

АНАЛИТИЧЕСКИЙ СИНТЕЗ ПРОГРАММНОГО ГИРОСИЛОВОГО УПРАВЛЕНИЯ СВОБОДНОЛЕТАЮЩИМ КОСМИЧЕСКИМ РОБОТОМ В РЕЖИМЕ ТРАНСПОРТИРОВКИ ПОЛЕЗНОГО ГРУЗА¹

Е. И. Сомов

Самарский научный центр РАН, г. Самара

Представлен метод аналитического синтеза пространственного программного углового движения свободнолетающего космического роботизированного модуля в режиме транспортировки полезного груза. Показано, что при выполнении поворотного маневра модуля с нежестким грузом при краевых условиях общего вида обеспечивается достижение слабого возбуждения упругих колебаний переносимой конструкции благодаря аналитически рассчитанному гиросиловому управлению.

ВВЕДЕНИЕ

Среди общих проблем сборки больших космических конструкций [1] непосредственно на орбите с помощью свободнолетающих космических роботизированных модулей (КРМ) [2, 3] выделяется актуальная задача управления пространственным угловым движением КРМ в режиме транспортировки полезного груза при малых массовых и энергетических затратах. Как известно [4], при необходимости многочисленных, разнообразных и быстрых пространственных поворотных маневров любого космического аппарата, в частности КРМ, важными преимуществами по массовым и энергетическим затратам обладают системы управления движением, в состав которых входят двухступенные силовые гироскопы — гиродины (ГД). Задача пространственного углового маневра КРМ существенно отличается от традиционной задачи управления ориентацией космических аппаратов в режимах, осуществляющих поиск внешних физических ориентиров. В настоящей статье представлен метод аналитического синтеза пространственного программного углового движения КРМ, совершающего свобод-

ный полет по баллистической траектории [5] в промежутке между участками, на которых применяется управление движением его центра масс. Модуль с транспортируемым полезным грузом, зачастую нежестким, должен выполнять поворотные маневры с краевыми условиями общего вида [6], причем требуется ограничение возбуждения упругих колебаний конструкции такой связки твердых и упругих тел в процессе маневра путем обеспечения «гладкости» воздействий со стороны аналитически рассчитанного гиросилового управления.

1. ЗАДАЧА АНАЛИТИЧЕСКОГО СИНТЕЗА ПРОГРАММЫ ПОВОРОТНОГО МАНЕВРА КРМ

Данная задача на заданном интервале времени $t \in T_p \equiv [t_0^p, t_f^p]$, $t_f^p \equiv t_0^p + T_p$ состоит в определении явных функций времени [6]: кватерниона ориентации $\Lambda(t)$ связанного с корпусом КРМ базиса \mathbf{B} относительно известного инерциального базиса \mathbf{I} , векторов угловой скорости $\boldsymbol{\omega}(t)$, ускорения $\boldsymbol{\varepsilon}(t)$ и его производной $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(t) = \boldsymbol{\varepsilon}^*(t) + \boldsymbol{\omega}(t) \times \boldsymbol{\varepsilon}(t)$. Кватернион $\Lambda = (\lambda_0, \boldsymbol{\lambda})$, $\boldsymbol{\lambda} = \{\lambda_j\}$, векторы скорости $\boldsymbol{\omega} = \{\omega_j\}$ и ускорения $\boldsymbol{\varepsilon} = \{\varepsilon_j\} = \dot{\boldsymbol{\omega}}$, а также вектор производной ускорения $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \{\dot{\varepsilon}_j\} = \boldsymbol{\varepsilon}^* + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\varepsilon}$ должны удовлетворять следующим краевым условиям на левом

¹ Работа поддержана РФФИ (грант 05-08-18175), Отделением энергетики, механики, машиностроения и процессов управления РАН (программа 16).



($t = t_0^p$) и правом ($t = t_f^p$) концах траектории поворотного маневра:

$$\Lambda(t_0^p) = \Lambda_0; \omega(t_0^p) = \omega_0 \equiv \mathbf{e}_0^0 \omega_0; \varepsilon(t_0^p) = \varepsilon_0 \equiv \mathbf{e}_0^0 \varepsilon_0; \quad (1)$$

$$\Lambda(t_f^p) = \Lambda_f; \omega(t_f^p) = \omega_f \equiv \mathbf{e}_f^0 \omega_f; \varepsilon(t_f^p) = \varepsilon_f \equiv \mathbf{e}_f^0 \varepsilon_f; \\ \dot{\varepsilon}(t_f^p) = \dot{\varepsilon}_f \equiv \mathbf{e}_f^{*0} \varepsilon_f^* + \omega_f \times \varepsilon_f. \quad (2)$$

Последнее из этих условий представляет собой требования к *гладкости сопряжения* правого конца траектории с последующим участком причаливания и механической стыковки КРМ с собираемой с его помощью космической конструкцией.

Подход к решению этой задачи основывается на *необходимом* и *достаточном* условии разрешимости классической задачи Дарбу — определения кватерниона $\Lambda(t)$ в аналитическом виде (в том числе в квадратурах) из уравнения $\dot{\Lambda}(t) = \frac{1}{2} \Lambda(t) \odot \omega(t)$ при известных Λ_0 и $\omega(t)$,

где \odot — знак умножения кватернионов.

Введем базис \mathbf{E}_0 , фиксированный в инерциальном базисе \mathbf{I} кватернионом Λ_0 (1), и подвижные базисы \mathbf{E}_k , $k = 1, \dots, n$, где базис \mathbf{E}_n совпадает со связанным базисом \mathbf{B} . Необходимое и достаточное условия разрешимости задачи Дарбу состоят в возможности представления вектора угловой скорости $\omega(t)$ в виде $\omega(t) = \omega_n(t) + \omega_{n-1}(t) + \dots + \omega_1(t)$, где вектор $\omega_k(t)$ имеет неизменное направление в базисе \mathbf{E}_{k-1} и является вектором угловой скорости базиса \mathbf{E}_k относительно базиса \mathbf{E}_{k-1} , т. е. в виде

$$\omega = \omega_n^{n-1} + \tilde{\Lambda}_n \odot (\omega_{n-1}^{n-2} + \tilde{\Lambda}_{n-1} \odot (\omega_{n-2}^{n-3} + \tilde{\Lambda}_{n-2} \odot (\dots + \omega_1^0 \dots \odot \Lambda_{n-2}) \odot \Lambda_{n-1}) \odot \Lambda_n,$$

где вектор-столбец $\omega_k^{k-1} \equiv \omega_k^{k-1}(t)$, $k = 1, \dots, n$, составлен из проекций вектора $\omega_k(t)$ фиксированно-

