УДК 681.5.015.63

ОПТИМАЛЬНЫЙ ПАРАМЕТРИЧЕСКИЙ СИНТЕЗ ПО КРИТЕРИЮ ЗАПАСА РАБОТОСПОСОБНОСТИ[1]

О.В. Абрамов, Я.В. Катуева, Д.А. Назаров

Институт автоматики и процессов управления ДВО РАН, г. Владивосток

Рассмотрена проблема синтеза аналоговых технических систем с учетом отклонений параметров от расчетных значений. Показано, что при отсутствии информации о закономерностях и количественных характеристиках этих отклонений наилучшее решение задачи параметрического синтеза может быть получено, если в качестве целевой функции принять «запас работоспособности». Обсуждены параллельные алгоритмы решения возникающих при этом задач многовариантного анализа и оптимизации.

ВВЕДЕНИЕ

Основные трудности, возникающие при решении задачи синтеза технических устройств и систем с учетом отклонений параметров от номинальных (расчетных) значений, связаны, прежде всего, с дефицитом информации о закономерностях случайных процессов вариации их параметров, а также высокой вычислительной трудоемкостью решения оптимизационных задач со стохастическим критерием.

Задача параметрического синтеза технических устройств и систем [1, 2] состоит в выборе номинальных значений параметров элементов исследуемого устройства $\mathbf{x}_н = (x_{1н}, ..., x_{mн})$, обеспечивающих максимум вероятности выполнения условий работоспособности в течение заданного времени:

$$\mathbf{x}_н = \operatorname{argmax} P\{\boldsymbol{X}(\mathbf{x}_н, t) \in D_x, \ \ \forall t \in [0, T]\}, \quad (1)$$

где $\boldsymbol{X}(\mathbf{x}_н, t)$ — случайный процесс изменения параметров; $D_{\boldsymbol{x}}$ — область работоспособности; T — заданное время эксплуатации устройства.

Исходными данными в рассматриваемой задаче являются условия работоспособности, задаваемые обычно в виде допусков на выходные параметры:

$$\mathbf{y}_{\min} \leqslant \mathbf{y}(t) \leqslant \mathbf{y}_{\max}, \quad (2)$$

и математическая модель системы $\mathbf{y}(\mathbf{x}(t))$, определяющая зависимость выходных параметров $\mathbf{y}(t) = \{y_j(t)\}_{j=1}^{m}$ от параметров элементов $\mathbf{x}(t) = \{x_i(t)\}_{i=1}^{n}$ в виде непрерывных зависимостей

$$y_j(t) = y_j(\mathbf{x}(t)), \quad j = \overline{1, m}.$$

В большинстве случаев такая зависимость задается не в явной, а в алгоритмической форме, в частности, через численные решения систем уравнений (дифференциальных или алгебраических), описывающих процесс функционирования исследуемой системы.

Область пространства параметров элементов $\mathbf{x} \in R^n$, во всех точках которой выполняются условия (2), называется областью работоспособности D_x.

$$D_x = \{\mathbf{x} \in R^n : \mathbf{y}_{\min} \leqslant \mathbf{y}(\mathbf{x}) \leqslant \mathbf{y}_{\max}\}.$$

Условия работоспособности формируют в пространстве выходных параметров область допустимых значений D_y:

$$D_y = \{\mathbf{y} \in R^m : \mathbf{y}_{\min} \leqslant \mathbf{y} \leqslant \mathbf{y}_{\max}\},$$

представляющую собой m-мерный ортогональный гиперпараллелепипед.

Решение задачи (1) базируется на анализе взаимосвязей выходных характеристик системы и параметров составляющих ее элементов (внутренних

[1] Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 05-08-013998) и ДВО РАН (Программа № 15 ОЭММПУ РАН).

