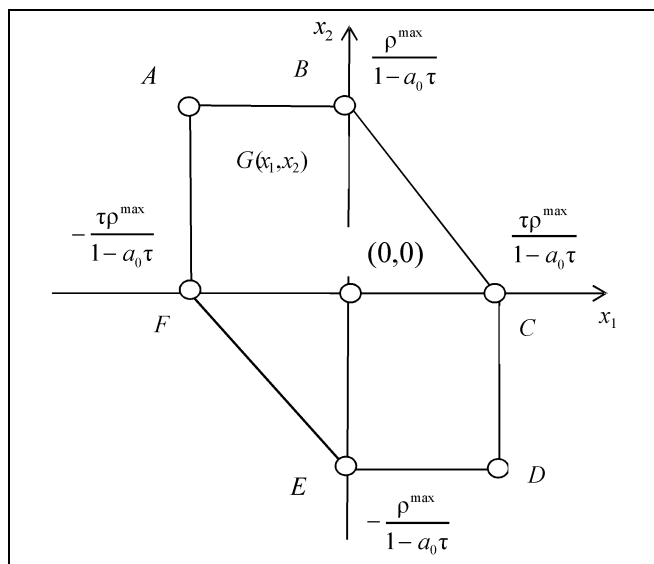


Рис. 1. Область сходимости движения релейной нестационарной системы управления

Очевидно, что любая область, охватывающая область $G(x_1, x_2)$, также подходит под определение области сходимости, данное выше. Очевидно также, что некоторая область, которую охватывает область $G(x_1, x_2)$, может оказаться областью сходимости. Естественно, что практический интерес может вызывать наименьшая по размерам область сходимости. Назовем ее предельной. В частности, область $G(x_1, x_2)$, полученная в работе [1] (см. рис. 1), построена на основе мажорант и минорант движения фазовых траекторий на фазовой плоскости и, конечно, может не быть предельной областью сходимости.

Из изложенных рассуждений вытекает постановка задачи настоящей работы: *отыскать предельную область сходимости для рассматриваемого случая $n = 1$.*

2. ОСНОВНОЙ КРИТЕРИЙ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ

С учетом обозначений (2) ММ системы (1) перепишем в виде

$$\dot{x}_1 = x_2,$$

$$\dot{x}_2 = -\frac{1}{\tau}(a_0 x_1 + x_2 + \rho(t)\text{sign}x_1) \quad (4)$$

или в матричном представлении $\dot{x} = Ax + \mu(t, x)$, где

$$x^T = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a_0/\tau & -1/\tau \end{pmatrix},$$

$$\mu(t, x) = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{\rho(t)\text{sign}x_1}{\tau} \end{pmatrix}.$$

В работе [1] показано, что в зависимости от вида функции нестационарности $\rho(t)$ движение

$$x_1 \equiv 0, \quad x_2 \equiv 0 \quad (5)$$

системы (4) может быть устойчивым, например, при $\rho(t) \equiv 0$, или не устойчивым. Однако в любом случае движение придет в область сходимости и останется в ней. При каждом конкретном виде $\rho(t)$ это будет своя конкретная область. Очевидно, что среди функций нестационарности $\rho(t)$ существуют «наихудшие» $\rho(t) = \rho_{кр}(t)$ (назовем их «критические»), т. е. такие, которые формируют «наибольшую» по размерам область сходимости. Назовем такую область областью сходимости, предельной снизу. Именно она нас и интересует, поскольку гарантирует, что при всех других видах функции нестационарности $\rho(t) \neq \rho_{кр}(t)$ область сходимости будет полностью принадлежать области сходимости, предельной снизу.

При отыскании области сходимости, предельной снизу, будем придерживаться следующего критерия противодействия.

Критерий противодействия. Область сходимости, предельная снизу, формируется при функции нестационарности $\rho(t) = \rho_{кр}(t)$, определяемой по соотношениям:

если $\frac{dr(t)}{dt} > 0$, то функция $\rho_{кр}(t)$ такая, чтобы производная $\frac{dr(t)}{dt}$ была максимальной;

если $\frac{dr(t)}{dt} < 0$, то функция $\rho_{кр}(t)$ такая, чтобы производная $\frac{dr(t)}{dt}$ была минимальная по абсолютной величине, где

$$r(t) = +\sqrt{x_1^2 + x_2^2} - \quad (6)$$

расстояние от текущей изображающей точки до начала координат (5).