Типы элементарных движений и их краевые условия

k	Тип	Краевые условия на левом конце траектории ($t = t_0^p$)				Краевые условия на правом конце траектории ($t = t_f^p$)					
		φ	ω	ε	$\dot{\varepsilon}$	φ	ω	ε	$\dot{\varepsilon}$		
1	Гашение ускорения ε_0	0	0	ε_0	$\dot{\varepsilon}_1^0$	φ_1^f	0	0	0		
2	Гашение скорости ω_0					ω_0				$\dot{\varepsilon}_2^0$	φ_2^f
3	Позиционный переход					$\dot{\varepsilon}_3^0$				φ_3^f	
4	Разгон до скорости ω_f					$\dot{\varepsilon}_4^0$				φ_4^f	ω_f
5	Разгон до ускорения ε_f					$\dot{\varepsilon}_5^0$				φ_5^f	ε_f
6	Разгон до производной ускорения $\dot{\varepsilon}_f$					$\dot{\varepsilon}_6^0$				φ_6^f	0

го направления в базисе \mathbf{E}_{k-1} , а $\Lambda_k(t)$ является кватернионом ориентации базиса \mathbf{E}_k относительно базиса \mathbf{E}_{k-1} .

Решение поставленной задачи представляется как результат сложения в общем случае шести *одновременно* происходящих элементарных поворотов «вложенных» базисов \mathbf{E}_k вокруг ортов \mathbf{e}_k осей Эйлера, положение которых определяется из краевых условий (1) и (2) исходной пространственной задачи. Краевые условия всех 6-ти элементарных поворотов относительно ортов \mathbf{e}_k приведены в таблице, где для первых *пяти* элементарных движений требуется обеспечить равенство нулю локальной (собственной) производной ускорения на правом конце траектории.

Кватернион $\Lambda(t)$ ориентации КРМ в базисе \mathbf{I} определяется произведением

$$\Lambda(t) = \Lambda_0 \odot \Lambda_1(t) \odot \Lambda_2(t) \odot \Lambda_3(t) \odot \Lambda_4(t) \odot \Lambda_5(t) \odot \Lambda_6(t).$$

Здесь индексы 1—6 кватернионов $\Lambda_k(t)$ соответствуют их номерам в таблице, причем кватернион $\Lambda_k(t) = (\cos(\varphi_k(t)/2), \mathbf{e}_k \sin(\varphi_k(t)/2))$, где $\varphi_k(t)$ и \mathbf{e}_k — текущий угол и орт оси Эйлера k -го поворота. В силу *неподвижности* орта \mathbf{e}_k в базисе \mathbf{E}_{k-1} имеем $\omega_k(t) = \dot{\varphi}_k(t) \mathbf{e}_k$; $\varepsilon_k(t) = \ddot{\varphi}_k(t) \mathbf{e}_k$ и $\dot{\varepsilon}_k(t) = \ddot{\varphi}_k(t) \mathbf{e}_k$. Вектор угловой скорости $\omega(t)$, векторы углового ускорения $\varepsilon(t)$ и его производной $\dot{\varepsilon}(t)$ при начальных обозначениях векторов $\omega^{(1)}(t) = \omega_1(t)$, $\varepsilon^{(1)}(t) = \varepsilon_1(t)$, $\dot{\varepsilon}^{(1)}(t) = \dot{\varepsilon}_1(t)$ определяются аналитически по рекуррентному алгоритму: для верхних индексов $k = \overline{2, 6}$ последовательно вычисляются

$$\omega_q^k(t) := \tilde{\Lambda}_k(t) \odot \omega^{(k-1)}(t) \odot \Lambda_k(t);$$

$$\omega^{(k)}(t) = \omega_k(t) + \omega_q^k(t);$$

$$\varepsilon_q^k(t) := \tilde{\Lambda}_k(t) \odot \varepsilon^{(k-1)}(t) \odot \Lambda_k(t);$$

$$\varepsilon^{(k)}(t) = \varepsilon_k(t) + \varepsilon_q^k(t) + \omega_q^k(t) \times \omega_k(t);$$

$$\dot{\varepsilon}_q^k := \tilde{\Lambda}_k(t) \odot \dot{\varepsilon}^{(k-1)}(t) \odot \Lambda_k(t);$$

$$\dot{\varepsilon}^{(k)}(t) = \dot{\varepsilon}_k(t) + \dot{\varepsilon}_q^k(t) + (2\varepsilon_q^k(t) + \omega_q^k(t) \times \omega_k(t)) \times \omega_k(t) + \omega_q^k(t) \times \varepsilon_k(t), \quad (3)$$

искомые векторы получаются как $\omega(t) = \omega^{(6)}(t)$, $\varepsilon(t) = \varepsilon^{(6)}(t)$, $\dot{\varepsilon}(t) = \dot{\varepsilon}^{(6)}(t)$.

Функции $\varphi_k(t)$, представляющие в аналитическом виде углы элементарных поворотов, выбираются в классе полиномов (сплайнов) соответствующей степени.

Гашение начальных значений угловой скорости и углового ускорения. Для *первых* двух движений выберем функции $\varphi_k(t)$, $k = 1, 2$ с краевыми условиями

$$\varphi_k(t_0^p) = 0; \quad \dot{\varphi}_k(t_0^p) = \omega_0 \equiv |\omega_0|; \quad \ddot{\varphi}_k(t_0^p) = \varepsilon_0 \equiv |\varepsilon_0|;$$

$$\dot{\varphi}_k(t_f^p) = 0; \quad \ddot{\varphi}_k(t_f^p) = 0; \quad \ddot{\varphi}_k(t_f^p) = 0$$

в виде сплайнов $\varphi_k(\tau)$ 5-й степени нормированного времени $\tau = (t - t_0^p)/T_p \in [0, 1]$:

$$\begin{aligned}\ddot{\varphi}_k(t) &= \dot{\varepsilon}_k(t) = -6(a_0 - a_1\tau + 2a_2\tau^2)/T_p; \\ \ddot{\varphi}_k(t) &= \varepsilon_k(t) = \varepsilon_0 - \tau(6a_0 - 3a_1\tau + 4a_2\tau^2); \\ \dot{\varphi}_k(t) &= \omega_k(t) = \omega_0 + T_p\tau[\varepsilon_0 - \tau(3a_0 - a_1\tau + a_2\tau^2)]; \\ \varphi_k(t) &= T_p\tau\{\omega_0 + T_p\tau[\varepsilon_0 - \tau(20a_0 - 5a_1\tau + 4a_2\tau^2)/10]/2\},\end{aligned}\quad (4)$$

где коэффициенты a_i определяются так: $a_0 = 2\omega_0/T_p + \varepsilon_0$; $a_1 = 8\omega_0/T_p + 3\varepsilon_0$ и $a_2 = 3\omega_0/T_p + \varepsilon_0$. Здесь формально гашение начального углового ускорения получается по соотношениям (4) при $\omega_0 = 0$, а гашение начальной угловой скорости — при $\varepsilon_0 = 0$. На левом конце траектории производные ускорений $\dot{\varepsilon}_k(t_0^p) \equiv \dot{\varepsilon}_k^0 = \ddot{\varphi}_k(t_0^p) = -6a_0/T_p$, а углы φ_k на правом конце траектории принимают значения $\varphi_k(t_f^p) \equiv \varphi_k^0 = T_p^2 [8(\omega_0/T_p) + \varepsilon_0]/20$.

