УДК 681.51

# ОБ ОБРАЩЕНИИ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ[1]

А. Е. Шумский

*Институт автоматики и процессов управления, г. Владивосток*

Рассмотрена задача обращения динамических систем, описываемых нелинейными дифференциальными уравнениями с гладкими функциями. Сформулированы достаточные условия существования обратной системы. Установлено соответствие между конструкциями алгебры функций, привлекаемыми для решения задачи, и математическими конструкциями, используемыми в рамках дифференциально-геометрического подхода. Предложен метод обращения для аффинных систем.

## ВВЕДЕНИЕ И ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Многие задачи теории управления, параметрической идентификации и технической диагностики могут быть сведены к задаче обращения математической модели исследуемого объекта или процесса [1]. Задача обращения формулируется следующим образом: система (объект или процесс) содержит неизвестные входы; необходимо оценить значения этих входов в реальном времени посредством обработки измеряемых входов и выходов системы, а также их производных по времени. В задачах управления в качестве неизвестных входов могут рассматриваться управляющие воздействия, которые требуется сформировать на основе эталонных значений выходов системы. В задачах параметрической идентификации — это неизвестные параметры, значения которых подлежат оцениванию в реальном времени, а в задачах технической диагностики — параметры, искажаемые дефектами.

В большинстве работ по обращению рассматривались линейные системы (см. обширный библиографический список, приведенный в работе [1]). В настоящей статье рассматриваются нелинейные динамические системы, описываемые моделью

$$x(t) = f(x(t),\ u(t)) + g(x(t))v(t),\ y(t) = h(x(t)), \quad (1)$$

где $x(t) \in X \subseteq R^n$, $u(t) \in U \subseteq R^m$, $v(t) \in V \subseteq R^s$, $y(t) \in Y \subseteq R^l$ — векторы состояния, управления, неизвестных входов и измеряемых выходов системы, $f$, $h$ и $g$ — соответственно, векторные и матричная функции, компоненты которых — суть гладкие функции, $t$ — время. Задача состоит в нахождении описания системы, входами которой служат векторы $u(t)$, $y(t)$ и их производные по времени, а выходом — вектор $v(t)$.

Задача обращения в аналогичной постановке решалась в работе [2] для аффинных систем с использованием дифференциально-геометрического подхода [3]. К сожалению, достоверность полученных в ней результатов подлежит сомнению (см. Пример, § 3).

Цель настоящей работы состоит в изложении алгебраического и дифференциально-геометрического подходов к синтезу обратной системы.

## 1. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Для системы (1) введем вектор-строки функций $Q_j^{(i)}$, $1 \leqslant j \leqslant l$, $i = 1, 2, ...$, используя следующую рекурсивную формулу:

$$Q_j^{(i+1)}(x,\ u^{(i)}) = N_f(Q_j^{(i)}(x,\ u^{(i-1)}) \quad (2)$$

при

$$Q_j^{(1)} = \partial h_j(x)/\partial x,$$

где линейный дифференциальный оператор $N_f$ определяется соотношением [4]:

$$N_f(Q_j^{(i)}) = Q_j^{(i)}(\partial f/\partial x) + f^\tau(\partial(Q_j^{(i)})^\tau/dx) + \\ + (du^{(i-1)}/dt)^\tau(\partial(Q_j^{(i)})^\tau/\partial u^{(i-1)})^\tau. \quad (3)$$

В формулах (2) и (3) использованы следующие обозначения: $u^{(i)} = \mathrm{col}(u(t),\ du(t)/dt,\ ...,\ d^{i-1}u(t)/dt^{i-1})$, $\tau$ —

[1] Работа поддержана грантом № 03-01-00791 Российского фонда фундаментальных исследований.

символ транспонирования. Введем также индексы $r_j$ такие, что:

$$[\,Q_j^{(i)} g = 0 \ \forall i < r_j] \ \& \ [\,Q_j^{(r_j)} g \neq 0]. \qquad (4)$$

Имея в виду соотношения (2) и (4), запишем выражения для производных вектора выхода системы (1) по времени:

$$d^i y_j(t)/dt^i = H_j^{(i)}(x(t),\ u^{(i)}(t)), \quad 1 \leqslant i \leqslant r_j - 1, \qquad (5)$$

$$d^{r_j} y_j(t)/dt^{r_j} = H_j^{(r_j)}(x(t),\ u^{(r_j)}(t)) + \\ +\ Q_j^{(r_j)}(x(t),\ u^{(r_j - 1)}(t))g(x(t))v(t),$$