параметров) с учетом технологического разброса, температурного и временного дрейфов этих параметров. Определенной характеристикой возможности системы выполнять заданные функции в условиях параметрических возмущений служит область работоспособности D_x, построенная в координатах параметров элементов системы. Совокупность значений внутренних параметров может быть представлена изображающей точкой в n-мерном пространстве этих параметров. Для обеспечения работоспособности системы эта точка должна находиться внутри области D_x. При этом расстояние от изображающей точки до границ D_x можно рассматривать как некоторый запас работоспособности системы.

Построение тем или иным методом области работоспособности D_x является, по сути, первым этапом решения общей задачи параметрического синтеза системы. Следующие этапы заключаются в назначении допусков и выборе номинальных значений параметров элементов проектируемой системы. Выполнение этих этапов связано с расчетами некоторых, как правило, статистических показателей, например, таких, как вероятность безотказной работы $P(\mathbf{x}, t)$ на интервале эксплуатации T и т. п. Часто необходимая априорная информация о вероятностных свойствах отклонений параметров от расчетных значений отсутствует или является недостаточно полной. В таких случаях вместо статистических показателей могут быть использованы некоторые детерминированные критерии типа «запасов» (работоспособности, надежности и др.) [3, 4]. Расчет таких показателей не требует знания полных вероятностных характеристик случайных величин, фигурирующих в математической модели системы. В сравнении со статистическими они имеют и более ясную физическую интерпретацию, например, измеряемое определенным образом расстояние от номинальной точки до границы области D_x. Вместе с тем, расчет «запаса» работоспособности по каждому из внутренних параметров затрудняет оценку влияния размеров этих «запасов» на выполнение того или иного условия работоспособности системы в целом. Во многих случаях оказывается целесообразным рассматривать показатели типа «запасов» относительно не внутренних, а выходных параметров системы, ограничения на которые и составляют заданные условия работоспособности системы.

1. КРИТЕРИЙ ЗАПАСА РАБОТОСПОСОБНОСТИ

Как уже отмечалось, запас работоспособности можно рассматривать на уровне внутренних параметров (параметров элементов) или выходных параметров системы.

Запас работоспособности *первого типа* — на уровне внутренних параметров — позволяет оценить степень удаленности вектора внутренних параметров от границ области работоспособности, а, следовательно, пределы возможных вариаций параметров элементов, при которых не нарушаются условия работоспособности. Задача оптимального параметрического синтеза в этом случае сводится к нахождению таких точек внутри области работоспособности D_x (выбора таких номиналов параметров), которые находятся на максимальном в смысле выбранного критерия расстоянии от ее границ.

Область работоспособности D_x обычно неизвестна, поэтому выполнение условий работоспособности при выбранных внутренних параметрах проверяется в результате вычисления соответствующих выходных параметров и сравнения их с требованиями технического задания (областью допустимых значений выходных параметров D_y).

Можно говорить о запасе работоспособности *второго типа*, представляющем собой меру удаленности вектора выходных параметров $\mathbf{y} = (y_1(\mathbf{x}), y_2(\mathbf{x}), ..., y_m(\mathbf{x}))$ от заданных требованиями технического задания границ области D_y.

Поскольку задача параметрического синтеза состоит в выборе номинальных значений внутренних параметров, будем называть выбор значений параметров по критерию запаса работоспособности первого типа *прямой задачей*, а выбор по критерию запаса работоспособности второго типа — *обратной*.

Любая комбинация внутренних параметров $\mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$ однозначно определяет некоторую совокупность выходных величин $\mathbf{y} = (y_1(\mathbf{x}), y_2(\mathbf{x}), ..., y_m(\mathbf{x}))$ и, таким образом, некоторую точку $\mathbf{y} \in R_m$ в m-мерном пространстве выходных параметров. При этом обратное отображение не всегда однозначно: одному и тому же набору значений выходных параметров могут соответствовать несколько различных векторов внутренних параметров.

Будем говорить, что совокупность внутренних параметров представляет допустимое решение (удовлетворяющее условиям работоспособности), если соответствующий им вектор выходных параметров лежит в m-мерном полиэдре D_y, задаваемом выходными ограничениями.