Разгон до заданных значений угловой скорости и ускорения. Для четвертого и пятого движений функции $\varphi_k(t)$, $k = 4, 5$ должны удовлетворять краевым условиям

$$\begin{aligned}\varphi_k(t_0^p) &= 0; \quad \dot{\varphi}_k(t_0^p) = 0; \quad \ddot{\varphi}_k(t_0^p) = 0; \\ \varphi_k(t_f^p) &= \omega_f \equiv |\omega_f|; \quad \dot{\varphi}_k(t_f^p) = \varepsilon_f \equiv |\varepsilon_f|; \quad \ddot{\varphi}_k(t_0^p) = 0,\end{aligned}$$

поэтому $\varphi_k(t)$ также выбираются в виде сплайнов 5-й степени

$$\begin{aligned}\ddot{\varphi}_k(t) &= \dot{\varepsilon}_k(t) = 6(a_0 + a_1\tau + 2a_2\tau^2)/T_p; \\ \ddot{\varphi}_k(t) &= \varepsilon_k(t) = \tau(6a_0 + 3a_1\tau + 4a_2\tau^2); \\ \dot{\varphi}_k(t) &= \omega_k(t) = T_p\tau^2(3a_0 + a_1\tau + a_2\tau^2); \\ \varphi_k(t) &= T_p^2\tau^3(20a_0 + 5a_1\tau + 4a_2\tau^2)/20,\end{aligned}$$

где нормированное время $\tau = (t - t_0^p)/T_p \in [0, 1]$ и коэффициенты a_i вычисляются по соотношениям $a_0 = 2\omega_f/T_p - \varepsilon_f$; $a_1 = -8\omega_f/T_p + 5\varepsilon_f$; $a_2 = 3\omega_f/T_p - 2\varepsilon_f$. На левом конце траектории собственные производные ускорений $\dot{\varepsilon}_k(t_f^p) \equiv \dot{\varepsilon}_k^0 = \ddot{\varphi}_k(t_0^p) = 6a_0/T_p$, а углы φ_k принимают конечные значения $\varphi_k(t_f^p) \equiv \varphi_k^f = T_p^2 [12(\omega_f/T_p) - 3\varepsilon_f]/20$, $k = 4, 5$.

Разгон до заданного значения локальной производной углового ускорения. Для шестого элементарного движения функция $\varphi_6(t)$ должна удовлетворять краевым условиям

$$\begin{aligned}\varphi_6(t_0^p) &= 0; \quad \dot{\varphi}_6(t_0^p) = 0; \quad \ddot{\varphi}_6(t_0^p) = 0; \quad \dot{\varphi}_6(t_f^p) = 0; \\ \ddot{\varphi}_6(t_f^p) &= 0; \quad \ddot{\varphi}_6(t_f^p) = \varepsilon_f^*,\end{aligned}$$

она представляется сплайном 5-й степени нормированного времени $\tau \in [0, 1]$ в виде

$$\begin{aligned}\varepsilon_6^*(t) &= b_6[1 - 6\tau + 6\tau^2]/T_p; \quad \varepsilon_6(t) = b_6\tau[1 - 3\tau + 2\tau^2]; \\ \omega_6(t) &= b_6T_p\tau^2[1 - 2\tau + \tau^2]/2; \\ \omega_6(t) &= b_6T_p^2\tau^3[10 - 15\tau + 6\tau^2]/60,\end{aligned}$$

где $b_6 = \varepsilon_f^* T_p$. На левом конце траектории $\varepsilon_6^*(t_0^p) \equiv \varepsilon_6^0 = \ddot{\varphi}_6(t_0^p) = \varepsilon_f^*$, угол φ_6 поворота относительно орта \mathbf{e}_6 принимает конечное значение $\varphi_6(t_f^p) \equiv \varphi_6^f = T_p^2 b_6/60 = T_p^3 \varepsilon_f^*/60$.

Позиционный переход. Функция позиционного перехода $\varphi_3(t)$ по углу поворота в третьем замыкающем элементарном движении должна удовлетворять краевым условиям

$$\begin{aligned}\varphi_3(t_0^p) &= 0; \quad \dot{\varphi}_3(t_0^p) = 0; \quad \varphi_3(t_f^p) = \varphi_3^f; \quad \dot{\varphi}_3(t_f^p) = 0; \\ \ddot{\varphi}_3(t_f^p) &= 0; \quad \ddot{\varphi}_3(t_f^p) = 0; \quad \ddot{\varphi}_3(t_0^p) = 0.\end{aligned}\quad (5)$$

Здесь угол $\varphi_3^f = \varphi^* = 2\arccos(\lambda_0^*)$ определяется краевыми условиями (1) и (2), где λ_0^* — скалярная часть кватерниона $\mathbf{\Lambda}^* \equiv (\lambda_0^*, \boldsymbol{\lambda}^*) = \tilde{\mathbf{\Lambda}}_2(t_f^p) \odot \tilde{\mathbf{\Lambda}}_1(t_f^p) \odot \tilde{\mathbf{\Lambda}}_0 \odot \mathbf{\Lambda}_f \odot \tilde{\mathbf{\Lambda}}_6(t_f^p) \odot \tilde{\mathbf{\Lambda}}_5(t_f^p) \odot \tilde{\mathbf{\Lambda}}_4(t_f^p)$ с ортом оси Эйлера $\mathbf{e}_3 = \boldsymbol{\lambda}^*/\sin(\varphi^*/2)$, а кватернионы $\mathbf{\Lambda}_k(t_p)$, $k = 1, 2, 4, 5, 6$ однозначно определяются углами φ_k^f , представленными выше в явном виде, (см. таблицу) и ортами

$$\begin{aligned}\mathbf{e}_1 &= \mathbf{e}_0^e; \quad \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_0^{\omega}; \\ \mathbf{e}_4 &= \mathbf{\Lambda}_6(t_f^p) \odot \mathbf{\Lambda}_5(t_f^p) \odot \mathbf{e}_f^{\omega} \odot \tilde{\mathbf{\Lambda}}_5(t_f^p) \odot \tilde{\mathbf{\Lambda}}_6(t_f^p); \\ \mathbf{e}_5 &= \mathbf{\Lambda}_6(t_f^p) \odot \mathbf{e}_f^e \odot \tilde{\mathbf{\Lambda}}_6(t_f^p); \quad \mathbf{e}_6 = \mathbf{e}_f^{\varepsilon^*} \equiv \begin{bmatrix} \varepsilon_f^* \\ \mathbf{\varepsilon}_f^* \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

