УДК 519

ОПТИМАЛЬНОСТЬ ДРЕВОВИДНОЙ ИЕРАРХИИ УПРАВЛЕНИЯ СИММЕТРИЧНОЙ ПРОИЗВОДСТВЕННОЙ ЛИНИЕЙ

С. П. Мишин

Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова РАН, г. Москва

Рассмотрена модель многоуровневой иерархической структуры, управляющей «производственной линией» (последовательным бизнес-процессом с одинаковой интенсивностью взаимодействия исполнителей). Затраты менеджера определены степенной функцией, зависящей от интенсивности управляемого менеджером подпроцесса. Доказано, что оптимальной будет древовидная иерархия, задача поиска которой сведена к задаче условной оптимизации. Для выпуклой функции затрат оптимальное дерево найдено в явном виде.

ВВЕДЕНИЕ

Любая экономическая система состоит из множества организованных некоторым образом сотрудников. Благодаря организации сотрудники действуют на основе определенных процедур и правил (механизмов), что позволяет достичь цели системы [1].

Сотрудники организации специализированы, что повышает их эффективность по сравнению с множеством одиночных (неорганизованных) агентов. Однако взаимодействие сотрудников различной специализации должно быть скоординировано для достижения общей цели системы. Это фундаментальная проблема любой организации, поскольку координация требует усилий, направленных на планирование совместной работы, контроль результатов, согласование целей сотрудников и др. Для реализации управленческих функций в организации создается иерархия[1] [2].

Один из ключевых факторов эффективности экономической системы — оптимальность иерархии, выполняющей управленческие функции с минимальными затратами. Для небольшой системы оптимальной может быть двухуровневая иерархия, в которой на первом (нижнем) уровне находятся рядовые исполнители, а на втором — единственный менеджер. Однако при росте системы один менеджер уже не способен управлять всеми взаимодействиями исполнителей, и необходимо нанять нескольких менеджеров на второй уровень иерархии, возложив на каждого из них ответственность за управление взаимодействиями внутри подчиненной группы исполнителей. Взаимодействие между группами, которые подчинены менеджерам второго уровня, порождает взаимодействие между менеджерами. Этим взаимодействием также необходимо управлять с помощью менеджеров третьего уровня и т. д. Подобным образом возникает многоуровневая иерархия с единственным менеджером на высшем уровне. Вышестоящий менеджер (начальник) в иерархии уполномочен управлять подчиненными сотрудниками (менеджерами или исполнителями), а подчиненные обеспечивают начальников информацией и выполняют их распоряжения [3].

Задача об оптимальной иерархии весьма сложна для математического исследования. По этой причине на данный момент имеется небольшое число работ по данной тематике. Среди «классических» можно отметить работы [4, 5], в которых проблема освещается достаточно общо, однако модель оптимальной иерархии в общем виде не формализована. В ряде более поздних работ (см., например, книгу [6]) исследуются строгие математические постановки указанной задачи, при этом налагается ряд весьма жестких ограничений (как правило, рассматриваются только древовидные иерархии с подчинением только между соседними уровнями и затратами, зависящими только от числа непосредственных подчиненных). В ряде недавних работ рассматривается более общая постановка, которая, несмотря на свою сложность, допускает математическое исследование [7—12]. Далее будет использоваться аппарат и результаты указанных работ.

[1] Сотрудники на более высоких уровнях иерархии обладают бóльшими правами, чем сотрудники нижних уровней. Это позволяет системе достичь цели даже в случае конфликтов между сотрудниками.

Рассматриваемая в настоящей работе модель иерархии управления основана на заданном технологическом взаимодействии исполнителей[2]. Интенсивность взаимодействия определяется *технологической сетью*, связи которой соответствуют *потокам* (материальным, информационным и т. п.) между исполнителями. Одним из примеров технологической сети является *производственная линия*, в которой первый исполнитель обеспечивает поставку сырья, второй и последующие производят ряд технологических операций, последний отгружает продукцию потребителю. В *симметричной производственной линии* интенсивность всех потоков одинакова; т. е. рассматривается «цепочка» исполнителей — «производственная линия» с одинаковой интенсивностью взаимодействия между соседними исполнителями. Затраты менеджера определяются монотонной функцией, зависящей от интенсивности управляемого менеджером подпроцесса (участка производственной линии). Данная функция затрат является частным случаем рассматриваемой в работах [9, 12] *секционной* функции. Для этого случая настоящая статья исчерпывающим образом решает задачу об оптимальной иерархии управления.

1. ИСПОЛНИТЕЛИ И МЕНЕДЖЕРЫ, ВИДЫ ИЕРАРХИЙ

Пусть $N = \{w_1, ..., w_n\}$ — множество *исполнителей*, которые могут взаимодействовать друг с другом. Через w_{env} будем обозначать *внешнюю среду*, взаимодействующую с исполнителями. Иногда исполнители обозначаются w, w', $w'' \in N$. *Функцией потока* назовем следующую функцию:

$$f: (N \cup \{w_{env}\}) \times (N \cup \{w_{env}\}) \to R_+^p,$$

где для каждой пары исполнителей w', $w'' \in N$ вектор $f(w', w'')$ определяет *интенсивность потоков* между w' и w''. Этот вектор содержит p неотрицательных компонент. Каждая компонента определяет интенсивность одного типа взаимодействия исполнителей (материальный, информационный или прочий тип потока). Таким образом, технология взаимодействия исполнителей определяет функцию потока f или взвешенную *технологическую сеть* f[3]. Вектор $f(w_{env}, w)$ соответствует интенсивности потоков между исполнителем w и внешней средой. Потоки между исполнителями назовем *потоками внутри технологической сети*. Будем говорить, что между w' и w'' отсутствует *связь* тогда и только тогда, когда поток между исполнителями нулевой.