Чтобы иллюстрировать сказанное выше, рассмотрим случай с двумя внутренними параметрами ($n = 2$), значения которых обозначим x_1 и x_2, и двумя выходными параметрами y_1 и y_2. Область, образуемая ограничениями на выходные параметры (область работоспособности D_y) представляет собой в данном случае прямоугольник в плоскости выходных параметров (рис. 1).

Прямоугольник отображается на плоскость внутренних параметров в виде фигуры, выделенной жирными линиями (рис. 2). На рис. 2 также показано возможное решение задачи выбора номиналов $x_{1н}$ и $x_{2н}$.

Рассмотрим более подробно задачу выбора оптимальных значений номиналов параметров по критерию запаса работоспособности на уровне выходных параметров.

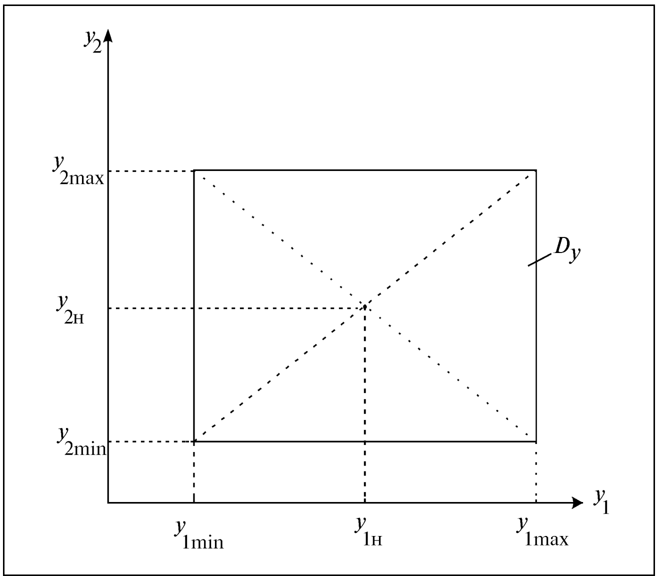

Рис. 1. Область работоспособности D_y в пространстве выходных параметров

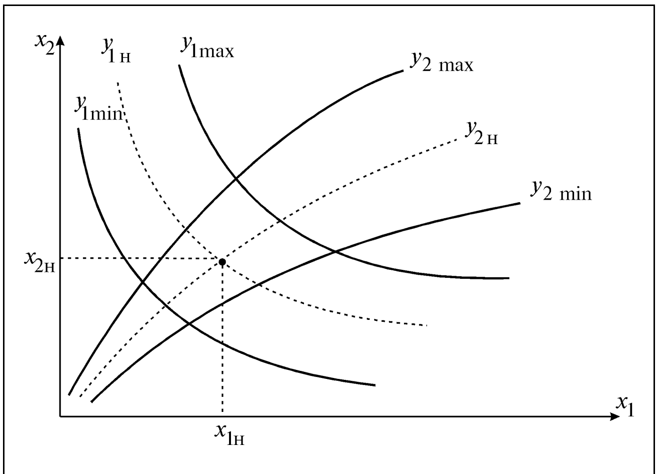

Рис. 2. Область работоспособности D_x в пространстве внутренних параметров

Случай одной выходной и n внутренних переменных. Пусть условия работоспособности исследуемой системы заданы интервалом допустимых значений выходного параметра $y(\mathbf{x})$: $y_{\min} \leqslant y(\mathbf{x}) \leqslant y_{\max}$.

При отсутствии какой-либо информации о закономерностях отклонений выходного параметра от номинального значения, оптимальным будет такое значение y, при котором обеспечивается максимальный запас работоспособности. Очевидно, что в рассматриваемом случае это

$$y_{н}^{0} = \frac{y_{\max} + y_{\min}}{2}, \qquad (3)$$

при котором запас работоспособности равен половине интервала допустимых значений.