где функции $H_j^{(i)}$, $1 \leqslant j \leqslant l$, $1 \leqslant i \leqslant r_j$, определяются соотношениями

$$H_j^{(1)}(x,\ u) = Q_j^{(1)}(x)f(x,\ u),$$

$$H_j^{(i)}(x,\ u^{(i)}) = Q_j^{(i)}(x,\ u^{(i-1)})f(x,\ u) + \\ +\ (\partial H_j^{(i-1)}(x,\ u^{(i-1)})/\partial u^{(i-1)})(du^{(i-1)}/dt), \quad i > 1. \qquad (6)$$

Из выражений (5) следует

$$\begin{bmatrix} d^{r_1} y_1/dt^{r_1} \\ \vdots \\ d^{r_l} y_l/dt^{r_l} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_1^{(r_1)} \\ \vdots \\ H_l^{(r_l)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Q_1^{(r_1)} g \\ \vdots \\ Q_l^{(r_l)} g \end{bmatrix} v. \qquad (7)$$

В предположении, что в заданной области определения векторов $x(t)$ и $u^{(r_j - 1)}(t)$, $1 \leqslant j \leqslant l$, выполняется условие

$$\operatorname{rank} \begin{bmatrix} Q_1^{(r_1)} g \\ \vdots \\ Q_l^{(r_l)} g \end{bmatrix} = s, \qquad (8)$$

вектор $v(t)$ может быть найден из уравнения (7):

$$v = \begin{bmatrix} Q_1^{(r_1)} g \\ \vdots \\ Q_l^{(r_l)} g \end{bmatrix}^+ \begin{bmatrix} d^{r_1} y_1/dt^{r_1} - H_1^{(r_1)} \\ \vdots \\ d^{r_l} y_l/dt^{r_l} - H_l^{(r_l)} \end{bmatrix}, \qquad (9)$$

где символом “+” обозначена псевдообратная матрица. Отметим, что для выполнения условия (8) необходимо выполнение неравенства

$$l \geqslant s. \qquad (10)$$

Для дальнейшего важно, что функции $Q_j^{(r_j)}(x(t),$ $u^{(r_j - 1)}(t))g(x(t))$, $H_j^{(r_j)}(x(t),\ u^{(r_j)}(t))$, $1 \leqslant j \leqslant l$, фигурирующие в уравнении (9), зависят не только от измеряемых значений векторов управления и их производных по времени, но также и от вектора состояния $x(t)$. Следовательно, возникает задача вычисления вектора состояния системы без использования неизвестного вектора $v(t)$. Её решение может быть сведено к нахождению преобразования координат исходной модели (1): $z(t) = \varphi(x(t))$, где $\varphi(x)$ — некоторая векторная функция, такая, что в преобразованных координатах получаемая модель не зависит от вектора $v(t)$ и описывается уравнением

$$z(t) = f_*(x(t),\ u(t),\ y(t)). \qquad (11)$$

Если при этом в каждой точке $u^{(r-1)}(t)$, $r = \max\{r^{(j)}$, $1 \leqslant j \leqslant l\}$, дополнительно выполняются условия

$$\operatorname{rank} \begin{bmatrix} \partial(h^\tau,\ \varphi^\tau)^\tau/\partial x \\ \partial Q_j^{(r_j)} g_i/\partial x \end{bmatrix} = \operatorname{rank} \partial(h^\tau,\ \varphi^\tau)^\tau/\partial x = \\ = \operatorname{rank} \begin{bmatrix} \partial(h^\tau,\ \varphi^\tau)^\tau/\partial x \\ \partial H_j^{(r_j)}/\partial x \end{bmatrix}, \quad 1 \leqslant j \leqslant l, \quad 1 \leqslant i \leqslant m, \qquad (12)$$

то функции $Q_j^{(r_j)}(x(t),\ u^{(r_j - 1)}(t))g_i(x(t))$, $H_j^{(r_j)}(x(t),\ u^{(r_j)}(t))$, $1 \leqslant j \leqslant l$, могут быть выражены в преобразованных координатах (через компоненты векторов $y(t)$ и $z(t)$), где $g_i$ — $i$-й столбец матричной функции $g(x)$, $1 \leqslant i \leqslant m$. При этом уравнения (9) и (11) будут определять описание обратной системы, а ранговые соотношения (8) и (12) — условия её существования.