Рассмотрим пример. Пусть $N = \{w_1, w_2, w_3\}$ и $p = 1$, т. е. имеются трое исполнителей и потоки одного типа. Будем считать, что в технологической сети имеются четыре связи $f(w_{env}, w_1) = \lambda$, $f(w_1, w_1) = \lambda$, $f(w_2, w_3) = \lambda$, $f(w_3, w_{env}) = \lambda$, где λ — вектор интенсивности потоков. Эта технологическая сеть изображена на рис. 1. На рисунке не показана внешняя среда. Поэтому связи, соединяющие исполнителей w_1 и w_3 с внешней средой, имеют «висячий» конец. Данный пример может соответствовать производственной линии («бизнес-процессу»). Исполнитель w_1 принимает сырье от поставщика и передает результат исполнителю w_2. Тот выполняет очередную технологическую операцию и передает результат далее. Последний исполнитель (в примере w_3), выполнив последнюю технологическую операцию, отгружает продукцию потребителю.

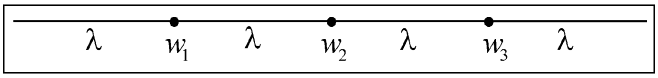

Рис. 1. Симметричная производственная линия

Сеть с исполнителями $N = \{w_1, ..., w_n\}$ и потоками $f(w_{env}, w_1) = \lambda$, $f(w_{i-1}, w_i) = \lambda$ для всех $2 \leqslant i \leqslant n$, $f(w_n, w_{env}) = \lambda$ будем ниже называть *симметричной производственной* линией[4], а λ — *интенсивностью линии*. В *несимметричной производственной линии* возможны потоки различной интенсивности. Изменение интенсивности может быть вызвано особенностями взаимодействия между исполнителями на различных этапах производства.

Обозначим через M конечное множество *менеджеров*, управляющих взаимодействием исполнителей. Менеджеры обычно будут обозначаться через m, m', m'', m_1, m_2, ... $\in M$. Пусть $V = N \cup M$ — все множество *сотрудников* организации (исполнителей и менеджеров). Рассмотрим множество *ребер подчиненности* $E \subseteq V \times M$. Ребро $(v, m) \in E$ означает, что сотрудник $v \in E$ является *непосредственным подчиненным* менеджера $m \in M$, а m — *непосредственным начальником* сотрудника v, т. е., ребро направлено от непосредственного подчиненного к его непосредственному начальнику. Сотрудник $v \in V$ является *подчиненным* менеджера $m \in M$ (менеджер m является *начальником* сотрудника v), если существует цепочка ребер подчиненности из v в m. Будем также говорить, что начальник *управляет* подчиненным, или подчиненный *управляется* начальником. Теперь можно дать строгое определение иерархии.

Определение 1. Ориентированный граф $H = (N \cup M, E)$ с множеством менеджеров M и множеством ребер $E \subseteq (N \cup M) \times M$ назовем иерархией, управляющей множеством исполнителей N, если граф H ацикличен, любой менеджер имеет подчиненных и найдется менеджер, которому подчинены все исполнители. Через $\Omega(N)$ обозначим множество всех иерархий. ♦

Ацикличность означает, что не существует «порочного круга» подчиненности, в котором каждый менеджер подчинен всем остальным. Определение также исключает ситуации, в которых имеются «менеджеры» без подчиненных. Существование менеджера, которому подчинены все исполнители, означает, что у любого

---

[2] Подобная модель представляется интересной, поскольку оптимальная иерархия во многом определяется именно взаимодействием исполнителей (см., например, работу [13]).

[3] В работе технологическая сеть считается *неориентированной*, поскольку в рассматриваемой модели направление потока не играет роли. Также предполагаем, что сеть не содержит петель.

[4] Все остальные потоки подразумеваются равными нулю.

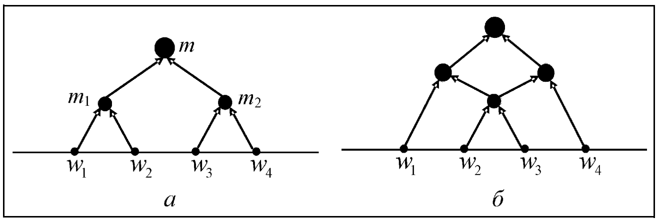

Рис. 2. Примеры иерархий над производственной линией: «классический» вид (*а*) и с множественным подчинением (*б*)

множества исполнителей найдется общий начальник, т. е. иерархия способна управлять взаимодействием всех исполнителей.

На рис. 2 приведены примеры двух иерархий, надстроенных над производственной линией из четырех исполнителей. Как видно из рис. 2, *а*, иерархия имеет «классический» вид — у каждого сотрудника ровно один непосредственный начальник (за исключением начальника верхнего уровня). В иерархии (см. рис. 2, *б*) присутствует множественное подчинение, кроме того некоторым начальникам непосредственно подчинены и менеджеры, и исполнители.