Для нахождения номинальных значений внутренних параметров необходимо решить следующую оптимизационную задачу:

$$\mathbf{x}_{н}^{0} = \arg\min_{\mathbf{x}} |y_{н}^{0} - y(\mathbf{x})| \qquad (4)$$

или

$$\mathbf{x}_{н}^{0} = \arg\min_{\mathbf{x}} (y_{н}^{0} - y(\mathbf{x}))^{b}, \qquad (5)$$

где b — положительное целое четное число.

Можно показать, что номинальное значение параметра, соответствующее середине поля допуска (3), будет оптимальным и в случае любого симметричного закона распределения вероятностей рассматриваемого параметра (например, нормального или равномерного). Оно гарантирует не только максимальный запас работоспособности, но и максимальную вероятность нахождения параметра $y(\mathbf{x})$ в пределах поля допуска $[y_{\min}, y_{\max}]$.♦

Случай m выходных и n внутренних параметров. Если условия работоспособности заданы в виде системы независимых допусков (пределов допустимых вариаций), связанных с каждым из выходных параметров

$$y_{j\min} \leqslant y_j(\mathbf{x}) \leqslant y_{j\max}, \quad j = \overline{1, m},$$

то выбор вектора номиналов, максимизирующих запас работоспособности по каждому из выходных параметров, также не вызывает затруднений. Очевидно, что он будет определяться как центр пространства (гиперпараллелепипеда) допусков

$$y_{нj}^{0} = \frac{y_{j\max} + y_{j\min}}{2}, \quad j = \overline{1, m}.♦$$

Однако решение задачи нахождения оптимального вектора внутренних параметров $\mathbf{x}_{н}^{0} = (x_{1н}^{0}, ..., x_{nн}^{0})$ не всегда удается свести к решению m одномерных задач.

Необходимо ввести меру близости двух векторов $\mathbf{y}(\mathbf{x})$ и $\mathbf{y}_н$, которая будет служить в качестве критерия оптимальности (целевой функции). Во многих случаях следует учитывать различную степень важности отдельных выходных параметров.

Так, например, для схемы усилителя низкой частоты используют обычно следующие показатели (выходные характеристики): y_1 — усиление по напряжению, y_2 — амплитуда выходного импульса по низкой частоте, y_3 — напряжение неискаженного сигнала на нагрузке, важность которых, вообще говоря, различна.

С учетом сказанного, в качестве целевой функции можно предложить следующий обобщенный показатель:

$$Y(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{m} a_j \left[\frac{2(y_j(\mathbf{x}) - (y_{j\min} + y_{j\max})/2)}{y_{j\max} - y_{j\min}}\right]^{b_j}, \quad (6)$$

где y_j — значение j-й выходной характеристики, a_j — положительный весовой коэффициент, b_j — положительное целое четное число. Значение выражения в квадратных скобках заключено в отрезке $[-1, 1]$ для любой выходной характеристики y_j, удовлетворяющей требованиям технического задания.

Значение целевой функции $Y(\mathbf{x})$ является мерой близости решения центру области возможных решений, т. е. подпространству пространства выходных параметров, в котором значения всех выходных переменных равномерно отстоят от своих верхних и нижних пределов.

Решение задачи оптимального выбора номинальных значений внутренних параметров по критерию запаса работоспособности сводится в данном случае к нахождению вектора внутренних параметров, доставляющих минимум обобщенному показателю (6).

Показатель (6) обладает свойством принимать малые значения в тех случаях, когда все выходные ограничения выполнены, и резко возрастать, если хотя бы одно ограничение нарушено. Использование такого показателя во многом напоминает метод построения поверхности отклика или метод штрафных функций, известный в теории оптимизации.

