ние позволяет упростить синтез обратной системы и осуществить его поддержку имеющимися пакетами прикладных программ, оперирующими аналитическими выражениями.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Goodwin G. C.* Inverse problems with constraints // CD-ROM Proc. of the 15th World Congress IFAC. — Barcelona, Spain, 2002.
2. *Edelmayer A.*, *Bokor J.*, *Szabo Z.*, *Szigeti F.* Input reconstruction by means of system inversion: a geometric approach to fault detection and isolation in nonlinear systems // Int. J. AMCS. — 2004. — Vol. 14, N 2. — P. 189—199.
3. *Isidori A.* Nonlinear control systems. — Springer Verlag, 3rd Ed. — 1995.
4. *Birk J.*, *Zeitz M.* Extended Luenberger observer for nonlinear multivariable systems // Int. J. Control. — 1988. — Vol. 47, N 6. — P. 1823—1836.
5. *Шумский А. Е.* Поиск дефектов в нелинейных системах методом функционального диагностирования // Автоматика и телемеханика. — 1991. — № 12. — С. 148—155.
6. *Жирабок А. Н.*, *Шумский А. Е.* Управляемость, наблюдаемость, декомпозиция нелинейных систем // Владивосток: ДВГТУ, 1993. — 128 с.
7. *Жирабок А. Н.*, *Шумский А. Е.* Функциональное диагностирование непрерывных динамических систем, описываемых уравнениями с полиномиальной правой частью // Автоматика и телемеханика. — 1987. — № 8. — С. 154—164.
8. *Олвер П.* Приложения групп Ли к дифференциальным уравнениям // М.: Мир, 1989. — 637 с.

☎ *(4232) 43-73-70*

E-mail: shumsky@mail.primorye.ru ❑

УДК 513.88

МЕТОД ТИПА МИНИМАЛЬНЫХ НЕВЯЗОК ДЛЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

И. Г. Исмаилов, Ю. О. Кузнецов

Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова, г. Москва

Установлена взаимосвязь между теоремой разрешимости нелинейного интегрального уравнения Гаммерштейна и сходимостью формального метода минимальных невязок. Доказана теорема сходимости метода последовательных приближений при ограничениях на ядро и нелинейность. Указано простейшее приложение.

ВВЕДЕНИЕ

Нелинейные интегральные уравнения естественно возникают в многочисленных задачах математики, физики, теории управления и многих прикладных дисциплин. Так, например, к ним приводит задача о вынужденных колебаниях квазилинейных систем и систем автоматического регулирования, оптимизации многоканальных объектов [1—4]. Начиная с работы А. М. Ляпунова по фигурам равновесия вращающейся жидкости, аналитические методы исследования нелинейных уравнений развивались в работах П. С. Урысона, А. И. Некрасова, А. Гаммерштейна, Р. Иглиша, М. А. Красносельского, П. П. Забрейко и др.

Объект исследования может быть записан в общем виде:

$$\int_G K(s, t, \phi(t))dt = \phi(s)$$

—уравнение Урысона — и в частном:

$$\int_G K(x, y)f[y,\phi(y)]dy = \phi(x) \qquad (1)$$

—уравнение Гаммерштейна,

где K — линейное либо нелинейное ядро, ϕ — неизвестная функция, G — компактное топологическое пространство, s и x — переменные.

Для приближенного решения уравнения (1) может быть применен метод механических квадратур или метод Галеркина—Петрова [5, 6].

Установлено множество теорем следующего толка. От уравнения (1) переходят к системе нелинейных уравнений путем замены интеграла конечной суммой. Тогда, если решение $\varphi_0(x)$ уравнения (1) изолировано в банаховом пространстве $C(G)$ и имеет топологический индекс, отличный от нуля, то при измельчении шага квадратурного процесса множество решений конечной системы становится непустым и приближает истинное решение в некоторой метрике. Другие теоремы требуют невырожденности производной Фреше соответствующего уравнению (1) нелинейного оператора в точке $\varphi_0(x)$.

Те же два основных предложения гарантируют в некоторых случаях сходимость метода Галеркина для решения уравнения (1). Различные теоремы сходимости проекционных и фактор-методов для решения уравнения (1) установлены, в частности, Г. М. Вайникко.

1. ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА

Предлагаемый в работе результат позволяют делать выводы о сходимости итерационных методов для уравнений Гаммерштейна. В основе соответствующей теории лежат вариационные методы нелинейного анализа.