Группой исполнителей $s \subseteq N$ назовем любое непустое подмножество множества исполнителей. По определению 1 в любой иерархии H каждый менеджер имеет, по крайней мере, одного непосредственного подчиненного. Начав с любого менеджера m, мы можем двигаться по иерархии «сверху вниз» к подчиненным менеджера m. В итоге можно определить множество исполнителей, подчиненных менеджеру m. Будем называть это множество *подчиненной группой исполнителей* и обозначать $s_H(m) \subseteq N$. Будем также говорить, что менеджер *m управляет группой исполнителей* $s_H(m)$. В силу ацикличности каждому менеджеру подчинен хотя бы один исполнитель. Поэтому каждый менеджер управляет непустой группой исполнителей. Далее в обозначении группы $s_H(m)$ будем опускать нижний индекс, если ясно, о какой иерархии идет речь. Для удобства дальнейшего изложения будем считать, что в любой иерархии $H \in \Omega(N)$ любому исполнителю $w \in N$ «подчинена» простейшая группа $s_H(w) = \{w\}$, состоящая из самого исполнителя.

Очевидно, что для любой иерархии H и любого менеджера $m \in M$ выполнено $s_H(m) = s_H(v_1) \cup ... \cup s_H(v_k)$, где $v_1, ..., v_k$ — все непосредственные подчиненные менеджера m. Для любого подчиненного v менеджера m выполнено $s_H(v) \cup s_H(m)$. Например, на рис. 2, *а* менеджеру m непосредственно подчинены менеджеры m_1 и m_2. Менеджеру m подчинена группа $s(m) = \{w_1, w_2, w_3, w_4\}$. Менеджерам m_1 и m_2 подчинены группы $s(m_1) = \{w_1, w_2\}$ и $s(m_2) = \{w_3, w_4\}$ соответственно. Таким образом, группа $s(m)$ разбивается на две подгруппы $s(m_1)$ и $s(m_2)$: $\{w_1, w_2, w_3, w_4\} = \{w_1, w_2\} \cup \{w_3, w_4\}$. В данном примере подгруппы не пересекаются. В общем случае, как показано на рис. 2, *б*, пересечения могут иметь место.

Определение 2. Иерархию назовем деревом, если в ней только один менеджер m не имеет начальников, а все остальные сотрудники имеют ровно одного непосредственного начальника. Менеджера m будем называть корнем дерева. ♦

На рис. 2, *а* изображен пример дерева. Напротив, иерархия на рис. 2, *б* деревом не является, так как в ней один менеджер имеет двух непосредственных начальников. Легко показать, что в дереве непосредственные подчиненные любого менеджера управляют непересекающимися группами исполнителей (не «дублируют» обязанности друг друга [12]).

Определение 3. Иерархию назовем r-иерархией, если у каждого ее менеджера не более r непосредственных подчиненных, где $r > 1$ — целое число; r-иерархию, которая является деревом, назовем r-деревом. ♦

В литературе по менеджменту часто используется термин *норма управляемости* — максимальное число непосредственных подчиненных, которыми может управлять один менеджер. Определение r-иерархии соответствует норме управляемости, равной r. Максимальную среди всех деревьев норму управляемости имеет *двухуровневая иерархия*, в которой одному менеджеру непосредственно подчинены все исполнители.

2. ФУНКЦИЯ ЗАТРАТ МЕНЕДЖЕРА И ОПТИМАЛЬНАЯ ИЕРАРХИЯ

Чтобы исполнители взаимодействовали друг с другом в соответствии с технологической сетью необходимо управление их взаимодействием. Каждый менеджер управляет потоками между подчиненными исполнителями. Одна из интерпретаций работы менеджера — управление реализацией планов. Топ-менеджеры формулируют оперативный план, который необходимо реализовать. План может включать в себя дневной или недельный объем продаж и закупок — потоки между исполнителями и внешней средой. В процессе уточнения плана менеджеры на каждом уровне детализируют те его части, за которые они ответственны. Например, для обеспечения объема продаж, запланированного топ-менеджером, директор по производству может планировать соответствующие производственные потоки. После уточнения на всех уровнях детализированный план реализуется исполнителями. При этом каждый менеджер отслеживает реализацию своих планов. Приведем пример. Предположим, что в иерархии, изображенной на рис. 2, *а*, в результате конфликта между исполнителями w_2 и w_3 фактический поток между ними меньше необходимого значения потока $f(w_2, w_3)$. Исполнитель w_2 сообщает своему непосредственному начальнику m_1, что у него возникли проблемы. Менеджер m_1 не в состоянии разрешить конфликт, так как исполнитель w_3 ему не подчинен. Аналогично, менеджер m_2 не в состоянии самостоятельно справиться с конфликтом, о котором ему сообщил исполнитель w_3. В итоге менеджеры m_1 и m_2 сообщат о конфликте своему непосредственному начальнику m, который и примет решение, ликвидирующее конфликт. Это решение менеджеры m_1 и m_2 передадут соответственно исполнителям w_2 и w_3. Аналогично можно рассмотреть планирование потока $f(w_2, w_3)$. Менеджер m передает план потока $f(w_2, w_3)$ менеджерам m_1 и m_2, которые доводят план до исполнителей w_2 и w_3, соответственно. Факт выполнения плана доводится до менеджера m в обратном порядке.