Решение задачи выбора номинальных значений внутренних параметров проектируемой системы, при которых обеспечивается максимальный запас работоспособности, может быть осуществлено методами поисковой оптимизации. При этом решение обратной задачи не требует построения области работоспособности в пространстве внутренних параметров D_x. Однако для достаточно сложных многопараметрических систем процесс решения оптимизационной задачи (6) оказывается крайне трудоемким. Одним из путей снижения временных затрат на решение рассматриваемых оптимизационных задач может быть распараллеливание вычислительного процесса.

2. ПАРАЛЛЕЛЬНЫЙ АЛГОРИТМ ДИСКРЕТНОЙ ПОИСКОВОЙ ОПТИМИЗАЦИИ

При программной реализации параллельных алгоритмов представляется целесообразным использование возможностей как современных многопроцессорных вычислительных систем, так и распределенных многомашинных комплексов, связанных локальной сетью. Реализация подобных алгоритмов на многопроцессорных машинах, работающих под управлением операционных систем, поддерживающих многопоточность, не вызывает принципиальных затруднений. В то же время, в распределенных гетерогенных средах, необходимо самостоятельно реализовать механизмы загрузки данных, синхронизации процессов и балансировки вычислительной нагрузки между компонентами комплекса.

Главным критерием качества распараллеливания вычислений служит сокращение общего времени решения задачи. Возможности для распараллеливания вычислений ограничиваются не только числом имеющихся процессоров, но и особенностями вычислительного алгоритма, который может оказаться принципиально последовательным. К задаче параметрической оптимизации по критериям вида (6) применима модель передачи сообщений и, так называемая, master-slave-парадигма параллельного программирования. Один из процессоров назначается главным (master), он осуществляет динамическую балансировку загрузки, рассылает задания остальным подчиненным процессорам (slave) и формирует результаты. Распараллеливание здесь базируется на декомпозиции последовательного алгоритма вычислений, в качестве единицы параллелизма выступает задача однократного расчета модели системы (моделирования системы).

Универсальным и достаточно эффективным путем решения задачи (6) может стать применение параллельного аналога метода сканирования (слепого поиска).

Сущность метода заключается в том, что вся допустимая область пространства параметров разбивается на элементарные ячейки, в каждой из которых по определенному алгоритму выбирается точка: в центре ячейки, на ребрах или вершинах. В каждой ячейке осуществляется последовательный просмотр значений целевой функции и нахождение среди них экстремального значения. Точность метода, естественно, определяется тем, насколько плотно располагаются выбранные точки в области поиска.

Основное достоинство метода сканирования состоит в том, что при достаточно густом расположении точек всегда гарантируется отыскание глобального экстремума. Однако для этого требуется значительный объем вычислений, снизить который можно путем распараллеливания алгоритма. Наиболее простой алгоритм поиска экстремума методом сканирования (поиска на сетке переменных) заключается в том, что по каждой независимой переменной задаются приращения в соответствующем порядке, обеспечивающем заполнение всей исследуемой области равномерной и достаточно густой сеткой.

Поскольку номинальные значения параметров схемных элементов должны принадлежать ряду стандартных значений, регламентированных техническими условиями или ГОСТами, иногда предпочтительнее искать оптимальный вектор номиналов параметров на дискретном множестве номиналов $D_н$, соответствующем стандартным значениям и ограниченном областью допустимых значений D_x. В случае, когда эта область неизвестна, для каждого из параметров x_i необходимо задать пределы их возможных изменений, например, построив описанный гиперпараллелепипед [5], или на основе известных допусков на каждый из внутренних параметров.

Пусть известны множества номиналов для каждого из n выбираемых параметров схемных элементов исследуемой системы:

$$nom_1 = \{x_1^1, x_1^2, ..., x_1^{r1}\},\ \ x_1^1 < x_1^2 < ... < x_1^{r1}; ...;$$

$$nom_n = \{x_n^1, x_n^2, ..., x_n^{r_n}\},\ \ x_n^1 < x_n^2 < ... < x_n^{r_n}.$$

Решение данной задачи предлагается провести как двухэтапную параллельную процедуру.