Опишем вкратце общеизвестную идею. Пусть рассматривается уравнение (1), где G — множество конечной или бесконечной лебеговой меры, $K(x, y)$ — положительное симметричное ядро, порождающее линейный оператор

$$A\phi(x) = \int_G K(x, y)\phi(y)dy.$$

От функции $f(x, u)$, $x \in G$, $-\infty < u < \infty$, в общем случае требуют соблюдения условий Каратеодори. Через $\mathfrak{f}$ обозначают соответствующий функции $f(x, u)$ оператор композиции (оператор Немыцкого). Тогда уравнение (1) формально может быть записано в операторном виде:

$$\phi = A\mathfrak{f}(\phi). \tag{2}$$

Допустим, что оператор $\mathfrak{f}$ действует в вещественном пространстве $L^2(G)$ и оператор A вполне непрерывен в этом пространстве. Тогда, как известно из спектральной теории, квадратный корень $A^{1/2}$ будет также положительным компактным оператором в пространстве $L^2(G)$.

Рассмотрим функционал

$$\Phi(\psi) = \frac{1}{2}(\psi, \psi) - \int_G dx \int_0^{A^{1/2}\psi(x)} f(x, u)du, \quad \psi \in L^2(G). \tag{3}$$

Начиная еще с работ Гаммерштейна и Голомба известно, что его градиент $\nabla\Phi = I - A^{1/2}\mathfrak{f}A^{1/2} =: B$. С другой стороны, исходное уравнение $\varphi = A\mathfrak{f}(\varphi)$ и уравнение $B\psi = \theta$ родственны в том смысле, что между их решениями существует взаимно однозначное соответствие $\phi = A^{1/2}\psi$.

Таким образом, начальная задача свелась к поиску критических точек дифференцируемого по Фреше функционала (3) и, следовательно, для разрешимости уравнения (1) достаточно установить наличие локального минимума функционала Φ. Приведем одну теорему о существовании решения для уравнения (1), которая потребуется в дальнейшем изложении:

Теорема 1 [7]. *Пусть линейный интегральный оператор*

$$A\phi(x) = \int_G K(x, y)\phi(y)dy$$

является самосопряженным положительно определенным и компактным в $L^2(G)$.

Пусть оператор Немыцкого $\mathfrak{f}$ *действует в* $L^2(G)$ *(для этого достаточно, например, линейной оценки роста по u на бесконечности) и выполнено такое условие:*

$$\int_0^u f(x, u)du \leqslant \frac{a}{2}u^2 + b(x)|u|^{2-\gamma} + c(x), \tag{4}$$

$x \in G$, $-\infty < u < \infty$, $0 < \gamma < 2$, $b(x) \in L^{2/\gamma}$, $c(x) \in L$, *а число а удовлетворяет неравенству* $a < 1/\lambda_0$, *где* λ_0 *— наибольшее собственное значение ядра.*

Тогда уравнение (1) *имеет, по крайней мере, одно решение в* $L^2(G)$. ♦

Данная теорема сформулирована здесь потому, что в ее условиях главный функционал (3) обладает следующими свойствами:

- $\Phi(\psi) = 1/2\|\psi\|^2 + g(\psi)$, где $g(\cdot)$ — слабо непрерывный функционал;
- $\lim\limits_{\|\psi\| \to \infty} \Phi(\psi) = +\infty$, т. е. функционал $\Phi(\cdot)$ — *растущий.*

Собственно, на основании этих двух фактов уже легко сделать вывод о существовании глобального минимума функционала (3).

Хорошо известно, что сумма квадратичного положительного и дифференцируемого слабо непрерывного функционалов удовлетворяет условию Пале—Смейла.

Это легко показать. В самом деле, если $M \subset H$ — ограниченное замкнутое множество в сепарабельном гильбертовом пространстве H, а $\{\psi_n\}_{n = 1, \infty}$ — последовательность такая, что $\lim\limits_{n \to \infty} \|\nabla\Phi(\psi_n)\| = 0$, то

$$\psi_n + \nabla g(\psi_n) \to \theta, \quad n \to \infty. \tag{5}$$

Без ограничения общности полагаем $\psi_n \to \psi^*$, $n \to \infty$ (слабая сходимость). Тогда из выражения (5) следует: $\psi_n \to -\nabla g(\psi^*)$, значит $\psi^* \in M$, $\nabla\Phi(\psi^*) = \lim\limits_{n \to \infty} \nabla\Phi(\psi_n) = \theta$, что и требовалось показать.