На модуль скорости движения в позиционном переходе может накладываться ограничение с заданной константой ω_3^* в виде неравенства

$$\omega_3^m \equiv \max_{\tau \in [0, 1]} |\dot{\varphi}_3(\tau)| \leq \omega_3^*.\quad (6)$$

Рассмотрим сначала случай позиционного перехода без ограничения (6). Весь интервал такого перехода в нормированном времени $\tau \in [0, 1]$ разделим на два участка одинаковой длительности. На каждом участке введем свое нормированное время $\tau_1 = (t - t_0)/T_1$, $T_1 \equiv T_p/2$ и $\tau_2 = (t - t_0 - T_1)/T_2$, $T_2 \equiv T_p/2$. Угловое движение на первом участке представим функцией $\varphi_3^{(1)}(\tau_1) = \omega_3^m T_1 [\tau_1^2/2 + (1 - \cos(2\pi\tau_1))/2\pi]$, удовлетворяющей краевым условиям (5) на левом конце, а на втором участке — зеркально-симметричной по отношению к $\varphi_3^{(1)}(\tau_1)$ функцией



$\varphi_3^{(2)}(\tau_2) = \varphi_{31} + \omega_3^m T_2[\tau_2 - \tau_2^2/2 - (1 - \cos(2\pi\tau_2))/2\pi]$, для которой выполняются краевые условия (5) на правом конце. Здесь значение $\varphi_{31} = \varphi_3^{(1)}(1) = \omega_3^m T_1/2$. В момент абсолютного времени $t = t_0 + T_p/2$ происходит гладкое сопряжение участков элементарного движения позиционного перехода с достижением максимальной скорости $\omega_3^m = \varphi^*/T_1 = 2\varphi^*/T_p$ с выполнением равенств

$$\begin{aligned} \varphi_3^{(1)}(1) &= \varphi_3^{(2)}(0) = \varphi_{31}; & \dot{\varphi}_3^{(1)}(1) &= \dot{\varphi}_3^{(2)}(0) = \omega_3^m; \\ \ddot{\varphi}_3^{(1)}(1) &= \ddot{\varphi}_3^{(2)}(0) = 0; & \ddot{\varphi}_3^{(1)}(1) &= \ddot{\varphi}_3^{(2)}(0) = 0. \end{aligned}$$

Функции позиционного перехода $\varphi_3^{(1)}(t)$, $\varphi_3^{(2)}(t)$ и их производные принимают вид:

$$\text{участок 1: } \begin{cases} \dot{\varepsilon}_3^{(1)}(t) = \ddot{\varphi}_3^{(1)}(t) = \dot{\varepsilon}_3^{(m1)} S_{\alpha 1}; \\ \varepsilon_3^{(1)}(t) = \dot{\varphi}_3^{(1)}(t) = \varepsilon_3^{(m1)}(1 - C_{\alpha 1}); \\ \omega_3^{(1)}(t) = \dot{\varphi}_3^{(1)}(t) = \omega_3^{(m)}(\tau_1 - S_{\alpha 1}/2\pi); \\ \varphi_3^{(1)}(t) = \omega_3^m T_1[\tau_1^2/2 - (1 - C_{\alpha 1})/4\pi^2]; \end{cases} \quad (7)$$

$$\text{участок 2: } \begin{cases} \dot{\varepsilon}_3^{(2)}(t) = \ddot{\varphi}_3^{(2)}(t) = -\dot{\varepsilon}_3^{(m2)} S_{\alpha 2}; \\ \varepsilon_3^{(2)}(t) = \dot{\varphi}_3^{(2)}(t) = -\varepsilon_3^{(m2)}(1 - C_{\alpha 2}); \\ \omega_3^{(2)}(t) = \dot{\varphi}_3^{(2)}(t) = \omega_3^{(m)}(1 - \tau_2 + S_{\alpha 2}/2\pi); \\ \varphi_3^{(2)}(t) = \varphi_{31} + \omega_3^m T_2[\tau_2 - \tau_2^2/2 + (1 - C_{\alpha 2})/4\pi^2]. \end{cases} \quad (8)$$

Здесь $\tau_1 = (t - t_0)/T_1$, $\tau_2 = (t - t_0 - T_1)/T_2$; функции $S_{\alpha i} \equiv \sin(\alpha^{(i)})$, $C_{\alpha i} \equiv \cos(\alpha^{(i)})$, $\alpha^{(i)} \equiv 2\pi\tau_i$, $i = 1, 2$; значения $\dot{\varepsilon}_3^{(mi)} = 2\pi\omega_3^m/T_i^2$, $\varepsilon_3^{(mi)} = \omega_3^m/T_i$, $i = 1, 2$, и, как указано ранее, $\varphi_{31} = \omega_3^m T_1/2$.

На левом конце траектории позиционного перехода собственная производная ускорения $\dot{\varepsilon}_3(t_0^p) \equiv \dot{\varepsilon}_3^0 = \ddot{\varphi}_3(t_0^p) = 0$ и на правом конце $\dot{\varepsilon}_3(t_f^p) \equiv \dot{\varepsilon}_3^f = \ddot{\varphi}_3(t_f^p) = 0$ в соответствии с краевым условием (5), а угол φ_3 принимает конечное значение $\varphi_3(t_0^p) = \varphi_3^f = \varphi^* = \omega_3^m [(T_1/2) + (T_2/2)] = \omega_3^m T_p/2$.

Рассмотрим теперь вариант наличия условия (6). Здесь решение заключается в том, что между первым и вторым участками позиционного перехода с уменьшенными длительностями $T_1 = T_p/(2 + q)$ и $T_2 = T_p/(2 + q)$ «гладко вставляется» участок с постоянной скоростью $\dot{\varphi}_3(t) = \omega_3^* = \text{const}$ («полка») длительностью $T_c = T_p - (T_1 + T_2) = T_p q/(2 + q)$. Нормированный параметр q , определяющий длительность T_c «полки», находится по соотношению $q = 2(a - 1)/(1 - 2a)$, где $a = \omega_3^* T_p/(2\varphi^*)$.