На первом этапе предлагается ограничить пространство поиска брусом допусков, проведя аппроксимацию области работоспособности описанным параллелепипедом. Используя изложенный в статье [5] параллельный алгоритм построения описанного бруса, построим брус $B_0 \subseteq B_d$

$$B_0 = \{\boldsymbol{x} \in R^n |\ a_i^0 \leqslant x_i \leqslant b_i^0,\ i = \overline{1, n}\},$$

где $a_i^0 = \min\limits_{\mathbf{x} \in D_x} x_i$; $b_i^0 = \max\limits_{\mathbf{x} \in D_x} x_i$.

Важно отметить, что при построении описанного параллелепипеда нет необходимости нахождения области работоспособности в пространстве

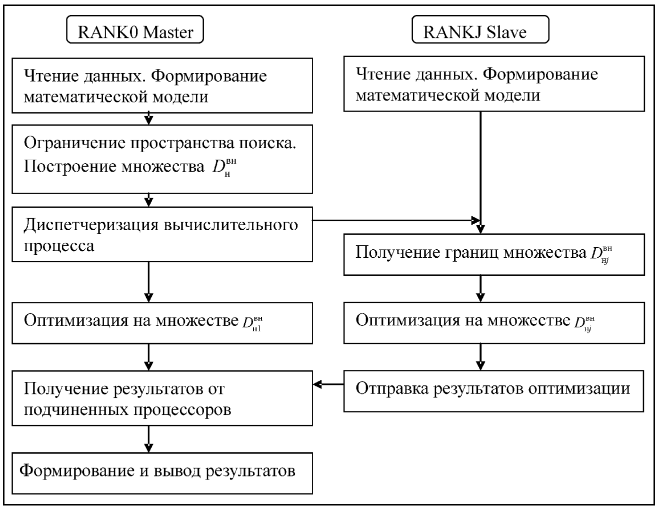

Рис. 3. Схема параллельного алгоритма дискретной оптимизации на множестве номиналов параметров

внутренних параметров D_x, что существенно уменьшает трудоемкость предлагаемого алгоритма [5].

На втором этапе сформируем дискретное множество номиналов внутренних параметров

$$D_н^{вн} = \{\mathbf{x}_н^{вн} : a_i^0 \leqslant x_i^1 \leqslant b_i^0,\ x_i \in nom_i,\ i = \overline{1, n}\}.$$

В каждой точке $\mathbf{x}_н^{вн}$ дискретного множества $D_н^{вн}$ необходимо найти значение целевой функции. Искомый оптимальный вектор номиналов $\mathbf{x}_н^{опт}$ находим, решая задачу:

$$\mathbf{x}_н^{опт} = \arg \min_{\mathbf{x}_н^{вн} \in D_н^{вн}} Y(\mathbf{x}_н^{вн}). \qquad (7)$$

Задача (9) эквивалентна задаче нахождения оптимального решения в смысле (4) или (5), а в многомерном случае доставляет минимум обобщенному показателю (6) на дискретном множестве номиналов параметров.

В простейшем случае нахождение решения задачи (7) сводится к полному перебору элементов множества $D_н^{вн}$, для каждого из которых осуществляется расчет функции $Y(\mathbf{x}_н^{вн})$. Учитывая цикличность процедуры вычисления целевой функции, можно применить параллелизм по данным. Схема параллельного алгоритма дискретной оптимизации по критерию запаса работоспособности приведена на (рис. 3).

Множество $D_н^{вн}$ разбивается на непересекающиеся подмножества $D_н^{вн} = \bigcup_{i=1}^{k}\{D_{нi}^{вн}\}$, при этом каждому j-му процессору назначается свое под-множество $D_{\text{н}j}^{\text{вн}}$ исходных данных. Таким образом, каждый j-й процессор рассчитывает целевую функцию для всех элементов множества $D_{\text{н}j}^{\text{вн}}$ и находит оптимальный вектор номиналов параметров для своей подобласти. Результаты передаются главному процессору, который выбирает оптимальный вектор номиналов по всей области $D_{\text{н}}^{\text{вн}}$. Такое разбиение всего множества поиска на непересекающиеся подмножества составляет суть блока диспетчеризации параллельного распределенного процесса.

