УДК 519.687

ОПИСАНИЕ ПРОЦЕССА ПЕРЕДАЧИ ДАННЫХ В СИСТЕМАХ СО СЛУЧАЙНЫМ МНОЖЕСТВЕННЫМ ДОСТУПОМ

В. А. Жевнеров

Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова, г. Москва

Изложен математический аппарат описания однофазовых систем с наиболее распространенным видом случайного множественного доступа — ALOHA. Рассмотрены варианты с произвольным законом распределения длительности сеанса передачи и возможностью успешной передачи сообщений одновременно несколькими абонентами.

Протоколы передачи данных, основанные на применении случайного множественного доступа — ALOHA, в настоящее время достаточно широко применяются в локальных сетях и системах связи [1—3].

Доступ ALOHA является простейшей дисциплиной передачи сообщения (заявки) по каналу связи. В соответствии с этой дисциплиной абонент (источник) передает сообщения по каналу без учета информации об его занятости другими абонентами. Сообщение считается успешно переданным, если кроме него в канале находилось одновременно не более k других абонентов. Требования к значению k определяются особенностями используемых каналов связи. Известные аналитические соотношения [2] описывают только случай передачи сообщений одинаковой длительности при $k = 0$. В то же время на практике встречаются более общие режимы передачи.

Первоначально рассмотрим случай "чистой" системы ALOHA, когда сообщения передаются абонентами в произвольный момент времени. Функция $b(t)$ — плотность распределения вероятностей (п. р. в.) длительности времени передачи сообщения по каналу — полагается произвольной. Поток передаваемых сообщений полагается пуассоновским с интенсивностью λ. Обозначим через p_{c} вероятность успешной передачи сообщения за одну попытку. Очевидно, что $p_{\text{c}} = g^*(s)\big|_{s=0}$, где $g^*(s)$ — преобразование Лапласа функции $g(t)$ — п. р. в. полного времени передачи сообщения в системе.

Далее для простоты изложения приводятся соотношения только для описания значения p_{c}. Способ получения выражений для $g^*(s)$ на основе описания p_{c} будет показан далее на примере для $k = 0$.

При $k = 0$ величина p_{c} представима в виде

$$p_{\text{c}} = p^- p^+, \tag{1}$$

где p^- — вероятность отсутствия абонентов в канале к моменту начала передачи сообщения; p^+ — вероятность того, что в течение времени передачи в канал не поступят сообщения от других абонентов. Выражения для p^+ и p^- имеют следующий вид:

$$p^+ = \int_0^\infty b(t)\exp(-\lambda t)dt = b^*(\lambda), \tag{2}$$

$$p^- = \int_0^\infty B(t_1)\lambda\exp(-\lambda t_1)dt_1 \dots \int_0^\infty B\left(\sum_{i=1}^n t_i\right)\lambda\exp(-\lambda t_n)dt_n \dots, \tag{3}$$

где $B(t) = \int_0^t b(\tau)d\tau$.

Так как сложение пуассоновских потоков всегда дает пуассоновский поток, то справедливо соотношение $p^-(\lambda + d\lambda) = p^-(\lambda)p^-(d\lambda)$, откуда с учетом равенства $p^-(0) = 1$ получим уравнение

$$p^-(\lambda) + \frac{\partial p^-(\lambda)}{\partial\lambda}d\lambda = p^-(\lambda)\left[1 + \frac{\partial p^-(\lambda)}{\partial\lambda}\bigg|_{\lambda=0}\right]d\lambda,$$

решение которого

$$p^-(\lambda) = \exp\left(\frac{\partial p^-(\lambda)}{\partial\lambda}\bigg|_{\lambda=0}\lambda\right).$$

Значение $\frac{\partial p^-(\lambda)}{\partial\lambda}\bigg|_{\lambda=0}$ можно определить из выражения (3), причем достаточно учитывать вклад в значение $p^-(\lambda)$ только от первого интеграла, т. е.

$$\frac{\partial p^-(\lambda)}{\partial\lambda}\bigg|_{\lambda=0} = \frac{\partial}{\partial\lambda}\int_0^\infty B(t_1)\lambda\exp(-\lambda t_1)dt_1\bigg|_{\lambda=0} = \mu^{-1},$$

где $\mu^{-1} = \int_0^\infty b(t)tdt$.

Окончательно имеем

$$p^{-}(\lambda) = \exp(-\psi), \qquad (4)$$

где $\psi = \lambda/\mu$.

Отсюда следует, что значение $p^{-}(\lambda)$ зависит только от первого момента распределения длительности передачи сообщения.

