УДК 336.6(075.8)

# ОПТИМАЛЬНЫЕ СТРАТЕГИИ ИНВЕСТИРОВАНИЯ И ПОТРЕБЛЕНИЯ В СТОХАСТИЧЕСКОЙ ИНВЕСТИЦИОННОЙ СРЕДЕ С УЧЕТОМ ИНФЛЯЦИОННОГО РИСКА

И. Г. Наталуха

*Кисловодский институт экономики и права*

Исследованы оптимальные стратегии инвестирования и потребления агента финансового рынка, извлекающего полезность из промежуточного потребления и (или) конечного капитала. В явном аналитическом виде получены составляющие оптимального портфеля (спекулятивный спрос на рисковые активы и портфель хеджирования) как функции рисковых премий, стохастически эволюционирующих параметров инвестиционной среды и характеристик функции полезности инвестора. Показано, какие риски следует оптимально хеджировать и как финансировать желаемый реальный (с учетом инфляции) процесс потребления инвестициями в номинальные активы.

## ВВЕДЕНИЕ

Финансовое инвестирование непосредственно связано с формированием инвестиционного портфеля. Финансовые рынки в современных условиях (особенно зарождающиеся рынки, к числу которых относится и российский фондовый рынок) характеризуются нестационарными, стохастическими и кризисными явлениями различной природы [1—3]. В таких условиях традиционная портфельная теория [4, 5] и классические методы финансовой математики [6], представляющие собой основанный на статистических методах механизм оптимизации формируемого инвестиционного портфеля по задаваемым критериям соотношения уровня его ожидаемой доходности и риска (характеризуемого дисперсией доходности), оказываются неадекватными и неспособными объяснить как поведение финансовых временных рядов, так и несоответствие практических рекомендаций по размещению капитала в рисковые активы теоретическим предсказаниям [7, 8], полученным в предположении о постоянных инвестиционных возможностях, т. е. постоянных процентных ставках, ожидаемых доходностях активов, волатильностях и корреляциях доходностей.

Кроме того, инвестирование неотделимо от потребления (инвесторы, как правило, извлекают полезность из промежуточного потребления в различные моменты времени [9, 10], а не только из конечного капитала в конце инвестиционного периода), а инвестиционная стратегия требует динамической реструктуризации портфеля с учетом стохастической эволюции инвестиционной среды, что также не может быть учтено в рамках классической теории. Поэтому возникает необходимость развития методов моделирования оптимального размещения капитала в рисковые активы в условиях стохастического изменения их доходности с учетом стохастических параметров инвестиционной среды.

Впервые задача оптимизации портфеля в стохастической модели с непрерывным временем поставлена в работах [11, 12], однако полученные в явном виде решения соответствуют постоянным инвестиционным возможностям или являются статическими по своей природе. За редким исключением [9, 13], в большинстве известных исследований проблемы оптимального финансового инвестирования задача решается численно [14—17], что не позволяет выявить вклад составляющих портфеля (спекулятивного спроса на рисковые активы и различных видов спроса на хеджирование) в оптимальное решение. Точные аналитические решения получены лишь в наиболее простых частных случаях. Так, при простой стохастической динамике цен рисковых активов и в предположении о постоянстве процентных ставок и волатильностей цен активов точное решение задачи инвестирования без учета промежуточного потребления найдено в работе [13]. В работе [9] в предположении о бесконечном временном горизонте получено приближенное аналитическое решение задачи инвестирования (в условиях, когда краткосрочные процентные ставки постоянны, но рисковые премии описываются стохастическим процессом), однако оно явно не связано с задачей оптимального потребления.

В условиях инфляционной экономики модели финансового инвестирования должны учитывать инфляционный риск (заметим, что в работах [9—17] инфляция не учитывается). Инфляция служит одним из источников неопределенности реальных доходностей финансовых инвестиций. Хеджирование инфляционного риска представляет собой нетривиальную задачу, поскольку на финансовых рынках предлагаются только номинальные облигации, которые наряду с депозитами имеют рисковые реальные доходности.