Для симметричного вычислительного кластера, состоящего из k равных по мощности вычислительных узлов, общее число точек разбивается на равные части для каждого из подчиненных процессов. В случае несимметричного кластера необходима предварительная процедура оценки трудоемкости типовой процедуры метода оптимизации, в качестве которой выступают однократное моделирование работы системы, проверка условий работоспособности и вычисление значений критерия запаса работоспособности. Вычислительная нагрузка делится между компонентами комплекса пропорционально их производительности [6].

По окончании работы программы диспетчеризации вычислительного процесса каждому вычислительному компоненту комплекса рассылаются границы его подмножества $D_{\text{н}j}^{\text{вн}}$ исходных данных. По окончании счета главный процессор получает результаты от подчиненных и формирует окончательные результаты дискретной оптимизации на всем множестве $D_{\text{н}}^{\text{вн}}$.

Данный параллельный подход обладает достаточно высокими характеристиками производительности, так как обмен между процессорами сводится к минимуму — назначению заданий и заключительной передаче результатов. Выполнение испытаний на процессорах не синхронизируется. При одинаковых мощностях подобластей $D_{\text{н}j}^{\text{вн}}$ и равных временных затратах на вычисление целевой функции на симметричных кластерах ускорение параллельного алгоритма сканирования практически достигает линейного. Наличие внутренних циклов порождает высокую масштабируемость алгоритма, главное условие эффективной реализации которого состоит в пропорциональной загрузке всех участвующих в вычислениях процессоров.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Основные трудности, возникающие при решении задачи оптимального параметрического синтеза технических устройств и систем с учетом отклонений их параметров от расчетных значений, связаны с дефицитом информации о закономерностях этих отклонений и ее высокой вычислительной трудоемкостью.

Применение критерия запаса работоспособности позволяет получить решение задачи параметрического синтеза в случае отсутствия информации о стохастических закономерностях вариаций параметров, а применение технологии распределенных (параллельных) вычислений предложить эффективные вычислительные алгоритмы. Предложенный алгоритм, ориентированный на реализацию в распределенной вычислительной среде, позволяет выбрать номинальные значения параметров, обеспечивающих максимальный запас работоспособности исследуемой системы. Важный момент алгоритма состоит в том, что процессоры и станции локальной сети могут быть как однотипными, так и отличающимися друг от друга по своим вычислительным характеристикам. Такая схема повышает надежность вычислений, устраняется возможность блокировки системы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Анализ* и оптимальный синтез на ЭВМ систем управления / Под ред. А.А. Воронова и И.А. Орурка. — М.: Наука, 1984.
2. *Абрамов О.В.* Параметрический синтез стохастических систем с учетом требований надежности. — М.: Наука, 1992.
3. *Антушев Г.С.* Методы параметрического синтеза сложных технических систем. — М.: Наука, 1989.
4. *Норенков И.П., Мулярчик С.Г., Иванов С.Р.* Экстремальные задачи при схемотехническом проектировании в электронике. — Минск: Изд-во БГУ им. В.И. Ленина, 1976.
5. *Абрамов О.В., Катуева Я.В.* Технология параллельных вычислений в задачах анализа и оптимизации // Проблемы управления. — 2003. — № 4. — С. 11—15.
6. *Катуева Я.В.* Балансировка загрузки несимметричного вычислительного комплекса при решении задачи статистического оценивания // Информатика и системы управления. — 2006. — № 2(12). — С. 88—93.

☎ *(4232) 31-02-02, e-mail: abramov@iacp.dvo.ru, gloria@iacp.dvo.ru, nazardim@iacp.dvo.ru*

Статья представлена к публикации членом редколлегии Б.Г. Воликом. ❑