## 2. СИНТЕЗ ОБРАТНОЙ СИСТЕМЫ

В основе синтеза обратной системы лежит нахождение преобразования модели (1) к модели (11). Требования к функции $\varphi$, выполнение которых обеспечивает необходимые и достаточные условия существования преобразования, следуют из работы [5]:

$$f_*(\varphi(x),\ u,\ h(x)) = (\partial\varphi(x)/\partial x)f(x,\ u), \qquad (13)$$

$$(\partial\varphi(x)/\partial x)g(x) = 0. \qquad (14)$$

В работе [5] с использованием математического аппарата алгебры функций [6, 7] также был сформулирован способ нахождения функции $\varphi$. Приведем краткое изложение алгебраического подхода.

### 2.1. Алгебраический подход

Введем множество $\Im_S$ векторных функций с областью определения $S$ (для упрощения дальнейших рассуждений рассматриваются векторные функции, компоненты которых суть гладкие функции). На множестве $\Im_S$ задается отношение частичного предпорядка следующим образом: $\alpha \leqslant \beta \Leftrightarrow \beta = \gamma \circ \alpha$, где $\alpha,\ \beta \in \Im_S$ и $\gamma$ — дифференцируемая на множестве значений $\alpha(s)$, $s \in S$, функция, $\circ$ — знак композиции функций. Проверка выполнения отношения “$\leqslant$” сводится к проверке рангового соотношения:

$$\alpha \leqslant \beta \Leftrightarrow \operatorname{rank} \partial\beta/\partial s = \operatorname{rank} \begin{bmatrix} \partial\beta/\partial s \\ \partial\alpha/\partial s \end{bmatrix}.$$

Очевидно, что если одновременно $\alpha \leqslant \beta$ и $\beta \leqslant \alpha$, то векторные функции эквивалентны: $\alpha \cong \beta$. На множестве

$\Im_S$ вводятся также бинарные операции $\times$, $\oplus$, отношение $\Delta \subset \Im_X \times \Im_X$ и оператор $m$: $\Im_X \to \Im_X$,

$$[\alpha \times \beta \in \Im_S] \& [\gamma \leqslant \alpha,\ \gamma \leqslant \beta \Rightarrow \gamma \leqslant \alpha \times \beta],$$

$$[\alpha \oplus \beta \in \Im_S] \& [\alpha \leqslant \gamma,\ \beta \leqslant \gamma \Rightarrow \alpha \oplus \beta \leqslant \gamma],$$

$$[(\alpha, \beta) \in \Delta] \Leftrightarrow [\pi_u \times \alpha \circ \pi_x \leqslant (\partial\beta/\partial x) f],$$

$$[(\alpha, m(\alpha)) \in \Delta] \& [(\alpha, \beta) \in \Delta \Rightarrow m(\alpha) \leqslant \beta],$$

где $\pi_u$, $\pi_u(x, u) = u$ и $\pi_x$, $\pi_x(x, u) = x$ — проекции.

Процедура нахождения функции $\varphi$ следует из работы [5] и формулируется следующим образом. Пусть $\varphi^{(0)}$ — наименьшая (в смысле отношения "$\leqslant$") функция, удовлетворяющая условию (14). Пусть также существует натуральное $k$ такое, что $\varphi^{(k+1)} \cong \varphi^{(k)}$, где $\varphi^{(i+1)} \cong \varphi^{(i)} \oplus m(\varphi^{(i)} \times h)$, $i \geqslant 0$. Тогда, во-первых, функция $\varphi^{(k)}$ удовлетворяет соотношениям (13) и (14) и, во-вторых, для любой функции $\varphi$, удовлетворяющей соотношениям (13) и (14), выполняется функциональное неравенство $\varphi^{(k)} \leqslant \varphi$.

Реализация данной процедуры предполагает выполнение последовательности итераций, каждая из которых сопровождается вычислением операции $\oplus$ и оператора $m$. Способы вычисления операции и оператора алгебры функций представлены в работе [6] и требуют в каждом случае нахождения решений некоторых систем дифференциальных уравнений в частных производных. Ниже приводится геометрическая интерпретация алгебраического подхода, позволяющая упростить задачу нахождения функции $\varphi$ для аффинных систем.