В настоящей работе исследуются оптимальные стратегии инвестирования и потребления с учетом стохастической (в том числе немарковской) динамики цен рисковых активов, стохастической эволюции параметров инвестиционной среды и неопределенности инфляции. В явном аналитическом виде получены составляющие оптимального портфеля (спекулятивный спрос на рисковые активы и портфель хеджирования) как функции рисковых премий, волатильностей (мгновенных средних квадратических отклонений) цен рисковых активов и характеристик функции полезности инвестора, позволяющие агенту финансового рынка непрерывно реструктурировать портфель (максимизируя полезность промежуточного потребления и (или) конечного капитала) в соответствии со стохастически меняющимися инвестиционными возможностями. Показано, какие риски следует оптимально хеджировать агенту финансового рынка и как финансировать реальный процесс потребления с учетом инфляции.

## 1. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

Рассмотрим финансовый рынок, динамика которого генерируется $n$-мерным стандартным броуновским движением $z = (z_t)$, определенным на вероятностном пространстве $(\Omega, f, P)$; $F = \{f_t : t \in [0, T]\}$ — правосторонняя фильтрация $z$; $T > 0$ есть инвестиционный горизонт участника рынка. Все стохастические процессы, рассматриваемые в модели, предполагаются прогрессивно измеримыми относительно фильтрации $F$. Индекс $t$ обозначает время $t \in [0, T]$.

Инфляция в экономике моделируется следующим образом. Динамика номинальной цены единицы потребительского товара $\Pi_t$ описывается следующим стохастическим процессом

$$d\Pi_t = \Pi_t(\pi_t dt + \sigma_{\Pi t}^T dz_t),$$

причем $d\Pi_t/\Pi_t$ есть реализуемый уровень инфляции в следующий момент времени, $\pi_t$ есть ожидаемый уровень инфляции, а $\|\sigma_{\Pi t}\|$ — волатильность (мгновенное среднее квадратическое отклонение) уровня инфляции (индекс $T$ означает транспонирование). Агенты финансового рынка имеют возможность инвестировать в $n + 1$ финансовых активов без трансакционных издержек, один из которых является мгновенно номинально безрисковым активом (банковским счетом), номинальная цена которого $A_t$ удовлетворяет уравнению $dA_t = R_t A_t dA_t$, где $R_t$ — непрерывно начисляемая краткосрочная номинальная процентная ставка. Заметим, что этот актив не является безрисковым в реальном выражении, поскольку реальная цена $A_t/\Pi_t$ содержит диффузионную составляющую. Остальные $n$ активов номинально рисковые с номинальными ценами, определяемыми вектором $P_t = (P_{1t}, ..., P_{nt})^T$, удовлетворяющим следующему стохастическому дифференциальному уравнению $dP_t = \mathrm{diag}(P_t) \times [(R_t N + \sigma_{Pt}\Lambda_t)dt + \sigma_{Pt}dz_t]$, где $\mathrm{diag}(P_t)$ — матрица размерности $n \times n$ с элементами $P_t$ по главной диагонали и нулями вне главной диагонали, $N$ — $n$-мерный вектор из единиц, $\sigma_{Pt}$ — $n \times n$-мерный стохастический процесс, определяющий волатильности цен активов и корреляционно-ковариантную структуру финансового рынка, $\Lambda_t = \sigma_{Pt}^{-1}(\mu_t - R_t N)$ — $n$-мерный стохастический процесс номинальных рыночных цен риска (рисковых премий), где $\mu_t$ — $n$-мерный вектор ожидаемых доходностей по рисковым активам. Предполагаем, что $\Lambda \in L^2[0, T]$, $\sigma_p \in L^2[0, T]$ и $R_t \in L^1[0, T]$[1]. Заметим, что постановка допускает немарковскую динамику характеристик инвестиционной среды. Предполагаем, что процесс волатильностей $\sigma_P$ удовлетворяет условию невырожденности

$$\exists\varepsilon > 0 \forall(x, t) \in R^n \times [0, T] : x^T\sigma_{Pt}\sigma_{Pt}^T x \geqslant \varepsilon\|x\|^2. \qquad (1)$$

Вследствие условия (1) $\sigma_P$ имеет полный ранг $n$, что обеспечивает динамическую полноту финансового рынка.

Из полноты рынка следует существование единственного номинального ядра ценообразования, определяемого процессом [18]

$$M_t = \exp\left\{-\int_0^t R_s ds - \int_0^t \Lambda_s^T dz_s - \frac{1}{2}\int_0^t \|\Lambda_s\|^2 ds\right\}.$$

или в дифференциальной форме

$$dM_t = -M_t[R_t dt + \Lambda_t^T dz_t].$$

Единственное реальное ядро ценообразования $m = (m_t)$, где $m_t = M_t\Pi_t/\Pi_0$, определяется следующим образом

$$dm_t = -m_t[(R_t - \pi_t + \Lambda_t^T\sigma_{\Pi t})dt + (\Lambda_t - \sigma_{\Pi t})^T dz_t].$$

[1] $L^2[0, T]$ есть множество адаптированных стохастических процессов $x$, таких что $\int_0^T \|x_t\|^2 dt < \infty$ почти наверное. Аналогично, $L^1[0, T]$ есть множество адаптированных процессов $x$, таких что $\int_0^T \|x_t\| dt < \infty$ почти наверное.