В управлении потоком $f(w_2, w_3)$ задействованы менеджеры m_1, m_2 и m. В управлении потоком $f(w_1, w_2)$ задействован только менеджер m_1, так как он самостоятельно принимает все решения, связанные с потоком $f(w_1, w_2)$. Аналогично, в управлении потоком $f(w_3, w_4)$ задействован только менеджер m_2. В управлении внешним потоком $f(w_{env}, w_1)$ участвуют менеджеры m_1 и m. Например, план закупок определяется менеджером m, уточняется менеджером m_1 и передается исполнителю w_1. Аналогично, в управлении внешним потоком $f(w_4, w_{env})$ участвуют менеджеры m_2 и m. Введем формальное определение обязанностей менеджера.

Определение 4. В иерархии H менеджер m выполняет обязанности двух типов:

1) управляет потоками $f(w', w'')$ между подчиненными исполнителями $w', w'' \cup s_H(m)$, которые не управляются ни одним подчиненным менеджера m; сумму таких потоков назовем внутренним потоком менеджера m и обозначим $F_H^{int}(m)$;

2) участвует в управлении потоками $f(w', w'')$ между подчиненным исполнителем $w' \in s_H(m)$ и неподчиненным исполнителем $w'' \in N \backslash s_H(m)$ или внешней средой $w'' = w_{env}$; сумму таких потоков назовем внешним потоком менеджера m и обозначим $F_H^{ext}(m)$. ♦

Таким образом, менеджер управляет внутренним потоком и участвует в управлении внешним. *Потоком менеджера* назовем сумму его внутренних и внешних потоков. Из определения следует, что внешний и внутренний потоки менеджера m равны:

$$F_H^{ext}(m) = \sum_{\substack{w' \in s_H(m), \\ w'' \in (N \backslash s_H(m)) \cup \{w_{env}\}}} f(w', w''),$$

$$F_H^{int}(m) = \sum_{\substack{(w', w'') \subseteq s_H(m), \\ (w', w'') \not\subset s_H(v_j) \text{ для всех } 1 \le j \le k}} f(w', w''). \quad (1)$$

При подсчете внутреннего потока необходимо суммировать потоки внутри группы $s_H(m)$, которые не управляются непосредственными подчиненными. При заданных N и f внутренний и внешний поток менеджера m зависит только от $s_H(v_1), ..., s_H(v_k)$, т. е. от групп исполнителей, которыми управляют непосредственные подчиненные менеджера m.

Определение 5. Затратами менеджера $m \in M$ в иерархии $H \in \Omega(N)$ назовем величину

$$c(s_H(v_1), ..., s_H(v_k)) = \varphi(F_H^{int}(m) + F_H^{ext}(m)), \quad (2)$$

где $v_1, ..., v_k$ — все непосредственные подчиненные менеджера m, $s_H(v_1), ..., s_H(v_k)$ — управляемые ими группы, φ: $R_+^p \to R_+$ — монотонно неубывающая по всем переменным функция, ставящая в соответствие вектору $F_H^{int}(m) + F_H^{ext}(m)$ потока неотрицательное действительное число. ♦

Затраты менеджера определяются функцией $\varphi(\cdot)$, зависящей от потоков менеджера. Неубывание функции $\varphi(\cdot)$ означает, что при увеличении одной или нескольких компонент потока, т. е. при увеличении «объема» управленческой работы, затраты на управление не могут снизиться.

Определение 6. Затратами иерархии $H = (N \cup M, E) \in \Omega(N)$ назовем сумму затрат всех ее менеджеров

$$c(H) = \sum_{m \in M} c(s_H(v_1), ..., s_H(v_k)) = $$
$$= \sum_{m \in M} \varphi(F_H^{int}(m) + F_H^{ext}(m)),$$

где $v_1, ..., v_k$ — все непосредственные подчиненные менеджера m. Оптимальной иерархией назовем иерархию H^*, затраты которой минимальны: $H^* \in \operatorname{Arg}\min_{H \in \Omega} c(H)$. ♦

Оптимальных иерархий может быть несколько. Далее мы будем решать задачу поиска одной из оптимальных иерархий. При этом множество исполнителей N предполагается известным. Необходимо найти иерархию (т. е. определить число менеджеров и их подчиненность) из $\Omega(N)$, минимизирующую затраты на управление исполнителями. Согласно формулам (1) функция затрат менеджера (2) зависит только от групп $s_H(v_1), ..., ..., s_H(v_k)$, управляемых непосредственными подчиненными $v_1, ..., v_k$. Функции такого вида названы в работе [12] секционными. В настоящей работе рассматривается частный случай секционной функции затрат.

3. ОПТИМАЛЬНАЯ ИЕРАРХИЯ УПРАВЛЕНИЯ СИММЕТРИЧНОЙ ПРОИЗВОДСТВЕННОЙ ЛИНИЕЙ

Рассмотрим задачу надстройки оптимальной иерархии над симметричной производственной линией (см. рис. 1), которая является простейшей сетью. Вдоль линии движется некоторый поток. Например, первый исполнитель получает сырье и передает полуфабрикат второму исполнителю. Аналогичным образом материальный поток движется далее вплоть до последнего исполнителя, который отгружает готовую продукцию. Сопутствующие информационные и прочие типы потоков также можно учитывать, рассматривая многокомпонентный поток ($p > 1$). Симметричная производственная линия накладывает на технологическую сеть два важных ограничения:

- потоки обрабатываются последовательно — каждый исполнитель взаимодействует только с предыдущим и со следующим исполнителем в линии;
- значение потока между всеми исполнителями одинаково, т. е. интенсивность взаимодействия не меняется на протяжении всей линии.