### 2.2. Геометрическая интерпретация

Поставим в соответствие векторной функции $\alpha \in \Im_S$ векторное пространство $\Omega_\alpha$, называемое корасслоением [3, 8], в каждой точке $s \in S$ совпадающее с линейной оболочкой $\Omega_\alpha(s)$ строк матрицы Якоби $J_\alpha(s) = \partial\alpha(s)/\partial s$, что записывается следующим образом: $\Omega_\alpha(s) = \mathrm{span}\{J_{\alpha_i}(s),\ 1 \leqslant i \leqslant p\}$, где $p$ — число компонент функции $\alpha$ и $J_{\alpha_i}$ — $i$-я строка матрицы $J_\alpha$. Пусть $\alpha, \beta \in \Im_S$. Несложно убедиться, что из $\alpha \leqslant \beta$ следует $\Omega_\alpha \supset \Omega_\beta$ (и наоборот). Корасслоение $\Omega_{\alpha\times\beta}$ является минимальным корасслоением, которое одновременно содержит корасслоения $\Omega_\alpha$ и $\Omega_\beta$, т. е. $\Omega_{\alpha\times\beta} = \Omega_\alpha + \Omega_\beta$. Корасслоение $\Omega_{\alpha\oplus\beta}$ является максимальным корасслоением, которое одновременно содержится в корасслоениях $\Omega_\alpha$ и $\Omega_\beta$, т. е. $\Omega_{\alpha\oplus\beta} \subseteq \Omega_\alpha \cap \Omega_\beta$.

Предположим теперь, что функция $f(x, u)$ системы (1) может быть приведена к виду

$$f(x, u) = f_0(x) + \sum_{d=1}^{m} u_d f_d(x), \qquad (15)$$

где $u_d$ — соответствующая компонента вектора управления, $f_d$, $0 \leqslant d \leqslant m$, — векторные функции. Для системы (1), (15) рассмотрим конструкцию $\varphi^{(i+1)} \cong \varphi^{(i)} \oplus m(\varphi^{(i)} \times h)$. Отметим, что из определений отношения $\Delta$ и оператора $m$ следует $\varphi^{(i)} \times h \leqslant J_{\varphi_j^{(i+1)}} f_d$, $0 \leqslant d \leqslant m$, или, что то же самое, $L_{f_d} J_{\varphi_j^{(i+1)}} \subseteq \Omega_{\varphi^{(i)}} + \Omega_h$, где производная Ли ковекторного поля $J_{\varphi_j^{(i+1)}}$ вдоль векторного поля $f_d$ определяется следующим образом: $L_{f_d} J_{\varphi_j^{(i+1)}}(x) = f_d^\tau(x)(\partial J^\tau_{\varphi_j^{(i+1)}}(x)/\partial x)^\tau + J_{\varphi_j^{(i+1)}}(x)(\partial f_d(x)/\partial x)$. Пусть $\Lambda_{\varphi^{(i)}}$ — расслоение [3, 8], такое что $\Lambda^\perp_{\varphi^{(i)}} = \Omega_{\varphi^{(i)}}$, где аннигилятор расслоения $\Lambda_{\varphi^{(i)}}$ определяется соотношением $\Lambda^\perp_{\varphi^{(i)}} = \mathrm{span}\{\omega(x) | \omega(x)\lambda(x) = 0\ \forall\lambda(x) \in \Lambda_{\varphi^{(i)}}\}$. Пусть также $\lambda_{\varphi^{(i)}} \in \Lambda_{\varphi^{(i)}} \cap \ker J_h$. Очевидно, что $(L_{f_d} J_{\varphi_j^{(i+1)}})\lambda_{\varphi^{(i)}} = 0$. Кроме того, в силу $\varphi^{(i)} \leqslant \varphi^{(i+1)}$ имеет место $J_{\varphi_j^{(i+1)}} \in \Omega_{\varphi^{(i)}}$, откуда следует $J_{\varphi_j^{(i+1)}} \lambda_{\varphi^{(i)}} = 0$. Далее, воспользовавшись тождеством [3, с. 10] $L_{f_d}(J_{\varphi_j^{(i+1)}} \lambda_{\varphi^{(i)}}) = (L_{f_d} J_{\varphi_j^{(i+1)}})\lambda_{\varphi^{(i)}} + J_{\varphi_j^{(i+1)}}[f_d, \lambda_{\varphi^{(i)}}]$, где операция взятия скобок Ли определяется соотношением $[f_d, \lambda_{\varphi^{(i)}}](x) = (\partial\lambda_{\varphi^{(i)}}(x)/\partial x) f_d(x) - (\partial f_d(x)/\partial x)\lambda_{\varphi^{(i)}}(x)$, получим $J_{\varphi_j^{(i+1)}}[f_d, \lambda_{\varphi^{(i)}}] = 0$. Обозначим через $\Lambda_{\varphi^{(0)}}$ минимальное замкнутое (относительно операции взятия скобок Ли) расслоение, содержащее столбцы векторной функции $g(x)$. Обозначим также через $\Lambda_{\varphi^{(i+1)}}$ минимальное замкнутое расслоение, содержащее $\Lambda_{\varphi^{(i)}} + \mathrm{span}\{[f_d, \lambda_{\varphi^{(i)}}],\ 0 \leqslant d \leqslant m,\ \lambda_{\varphi^{(i)}} \in \Lambda_{\varphi^{(i)}} \cap \ker h\}$. Согласно теореме Фробениуса [3, 8], замкнутое расслоение интегрируемо, что означает разрешимость дифференциального уравнения в частных производных