Поэтому неявная реальная краткосрочная процентная ставка $r_t = R_t - \pi_t + \Lambda_t^T \sigma_{\Pi t}$, а вектор реальных рыночных цен риска $\lambda_t = \Lambda_t - \sigma_{\Pi t}$. Реальное ядро ценообразования можно представить в виде

$$m_t = \exp\left\{ -\int_0^t r_s ds - \int_0^t \lambda_s^T dz_s - \frac{1}{2}\int_0^t \|\lambda_s\|^2 ds \right\}.$$

Инвестор ставит задачу максимизации своей ожидаемой полезности в течение инвестиционного периода, выбирая соответствующие стратегии инвестирования и потребления. Предполагаем, что инвестор не получает дохода вне финансового рынка, так что нулевое значение является естественной нижней границей его капитала. Инвестиционная стратегия описывается $n$-мерным стохастическим процессом $x = (x_1, ..., x_n)^T$, где $x_{it}$ — доли капитала, инвестируемые в $i$-й рисковый актив в момент $t$. Доля капитала, инвестируемая в банковский счет, поэтому составляет $x_{0t} = 1 - x_t^T N$. Реальная стратегия потребления описывается стохастическим процессом $c = (c_t)$ (которому соответствует номинальное потребление $C_t = c_t\Pi_t$).

При данной стратегии инвестирования $x$ и номинальной стратегии потребления $C$ номинальный капитал инвестора $W_t^{C,x}$ эволюционирует согласно стохастическому дифференциальному уравнению

$$dW_t^{C,x} = [R_t W_t^{C,x} + W_t^{C,x} x_t^T \sigma_{Pt}\Lambda_t - C_t]dt + \\ + W_t^{C,x} x_t^T \sigma_{Pt} dz_t.$$

Обозначим $C^1$ множество процессов потребления $C \in L^1[0, T]$ и $L_+^1$ множество $f_T$-измеримых случайных переменных $W$ с конечными ожиданиями. Будем называть пару потребление/конечный капитал $(C, W) \in \in C_1 \times L_+^1$ допустимой при начальном капитале $W_0$, если существует стратегия инвестирования $x \in L^2[0, T]$ такая, что $W_0^{C,x} = W_0$ и $W_T^{C,x} = W$. В этом случае будем говорить, что стратегия инвестирования $x$ финансирует пару $(C, W)$.

Предполагаем, что ожидаемая полезность агента на инвестиционном горизонте представляется в следующей аддитивной по времени форме

$$E\left[\int_0^T U_1(C_t/\Pi_t, t)dt + U_2\left(\frac{W_T}{\Pi_T}\right)\right],$$

где $U_1(\cdot, t)$ и $U_2(\cdot)$ — строго возрастающие и вогнутые функции, удовлетворяющие условиям

$$U_1'(\infty, t) \equiv \lim_{C\uparrow\infty} U_1'(c, t) = 0,$$
$$U_1'(0, t) \equiv \lim_{C\downarrow 0} U_1'(c, t) = \infty,$$
$$U_2'(\infty) \equiv \lim_{\frac{W_T}{\Pi_T}\uparrow\infty} U_2'\left(\frac{W_T}{\Pi_T}\right) = 0,$$
$$U_2'(0) \equiv \lim_{\frac{W_T}{\Pi_T}\downarrow 0} U_2'\left(\frac{W_T}{\Pi_T}\right) = \infty$$

(штрихи означают частные производные по первому аргументу).

Из мартингального подхода, предложенного в работе [19] и затем формализованного в работе [20], следует, что оптимальное потребление $C^*$ и конечный уровень капитала $W^*$ можно найти из решения статической задачи

$$\sup_{(C, W) \in C^1 \times L_+^1} E\left[\int_0^T U_1(C_s/\Pi_s, s)ds + U_2(W/\Pi_T)\right],$$

$$E\left[\int_0^T M_t C_t dt + M_t W\right] \leqslant W_0,$$

после чего должен быть найден оптимальный портфель $x^*$, финансирующий пару $(C^*, W^*)$.

