УДК 517.977

О МОМЕНТАХ ПЕРЕКЛЮЧЕНИЯ КУСОЧНО-ПОСТОЯННОГО УПРАВЛЕНИЯ В ЗАДАЧЕ БЫСТРОДЕЙСТВИЯ ДЛЯ ЛИНЕЙНОЙ СТАЦИОНАРНОЙ СИСТЕМЫ ВТОРОГО ПОРЯДКА С КОМПЛЕКСНЫМИ СОБСТВЕННЫМИ ЗНАЧЕНИЯМИ

А.Г. Родионова

Приведены явные формулы для моментов переключения кусочно-постоянного управления в задаче быстродействия для линейной системы второго порядка с постоянными коэффициентами в случае, когда матрица системы имеет комплексные собственные значения.

Ключевые слова: задача быстродействия, множество управляемости, кусочно-постоянное управление, момент переключения.

ВВЕДЕНИЕ

Рассмотрим линейную стационарную систему

$$\dot{x} = Ax + Bu, \qquad (1)$$

где $A = (a_{ij})$ и $B = (b_{ij})$ — постоянные вещественные матрицы размерности 2×2 и $2\times m$ соответственно, а $u(\cdot)$ — кусочно-непрерывное управление (допустимое управление) со значениями в выпуклом многограннике $U \subset R^m$ с вершинами $u_1, ..., u^p$. Через $D_\sigma \subset R^2$ обозначим множество управляемости в начало координат системы (1) на отрезке $[0, \sigma]$. Напомним, что точка x_0 принадлежит множеству D_σ, если существует кусочно-непрерывное управление $t \to u_0(t) \in U$, $t \in [0, \sigma]$, такое, что при $u = u_0(t)$ система (1) имеет решение $x = x(t)$, $t \in [0, \sigma]$, удовлетворяющее условиям $x(0) = x_0$, $x(\sigma) = 0$.

Через $T(x_0)$ обозначим наименьшее время (время быстродействия), за которое возможен переход из состояния x_0 в начало координат под действием допустимого управления, т. е. $T(x_0) = \inf\{t \geqslant 0 | x_0 \in D_t\}$. Если $x_0 \notin D_t$ для любого $t > 0$, то полагаем $T(x_0) = +\infty$. Задача нахождения допустимого управления, переводящего точку x_0 в начало координат за наименьшее время, называется задачей быстродействия, а управление, которое решает эту задачу, называется оптимальным в смысле быстродействия.

В рамках работы мы предполагаем, что $0 \in \operatorname{int} U$ и выполнено условие общности положения, налагаемое на коэффициенты уравнения (1) и на расположение многогранника U: если w — это вектор, имеющий направление одного из ребер многогранника U, то векторы Bw и ABw линейно независимы в R^2.

При сделанных предположениях принцип максимума Л.С. Понтрягина является не только необходимым, но и достаточным условием оптимальности в линейной задаче быстродействия [1, с. 94]. Следовательно, задача отыскания граничных точек множества управляемости D_σ (выпуклого компакта) системы (1) сводится к задаче нахождения управлений, удовлетворяющих принципу максимума на отрезке $[0, \sigma]$. Другими словами, для произвольного вектора $\psi^0 = (\cos\varphi, \sin\varphi) \in S^1$ (где $\varphi \in [0, 2\pi)$, а S^1 — единичная сфера в R^2) найдется единственное управление $\hat{u}: [0, \sigma] \to U$ такое, что почти для всех $t \in [0, \sigma]$ имеет место равенство $\max\limits_{u \in U} \psi^0 e^{-At} Bu = \psi^0 e^{-At} B\hat{u}(t)$, где $\psi^0 e^{-At}$ — это решение начальной задачи $\dot{\psi} = -\psi A$, $\psi(0) = \psi^0$.

Данное управление порождает на границе ∂D_σ точку $x_0 = -\int\limits_0^\sigma e^{-At} B\hat{u}(t)dt$. Верно и обратное утверждение: для любого $x_0 \in \partial D_\sigma$ найдется $\psi^0 \in S^1$ и соответствующее ему управление $\hat{u}: [0, \sigma] \to U$ такое, что $x_0 = -\int\limits_0^{\sigma} e^{-At}B\hat{u}(t)dt$. Таким образом, имеет место взаимно однозначное соответствие между точками сферы $S^1 \subset R^2$ и граничными точками множества управляемости D_σ (т. е. $S^1 \leftrightarrow \partial D_\sigma$).