Если $0 < a \leq 1/2$ либо $a \geq 1$, то значение $q \leq 0$, тогда следует назначить $q = 0$, и позиционный переход при $\omega_3^m < \omega_3^*$ будет без «полки», а при $\omega_3^m > \omega_3^*$ требуемое движение неосуществимо. Если же параметр $a \in (0,5; 1)$, то $q > 0$ и позиционный переход обязательно имеет «полку» длительностью $T_c = T_p(1 - a)/a$. Явное описание позиционного перехода на участке 1 (от начала движения до времени появления «полки») и участке 2 (с момента времени схода с «полки» до завершения движения) по-прежнему дается выражениями (7) и (8), но с подстановкой в них значений ω_3^* вместо ω_3^m , уменьшенных длительностей $T_1 = T_p(2 + q)$ и $T_2 = T_p(2 + q)$, нормированного времени на втором участке $\tau_2 = (t - (t_0 + T_1 + T_c))/T_2 \in [0, 1]$ и угла $\varphi_{31} = \omega_3^*(T_c + T_1/2) = \omega_3^* T_p(q + 1/2)/(2 + q)$. На участке «полки» движение КРМ в позиционном переходе определяются формулами

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}_3^{(c)}(t) &= \ddot{\varphi}_3^{(c)}(t) = 0; & \varepsilon_3^{(c)}(t) &= \dot{\varphi}_3^{(c)}(t) = \omega_3^*; \\ \omega_3^{(c)}(t) &= \dot{\varphi}_3^{(c)}(t) = \omega_3^*; & \varphi_3^{(c)} &= \omega_3^*(T_1/2 + T_c\tau_c), \end{aligned}$$

где нормированное время $\tau_c = (t - t_0 - T_1)/T_c \in [0, 1]$.

В итоге угол φ_3^f принимает значение

$$\begin{aligned} \varphi_3(t_f^p) &= \varphi_3^f = \varphi^* = \omega_3^* [(T_1/2) + T_c + (T_2/2)] = \\ &= T_p \omega_3^* (1 + q)/(2 + q). \end{aligned}$$

2. СИЛОВЫЕ ГИРОСКОПИЧЕСКИЕ КОМПЛЕКСЫ

При выборе схемы расположения гиродинов (ГД) в связанной с корпусом КРМ системе координат $Oxuz$ учитываются требования, предъявляемые к системе управления движением. Возможности силового гироскопического комплекса по созданию вектора управляющего момента определяются только расположением осей подвеса ГД в связанной системе координат. Применение групп (в простейшем случае пар) ГД с коллинеарными осями подвеса дает важное преимущество — все внутренние сингулярные состояния такой схемы являются *проходимыми*. В рамках такого подхода при использовании только четырех ГД возможна лишь классическая схема 2-SPE (система двух ножничных пар — 2 Scissored Pair Ensemble). Анализ свойств силового гироскопического комплекса удобно проводить в его ортогональном каноническом $\mathbf{E}_c^g(x_c^g, y_c^g, z_c^g)$ и косоугольном гироскопическом $\mathbf{E}^g(x, y, z)$ базисах (рис. 1).

В прецессионной теории силовых гироскопов представления нормированного вектора кинетического момента силового гироскопического комплекса $\mathbf{h}^c \equiv \{x_c^g, y_c^g, z_c^g\}$ в каноническом базисе и $\mathbf{h} \equiv \{x, y, z\}$ в гироскопическом базисе связаны соотношением $\mathbf{h}^c = \mathbf{A}_y \mathbf{h}$, а вектор нормированного управляющего момента гироскопического комплекса \mathbf{m}^g в каноническом базисе

$$\mathbf{m}^g = -\dot{\mathbf{h}}^c = -\mathbf{A}_y \mathbf{A}_h(\beta) \mathbf{u}^g, \quad \dot{\beta} = \mathbf{u}^g, \quad (9)$$

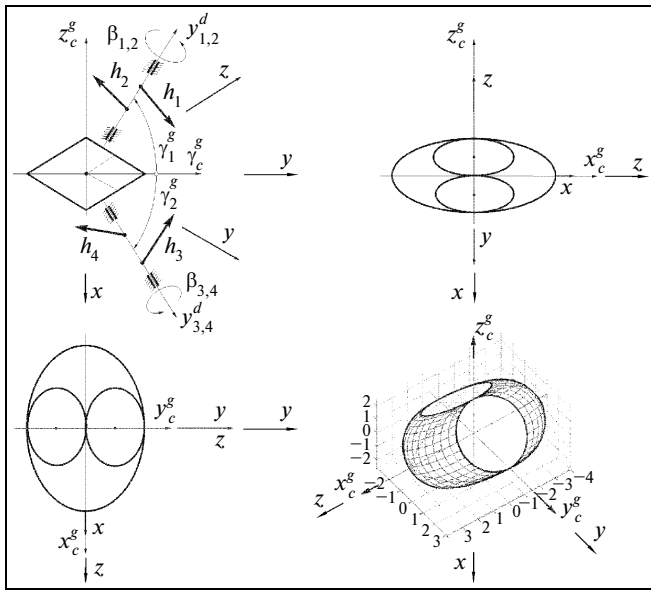


Рис. 1. Схема силового гироскопического комплекса 2-SPE и оболочка области S вариации вектора его кинетического момента

где матрицы $\mathbf{A}_\gamma = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & S_{\gamma_1^g} & S_{\gamma_2^g} \\ 0 & -C_{\gamma_1^g} & C_{\gamma_2^g} \end{bmatrix}$,

$$\mathbf{A}_h(\beta) = \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \beta} = \begin{bmatrix} -y_1 & -y_2 & -z_3 & -z_4 \\ x_1 & x_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -x_3 & -x_4 \end{bmatrix};$$

$$x_p = C_{\beta_p}, p = \overline{1, 4}; \quad y_p = S_{\beta_p}, p = 1, 2;$$

$$z_p = S_{\beta_p}, p = 3, 4; \quad S_\alpha \equiv \sin \alpha; \quad C_\alpha \equiv \cos \alpha; \quad \beta = \{\beta_p\};$$

$$x = x_{12} + x_{34}; \quad x_{12} = x_1 + x_2; \quad x_{34} = x_3 + x_4; \\ y = y_1 + y_2; \quad z = -(z_1 + z_2).$$