Недостаток мартингального подхода заключается в том, что оптимальная инвестиционная стратегия определяется только в неявном виде теоремой представления мартингалов. Поэтому в общем случае неясно, как дополнить пару $(C^*, W^*)$ портфельной стратегией с условием $W_t^{C^*, x^*} = W_t^*$, $t \in [0, T]$. Тем не менее, ниже показано, что оптимальная инвестиционная стратегия может быть получена в замкнутой форме при весьма общей, в том числе немарковской, динамике инвестиционной среды.

Поскольку построенная модель учитывает инфляционный риск, можно рассматривать задачу выбора агентом непосредственно реального процесса потребления $c = (c_t)$ и реального конечного капитала $w$. При данном реальном процессе потребления $c$ и процессе инвестирования $x$ реальный капитал инвестора $w_t^{c,x} = W_t^{c\Pi, x}/\Pi_t$ эволюционирует следующим образом:

$$dw_t^{c,x} = [w_t^{c,x}(R_t - \pi_t + \sigma_{\Pi t}^T\sigma_{\Pi t} + x_t^T\sigma_{Pt}(\Lambda_t - \sigma_{\Pi t})) - c_t]dt + \\ + w_t^{c,x}(x_t^T\sigma_{Pt} - \sigma_{\Pi t}^T)dz_t = [w_t^{c,x}(r_t + (x_t^T\sigma_{Pt} - \sigma_{\Pi t}^T)\lambda_t) - \\ - c_t]dt + w_t^{c,x}(x_t^T\sigma_{Pt} - \sigma_{\Pi t}^T)dz_t. \quad (2)$$

При реальных выражениях потребления и капитала проблема максимизации ожидаемой полезности инвестора формулируется следующим образом:

$$\sup_{(c, w) \in C^1 \times L_+^1} E\left[\int_0^T U_1(c_s, s)ds + U_2(w)\right], \quad (3)$$

$$E\left[\int_0^T m_t c_t dt + m_t w\right] \leqslant w_0. \quad (4)$$

При данном решении $(c^*, w^*)$ нужно найти портфель $x^*$, финансирующий пару $(C^*, W^*)$ при условии $w_T^{c^*, x^*} = w^*$.

Условия первого порядка, которым должны удовлетворять оптимальные планы потребления и конечного капитала, имеют вид $U_1'(c_t, t) = \psi m_t$, $U_2'(w) = \psi m_T$, где $\psi$ — множитель Лагранжа. Обозначим $I_1(\cdot, t)$ функцию, обратную функции предельной полезности $U_1'(\cdot, t)$ и

$I_2(\cdot)$ функцию, обратную предельной полезности $U_2'(\cdot)$. Определим

$$H(\psi) = E\left[\int_0^T m_t I_1(\psi m_t, t)dt + m_T I_2(\psi m_T)\right].$$

В силу вогнутости функций полезности функция $H(\cdot)$ убывающая. Обозначим $Y(\cdot)$ функцию, обратную к функции $H(\cdot)$, так что $\psi = Y(w_0)$, и оптимальное решение задачи (3), (4) может быть записано в виде

$$c_t^* = I_1(Y(w_0)m_t, t),\ t \in [0, T], \tag{5}$$

$$w^* = I_2(Y(w_0)m_T). \tag{6}$$

Процесс эволюции капитала в реальном выражении при оптимальных планах (5), (6) имеет вид

$$w_t^* = \frac{1}{m_t} E_t\left[\int_t^T m_s c_s^* ds + m_T w^*\right]. \tag{7}$$

Неявная функция полезности есть будущая ожидаемая полезность, генерируемая оптимальными стратегиями, т. е.

$$V_0 = E\left[\int_0^T U_1[I_1(Y(w_0)m_t, t)]dt + U_2(I_2(Y(w_0)m_T))\right].$$

## 2. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ПРИ ФУНКЦИИ ПОЛЕЗНОСТИ С ПОСТОЯННЫМ ОТНОСИТЕЛЬНЫМ НЕПРИЯТИЕМ РИСКА

Найдем оптимальную инвестиционную стратегию инвестора, характеризующегося функцией полезности с постоянным относительным неприятием риска, в рамках общей модели финансового рынка, построенной в § 1. Определим

$$U_1(c, t) = \varepsilon_1 e^{-\beta t}\frac{c^{1-\gamma}}{1-\gamma},\ \ U_2(w) = \varepsilon_2 e^{-\beta T}\frac{w^{1-\gamma}}{1-\gamma},\ \ \gamma > 0, \tag{8}$$

где $\gamma = -U_w''/U'$ — коэффициент относительного неприятия риска Эрроу—Пратта [5].