Более того, оказывается, что управление $\hat{u}$: $[0, \sigma] \to U$ — это кусочно-постоянная функция со значениями лишь в вершинах многогранника U [1, с. 112]. Каждую точку разрыва функции $\hat{u}(t)$ будем называть *моментом переключения* управления (в соответствии с работами [1—4] ее называют точкой переключения). Здесь уместно отметить, что если $\hat{t}$ — точка разрыва оптимального управления $\hat{u}(t)$ и если $\hat{u}(\hat{t} - 0) = u^r$, $\hat{u}(\hat{t} + 0) = u^s$, где $u^r \ne u^s$ $(r \ne s)$ — различные вершины многогранника U, то мы будем говорить, что при $t = \hat{t}$ происходит переключение оптимального управления $\hat{u}(t)$ из вершины u^r в вершину u^s. Таким образом, нахождение оптимального управления $\hat{u}(t)$ равносильно отысканию его моментов переключения, причем множество моментов переключения функции $\hat{u}(t)$ содержится в конечном множестве $\{t \in [0, \sigma]$: $f^r(t) = f^s(t)$, $r \ne s\}$, где $f^r(t) \doteq \psi^0 e^{-At}Bu^r$.

Другими словами, задача поиска моментов переключения функции $\hat{u}(t)$ равносильна построению верхней огибающей графиков семейства функций $f^r(t)$, $t \in [0, \sigma]$, $r = \overline{1, p}$, что, в конечном счете, сводит исходную задачу к вычислительной процедуре отыскания моментов совпадения значений двух функций $f^r(t)$ и $f^s(t)$ при $r \ne s$.

МОМЕНТЫ ПЕРЕКЛЮЧЕНИЯ

В работе найдены моменты совпадения значений функций $f^r(t)$ и $f^s(t)$ в случае, когда матрица A имеет комплексные собственные значения, т. е. коэффициенты матрицы A удовлетворяют неравенству $(a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}a_{21} < 0$ (в этом случае, очевидно, $a_{12} \ne 0 \ne a_{21}$). Введем в рассмотрение число μ и матрицу C:

$$\mu \doteq \sqrt{-(a_{11} - a_{22})^2/4 - a_{12}a_{21}} > 0,$$

$$C \doteq \begin{pmatrix} 1 & (a_{22} - a_{11})/2\mu \\ 0 & -a_{21}/\mu \end{pmatrix}.$$

Легко проверить, что

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & (a_{22} - a_{11})/2a_{21} \\ 0 & -\mu/a_{21} \end{pmatrix},$$

$$D \doteq C^{-1}AC = \begin{pmatrix} (a_{11} + a_{22})/2 & \mu \\ -\mu & (a_{11} + a_{22})/2 \end{pmatrix}.$$

Очевидно, $A^k = CD^kC^{-1}$ при всех k, следовательно,

$$f^r(t) = \psi_0 e^{-At}Bu^r = (\psi_0 C)\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{D^k t^k}{k!}(C^{-1}Bu^r)$$

для любого r. Таким образом, моменты совпадения значений функций $f^r(t)$ и $f^s(t)$ при $r \ne s$ совпадают с нулями функции

$$F(t) \doteq f^r(t) - f^s(t) = $$
$$= (\psi^0 C)\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{D^k t^k}{k!}C^{-1}B(u^r - u^s).$$

Равенство $(a_{11} + a_{22})^2 + 4\mu^2 = 4\det A$ носит элементарный характер, поэтому $\Delta \doteq \det A > 0$. Существует $\alpha \in (0, \pi)$, определяемое равенством $\sin\alpha = \frac{\mu}{\sqrt{\Delta}}$ $\left(\text{при этом } \cos\alpha = \frac{a_{11} + a_{22}}{2\sqrt{\Delta}}\right)$, такое, что матрица D допускает представление $D = \sqrt{\Delta}\ \times$ $\times \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$. Индукцией по k легко показать, что $D^k = (\sqrt{\Delta})^k \begin{pmatrix} \cos k\alpha & \sin k\alpha \\ -\sin k\alpha & \cos k\alpha \end{pmatrix}$. Следовательно,

$$F(t) = (\cos\varphi, \sin\varphi)\ \times$$
$$\times C\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \begin{pmatrix} \cos k\alpha & \sin k\alpha \\ -\sin k\alpha & \cos k\alpha \end{pmatrix}\frac{(\sqrt{\Delta})^k t^k}{k!}C^{-1}B(u^r - u^s).$$

В силу условия общности положения вектор $v^{rs} \doteq B(u^r - u^s) \in R^2$ отличен от нуля, поэтому найдется угол $\omega^{rs} \in [0, 2\pi)$ такой, что $v^{rs} = \|v^{rs}\|\mathrm{col}(\cos\omega^{rs}$, $\sin\omega^{rs})$, следовательно,

$$\frac{F(t)}{\|v^{rs}\|} = (\cos\varphi, \sin\varphi)C\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \begin{pmatrix} \cos k\alpha & \sin k\alpha \\ -\sin k\alpha & \cos k\alpha \end{pmatrix} \times$$
$$\times \frac{(\sqrt{\Delta})^k t^k}{k!}C^{-1}\begin{pmatrix} \cos\omega^{rs} \\ \sin\omega^{rs} \end{pmatrix}.$$