Физический смысл критерия противодействия очевиден: функция нестационарности $\rho_{кр}(t)$ в каждый момент времени должна в максимальной степени препятствовать сходимости движения системы с ММ (4) к решению (5).

3. ОТЫСКАНИЕ КРИТИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ НЕСТАЦИОНАРНОСТИ

Найдем критическую функцию нестационарности $\rho_{кр}(t)$ для системы с ММ (4). Из равенств (6) и (4) получим соотношение

$$\frac{dr(t)}{dt} = \frac{1}{r(t)} \left(x_1 x_2 - \frac{a_0}{\tau} x_1 x_2 - \frac{1}{\tau} x_2^2 \right) - \frac{1}{\tau r(t)} x_2 \rho(t) \operatorname{sign} x_1,$$

которое перепишем в виде

$$\frac{dr(t)}{dt} = f(x_1, x_2) - \frac{1}{\tau r(t)} x_2 \rho(t) \operatorname{sign} x_1. \quad (7)$$

Поскольку, независимо от знака производной $\frac{dr(t)}{dt}$, ее значение надо увеличивать, то значение слагаемого $\left(-\frac{1}{\tau r(t)} x_2 \rho(t) \operatorname{sign} x_1 \right)$ в выражении (7) следует сделать положительным и максимальным. Это будет достигнуто, если функция нестационарности $\rho(t)$ примет вид

$$\rho_{кр}(t) = \frac{\rho^{\max}}{2} (1 - \operatorname{sign} x_1 \operatorname{sign} x_2). \quad (8)$$

4. ПРЕДПОСЫЛКИ К ПОИСКУ ПРЕДЕЛЬНОЙ ОБЛАСТИ СХОДИМОСТИ

Обозначим предельную область сходимости через $G^l(x_1, x_2)$. Из рассмотрения равенства (8) очевидно, что при $\operatorname{sign} x_1 = \operatorname{sign} x_2$, т. е. в первом и третьем квадрантах, $\rho_{кр}(t) \equiv 0$, а при $\operatorname{sign} x_1 \neq \operatorname{sign} x_2$, т. е. во втором и четвертом квадрантах, $\rho_{кр}(t) \equiv \rho^{\max}$. В таком случае можно утверждать, что область $G^l(x_1, x_2)$ на фазовой плоскости $\{x_1, x_2\}$:

- симметрична относительно начала координат;
- представляет собою вид некоторого полуустойчивого предельного цикла, на который при выполнении равенства (8) фазовые траектории наматываются сверху и к которому они приближаются снизу.

На рис. 2 качественно показан участок возможного вида фазовой траектории при ее движении к области $G^l(x_1, x_2)$. Очевидно, что предельный цикл получится при

$$\gamma = \mu, \quad (9)$$

где γ и μ — длины отрезков OB и OA .

5. ПОСТРОЕНИЕ ПРЕДЕЛЬНОЙ ОБЛАСТИ СХОДИМОСТИ. ИЛЛЮСТРАТИВНЫЕ ПРИМЕРЫ

Рассмотрим движение системы с ММ (1) в четвертом квадранте и свяжем между собой длины μ и ν отрезков OA и OC . Для этого в уравнении (1) перейдем к обозначению

$$\varepsilon = z - \rho^{\max}/a_0, \quad (10)$$

в соответствии с которым ММ движения в четвертом квадранте примет вид

$$\tau \ddot{z} + \dot{z} + a_0 z = 0. \quad (11)$$

С учетом равенства (3) движение, определяемое уравнением (10), подчиняется соотношению [3]

$$(-\lambda_2 z - \dot{z})^{\lambda_2/\lambda_1} = C_z (-\lambda_1 z - \dot{z}),$$