При обозначениях $\gamma = (\gamma_1^g + \gamma_2^g)/2$; $\alpha_1 = (\beta_1 + \beta_2)/2$, $\alpha_2 = (\beta_3 + \beta_4)/2$, $\alpha_i \in [-\pi, +\pi]$; $\delta_1 = (\beta_1 - \beta_2)/2$, $\delta_2 = (\beta_3 - \beta_4)/2$, $\delta_i \in [-\pi/2, \pi/2]$ и $\mathbf{A}_{\gamma h}(\beta) \equiv \mathbf{A}_\gamma \mathbf{A}_h(\beta)$ определитель матрицы Грамма $\Delta_G(\beta) = \det[\mathbf{A}_{\gamma h} \mathbf{A}_{\gamma h}^t]$ выражается в симметричном виде:

$$\Delta_G = S_{2\gamma}^2 \mathbf{G}; \quad \mathbf{G} \equiv 2[(C_{\alpha_1}^2 C_{\delta_1}^2 + S_{\alpha_1}^2 S_{\delta_1}^2) S_{2\delta_2}^2 + \\ + (C_{\alpha_2}^2 C_{\delta_2}^2 + S_{\alpha_2}^2 S_{\delta_2}^2) S_{2\delta_1}^2].$$

Поэтому все естественные сингулярные состояния гироскопического комплекса, в которых $\Delta_G = 0$, описываются единым соотношением

$$(C_{\alpha_i} C_{\delta_i} S_{\delta_j} C_{\delta_j} = 0) \& (S_{\alpha_i} S_{\delta_i} S_{\delta_j} C_{\delta_j} = 0), \\ i, j \in \{1, 2\}, i \neq j, \quad (10)$$

где нет зависимости от значения угла $2\gamma \neq n\pi$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) между осями подвеса пар ГД. Отсюда следует принципиальная важность синтеза закона настройки схемы гироскопического комплекса в «каноническом» варианте, когда углы $\gamma_1^g = \pi/2$, $\gamma_2^g = 0$ (т. е. $2\gamma = \pi/2$). Анализ соотношения (10) приводит к следующему описанию всех естественных множеств сингулярных состояний:

- $[C_{\delta_i} = 0] \Rightarrow \delta_i = \pm\pi/2$, $i = 1, 2$: обе пары ГД находятся во *внутреннем* сингулярном состоянии, при этом вектор нормированного кинетического момента $\mathbf{h} = 0$ (рис. 2);
- $[(C_{\delta_i} = 0) \& (S_{\alpha_i} = 0)] \Rightarrow \alpha_i = 0 \vee (\pm\pi)$; $\delta_i = \pm\pi/2$, ($i = 1$) \vee ($i = 2$): одна из пар ГД находится во *внутреннем* сингулярном состоянии и *одновременно* векторы \mathbf{h} ее гиродинов направлены перпендикулярно оси х гироскопического базиса, при этом вектор \mathbf{h} формируется только другой парой ГД и принадлежит соответствующему кругу радиуса 2, см. рис. 2, а;
- $[(C_{\delta_i} = 0) \& (S_{\delta_j} = 0)] \Rightarrow \delta_i = \pm\pi/2$, $\delta_j = 0$, $i, j \in \{1, 2\}$, $i \neq j$: одна из пар ГД находится во *внутреннем* сингулярном состоянии, а другая — во *внешнем* сингулярном состоянии, при этом конец вектора \mathbf{h} принадлежит *окружности* радиуса 2, см. рис. 2, а;
- $[(S_{\delta_i} = 0)] \Rightarrow \delta_i = 0$, $i = 1, 2$: обе пары ГД находятся во *внешнем* сингулярном состоянии, при этом конец вектора \mathbf{h} принадлежит *трехмерной* двояковыпуклой поверхности $\mathbf{S}^* = \{\mathbf{h}(x, y, z): \varphi(x, y, z) \equiv x^2 + y^2 + z^2 \mp 2q_y q_z - 8 = 0, q_s \equiv \sqrt{4 - s^2}, |s| \leq 2, s = y, z\}$, где верхний знак соответствует оболочке S области вариации S кинетического момента силового гироскопического комплекса (см. рис. 1).

Экстремальные значения определителя Δ_G достигаются в таких конфигурациях:

локальный максимум $\max \Delta_G = 2S_{2\gamma}^2 \Rightarrow \alpha_i, \alpha_j = \pm\pi/2$; $\delta_p, \delta_j = \pm\pi/4$, $i, j \in \{1, 2\}$, $i \neq j$, в четырех точках ($x = 0$; $y = \pm\sqrt{2}$; $z = \pm\sqrt{2}$) внутри области вариации S;

глобальный максимум $\max \max \Delta_G = (64/27)S_{2\gamma}^2 \Rightarrow \alpha_i, \alpha_j = \{0, \pm\pi\}$; $\delta_p, \delta_j = \{\pm\delta_p, \pi \pm \delta_p\}$, $i, j \in \{1, 2\}$, $i \neq j$, где

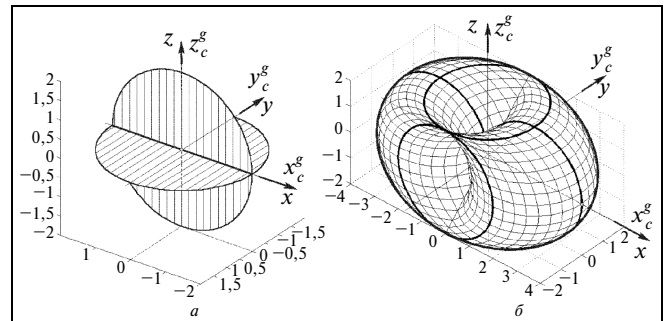


Рис. 2. Естественные сингулярные состояния схемы гироскопического комплекса для канонического варианта: а — плоские поверхности; б — криволинейные поверхности

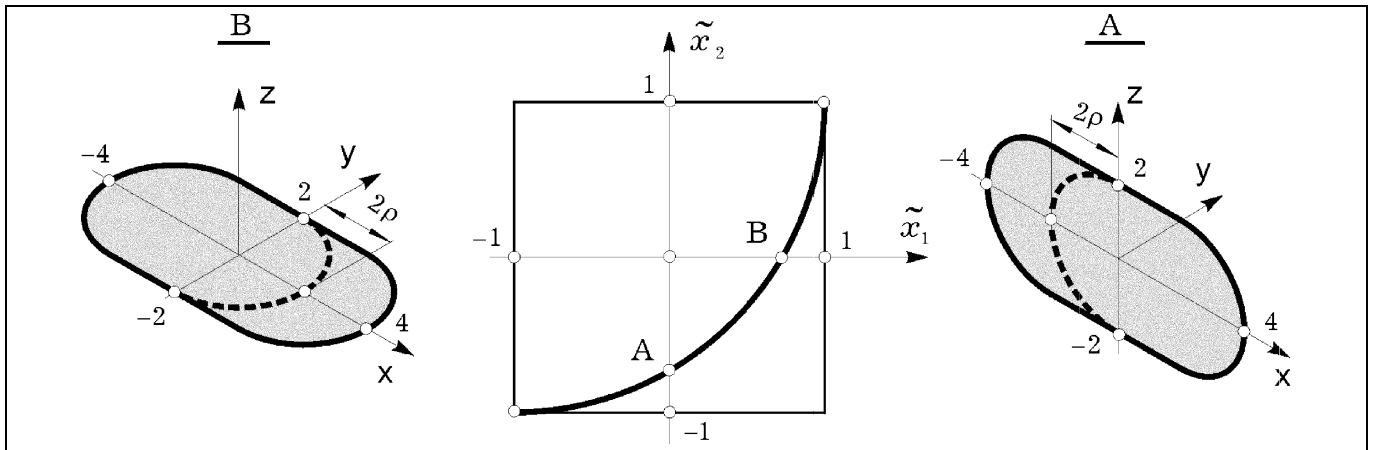


Рис. 3. Сингулярные множества силового гиросилового комплекса при законе настройки (3) — половины эллипсов