Очевидно, что на практике эти ограничения могут нарушаться. Могут существовать различные технологические маршруты, некачественная продукция может возвращаться на доработку, интенсивность потоков может возрастать и снижаться (например, учесть заготовку одного типа в начале линии может быть гораздо проще, чем десятки различных деталей, образующихся в результате обработки). Однако в некоторых случаях технологическая сеть может быть близка к симметричной линии. Такой вид сети позволяет найти оптимальную

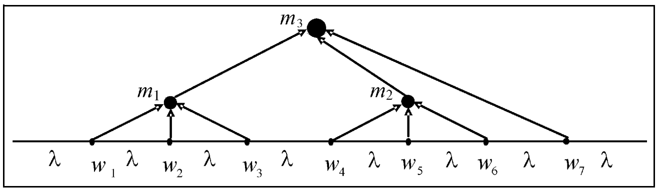

Рис. 3. Пример иерархии над симметричной производственной линией

иерархию. Если технологическая сеть значительно сложнее симметричной линии, то для поиска оптимальной иерархии могут быть применены общие методы, описанные в работе [12]. Далее считаем, что исполнители $N = \{w_1, ..., w_n\}$ связаны технологической сетью $f(w_{env}, w_1) = \lambda$, $f(w_{i-1}, w_i) = \lambda$ для всех $2 \leqslant i \leqslant n$, $f(w_n, w_{env}) = \lambda$.

Утверждение. *Существует оптимальное дерево H, управляющее симметричной производственной линией, и обладающее следующими свойствами*:

1) *в дереве H каждый менеджер управляет группой исполнителей, идущих в линии последовательно*;

2) *если функция затрат выпуклая, то у различных менеджеров дерева H число непосредственных подчиненных отличается не более чем на единицу.* ♦

Доказательство приведено в Приложении.

В соответствии с этим утверждением, при поиске оптимальной иерархии можно не рассматривать недревовидные иерархии, ограничиваясь классом деревьев. В то же время в работе [12] приведен пример, показывающий, что это утверждение не верно для несимметричной линии. В силу свойства 1 утверждения можно рассматривать только такие деревья, в которых каждому менеджеру подчинена группа из исполнителей, идущих подряд, и не рассматривать иерархии, в которых некоторому менеджеру подчинена, например, группа $\{w_1, w_2, w_4\}$. Если на рис. 3 менеджеру m_1 вместо исполнителя w_3 подчинить исполнителя w_4, а менеджеру m_2 вместо исполнителя w_4 подчинить исполнителя w_3, то получим следующие результаты.

- Затраты менеджеров m_1 и m_2 возрастут.
- Менеджер m_1 перестанет управлять потоком $f(w_2, w_3)$, а будет лишь участвовать в управлении[5]. Менеджер m_2 перестанет управлять потоком $f(w_4, w_5)$, а будет лишь участвовать в управлении. В результате поток, управляемый вышестоящим менеджером m_3, возрастет на $f(w_2, w_3) + f(w_4, w_5)$. Следовательно, возрастут затраты менеджера m_3.

Пример иллюстрирует результат утверждения — подчинение менеджеру группы исполнителей, которые идут в линии не подряд, увеличивает затраты всей иерархии. Содержательная интерпретация этого свойства очевидна. Каждый менеджер должен управлять одним *участком производственной линии* (последовательно идущими исполнителями). Попытка подчинить менеджеру несвязанные части производства увеличит затраты иерархии и приведет к неоптимальности.

[5] То есть этот поток станет для менеджера внешним.

Рассмотрим рис. 3. Менеджеру m_1 подчинена группа $\{w_1, w_2, w_3\}$ из трех исполнителей. В группу $\{w_1, w_2, w_3\}$ входит поток $f(w_{env}, w_1)$ из внешней среды и выходит поток $f(w_3, w_4)$. После назначения менеджера m_1 он с точки зрения затрат вышестоящих менеджеров ничем не отличается от исполнителя. Фактически, подчинив менеджеру m_1 трех исполнителей, мы «сократим» длину производственной линии на два, поскольку три исполнителя заменятся на одного менеджера. Менеджер m_2 снова «сократит» число звеньев производственной линии на два. При этом менеджеру m_2 можно было бы подчинить менеджера m_1 и двух исполнителей, что привело бы к тем же затратам. Однако подобное подчинение приведет к росту числа уровней иерархии, поэтому предпочтительнее вариант, изображенный на рис. 3.