В соответствии с формулами (1), (2) и (4) получим

$$p_c = \exp(-\psi)b^*(\lambda). \qquad (5)$$

Для описания преобразования $g*(s)$ на основе соотношений для вероятности p_c, очевидно, необходимо внести дополнения только в вычисляемое значение $p^+ = p^+(s)$. Соотношение (2) примет вид: $p^+(s) = \int_0^\infty b(t)\exp(-\lambda t) \times$ $\times \exp(-st)dt = b^*(\lambda + s)$, тогда $g*(s) = \exp(-\lambda)b^*(\lambda + s)$.

Известно [4], что при одинаковых значениях μ минимальные значения $b^*(\lambda)$ и $b^*(s)$, а, следовательно, p_c и $g*(s)$ достигаются при постоянной длительности передачи сообщений

$$b(t) = \delta(t - 1/\mu), \qquad (6)$$

а максимальное — при

$$b(t) = (1 - \alpha)\delta(t - t_{\min}) + \alpha\delta(t - t_{\max}), \qquad (7)$$

где $\alpha = (1/\mu - t_{\min})/(t_{\max} - t_{\min})$, $t_{\min}$ и $t_{\max}$ — соответственно минимально и максимально допустимые длительности передачи. Закон (7) обеспечивает наибольшую дисперсию распределения длительности передачи.

Если в канал поступают L разнородных пуассоновских потоков с характеристиками λ_i, μ_i, $b_i(t)$, $i = \overline{1, L}$, то выражение для вероятности успешной передачи сообщения j-го потока в соответствии с формулой (5) примет вид

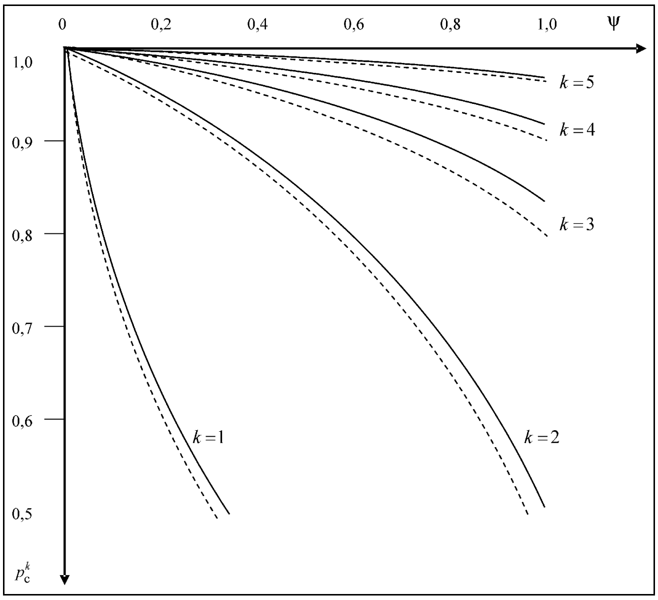
$$p_{cj} = b_j^*\left(\sum_{i=1}^{L}\lambda_i\right)\exp\left(-\sum_{i=1}^{L}\frac{\lambda_i}{\mu_i}\right).$$

При $k > 0$ выражения для p_c, составляемые аналогично выражениям (2)—(4), являются довольно громоздкими. Поэтому для простоты изложения дальнейшее описание будет производиться для функций $b(t)$ вида (8) и (9), обеспечивающих экстремальные значения p_c и $g*(s)$. Для удобства аналитического описания функция (7) в дальнейшем заменяется приближением $b(t) = \mu\exp(-\mu t)$.

Для показательного распределения $b(t) = \mu\exp(-\mu t)$ значение p_c ищется в виде

$$p_c^k = \sum_{n=0}^{k} w_n p_n^k, \qquad (8)$$

где w_n — вероятность наличия в канале n сообщений в момент поступления очередного сообщения; p_n^k — вероятность одновременного появления в канале за время передачи отдельного сообщения не более k сообщений при условии наличия в канале к началу передачи n сообщений.



Графики зависимостей $p_c^k(\varphi)$

Значения w_n находятся из решения прямых уравнений Колмогорова—Чэпмена

$$w_n = \frac{\psi^n}{n!}\exp(-\psi). \qquad (9)$$

Обратные уравнения Колмогорова—Чэпмена, составляемые для вероятности p_n^k, имеют вид:

$$\begin{cases} p_n^k(1 + n + \psi) - p_{n-1}^k n - p_{n+1}^k \psi = 1 \\ n = \overline{0, k}, \quad p_{n+1}^k = p_{-1}^k = 0. \end{cases} \qquad (10)$$

Выражения для вероятности p_c^k при $k = \overline{1, 4}$, полученные в соответствии с формулами (8)—(10), приведены в табл. 1, а графические зависимости $p_c^k(\psi)$ представлены на рисунке сплошными линиями.

При описании процесса передачи сообщений одинаковой длительности $b(t) = \delta(t - 1/\mu)$ учитывается, что моменты окончания передачи будут образовывать также пуассоновский поток. Тогда $p_c^k = \sum_{n=0}^{k} p_n$, где p_n — вероятность одновременного присутствия в канале не более k сообщений за время передачи выделенного сообщения при условии наличия к началу передачи в канале n других сообщений.