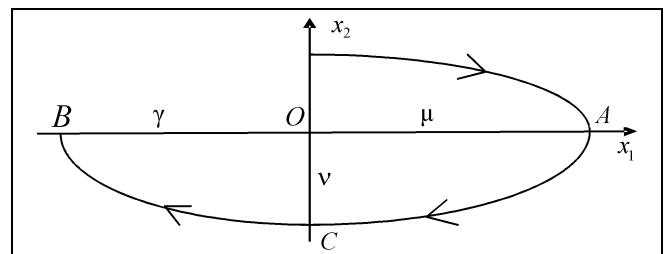


Рис. 2. Возможный вид отрезка фазовой траектории

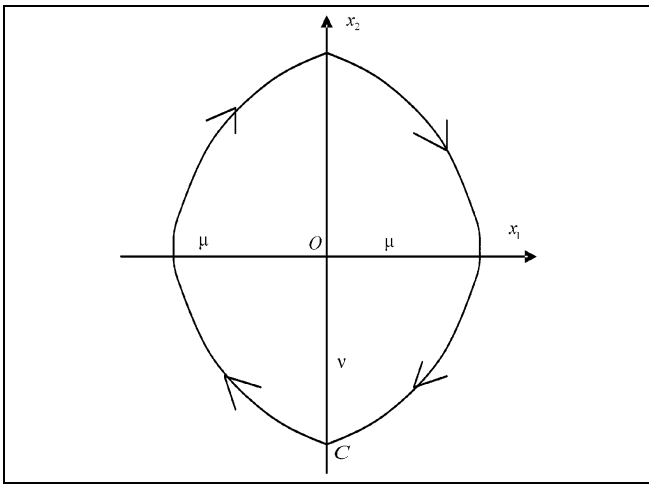


Рис. 3. Качественное представление предельной области

где $(-\lambda_1)$ и $(-\lambda_2)$ — корни характеристического уравнения для дифференциального уравнения (11), число C_z определяется начальными условиями. Для удобства записи примем условие, что $\lambda_2 > \lambda_1$. Пусть начальные условия имеют вид $z(0) = \mu + \rho/a_0$, $\dot{z}(0) = 0$.

В таком случае

$$C_z = \frac{[-\lambda_2(\mu + \rho^{\max}/a_0)]^{\lambda_2/\lambda_1}}{[-\lambda_1(\mu + \rho^{\max}/a_0)]}$$

Таким образом, начавшись в точке $x_1(0) = \mu$, $x_2(0) = 0$, движение в четвертом квадранте фазовой плоскости $\{x_1, x_2\}$ связывает длины μ и v уравнением

$$\begin{aligned} & (-\lambda_2 \rho^{\max}/a_0 + v)^{\lambda_2/\lambda_1} = \\ & = \frac{[-\lambda_2(\mu + \rho^{\max}/a_0)]^{\lambda_2/\lambda_1}}{-\lambda_1(\mu + \rho^{\max}/a_0)} (-\lambda_1 \rho^{\max}/a_0 + v) \end{aligned} \quad (12)$$

до точки $x_1 = 0$, $x_2 = -v$. В соответствии с ММ движения системы в этой точке изменяется знак правой части уравнения (1), а в соответствии с конкретным видом функции нестационарности $\rho_{кр}(t)$, определяемого равенством (8), выполняется соотношение $\rho_{кр}(t) = 0$. Выполняя аналогичные операции, из равенства (11) получаем уравнение

$$v = \left(\frac{(\lambda_2 \gamma)^{\lambda_2/\lambda_1}}{\lambda_1 \gamma} \right)^{\lambda_1/(\lambda_2 - \lambda_1)}, \quad (13)$$

которое определяет связь величин γ и v .

Подставив соотношение (13) в уравнение (12), получим связь величин μ и γ в виде

$$\mu = -\frac{\rho^{\max}}{a_0} - \left(\frac{(-\rho^{\max}/a_0 + \alpha^{1/(\alpha-1)} \gamma)^\alpha}{-\rho^{\max}/a_0 + \alpha^{\alpha/(\alpha-1)} \gamma} \right)^{1/(\alpha-1)}, \quad (14)$$

где $\alpha = \lambda_2/\lambda_1$.