$$J_{\varphi_j^{(i)}} \Lambda_{\varphi^{(i)}} = 0 \qquad (16)$$

относительно соответствующей компоненты векторной функции $\varphi^{(i)}$. Множество всех независимых решений уравнения (16) при этом будет определять все функционально независимые компоненты функции $\varphi^{(i)}$.

Таким образом, каждая векторная функция $\varphi^{(i)}$ может быть найдена путем интегрирования соответствующего ей расслоения $\Lambda_{\varphi^{(i)}}$, $0 \leqslant i \leqslant k + 1$. Эквивалентности векторных функций $\varphi^{(k+1)} \cong \varphi^{(k)}$ соответствует равенство расслоений $\Lambda_{\varphi^{(k+1)}} = \Lambda_{\varphi^{(k)}}$. Это позволяет переформулировать процедуру вычисления функции $\varphi$ в геометрических терминах следующим образом. Пусть $\Lambda_{\varphi^{(0)}}$ — минимальное замкнутое расслоение, содержащее столбцы векторной функции $g(x)$. Пусть также $k$ — наименьшее натуральное число, для которого выполняется $\Lambda_{\varphi^{(k+1)}} = \Lambda_{\varphi^{(k)}}$, где $\Lambda_{\varphi^{(i+1)}}$ — минимальное замкнутое расслоение, содержащее $\Lambda_{\varphi^{(i)}} + \mathrm{span}\{[f_d, \lambda_{\varphi^{(i)}}],\ 0 \leqslant d \leqslant m,\ \lambda_{\varphi^{(i)}} \in \Lambda_{\varphi^{(i)}} \cap \ker h\}$. Тогда функция $\varphi^{(k)}$, найденная интегрированием расслоения $\Lambda_{\varphi^{(k)}}$, удовлетворяет соотношениям (13) и (14), и, в силу минимальности расслоений $\Lambda_{\varphi^{(i)}}$, $0 \leqslant i \leqslant k$, для любой функции φ, удовлетворяющей соотношениям (13) и (14), выполняется функциональное неравенство $\varphi^{(k)} \leqslant \varphi$.

Отличительная особенность данной процедуры состоит в том, что дифференциальные уравнения в частных производных требуется решать только один раз — при интегрировании расслоения $\Lambda_{\varphi^{(k)}}$. Немаловажен также тот факт, что вычисление расслоений $\Lambda_{\varphi^{(i)}}$, $0 \leqslant i \leqslant k + 1$, может быть поддержано существующими математическими пакетами прикладных программ, оперирующими аналитическими выражениями, например, пакетом Maple.

## 3. ПРИМЕР

Рассмотрим систему из работы [2], содержащую два неизвестных входа и два измеряемых выхода и описываемую функциями

$$f(x, u) = f_0(x) = \begin{bmatrix} x_2 \\ 0 \\ x_1x_1 \\ -1{,}2x_3 \\ x_1 \end{bmatrix}, \quad g(x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -x_2 & 0 \\ 0 & 1 \\ -x_4 & x_1 \\ 1 & -x_5 \end{bmatrix},$$

$$h(x) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 \end{bmatrix}. \qquad (17)$$

Прежде всего, отметим, что в силу условия (10) принципиальная возможность синтеза обратной системы для оценивания неизвестных входов существует. Вычисляя функции $Q_j^{(r_j)}g$, $H_j^{(r_j)}$, $j = 1, 2$, в соответствии с выражениями (2), (4) и (6) найдем:

$$j = 1:$$

$$Q_1^{(1)} = (1, 0, 0, 0, 0),\ Q_1^{(1)}g = (1, 0),\ r_1 = 1,\ H_1^{(1)} = x_2;$$

$$j = 2:$$

$$Q_2^{(1)} = (0, 0, 1, 0, 0),\ Q_2^{(1)}g = (0, 1),\ r_2 = 1,\ H_2^{(1)} = x_1x_4.$$

Проверка условия (8) дает

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix} Q_1^{(1)}g \\ Q_2^{(1)}g \end{bmatrix} = \operatorname{rank}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 2.$$

Заметим, что аналогичные результаты были получены также в работе [2] (соотношение (44)).