$\delta_\rho = \arccos(\sqrt{2/3}) = 35^\circ 25'$, достигается в трех точках ($x = \{0, \pm 4\sqrt{2/3}\}$; $y = 0$; $z = 0$).

При произвольных углах установки осей подвеса пар ГД оболочка области \mathbf{S} вариации кинетического момента и множества сингулярных состояний имеют подобный вид (см. рис. 1).

Самая принципиальная проблема управления силовым гиросиловым комплексом с избыточной структурой заключается в выборе функции распределения потребного суммарного вектора кинетического момента между ГД — синтезе закона настройки гиросилового комплекса. Наиболее рациональными являются явные законы настройки, которые позволяют получить все характеристики движения каждого ГД по явным аналитическим соотношениям.

Введем функцию распределения вектора суммарного кинетического момента силового гиросилового комплекса между парами ГД

$$f_\rho(\beta) \equiv \tilde{x}_1 - \tilde{x}_2 + \rho(\tilde{x}_1 \tilde{x}_2 - 1); \quad (11)$$

$$\tilde{x}_1 \equiv x_{12}/q_y; \quad \tilde{x}_2 \equiv x_{34}/q_z$$

с фиксированным параметром ρ , $0 < \rho < 1$. При условии $f_\rho(\beta) = 0$ внутри области \mathbf{S} остаются сингулярными только два одномерных множества

$$\mathbf{S}_y = \{(x/(2\rho))^2 + (z/2)^2 = 1, x < 0; y = 0, |y_1| = |y_2| = 0\};$$

$$\mathbf{S}_z = \{(x/(2\rho))^2 + (y/2)^2 = 1, x > 0; z = 0, |z_3| = |z_4| = 0\}, \quad (12)$$

(рис. 3) с двумя точками $A(0, -\rho)$ и $B(\rho, 0)$ в плоскости переменных $\{\tilde{x}_1, \tilde{x}_2\}$.

Применяемый закон настройки силового гиросилового комплекса имеет вид

$$D^+ f_\rho(\beta) = \Phi_\rho(f_\rho(\beta), \mathbf{h}(\beta)) \equiv$$

$$\equiv \begin{cases} -\text{Sat}(\phi_\rho, \mu_\rho f_\rho(\beta)), & \mathbf{h}(\beta) \in \mathbf{S}/\mathbf{Q}_{yz} \\ \phi_\rho \text{Relh}(a_s, l_\rho, r_s), & \mathbf{h}(\beta) \in \mathbf{Q}_s, \quad s = y, z. \end{cases} \quad (13)$$

Здесь D^+ — символ правой производной по времени, ϕ_ρ , μ_ρ и l_ρ — положительные параметры, множество

$\mathbf{S}_{yz} \equiv \mathbf{S}_y \cup \mathbf{S}_z$, зависимости $r_y = M_\pi(\beta_1 - \beta_2 - \pi)$ и $r_z = M_\pi(\beta_3 - \beta_4 - \pi)$, где при стандартной функции насыщения $\text{Sat}(a, x)$ используются нелинейные функции

$$\text{Relh}(a, l_\rho, x) \equiv \begin{cases} 1, & x > -l_\rho \\ -1, & x < l_\rho \end{cases}$$

$$\text{Relh}(a_s, l_\rho, r_s(\beta_0)) = a_s \in \{-1; 1\};$$

$$M_\pi(\alpha) \equiv \begin{cases} \alpha, & |\alpha| \leq \pi \\ \alpha - 2\pi \text{sign}(\alpha), & |\alpha| > \pi. \end{cases}$$

При законе настройки (13) обеспечивается принадлежность конца нормированного вектора $\mathbf{h}(\beta)$ кинетического момента множеству $\mathbf{Q}_{yz}(\beta)$ внутренних сингулярных состояний только в отдельные моменты времени (меры нуль по Лебегу) и биективная связь вектора $\mathbf{m}^g(\beta)$ (9) с векторами-столбцами β и $\mathbf{u}^g = \dot{\beta}$. Анализ выражений (12) приводит к результату: в косоугольном гиросиловом базисе $\mathbf{E}^g(x, y, z)$ для любых значений нормированного вектора $\mathbf{h} = \{x, y, z\}$, принадлежащего сфере $\mathbf{S}_\rho^g \equiv \{\mathbf{x}^2 + \mathbf{y}^2 + \mathbf{z}^2 \leq (r_\rho^g)^2\}$ радиуса $r_\rho^g < 2\rho$, отсутствуют сингулярные состояния гиросилового комплекса. В каноническом базисе $\mathbf{E}_c^g(x_c^g, y_c^g, z_c^g)$ сфере \mathbf{S}_ρ^g соответствует эллипсоид

$$\mathbf{S}_\rho^c = \{x_c^g, y_c^g, z_c^g: (x_c^g)^2 + \frac{(y_c^g)^2}{2S_\gamma^2} + \frac{(z_c^g)^2}{2C_\gamma^2} \leq (r_\rho^g)^2\}.$$

3. АНАЛИТИЧЕСКИЙ РАСЧЕТ ПРОГРАММНОГО ГИРОСИЛОВОГО УПРАВЛЕНИЯ

При заданном в каноническом базисе векторе кинетического момента $\mathbf{h}^c \in \mathbf{S}_\rho^c$ и при выполнении условия $f_\rho(\beta) \equiv 0$ для функции распределения $f_\rho(\beta)$ (11) положение каждого ГД однозначно определяется по явным соотношениям. Вектор-столбец $\mathbf{h} = \{x, y, z\} = \mathbf{A}_\gamma^{-1} \mathbf{h}^c$