Если качественно представить искомую предельную область сходимости в виде, показанном на рис. 3, то равенство (14) совместно с условием (9) позволяет отыскать значение величины μ . Аналитически это сделать удастся лишь в частных случаях. Например, при

$$\rho^{\max} = 0,8, \quad a_0 = 1, \quad \alpha = 2 \quad (15)$$

равенство (14) принимает вид $\gamma^2 + \mu\gamma - 0,2\mu = 0$, откуда при $\mu = 0,1$ следует равенство (9).

Выражения для величины v (см. рис. 3) получается из уравнения (13) в виде $v = (\alpha^{\alpha/(\alpha-1)} \lambda_1) \mu$.

В частности, для значений, определяемых равенствами (15) и $\tau = 2/9$, значение $\lambda_1 = 1,5$. В таком случае $v = 0,6$.

В более сложных случаях уравнение (14) с учетом условия (9) приходится решать графически. Например, при $\tau = 5/36$ для значений, определяемых равенствами (15), $\alpha = 5$, график зависимости $\mu = \mu(\gamma)$ принимает вид, показанный на рис. 4.

В данном случае аналитически полученные значения $\mu = 0,0677$ и $v = 0,6073$ подтверждаются осциллограммами движения, приведенными на рис. 5. Из этих осциллограмм видно, что движение, начавшееся вне предельной области сходимости (рис. 5, а), со временем сходится к ней. Дви-