Функции полезности (8) при $\gamma = 1$ интерпретируются как предельный случай логарифмической полезности. Параметр $\beta$ представляет собой субъективный дисконтный фактор инвестора (т. е. фактор временного предпочтения). Неотрицательные константы $\varepsilon_1$ и $\varepsilon_2$ и определяют различные веса промежуточного и конечного потреблений, включая ситуации, когда инвестор извлекает полезность только из промежуточного потребления ($\varepsilon_2 = 0$) или только из конечного капитала ($\varepsilon_1 = 0$). Выразим оптимальные стратегии потребления и инвестирования через стохастический процесс $Q = (Q_t)$, определяемый следующим образом:

$$Q_t = \varepsilon_1^{\frac{1}{\gamma}}\int_t^T e^{-\frac{\beta}{\gamma}(s-t)} q_t^s ds + \varepsilon_2^{\frac{1}{\gamma}} e^{-\frac{\beta}{\gamma}(T-t)} q_t^T,$$

где

$$q_t^s = E_t\left[(m_s/m_t)^{1-\frac{1}{\gamma}}\right].$$

Представляя динамику $q_t^s$ в дифференциальной форме

$$dq_t^s = q_t^s[\mu_{qt}^s dt + (\sigma_{qt}^s)^T dz_t],$$

для процесса $\sigma_{Qt}$ получаем выражение

$$\sigma_{Qt} = \frac{\varepsilon_1^{\frac{1}{\gamma}}\int_t^T e^{-\frac{\beta}{\gamma}(s-t)} q_t^s\sigma_{qt}^s ds + \varepsilon_2^{\frac{1}{\gamma}} e^{-\frac{\beta}{\gamma}(T-t)} q_t^T\sigma_{qt}^T}{\varepsilon_1^{\frac{1}{\gamma}}\int_t^T e^{-\frac{\beta}{\gamma}(s-t)} q_t^s ds + \varepsilon_2^{\frac{1}{\gamma}} e^{-\frac{\beta}{\gamma}(T-t)} q_t^T}.$$

**Теорема**. *Оптимальная стратегия потребления инвестора с постоянным относительным неприятием риска в реальном выражении определяется соотношением*

$$c_t^* = \varepsilon_1^{\frac{1}{\gamma}}\frac{w_t^*}{Q_t}. \tag{9}$$

*Оптимальная инвестиционная стратегия имеет вид*

$$x_t^* = (\sigma_{Pt}^T)^{-1}\left(\frac{1}{\gamma}\Lambda_t + \left(1 - \frac{1}{\gamma}\right)\sigma_{\Pi t} + \sigma_{Qt}\right). \tag{10}$$

*Неявная функция полезности инвестора определяется выражением*

$$V_t = \frac{1}{1-\gamma} Q_t^\gamma (w_t^*)^{1-\gamma}.$$

В этих соотношениях $w^*$ означает процесс эволюции реального капитала, генерируемый оптимальными стратегиями. Доказательство теоремы см. в Приложении.

Как видно из выражения (10), оптимальное инвестиционное решение представляет собой сумму трех составляющих. Первый член $\frac{1}{\gamma}(\sigma_{Pt}^T)^{-1}\Lambda_t$ есть спекулятивная часть портфеля (“близорукий” спрос инвестора, основанный на анализе математического ожидания и дисперсии доходности актива), т. е. размещение активов инвестором, игнорирующим изменения инвестиционных возможностей. Спекулятивная позиция инвестора существенно зависит от стохастической ожидаемой доходности активов $\Lambda_t$. Например, если ожидаемая избыточная доходность идеально отрицательно коррелирована с ценой актива, спекулятивная стратегия состоит в сокращении позиции по активу после роста их цен и увеличении позиции в случае падения цены актива. Следующие два члена в формуле (10) описывают, как инвестор оптимально хеджирует изменения инвестиционных возможностей, которые включают в себя изменения темпов инфляции (второй член в формуле (10)) и изменения параметров финансового рынка (краткосрочной процентной ставки и рисковой премии) в реальном выражении. Заметим, что оптимальный портфель (10) позволяет сделать вывод о том, какие риски следует хеджировать инвестору. А именно, кроме инфляционного риска, оптимально инвестору следует хеджировать только те сдвиги в инвестиционной среде, которые влияют на ядро ценообразования в реальном выражении, т. е. при условии полноты финансового рынка следует хеджировать только изменения реальной краткосрочной процентной ставки и реальной рыночной цены риска. Кроме того, член $(\sigma_{Pt}^T)^{-1}\sigma_{Qt}$, описывающий хеджирование, определяется волатильностью отношения капитал/потребление инвестора.