также известен, а разность $\Delta = x_{12} - x_{34} = d\{1 - \sqrt{1 - 4\rho[(q_y - q_z)(x/2) + \rho(q_y q_z - (x/2)^2)]/d^2}\}/\rho$, где $d \equiv q_y + q_z$. Отсюда при введении функций $a_y = (x + \Delta)/2$; $b_y = y$; $a_z = (x - \Delta)/2$; $b_z = -z$; $r_s \equiv \sqrt{a_s^2 + b_s^2}$ и $x_s = \sqrt{(2 - r_s)(2 + r_s)}/r_s$, $s = y, z$ получаются проекции вектора кинетического момента каждого ГД первой пары $x_{1,2} = a_y \mp b_y x_y/2$; $y_{1,2} = b_y \pm a_y x_y/2$ и аналогично для второй пары ГД. При введении обозначений

$$s_{1,2}^0 = \sin(\beta_1 - \beta_2) \equiv y_1 x_2 - y_2 x_1;$$

$$s_{3,4}^0 = \sin(\beta_3 - \beta_4) \equiv z_3 x_4 - y_4 x_3;$$

$$r_{yx} = x_{12} y p_{zx} q_y^2; \quad r_{zx} = x_{34} z p_{yx} q_z^2;$$

$$p_s = d_s/d_{yz}, \quad s = yx, zx,$$

$$D(\beta) = \begin{bmatrix} -x_2 p_{yx}/s_1^0 & -(y_2 - x_2 r_{yx})/s_1^0 & -x_2 r_{zx}/s_1^0 \\ x_1 p_{yx}/s_2^0 & (y_1 - x_1 r_{yx})/s_2^0 & x_1 r_{zx}/s_2^0 \\ -x_4 p_{zx}/s_3^0 & -x_4 r_{yx}/s_3^0 & (z_4 + x_4 r_{zx})/s_3^0 \\ x_3 p_{zx}/s_4^0 & x_3 r_{yx}/s_4^0 & -(z_3 + x_3 r_{zx})/s_4^0 \end{bmatrix},$$

где $d_{yx} = q_y - \rho x_{12}$; $d_{zx} = q_z - \rho x_{34}$ и $d_{yz} = d_{yx} + d_{zx}$, вектор программного управления силовым гироскопическим комплексом $u^g = \dot{\beta}$ вычисляется по формуле $u^g = \dot{\beta} = -D(\beta)A_y^{-1}m^g$. При аналитическом задании программы движения корпуса КРМ (функций $\Lambda(t)$, $\omega(t)$, $\varepsilon(t)$, $\dot{\varepsilon}(t)$) и выполнении тождества $f_p(\beta) \equiv 0$ в силу наличия векторного интеграла суммарного кинетического момента механической системы «КРМ + гиросиловой комплекс» векторы-столбцы углов $\beta(t)$, угловых скоростей $\dot{\beta}(t)$, а также и ускорений $\ddot{\beta}(t)$, всех четырех ГД определяются по явным соотношениям, полученным в работах [7–10].

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предложен метод аналитического синтеза программного углового движения КРМ при выполнении им поворотного маневра с краевыми условиями общего вида. В процессе такого «профилированного» поворотного маневра естественным способом достигается слабое возбуждение упругих колебаний транспортируемого с помощью КРМ нежесткого груза благодаря обеспечению

достаточной «гладкости» аналитически рассчитанного гиросилового управления. При кинетическом моменте $h^c(t) \in S_p^c$ гарантируется отсутствие сингулярных состояний силового гироскопического комплекса, расчет потребных максимальных по модулю значений скорости и ускорения каждого ГД выполняется по явным аналитическим соотношениям.

В дальнейшем представляется целесообразным оценить влияние характеристик транспортируемого упругого груза на выбор коэффициентов программного управления силовым гироскопическим комплексом $u^g = \dot{\beta}$ с позиций обеспечения требуемого качества реализации поворотных маневров КРМ.

ЛИТЕРАТУРА

1. Рутковский В. Ю., Суханов В. М. Большие космические конструкции: модели, методы исследования и принципы управления. I, II // Автоматика и телемеханика. — 1996. — № 7. — С. 52–65; № 8. — С. 55–66.
2. Putz P. Space Robotics. — Amsterdam: Kluwer Academic Publishers, 1999. — P. 547–596.
3. Yoshida K., Umetani Y. Control of space free-flying robot // Proc. of 29th IEEE Conference on Decision and Control, 1990. — P. 97–102.
4. Раушенбах Б. В., Токарь Е. Н. Управление ориентацией космических аппаратов. — М.: Наука, 1974.
5. Иванов Н. М., Лысенко Л. Н. Баллистика и навигация космических аппаратов. — М.: Дрофа, 2004.
6. Сомов Е. И., Бутырин С. А. Аналитический синтез программного движения космических аппаратов наблюдения // Изв. Самарского науч. центра РАН. — 2004. — № 1. — С. 168–179.
7. Управление силовыми гироскопическими комплексами космических аппаратов / Е. И. Сомов, С. А. Бутырин, А. В. Сорокин, В. Н. Платонов // Труды X С.-Петербургской Междунар. конф. по интегрированным навигационным системам. — СПб.: ЦНИИ «Электроприбор», 2003. — С. 278–294.
8. Somov Ye. I. Nonlinear spacecraft gyromoment attitude control // Proc. of 1st Intern. conf. on Nonlinear Problems in Aviation and Aerospace. — Daytona Beach: ERAU, USA, 1997. — P. 625–630.
9. Сомов Е. И., Герасин И. А. Оценка реализуемости поворотного маневра космического аппарата, управляемого избыточной системой гироскопов // Управление движением и навигация летательных аппаратов. — Самара: ПФ Российской академии космонавтики им. К. Э. Циолковского, 1998. — С. 138–143.
10. Ultra-precision attitude control of a large low-orbital space telescope / Ye. I. Somov, S. A. Butyrin, V. M. Matrosov, G. P. Anshakov et al. // Control Eng. Practice. — 1999. — Vol. 7, N 7. — P. 1127–1142.

☎ (846) 242-38-82;

e-mail: e_somov@mail.ru

□



Уважаемые читатели!

Если вы не успели или забыли подписаться на журнал "Проблемы управления", то через Редакцию Вы можете оформить льготную подписку в любое время и с любого номера (дешевле, чем через каталоги агентств) или приобрести номера журнала за прошедшие годы.

Можно также заказать электронные версии как необходимого вам номера журнала, так и отдельных статей.

Обратитесь в редакцию по тел. (495) 330-42-66 или пришлите заказ по адресу (datchik@ipu.ru) — и подписка будет оформлена за один день. Расходы по посылке журнала редакция берет на себя. Не забудьте указать свой полный почтовый адрес!

Наш адрес: 117997, Москва, В-342, ГСП-7, Профсоюзная ул., 65, ИПУ РАН, оф. 104.