Если в дереве H у менеджера m имеется k непосредственных подчиненных, то группа $s_H(m)$ разбивается на k подгрупп. Таким образом, некоторый участок производственной линии разбивается на k подучастков. Тогда менеджер m управляет $k - 1$ внутренними потоками и участвует в управлении двумя внешними потоками. Следовательно, если в дереве любой менеджер управляет исполнителями, идущими в линии подряд, то затраты менеджера с k непосредственными подчиненными определяются формулой:

$$\varphi((k + 1)\lambda). \qquad (3)$$

Подчинив менеджеру m_1 некоторое число r_1 исполнителей, мы фактически сократим число элементов производственной линии на $r_1 - 1$ (r_1 исполнителей заменятся на одного менеджера). Аналогично, можно назначить менеджера m_2, подчинив ему r_2 еще не подчиненных исполнителей или менеджеров, и т. д. В итоге должен остаться единственный неподчиненный менеджер m_q, (напомним, что q — общее число менеджеров), т. е. $n - (r_1 - 1) - (r_2 - 1) - ... - (r_q - 1) = 1$. Переписывая данное равенство, получим следующее ограничение на число непосредственных подчиненных всех менеджеров дерева:

$$r_1 + ... + r_q = n + q - 1. \qquad (4)$$

По формуле (3) затраты менеджеров равны $\varphi((r_1 + 1)\lambda), ..., \varphi((r_q + 1)\lambda)$. Для решения задачи об оптимальной иерархии осталось решить следующую задачу оптимизации:

$$\varphi((r_1 + 1)\lambda) + ... + \varphi((r_q + 1)\lambda) \to \min, \qquad (5)$$

при условиях (4), $r_1, ..., r_q \geqslant 2$, $1 \leqslant q \leqslant n - 1$.

Итак, для симметричной производственной линии задача об оптимальной иерархии сводится к задаче (5) условной оптимизации функции, зависящей от q целочисленных переменных (такую задачу необходимо решить при каждом q). Для решения задачи (5) можно применить классические методы дискретной оптимизации или предложенные в работе [9] алгоритмы поиска оптимальных деревьев для произвольной секционной функции.

В соответствии с утверждением для выпуклых функций задача (5) решается аналитически. В оптимальном дереве у различных менеджеров число непосредственных подчиненных отличается не более чем на единицу, т. е. величины $r_1, ..., r_q$ отличаются не более чем на единицу[6]. Пусть r — минимальное число непосредственных подчиненных менеджера. Тогда у любого менеджера либо r, либо $r + 1$ непосредственных подчиненных. Пусть $q_1 > 0$ — число менеджеров первого типа (с r непосредственными подчиненными). Тогда $q_2 = q - q_1$ — число менеджеров второго типа (с $r + 1$ непосредственными подчиненными). Левая часть выражения (4) имеет вид $q_1r + q_2(r + 1) = qr + q_2$, т. е. выполнено условие:

$$qr + q_2 = n + q - 1,\ r = \lfloor (n + q - 1)/q \rfloor^7. \qquad (6)$$

Если $n - 1$ делится на q нацело, то $q_2 = 0$, и у всех менеджеров одинаковое число $r = (n + q - 1)/q$ непосредственных подчиненных. Иначе согласно равенству (6) r — ближайшее снизу целое число, а q_2 — остаток от деления $n - 1$ на q.

В случае выпуклой функции при фиксированном q из формулы (6) определяются параметры r_1, ..., r_q и по формуле (5) вычисляются затраты дерева. Поэтому для решения задачи об оптимальной иерархии остается лишь найти оптимальное число менеджеров $1 \leqslant q \leqslant n - 1$. Это можно сделать с помощью сравнения $n - 1$ вариантов. Иначе говоря, для любой выпуклой функции можно найти оптимальную иерархию над симметричной производственной линией путем сравнения затрат $n - 1$ дерева. Вариант $q = 1$ соответствует двухуровневой иерархии с максимальным числом непосредственных подчиненных $r = n$. Вариант $q = n - 1$ соответствует двухуровневой иерархии с минимальным числом непосредственных подчиненных $r = 2$. Для многих выпуклых функций $\varphi(\cdot)$ задачу можно решить аналитически, не сравнивая численно затрат $n - 1$ дерева. Например, в работе [12] задача решена для важного частного случая — степенной функции затрат (для нее существует оптимальная норма управляемости, которая не зависит от n и λ).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Доказано, что при поиске оптимальной иерархии управления симметричной производственной линией можно не рассматривать недревовидные иерархии, ограничиваясь классом деревьев, в которых каждый менеджер управляет одним участком производственной линии, т. е. последовательно идущими исполнителями. Таким образом, задача значительно упрощается, поскольку для ее решения достаточно найти среди указанных деревьев наилучшее — дерево с минимальными затратами. Эта задача сведена к задаче условной оптимизации функции, зависящей от q целочисленных переменных. В случае выпуклой функции затрат число непосредственных подчиненных менеджеров отличается не более, чем на единицу. Для решения задачи об оптимальной иерархии достаточно найти оптимальное число менеджеров, сравнив затраты $n - 1$ деревьев, т. е. задача оптимизации становится тривиальной.

[6] Если значения отличаются на два и более, то в соответствии с доказательством утверждения одно можно уменьшить, а другое увеличить, без увеличения затрат дерева.

[7] Символ $\lfloor (n + q - 1) \rfloor$ обозначает нижнее целое — максимальное целое число, не превышающее $(n + q - 1)/q$.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство утверждения. Пусть $M = \{m_1, ..., m_q\}$ — множество менеджеров, которые управляют всеми потоками симметричной производственной линии с минимальными суммарными затратами. Обозначим через k_i число внутренних потоков, которыми управляет менеджер m_i, $1 \leqslant i \leqslant q$. Обозначим через l_i число внешних потоков, в управлении которыми участвует менеджер m_i. Тогда суммарный внутренний поток менеджера m_i равен $F^{int}(m_i) = \lambda k_i$, внешний поток равен $F^{ext}(m_i) = \lambda l_i$. Затраты менеджера m_i равны $\varphi((k_i + l_i)\lambda)$. Затраты всех менеджеров из M составят $\varphi((k_1 + l_1)\lambda) + ...$ $... + \varphi((k_q + l_q)\lambda)$.