Значение p_n ищется в виде

$$p_n = \int_{t_1=0}^{T} \ldots \int_{t_n=0}^{T-\sum_{i=1}^{n-1} t_i} \lambda^n \exp(-\lambda T)\, p_n^k(t_1, \ldots, t_n, T)dt_1 \ldots dt_n,$$

Таблица 1

p_c^1	$e^{-\psi}\cdot\frac{1}{1+\psi}$
p_c^2	$e^{-\psi}\cdot\frac{2+4\psi+\psi^2}{2+2\psi+\psi^2}$
p_c^3	$e^{-\psi}\cdot\frac{6+12\psi+12\psi^2+5\psi^3+\psi^4}{6+6\psi+3\psi^2+\psi^3}$
p_c^4	$\frac{e^{-\psi}}{6}\cdot\frac{144+288\psi+288\psi^2+192\psi^3+66\psi^4+12\psi^5+\psi^6}{24+24\psi+12\psi^2+4\psi^3+\psi^4}$
p_c^5	$\frac{e^{-\psi}}{24}\cdot\frac{288+5760\psi+5760\psi^2+3840\psi^3+1800\psi^4+624\psi^5+128\psi^6+16\psi^7+\psi^8}{120+120\psi+60\psi^2+20\psi^3+5\psi^4+\psi^5}$

где t_i, $i = \overline{1, n}$ — моменты окончания передачи сообщений, ранее присутствующих в канале; $p_n^k(t_1, ..., t_n, T)$ — вероятность одновременного присутствия в канале не более k других сообщений при заданных значениях $t_1, ..., t_n$. Значения p_n^k определяются из решения системы дискретных прямых уравнений Колмогорова—Чэпмена, описывающих процесс размножения-гибели [5]. Такой процесс состоит из $n + 1$ шагов (моменты времени $t_1, ..., t_n, T$); переходы в состояния с номером, большим k (номер состояния равен числу одновременно присутствующих в канале других сообщений), запрещены.

Вероятность p_{ij}^m перехода из состояния $i \leqslant k$ в состояние $j \leqslant k$ за интервал времени $\tau_m = t_m - t_{m-1}$ выражается как

$$p_{ij}^m = \begin{cases} \frac{(\lambda\tau_m)^{j-i+1}}{(j-i+1)!}\exp(-\lambda\tau_m), & j \geq i-1 \\ 0, & j < i-1. \end{cases}$$

Выражения для вероятностей p_n^k имеют вид рекуррентных соотношений и достаточно громоздки. Окончательные аналитические соотношения для вероятности p_c^k при $k = \overline{1, 4}$ приведены в табл. 2, а соответствующие зависимости $p_c^k(\psi)$ показаны на рисунке пунктиром.

Таблица 2

p_c^1	$e^{-2\psi}$
p_c^2	$e^{-2\psi}\cdot\left(1+2\psi+\frac{\psi^2}{2}\right)$
p_c^3	$e^{-2\psi}\cdot 1+2\psi+2\psi^2+\frac{2}{3}\psi^3+\frac{1}{12}\psi^4$
p_c^4	$e^{-2\psi}\cdot\left(1+2\psi+2\psi^2+\frac{4}{3}\psi^3+\frac{5}{12}\psi^4+\frac{3}{40}\psi^3+\frac{1}{144}\psi^4\right)$

Из сравнения зависимостей $p_c^k(\psi)$ видно, что постоянная длительность передачи обеспечивает всегда меньшие значения p_c^k.

При "синхронной" системе ALOHA передачу сообщений разрешено начинать только в определенные моменты времени, разделенные равными промежутками времени $T = 1/\mu$. Для этого случая, очевидно, значение p_c^k определяется по известным формулам Эрланга

$$p_c^k = \exp(-\lambda T)\sum_{n=0}^{k}\frac{(\lambda T)^n}{n!},$$

а значение $g^*(s)$ определяется как $g^*(s) = p_c^k b^*(s)$, при этом полагается, что $\int_T^\infty b(t)dt \equiv 0$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бердсекас Д., Галлагер Р.* Сети передачи данных. — М.: Мир, 1989.
2. *Клейнрок Л.* Вычислительные системы с очередями. — М.: Мир, 1979.
3. *Кустов Н. Т., Сущенко С. П.* О пропускной способности метода случайного множественного доступа // Автоматика и телемеханика. — 2001. — № 1 — С. 91 — 101.
4. *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике. — М.: Наука, 1974. — 832 с.
5. *Саати Т.* Элементы теории массового обслуживания и её приложения. — М.: Сов. радио, 1971.

☎ *(095) 334-89-70*

E-mail: zhevn@ipu.ru

❑