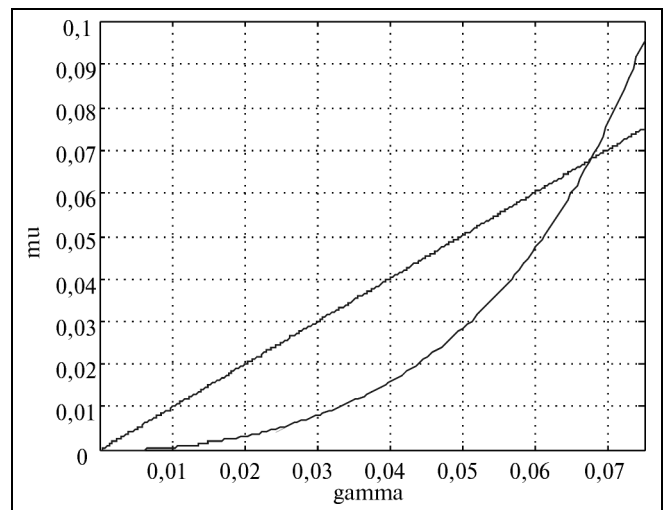


Рис. 4. График зависимости $\mu = \mu(\gamma)$

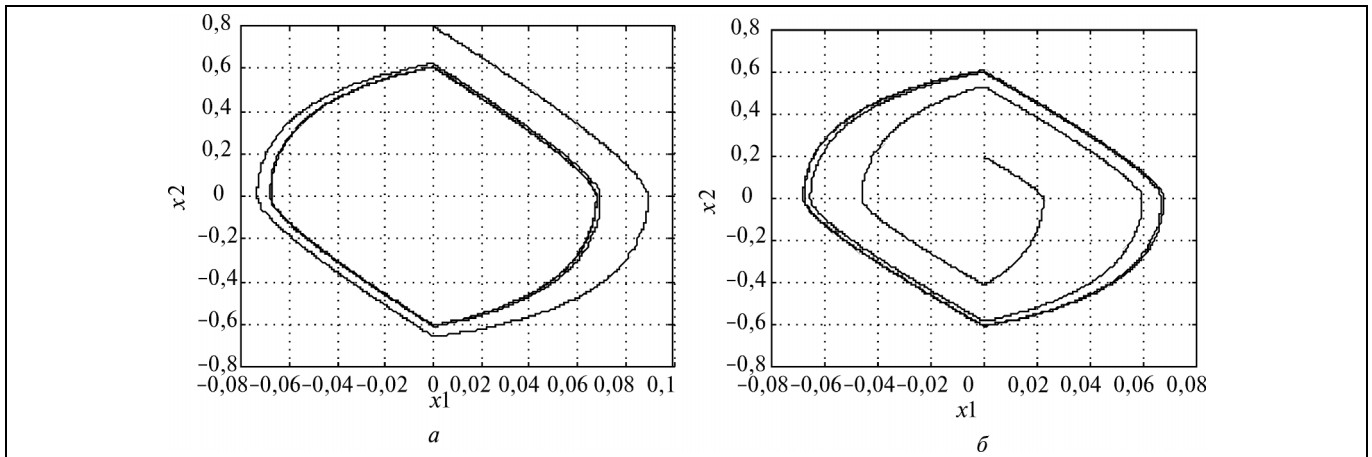


Рис. 5. Осциллограммы движения релейной нестационарной системы, начавшегося вне (а) и внутри (б) предельной области сходимости

жение, начавшееся внутри предельной области сходимости (рис. 5, б), со временем расходуется, однако не покидает ее.

Интересно сравнить области сходимости, полученные в работе [1] на основе мажорант и минорант, и предельную область сходимости, методика построения которой изложена в настоящей работе. Такое сравнение можно провести на основании рис. 6, где изображены области $G(x_1, x_2)$ для первого и $G^l(x_1, x_2)$ для второго случаев при конструктивных параметрах системы, обозначенных равенствами (15) и значении $\tau = 2/9$, обеспечивающего значение $\alpha = 2$ и удовлетворяющего условию (4).

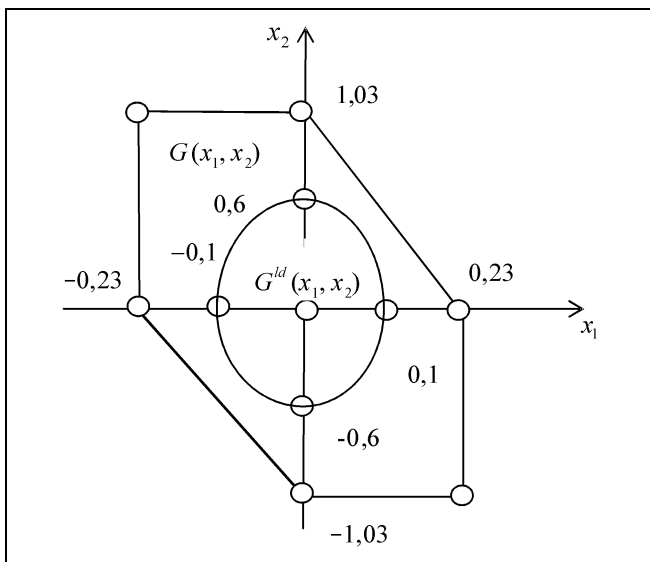


Рис. 6. Сравнение областей сходимости

Естественно, предельная область сходимости $G^l(x_1, x_2)$ охватывается областью сходимости $G(x_1, x_2)$, построенной на основе мажорант движения на фазовой плоскости. Видно, что выигрыш при более точной оценке области сходимости может быть значительным.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В статье продолжено решение проблемы анализа и синтеза движения релейных нестационарных систем управления, начатое в работе [1]. Можно ожидать, что сформулированное в настоящей работе понятие критической функции нестационарности и методика ее построения позволят перейти к рассмотрению релейных нестационарных систем более высокого порядка.

ЛИТЕРАТУРА

1. Земляков С.Д., Данилова Е.А. Об одной проблеме поиска области сходимости движения релейной нестационарной системы // Проблемы управления. — 2008. — № 1. — С. 2—9.
2. Краснова С.А., Уткин В.А. Каскадный синтез наблюдателей состояния динамических систем. — М.: Наука, 2006.
3. Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э. Теория колебаний. — М.: Наука, 1981.

Статья представлена к публикации членом редколлегии В.Ю. Рутковским.

Станислав Данилович Земляков — д-р техн. наук, гл. науч. сотрудник, ☎ (495) 334-87-30, e-mail: zeml@ipu.ru,

Данилова Евгения Александровна — математик, ☎ (495) 334-87-79,

Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, г. Москва.