Укажем на ошибку работы [2]. Для этого приведем описание обратной системы, которое было получено в этой работе (для простоты используется символика настоящей статьи):

$$z = \begin{bmatrix} 0 \\ -1{,}2y_2 \\ y_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -z_1 \\ -z_2 \\ 1 \end{bmatrix}(y_1 - z_1) + \begin{bmatrix} 0 \\ y_1 \\ -z_3 \end{bmatrix}y_1(y_2 - y_1z_2), \quad (18)$$

$$v = \begin{bmatrix} y_1 - z_1 \\ y_2 - y_1z_2 \end{bmatrix}. \qquad (19)$$

В работе [2] для получения уравнения (18) было применено преобразование координат, задаваемое функцией (соотношение (45) работы [2])

$$\varphi(x) = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}.$$

Несложно проверить, что указанное преобразование координат не удовлетворяет условию (14) настоящей работы. В результате, оценка непосредственно не измеряемых компонент вектора состояния $x_2$, $x_4$, $x_5$, получаемая согласно выражению (18), оказывается зависимой от неизвестного вектора $v(t)$. Следствием является неправильное вычисление вектора $v(t)$ в соответствии с формулой (19). Для доказательства этого факта было осуществлено моделирование. На рис. 1 приведено реальное поведение компонент вектора $v(t)$, а на рис. 2 показаны оценки компонент этого вектора, полученные согласно выражениям (18) и (19). Разница очевидна.

Рассмотрим преобразование модели (17) к модели (11), получаемое в соответствии с результатами настоящей статьи. Для этого воспользуемся процедурой, сформулированной в п. 2.2.

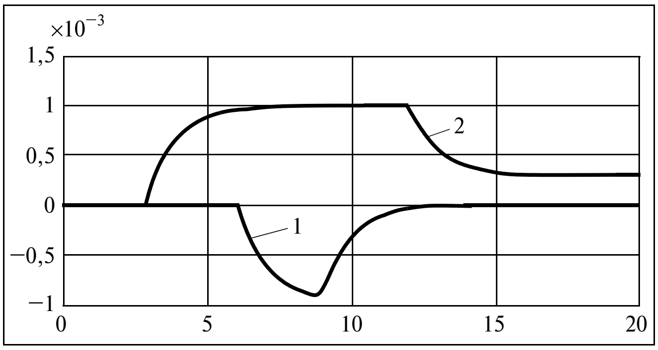


**Рис. 1. Реальное поведение первой (*1*) и второй (*2*) компонент вектора *v*(*t*)**

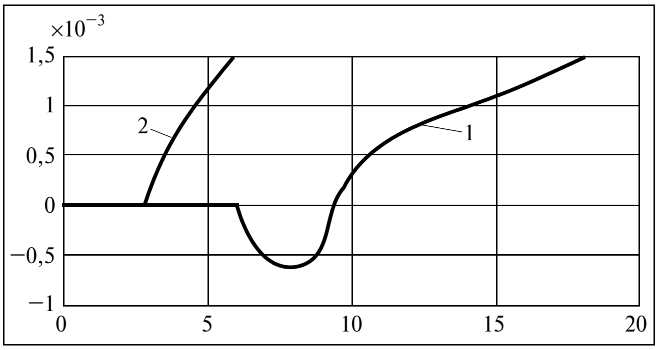


**Рис. 2. Оценка первой (*1*) и второй (*2*) компонент вектора *v*(*t*) согласно выражениям (18) и (19)**

Положим $k = 0$ и найдем минимальное расслоение, содержащее $\mathrm{span}\{g_1, g_2\}$, и замкнутое относительно операции взятия скобок Ли. Для этого осуществим следующие вычисления: $[g_1, g_2] = \mathrm{col}(0, 0, 0, 1 + x_1, -1) \notin \mathrm{span}\{g_1, g_2\}$; $[g_1, [g_1, g_2]] = \mathrm{col}(0, 0, 0, 2 + x_1, 0) \notin \mathrm{span}\{g_1, g_2, [g_1, g_2]\}$; $[g_2, [g_1, g_2]] = 0$; $[g_1, [g_1, [g_1, g_2]]] = \mathrm{col}(0, 0, 0, 3 + x_1, 0) \in \mathrm{span}\{g_1, g_2, [g_1, g_2], [g_1, [g_1, g_2]]\}$. В результате получим $\Lambda_{\varphi^{(0)}} = \mathrm{span}\{g_1, g_2, [g_1, g_2], [g_1, [g_1, g_2]]\}$.