Вектор $(\cos\varphi, \sin\varphi) = \left(\cos\varphi, \frac{a_{22} - a_{11}}{2\mu}\cos\varphi - \right.$ $\left. - \frac{a_{21}}{\mu}\sin\varphi\right)$ коллинеарен и сонаправлен вектору

$(\cos\bar\varphi, \sin\bar\varphi)$, где $\bar\varphi = \arg\Big[\cos\varphi + i\Big(\frac{a_{22} - a_{11}}{2\mu}\cos\varphi - \frac{a_{21}}{\mu}\sin\varphi\Big)\Big]$, $\bar\varphi \in [0, 2\pi)$. Аналогично вектор $C^{-1}\mathrm{col}(\cos\omega^{rs}, \sin\omega^{rs}) = \mathrm{col}\Big(\cos\omega^{rs} + \frac{a_{22} - a_{11}}{2a_{21}}\sin\omega^{rs}, -\frac{\mu}{a_{21}}\sin\omega^{rs}\Big)$ коллинеарен и сонаправлен вектору $\mathrm{col}(\cos\bar\omega^{rs}, \sin\bar\omega^{rs})$, где $\bar\omega^{rs} = \arg\Big[\cos\omega^{rs} + \frac{a_{22} - a_{11}}{2a_{21}}\sin\omega^{rs} - i\frac{\mu}{a_{21}}\sin\omega^{rs}\Big]$, $\bar\omega^{rs} \in [0, 2\pi)$. Таким образом,

$$\frac{F(t)}{\|v^{rs}\|} = (\cos\bar\varphi, \sin\bar\varphi)\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\begin{pmatrix}\cos k\alpha & \sin k\alpha\\ -\sin k\alpha & \cos k\alpha\end{pmatrix}\times$$

$$\times\frac{(\sqrt{\Delta})^k t^k}{k!}\begin{pmatrix}\cos\bar\omega^{rs}\\ \sin\bar\omega^{rs}\end{pmatrix} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{(\sqrt{\Delta})^k t^k}{k!}\cos(\bar\varphi + k\alpha - \bar\omega^{rs}).$$

Если $\beta \doteq \bar\varphi - \bar\omega^{rs}$, то

$$2\frac{F(t)}{\|v^{rs}\|} = 2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\sqrt{\Delta}t)^k}{k!}\cos(\beta + k\alpha) =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\sqrt{\Delta}t)^k}{k!}(e^{i(\beta + k\alpha)} + e^{-i(\beta + k\alpha)}) =$$

$$= e^{i\beta}e^{-\sqrt{\Delta}te^{i\alpha}} + e^{i\beta}e^{-\sqrt{\Delta}te^{i\alpha}} =$$

$$= e^{-i\beta}e^{-\sqrt{\Delta}te^{i\alpha}}\{e^{2i\beta}e^{-\sqrt{\Delta}t(e^{i\alpha} - e^{-i\alpha})} + 1\},$$

следовательно, уравнение $F(t) = 0$ равносильно уравнению $e^{2i(\beta - \sqrt{\Delta}t\sin\alpha)} = -1$, что, в свою очередь, означает, что $-\beta + \mu t = \pi/2 + k\pi$, $k \in Z$.

Теорема. *Моменты совпадения значений функций* $f^r(t)$ *и* $f^s(t)$ *при* $r \ne s$ *задаются равенством* $t_k^{rs} = (\pi/2 + k\pi + \bar\varphi - \bar\omega^{rs})/\mu$, $t_k^{rs} \in [0, \sigma]$, *где* $\mu = \sqrt{-(a_{11} - a_{22})^2/4 - a_{12}a_{21}}$,

$$\bar\varphi = \arg\Big[\cos\varphi + i\Big(\frac{a_{22} - a_{11}}{2\mu}\cos\varphi - \frac{a_{21}}{\mu}\sin\varphi\Big)\Big],$$

$$\bar\omega^{rs} = \arg\Big[\cos\omega^{rs} + \frac{a_{22} - a_{11}}{2a_{21}}\sin\omega^{rs} - i\frac{\mu}{a_{21}}\sin\omega^{rs}\Big]. \blacklozenge$$

В заключение отметим, что случай, когда матрица системы имеет вещественные собственные значения, хорошо изучен и описан в литературе (например, в работе [1, с. 176]).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Болтянский В.Г.* Математические методы оптимального управления. — М.: Наука, 1969. — 408 с.
2. *Алексеев В.М., Тихомиров В.М., Фомин С.В.* Оптимальное управление. — Там же, 1979. — 432 с.
3. *Васильев Ф.П.* Численные методы решения экстремальных задач. — Там же, 1988. — 552 с.
4. *Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. — Там же, 1976. — 392 с.

Статья представлена к публикации членом редколлегии А.Г. Бутковским.

Родионова Алла Григорьевна — канд. физ.-мат. наук, доцент, Удмуртский государственный университет, ☎ (3412) 91-61-31, e-mail: rodionov@uni.udm.ru