Таким образом мы пришли к условию теоремы 2.4.8 монографии [4] и можем сделать вывод:

Теорема 2. *Пусть выполнены приведенные выше условия теоремы* 1 *о разрешимости. Пусть функция* $f(x,u)$,

$x \in G$, $u \in \mathbb{R}$ липшицева по u с константой L. Тогда итерационная последовательность

$$\varphi_{n+1} = \varphi_n - \gamma_n(I - A\mathfrak{f})\varphi_n, \quad n = 0, 1, 2, ...,$$
$$\varphi_0 \in A^{1/2}L^2(G), \qquad (6)$$
$$0 < b_0 \leqslant \gamma_n \leqslant b_1 < 2(1 + \|A\|L)^{-1},$$

сходится к множеству $\mathfrak{M}$ решений уравнения (1):

$$\lim_{n \to \infty} \rho(\varphi_n, \mathfrak{M}) = 0. \qquad (7)$$

Доказательство. По теореме 2.4.8 [4] итерационная последовательность вида

$$\psi_{n+1} = y_n - \gamma_n(I - A^{1/2}\mathfrak{f}A^{1/2})\psi_n,\ n = 0, 1, 2, ...,\ \psi_0 \in L^2(G), \quad (8)$$

в которой управляющие параметры подчинены записанным в условии теоремы неравенствам, сходится к ограниченному множеству критических точек функционала φ. Умножим теперь последовательность (8) слева на $A^{1/2}$ и сделаем замену $\varphi_n = A^{1/2}\psi_n$. Мы получили последовательность (6). Для ψ_n можно записать $\psi_n = \psi_n' + z_n$, где ψ_n' лежит в множестве критических точек ϑ, $|z_n| \to 0$. Умножая теперь последнее равенство на ограниченный оператор $A^{1/2}$ слева, сразу же получаем соотношение (7). ♦

2. ЗАМЕЧАНИЯ

- Заметим, что в скобках в формуле (6) стоит невязка уравнения (1) в операторной форме (2), и итерационная последовательность приобретает форму метода минимальных невязок, хорошо известного в теории приближенных методов решения линейных операторных уравнений. Суть такого способа, предложенного М. А. Красносельским и М. Г. Крейном [8], состоит в следующем.

  Рассматривается линейное уравнение

$$Bx = b, \quad Bx = \int_m^M \lambda dE_\lambda x, \quad 0 < m < M < \Gamma,$$

с положительно определенным ограниченным оператором. Предполагается, что у него есть решение x^*. Тогда при специальном выборе управляющих параметров итерационный процесс $x_{n+1} = x_n - c_{n+1}\Delta_n$, $n = 0, 1, 2, ...$, $\Delta_n = Bx_n - b$, сходится к решению x^* с линейной скоростью (скоростью геометрической прогрессии).

- Условие “оператор $\mathfrak{f}$ действует в $L^2(G)$” является ограничительным, так как приводит к оценке $|f(x, u)| \leqslant a(x) + b|u|$, $b > 0$, $a(s) \in L^2$.

Это, по сути, критерий определенности оператора в пространстве L^2, что следует из теоремы Я. Б. Рутицкого и М. А. Красносельского. Разумеется, из требования липшицевости по u следует такая оценка, однако каждое из этих предположений может быть преодолено по-своему.

В 1952 г. в “Докладах Академии наук СССР” М. А. Красносельский опубликовал работу о расщеплении линейных операторов, действующих из одного пространства в другое [7]. Речь идет о представлении вида $A = HH^*$, где H — линейный оператор. Не затрагивая детали, отметим, что этот результат позволяет ослабить ограничение роста функции $f(x, u)$ до любой оценки типа $|f(x, u) < a(x) + b|u|^\rho$, $\rho > 0$, при некоторых дополнительных требованиях к линейному оператору A. Например, если интегральное ядро $K(x, y)$ симметрично и непрерывно, то функция $f(x, u)$ может расти на бесконечности как любая степенная функция, удовлетворяющая оценке (4*n*); например, $f(x, u) = u^m \sin u^{2m+2}$, $m \in \mathbb{N}$.

- Потребность рассматривать неограниченные ядра возникает в задачах математической физики, где фигурируют ядра-потенциалы:

$$K_1(x, y) = \frac{Q_1(x, y)}{\|x - y\|^\lambda}, \quad x, y \in G, \quad \lambda > 0,$$

$K_2(x, y) = Q_2(x, y)\,|\ln\|x - y\||$, где Q_1 и Q_2 ограничены.