Любой менеджер m_i участвует в управлении, по меньшей мере, двумя внешними потоками. Действительно, пусть $w_k \in N$ — исполнитель с наименьшим номером, подчиненный менеджеру m_i. Тогда поток $f(w_{k-1}, w_k)$ (или $f(w_{env}, w_1)$ при $k = 1$) будет внешним для менеджера m_i. Аналогично можно рассмотреть исполнителя с наибольшим номером, т. е. $l_i \geqslant 2$. Рассмотрим $n - 1$ потоков $f(w_{i-1}, w_i) = \lambda$ для всех $2 \leqslant i \leqslant n$. Каждый такой поток управляется одним из менеджеров m_1, ..., m_q. и будет внутренним, по крайней мере, для одного из менеджеров. Таким образом, выполнено неравенство $k_1 + ...$ $... + k_q \geqslant n - 1$. Кроме того, $k_i \leqslant n - 1$.

Построим дерево $H = (N \cup M', E')$ следующим образом. В начале менеджеров нет и каждый из n исполнителей должен быть непосредственно подчинен ровно одному менеджеру. Менеджеру m'_1 непосредственно подчиним $k_1 + 1$ исполнителей, идущих в цепи подряд, начиная с первого, т. е. $s_H(m'_1) = \{w_1, ..., w_{k_1+1}\}$. Менеджер m'_1 и каждый из исполнителей w_{k_1+2}, ..., w_n должны быть непосредственно подчинены ровно одному менеджеру. После первого шага остались неподчиненными $n - k_1$ сотрудников. Менеджеру m'_2 непосредственно подчиним менеджера m'_1 и k_2 исполнителей w_{k_1+2}, ..., $w_{k_1+k_2+1}$. После второго шага остались неподчиненными $n - k_1 - k_2$ сотрудников. Продолжая подобные действия, можно придти к двум результатам:

1) при $k_1 + ... + k_q = n - 1$ будут назначены $q' = q$ менеджеров; причем менеджеру m'_q будет непосредственно подчинен менеджер m'_{q-1} и k_q исполнителей $w_{k_1+...+k_{q-1}+2}$, ..., w_n, еще оставшихся неподчиненными;

2) при $k_1 + ... + k_q > n - 1$ будут назначены $q' \leqslant q$ менеджеров, причем последнему менеджеру $m'_{q'}$ будет непосредственно подчинен менеджер $m'_{q'-1}$ и не более $k_{q'}$ исполнителей, еще оставшихся неподчиненными.

В обоих случаях менеджер $m'_{q'}$ будет управлять всеми исполнителями, т. е. получили дерево $H \in \Omega(N)$. По построению каждый менеджер дерева управляет группой исполнителей, которые идут в цепи последовательно. Рассмотрим менеджера m'_i, $1 \leqslant i \leqslant q'$. Обозначим всех его непосредственных подчиненных v_1, ..., v_j. Сотрудники v_1, ..., v_j управляют попарно непересекающимися группами, причем $s_H(m'_i) = s_H(v_1) \cup ... \cup s_H(v_j)$, т. е. управляемый менеджером m'_i участок цепи $s_H(m'_i)$ разбивается на части $s_H(v_1)$, ..., $s_H(v_j)$. Тогда менеджер m'_i управляет $j - 1$ внутренними потоками и участвует в управлении двумя внешними потоками. Затраты менеджера m'_i равны $\varphi((j + 1)\lambda)$. Менеджер m'_i имеет не более $k_i + 1$ непосредственного подчиненного. Поэтому затраты менеджера m'_i не превосходят величины $\varphi((k_i + 2)\lambda)$. Таким образом,

$$c(H) \leqslant \varphi((k_1 + 2)\lambda) + ... + \varphi((k_q + 2)\lambda) \leqslant$$
$$\leqslant \varphi((k_1 + l_1)\lambda) + ... + \varphi((k_q + l_q)\lambda).$$

Дерево H может содержать меньше q менеджеров. В силу неотрицательности функции затрат дополнительные слагаемые не могут уменьшить затраты. Учитывая оценку затрат менеджера m'_i, докажем первое неравенство. Второе неравенство справедливо в силу монотонности функции затрат и условия $l_i \geqslant 2$.

В построенном дереве H не больше менеджеров, чем в M, причем затраты менеджеров дерева не превосходят затраты соответствующих менеджеров M, т. е. построено дерево, затраты которого не превышают суммарных затрат любых менеджеров, управляющих всеми потоками симметричной производственной линии, следовательно H — оптимальное дерево.