Из решения (9) видно, что оптимальное потребление составляет зависящую от времени и состояния инвестиционной среды часть капитала инвестора. При постоянных реальных инвестиционных возможностях, т. е. при постоянной краткосрочной процентной ставке в реальном выражении $r_t$ и постоянной реальной рыночной цене риска $\lambda_t$ имеем

$$Q_t = \frac{1}{\xi}\left(\varepsilon_1^{\frac{1}{\gamma}} + \left[\xi\varepsilon_2^{\frac{1}{\gamma}} - \varepsilon_1^{\frac{1}{\gamma}}\right]e^{-\xi(T-t)}\right),$$

где

$$\xi = \frac{\beta}{\gamma} + \left(1-\frac{1}{\gamma}\right)\left(r + \frac{1}{2\gamma}\lambda^T\lambda\right).$$

Поскольку при этом $\sigma_{Qt} = 0$, при постоянных реальных инвестиционных возможностях оптимальная стратегия фактически сводится к решению [11], адаптированному к рассматриваемой постановке, которая явно учитывает инфляционный риск.

Целесообразно рассмотреть два важных частных случая: инвестора с логарифмической полезностью (характеризующегося нейтральным отношением к риску при $\gamma = 1$) и инвестора с бесконечным коэффициентом относительного неприятия риска при $\gamma \to \infty$ (формально результаты для инвестора с бесконечным неприятием риска определяются как предельный случай теоремы при $\gamma \to \infty$). Для инвестора с логарифмической полезностью получаем

$$Q_t = \frac{1}{\beta}(\varepsilon_1 + (\beta\varepsilon_2 - \varepsilon_1)\varepsilon^{-\beta(T-t)})$$

и $\sigma_{Qt} = 0$, так что инвестор с логарифмической функцией полезности вообще не хеджирует ни изменения инвестиционных возможностей, ни инфляционный риск, а его оптимальная норма потребления является нестационарной, но детерминированной частью капитала. Инвестор с бесконечным коэффициентом относительного неприятия риска вообще не имеет спекулятивного спроса на рисковые ценные бумаги (первый член в выражении (10) исчезает при $\gamma \to \infty$). Если такой инвестор извлекает полезность и из промежуточного потребления, и из конечного капитала, процесс $Q_t$ принимает вид

$$Q_t = \int_t^T E_t\left[\frac{m_s}{m_t}\right]ds + E_t\left[\frac{m_T}{m_t}\right].$$

Поэтому портфелем хеджирования будет реальная рентная облигация с непрерывным купоном в одну единицу потребления в интервале $[t, T]$ и единовременной выплатой с момент $T$ одной единицы потребления. В случае, если инвестор извлекает полезность только из конечного капитала, т. е. $\varepsilon_1 = 0$, портфелем хеджирования будет реальная облигация с нулевым купоном со сроком погашения на инвестиционном горизонте.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе предложена и исследована весьма общая модель полного финансового рынка номинальных ценных бумаг, цены которых описываются непрерывными стохастическими (не обязательно марковскими) процессами. Процентные ставки, ожидаемые избыточные доходности рисковых активов, ценовые волатильности, корреляции доходностей активов и инфляция описываются стохастическими дифференциальными уравнениями. Доказана теорема, дающая явную характеристику оптимальных стратегий инвестирования и потребления инвестора с функцией полезности с постоянным относительным неприятием риска. Проанализирована структура оптимального портфеля и выяснено, какие риски, связанные со стохастически меняющимися инвестиционными возможностями, следует хеджировать. Предварительный анализ показывает, что при конкретной динамике процентных ставок [18] и стохастической динамике акций, облигаций и производных ценных бумаг предложенная модель позволяет получать различные виды портфелей хеджирования (и выявлять механизмы хеджирования) при различных функциях полезности и различных уровнях относительного неприятия риска инвестора.

## ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство теоремы. При функциях полезности (8) имеем

$$I_1(y, t) = \varepsilon_1^{\frac{1}{\gamma}} e^{-\frac{\beta}{\gamma}t} y^{-\frac{1}{\gamma}}, \quad I_2(y) = \varepsilon_2^{\frac{1}{\gamma}} e^{-\frac{\beta}{\gamma}T} y^{-\frac{1}{\gamma}},$$

откуда

$$H(\psi) = \psi^{-\frac{1}{\gamma}} E\left[\varepsilon_1^{\frac{1}{\gamma}}\int_0^T e^{-\frac{\beta}{\gamma}t} m_t^{1-\frac{1}{\gamma}}dt + \varepsilon_2^{\frac{1}{\gamma}} e^{-\frac{\beta}{\gamma}T} m_T^{1-\frac{1}{\gamma}}\right] = \psi^{-\frac{1}{\gamma}} Q_0$$

и, следовательно, $Y(w_0) = Q_0^{\gamma} w_0^{-\gamma}$. Поэтому оптимальная норма потребления и конечный капитал определяются соотношениями

$$c_t^* = \varepsilon_1^{\frac{1}{\gamma}} e^{-\frac{\beta}{\gamma}t} m_t^{-\frac{1}{\gamma}} \frac{w_0}{Q_0}, \qquad (\text{П}1)$$

$$w^* = \varepsilon_2^{\frac{1}{\gamma}} e^{-\frac{\beta}{\gamma}T} m_T^{-\frac{1}{\gamma}} \frac{w_0}{Q_0}. \qquad (\text{П}2)$$

Подставляя выражения (П1) и (П2) в формулу (7), получаем оптимальный уровень капитала в реальном выражении

$$w_t^* = \frac{w_0}{Q_0} e^{-\frac{\beta}{\gamma}t} Q_t m_t^{-\frac{1}{\gamma}}. \qquad (\text{П}3)$$

Объединяя формулы (П1) и (П3), получаем выражение для оптимального процесса потребления, устанавливаемое теоремой.

Применяя к последнему выражению лемму Ито, представим динамику оптимального реального капитала в следующем виде:

$$dw_t^* = Ddt + w_t^*\left(-\frac{1}{\gamma}\frac{dm_t}{m_t} + \frac{dQ_t}{Q_t}\right) =$$

$$= Ddt + w^*\left(\frac{1}{2}\lambda_t + \sigma_{Qt}\right)^T dz_t$$

(член с тенденцией $Ddt$ нетрудно вычислить, однако выражение для него достаточно громоздко и не играет роли в дальнейшем анализе). Сравнивая это выражение с выражением для динамики капитала для произвольного портфельного процесса $x$ (2) и используя соотношение $\lambda_t = \Lambda_t - \sigma_{\Pi t}$, нетрудно вывести выражение для оптимального портфеля, устанавливаемое теоремой.

При вычислении функции полезности учтем, что

$$w_s^* = w_t^* e^{-\frac{\beta}{\gamma}(s-t)} \left(\frac{m_s}{m_t}\right)^{-\frac{1}{\gamma}} \frac{Q_s}{Q_t}$$

для всех $s$ и $t$ из промежутка $[0, T]$. Следовательно, можно записать потребление на отрезке $[t, T]$ и конечный капитал, выраженные через функции, зависящие от $t$:

$$c_s^* = \varepsilon_1^{\frac{1}{\gamma}} e^{-\frac{\beta}{\gamma}(s-t)} \left(\frac{m_s}{m_t}\right)^{-\frac{1}{\gamma}} \frac{w_t^*}{Q_t}, \quad w_T^* = \varepsilon_2^{\frac{1}{\gamma}} e^{-\frac{\beta}{\gamma}(T-t)} \left(\frac{m_T}{m_t}\right)^{-\frac{1}{\gamma}} \frac{w_t^*}{Q_t}.$$