Положим теперь $k = 1$ и вычислим $\Lambda_{\varphi^{(0)}} \cap \ker J_h = \mathrm{span}\{[g_1, g_2], [g_1, [g_1, g_2]]\}$. Затем, из $[f_0, [g_1, g_2]] = \mathrm{col}(0, 0, -x_1 (1 + x_1), x_2, 0) \in \Lambda_{\varphi^{(0)}}$ и $[f_0, [g_1, [g_1, g_2]]] = \mathrm{col}(0, 0, -x_1 (2 + x_1), x_2, 0) \in \Lambda_{\varphi^{(0)}}$ получим $\Lambda_{\varphi^{(1)}} = \Lambda_{\varphi^{(0)}}$. Следовательно, $k = 0$.

Искомую функцию $\varphi = \varphi^{(0)}$ с единственной компонентой найдем интегрированием расслоения $\Lambda_{\varphi^{(0)}}$ в виде $\varphi(x) = x_1 + \ln x_2$.

Проверим условие (12). Получим:

$j = 1$, $i = 1, 2$:

$$\mathrm{rank}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1/x_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathrm{rank}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1/x_2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \mathrm{rank}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1/x_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 3; \qquad (20)$$

$j = 2$, $i = 1, 2$:

$$\mathrm{rank}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1/x_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathrm{rank}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1/x_2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= 3 \neq \mathrm{rank}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1/x_2 & 0 & 0 & 0 \\ x_4 & 0 & 0 & x_1 & 0 \end{bmatrix} = 4.$$

Отсюда следует, что условие (12) не выполняется. Это говорит о невозможности синтеза обратной системы для осуществления одновременного оценивания сразу двух компонент неизвестного вектора входа (отметим, что в работе [2] утверждается обратное). Тем не менее, из выражения (20) следует возможность оценивания первой компоненты вектора входа. Используя функцию $\varphi(x) = x_1 + \ln x_2$, описание обратной системы для оценивания первой компоненты найдем из выражений (13) и (9) в виде

$$f_*^{(1)}(\varphi(z^{(1)}, u, y) = \exp(z^{(1)} - y_1),$$
$$v_1 = y_1 - \exp(z^{(1)} - y_1). \qquad (21)$$

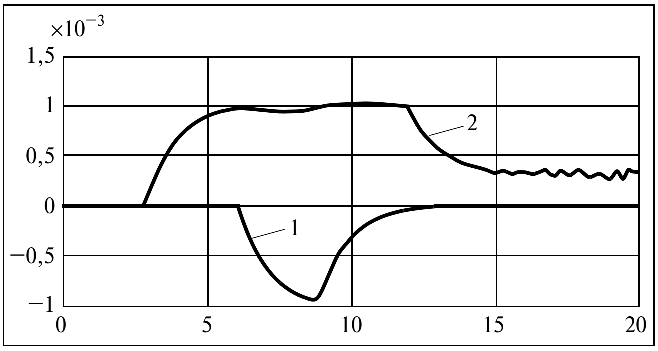


**Рис. 3. Оценка первой (*1*) и второй (*2*) компонент вектора *v*(*t*) согласно выражениям (21) и (22)**

Здесь верхний индекс при функции $f_*$ и переменной $z$ соответствует номеру оцениваемой компоненты неизвестного вектора $v$.

Заметим, что в работе [2] задача обращения рассматривалась в приложении к задаче идентификации дефектов (оценивания параметров — неизвестных входов системы (17), искажаемых дефектами). При этом рациональной представляется гипотеза об однократных дефектах. Исходя из этого, рассмотрим задачу синтеза обратной системы, оценивающей вторую компоненту неизвестного вектора входа, в предположении, что первая компонента равна нулю. Поскольку $[g_2, g_2] = 0$, минимальное замкнутое расслоение, содержащее $\mathrm{span}\{g_2\}$, $\Lambda_{\varphi^{(0)}} = \mathrm{span}\{g_2\}$. Затем, так как $\Lambda_{\varphi^{(0)}} \cap \ker J_h = \varnothing$, получим $\Lambda_{\varphi^{(1)}} = \Lambda_{\varphi^{(0)}}$. Интегрированием $\Lambda_{\varphi^{(0)}}$ найдем $\varphi(x) = \mathrm{col}(x_1, x_2, x_1x_3 - x_4, x_3 + \ln x_5)$. Несложно убедиться, что условия (12) для найденной функции $\varphi(x)$ выполняются. Воспользовавшись выражениями (13) и (9), описание обратной системы для оценивания второй компоненты неизвестного вектора $v$ найдем в виде