Пусть $\varphi(\cdot)$ — выпуклая функция. Для каждого менеджера m'_i дерева H через k'_i обозначим число непосредственных подчиненных, $1 \leqslant i \leqslant q'$. Если найдутся два менеджера, у которых число непосредственных подчиненных отличается более, чем на единицу, то для некоторых $1 \leqslant i, j \leqslant q' - 1$ выполнено $k'_i + 1 < k'_j$. При описанном ранее построении дерева мы можем назначать менеджеров m'_1, ..., $m'_{q'}$ в любом порядке. Их затраты не зависят от порядка назначения. Первым можно назначить менеджера m'_i с k'_i непосредственными подчиненными, а вторым можно назначить менеджера m'_j с k'_j непосредственными подчиненными. Всех остальных менеджеров назначим в произвольном порядке. Таким образом, в новом дереве числа k'_1, ..., $k'_{q'}$ будут переставлены, т. е. в новом дереве (после перестановки) выполнено неравенство $k'_1 + 1 < k'_2$. По построению дерева менеджеру m'_2 непосредственно подчинен исполнитель, соседний с группой $s_H(m'_1)$. Тогда можно переподчинить этого исполнителя менеджеру m'_1. Это по-прежнему приведет к дереву, где каждый менеджер управляет группой исполнителей, которые идут в цепи последовательно. Изменились только затраты менеджеров m'_1 и m'_2, у которых теперь $k'_1 + 1$ и $k'_2 - 1$ непосредственных подчиненных. Далее доказано, что затраты не увеличились. Можно продолжить аналогичные переподчинения. В результате получим дерево, в котором число непосредственных подчиненных у менеджеров m'_1 и m'_2 одинаково или отличается на единицу. Кроме того, уменьшился «разброс» величин k'_1, ..., $k'_{q'}$ (например, среднеквадратичное отклонение). Продолжая подобные действия, построим в итоге дерево, в котором у различных менеджеров число непосредственных подчиненных отличается не более чем на единицу. Затраты полученного дерева не превышают затрат исходного дерева, т. е. выполнено условие утверждения.

Для доказательства утверждения осталось показать, что выполнено неравенство $\varphi((k'_1 + 2)\lambda) + \varphi(k'_2\lambda) \leqslant \varphi((k'_1 + 1)\lambda) + \varphi((k'_2 + 1)\lambda)$. Обозначим $z_1 = k'_1 + 1$, $z_2 = k'_2 + 1$. По определению выпуклой функции для любых $z_1, z_2 \in R_+$ и для любого $\gamma \in [0; 1]$ выполнено неравенство $\varphi((\gamma z_1 + (1 - \gamma)z_2)\lambda) \leqslant \gamma\varphi(z_1\lambda) + (1 - \gamma)\varphi(z_2\lambda)$. Положим $\gamma_1 = (z_2 - z_1 - 1)/(z_2 - z_1)$, $\gamma_2 = 1/(z_2 - z_1)$. Имеем, $0 < \gamma_1, \gamma_2 < 1$, $\gamma_1 + \gamma_2 = 1$. Кроме того, $\gamma_1 z_1 + (1 - \gamma_1)z_2 = z_1 + 1$, $\gamma_2 z_1 + (1 - \gamma_2)z_2 = z_2 - 1$. Подставляя значения γ_1 и γ_2 в неравенство, получим: $\varphi((z_1 + 1)\lambda) \leqslant \gamma_1\varphi(z_1\lambda) + (1 - \gamma_1)\varphi(z_2\lambda)$, $\varphi((z_1 - 1)\lambda) \leqslant \gamma_2\varphi(z_1\lambda) + (1 - \gamma_2)\varphi(z_2\lambda)$. Сложив неравенства, будем иметь $\varphi((z_1 + 1)\lambda) + \varphi((z_2 - 1)\lambda) \leqslant \varphi(z_1\lambda) + (z_2\lambda)$, что и доказывает требуемое неравенство. ♦

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бурков В. Н., Новиков Д. А.* Теория активных систем: состояние и перспективы. — М.: СИНТЕГ, 1999.
2. *Новиков Д. А.* Сетевые структуры и организационные системы. — М.: ИПУ РАН, 2003.
3. *Новиков Д. А.* Механизмы функционирования многоуровневых организационных систем. — М.: Фонд «Проблемы управления», 1999.
4. *Овсиевич Б. И.* Модели формирования организационных структур. — Л.: Наука, 1979.
5. *Цвиркун А. Д.* Основы синтеза структуры сложных систем. — М.: Наука, 1982.
6. *Задачи* оптимизации иерархических структур / В. Т. Дементьев, А. И. Ерзин, Р. М. Ларин и др. — Новосибирск: Изд-во Новосиб. ун-та, 1996.
7. *Воронин А. А., Мишин С. П.* Модель оптимального управления структурными изменениями организационной системы // Автоматика и телемеханика. — 2002. — № 8. — С. 136—150.
8. *Воронин А. А., Мишин С. П.* Алгоритмы поиска оптимальной структуры организационной системы // Автоматика и телемеханика. — 2002. — № 5. — С. 120—132.
9. *Воронин А. А., Мишин С. П.* Оптимальные иерархические структуры. — М.: ИПУ РАН, 2003.
10. *Губко М. В.* Структура оптимальной организации континуума исполнителей // Автоматика и телемеханика. — 2002. — № 12. — С. 116—130.
11. *Мишин С. П.* Оптимальное стимулирование в многоуровневых иерархических структурах // Автоматика и телемеханика. — 2004. — № 5. — С. 96—119.
12. *Мишин С. П.* Оптимальные иерархии управления в экономических системах. — М.: ИПУ РАН, 2004.
13. *Mintzberg H.* The structuring of organizations. — Englewood Cliffs: Prentice-Hall, 1979.

☎ *(495) 377-84-19;*
e-mail: smishin@newmail.ru ❑