Тогда неявная функция полезности примет вид

$$V_t = E_t\left[\int_t^T e^{-\beta(s-t)}\varepsilon_1 \frac{1}{1-\gamma}(c_s^*)^{1-\gamma} ds + e^{-\beta(T-t)}\varepsilon_2 \frac{1}{1-\gamma}(w^*)^{1-\gamma}\right] =$$

$$= \frac{1}{1-\gamma}E_t\left[\int_t^T e^{-\beta(s-t)}\varepsilon_1\varepsilon_1^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} e^{-\frac{\beta(1-\gamma)}{\gamma}(s-t)}\left(\frac{m_s}{m_t}\right)^{-\frac{1-\gamma}{\gamma}}\left(\frac{w_t^*}{Q_t}\right)^{1-\gamma} ds +\right.$$

$$\left. + e^{-\beta(T-t)}\varepsilon_2\varepsilon_2^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} e^{-\frac{\beta(1-\gamma)}{\gamma}(T-t)}\left(\frac{m_T}{m_t}\right)^{-\frac{1-\gamma}{\gamma}}\left(\frac{w_t^*}{Q_t}\right)^{1-\gamma}\right] =$$

$$= \frac{1}{1-\gamma}\left(\frac{w_t^*}{Q_t}\right)^{1-\gamma} Q_t = \frac{1}{1-\gamma} Q_t^{\gamma}(w_t^*)^{1-\gamma}. \blacklozenge$$

## ЛИТЕРАТУРА


1. *Eichengreen B.* Financial crises and what to do about them. — Oxford: Oxford University Press, 2002.
2. *Sornette D.* Why stock markets crash. — Princeton: Princeton University Press, 2002.
3. *Наталуха И. Г.* Моделирование спекулятивного бума на финансовом рынке с учетом психологии инвесторов // Материалы VI всеросс. симпозиума “Математическое моделирование и компьютерные технологии”. — Кисловодск, 2004. — Т. 2. — С. 7—8.
4. *Шарп У., Александер Г., Бейли Д.* Инвестиции. — М.: ИНФРА-М, 2003.
5. *Крушвиц Л.* Финансирование и инвестиции. — СПб.: Питер, 2000.
6. *Четыркин Е. М.* Финансовая математика. — М.: Дело, 2002.
7. *Samuelson P. A.* The long-term case for equities and how it can be oversold // Journal of Portfolio Management. — 1994. — Vol. 21, N 1. — P. 15—24.
8. *Canner N., Mankiw N. G., Weil D. N.* An asset allocation puzzle // American Economic Review. — 1997. — Vol. 87, N 2. — P. 181—191.
9. *Campbell J. Y., Viceira L. M.* Consumption and portfolio decisions when expected returns are time — varying // Quarterly Journal of Economics. — 1999. — Vol. 114, N 2. — P. 433—495.
10. *Наталуха И. Г.* Мартингальный подход к задачам определения оптимальных стратегий инвестирования и потребления // Изв. вузов. Северо-Кавказский регион. Общественные науки (Приложение к журналу). — 2002. — № 2. — С. 64—70.
11. *Merton R. C.* Lifetime portfolio selection under uncertainty: the continuous — time case // Review of Economics and Statistics. — 1969. — Vol. 51, N 2. — P. 247—257.
12. *Merton R. C.* Optimum consumption and portfolio rules in a continuous − time model // Journal of Economic Theory. — 1971. — Vol. 3, N 2. — P. 373—413.
13. *Kim T. S., Omberg E.* Dynamic nonmyopic portfolio behaviour // Review of Financial Studies. — 1996. — Vol. 9, N 1. — P. 141—161.
14. *Balduzzi P., Lynch A. W.* Transaction costs and predictability: some utility cost calculations // Journal of Financial Economics. — 1999. — Vol. 52, N 1. — P. 47—78.
15. *Barberis N.* Investing for the long run when returns are predictable // Journal of Finance. — 2000. — Vol. 55, N 1. — P. 225—264.
16. *Brandt M. W.* Estimating portfolio and consumption choice: a conditional Euler equations approach // Journal of Finance. — 1999. — Vol. 54, N 6. — P. 1609—1645.
17. *Brennan M. J., Schwartz E. S., Lagnado R.* Strategic asset allocation // Journal of Economic Dynamics and Control. — 1997. — Vol. 21, N 7. — P. 1377—1403.
18. *Duffie J. D.* Dynamic asset pricing theory. Princeton: Princeton University Press, 1996.
19. *Pliska S. R.* A stochastic calculus model of continuous theory: optimal portfolios // Mathematics of Operations Research. — 1986. — Vol. 11, N 2. — P. 371—382.
20. *Cox J. C., Huang C.-F.* A variational problem arising in financial economics // Journal of Mathematical Economics. — 1991. — Vol. 29, N 3. — P. 465—487.


☎ *(87937) 4-81-64*

*E-mail: inataloukha@pochta.ru* ❑