$$f_*^{(2)}(\varphi(z^{(1)}, u, y) = \begin{bmatrix} z_2^{(2)} \\ 0 \\ y_2 z_2^{(2)} + y_1^2(y_1 y_2 - z_3^{(2)}) + 1{,}2 y_2 \\ y_1(z_3^{(2)} - y_1 y_2 + 1/\exp(z_4^{(2)} - y_2)) \end{bmatrix},$$
$$v_2 = y_2 - y_1(y_1 y_2 - z_3^{(2)}). \qquad (22)$$

Для доказательства справедливости полученных результатов на рис. 3 приведены результаты моделирования обратных систем (21) и (22).

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассмотрена задача обращения нелинейных динамических систем вида (1). Сформулированы достаточные условия существования обратной системы (условия (8) и (12)). Показано, что синтез обратной системы сводится к задаче полной развязки от неизвестных входов. На основе дифференциально-геометрического подхода для аффинных систем предложено развитие полученного ранее [5] решения задачи полной развязки. Новое решение позволяет упростить синтез обратной системы и осуществить его поддержку имеющимися пакетами прикладных программ, оперирующими аналитическими выражениями.

## ЛИТЕРАТУРА


1. *Goodwin G. C.* Inverse problems with constraints // CD-ROM Proc. of the 15th World Congress IFAC. — Barcelona, Spain, 2002.
2. *Edelmayer A.*, *Bokor J.*, *Szabo Z.*, *Szigeti F.* Input reconstruction by means of system inversion: a geometric approach to fault detection and isolation in nonlinear systems // Int. J. AMCS. — 2004. — Vol. 14, N 2. — P. 189—199.
3. *Isidori A.* Nonlinear control systems. — Springer Verlag, 3rd Ed. — 1995.
4. *Birk J.*, *Zeitz M.* Extended Luenberger observer for nonlinear multivariable systems // Int. J. Control. — 1988. — Vol. 47, N 6. — P. 1823—1836.
5. *Шумский А. Е.* Поиск дефектов в нелинейных системах методом функционального диагностирования // Автоматика и телемеханика. — 1991. — № 12. — С. 148—155.
6. *Жирабок А. Н.*, *Шумский А. Е.* Управляемость, наблюдаемость, декомпозиция нелинейных систем // Владивосток: ДВГТУ, 1993. — 128 с.
7. *Жирабок А. Н.*, *Шумский А. Е.* Функциональное диагностирование непрерывных динамических систем, описываемых уравнениями с полиномиальной правой частью // Автоматика и телемеханика. — 1987. — № 8. — С. 154—164.
8. *Олвер П.* Приложения групп Ли к дифференциальным уравнениям // М.: Мир, 1989. — 637 с.


☎ *(4232) 43-73-70*

*E-mail: shumsky@mail.primorye.ru* ❑

УДК 513.88

# МЕТОД ТИПА МИНИМАЛЬНЫХ НЕВЯЗОК ДЛЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

И. Г. Исмаилов, Ю. О. Кузнецов

*Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова, г. Москва*

Установлена взаимосвязь между теоремой разрешимости нелинейного интегрального уравнения Гаммерштейна и сходимостью формального метода минимальных невязок. Доказана теорема сходимости метода последовательных приближений при ограничениях на ядро и нелинейность. Указано простейшее приложение.

## ВВЕДЕНИЕ

Нелинейные интегральные уравнения естественно возникают в многочисленных задачах математики, физики, теории управления и многих прикладных дисциплин. Так, например, к ним приводит задача о вынужденных колебаниях квазилинейных систем и систем автоматического регулирования, оптимизации многоканальных объектов [1—4]. Начиная с работы А. М. Ляпунова по фигурам равновесия вращающейся жидкости, аналитические методы исследования нелинейных уравнений развивались в работах П. С. Урысона, А. И. Некрасова, А. Гаммерштейна, Р. Иглиша, М. А. Красносельского, П. П. Забрейко и др.

Объект исследования может быть записан в общем виде:

$$\int_G K(s,\ t,\ \phi(t))dt = \phi(s)$$

—уравнение Урысона — и в частном:

$$\int_G K(x,\ y)f[y,\phi(y)]dy = \phi(x) \qquad (1)$$

—уравнение Гаммерштейна,