- Самые большие претензии могут возникнуть к операции извлечения квадратного корня из оператора A, которая в общем случае сложнее, чем исходная задача приближенного решения уравнения Гаммерштейна. На это есть два ответа:

— уравнение (1) может изначально содержать итерации линейной компоненты:

$$\phi = A^{2k}\mathfrak{f}\phi, \quad k \in \mathbb{N};$$

— возможно, известна система собственных функций e_j оператора A, тогда

$$A\phi = \sum_{j=1}^{\infty}(\phi, e_j)\lambda_j e_j,\ \lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \lambda_3 \geqslant ... > 0,\ \lambda_j \to 0,\ j \to \infty,$$

$$Ae_j = \lambda_j e_j,\ A^{1/2} = \sum_{j=1}^{\infty}(\phi, e_j)\lambda_j^{1/2} e_j.$$

Такая ситуация возможна, когда оператор A является функцией Грина некоторого хорошо известного дифференциального оператора. Например, оператора Лапласа в области простой формы.

- Теорема 2 допускает реализацию в случае, когда оператор A не положительно определен, но имеет *конечное* число отрицательных собственных значений. Приведем для этого случая выражение итерационного процесса:

$$\psi_{n+1} = \psi_n + \gamma_n(J + |A|^{1/2}\mathfrak{f}|A|^{1/2})\psi_n, \quad n = 0, 1, 2, ...,$$

начальное приближение ψ_0 произвольно, J — оператор отражения относительно конечномерного отрицательного подпространства, $J^2 = I$.

С помощью известного неравенства

$$\|A\| \leqslant \left(\iint_{G \times G} |K(x, y)|^2\, dx\, dy\right)^{1/2} \equiv \|K\|_{L^2(G \times G)}$$

оценка параметров алгоритма может быть записана так:

$$0 < b_0 \leqslant \gamma_n \leqslant b_1 < \frac{2}{1 + L\|K\|_{L^2(G \times G)}}.$$

3. ПРИМЕР

Приведем пример физической задачи, которую можно решить с помощью теоремы 2.

Как известно, поле температур $u(x)$, $x = (x_1, x_2, x_3) \in \Omega \subset \mathbb{R}^3$, установившееся под действием источников с плотностью $f(x)$, удовлетворяет уравнению Пуассона

$$\Delta u(x) = f(x), \quad x \in \Omega. \tag{9}$$

На границе задается какое-либо условие, например, условие Дирихле:

$$u(x) = 0, \ x \in \Gamma = \partial\Omega. \tag{10}$$

Границу Γ области Ω будем считать достаточно гладкой.

Предположим теперь, что скалярное поле источников тепла $f(x)$ само зависит от величины $u(x)$: $f = f(x, u(x))$. Это характерно, например, для химических реакций, где интенсивность процесса зависит от температуры и обычно возрастает с ростом u. Тогда стационарное поле температур является решением задачи Дирихле для нелинейного уравнения Пуассона:

$$\begin{cases} \Delta u(x) = f(x, u(x)), \quad x \in \Omega & (11) \\ u(x) = 0, \quad x \in \partial\Omega. & (12) \end{cases}$$

Как известно из курса математической физики, задача (11), (12) может быть записана в виде интегрального уравнения

$$u(x) = -\int_{\Omega} G(x, y) f[y, u(y)]dy. \tag{13}$$

Такое представление возможно, если функция f гладкая. Здесь $G(x, y) = 1/(4\pi\|x - y\|) + \nu(x, y)$ — функция Грина задачи (9), (10), функция ν аналитична по y при фиксированном x и обеспечивает нулевые граничные условия. Ядро $G(x, y)$ симметрично и положительно. Обозначим (формальный) линейный интегральный оператор, соответствующий этому ядру, через A:

$$A\phi(x) = \int_{\Omega} G(x, y)\phi(y)dy.$$

Из теорем 8.1 и 8.5 книги [9] следует, что оператор A действует и вполне непрерывен в пространстве $L^2(\Omega)$. Кроме того, он самосопряжен и положительно определен.

Предположим, что нелинейность $f(x, u)$ липшицева по u и удовлетворяет неравенству (4). Через $\mathfrak{f}$ обозначим, как обычно, соответствующий оператор Немыцкого. Уравнение (13) запишется в виде $u = -A\mathfrak{f}(u)$. Это уравнение Гаммерштейна. Ограниченное множество его решений компактно; обозначим его $\mathfrak{m}$. Теперь в силу теоремы 2 получаем: для любого начального приближения $\varphi_0 \in A^{1/2}L^2(\Omega)$ итерационная последовательность $\varphi_{n+1} = \varphi_n - \gamma_n(I + A\mathfrak{f})\varphi_n$, $n = 0, 1, 2, \ldots, 0 < b_0 \leqslant \gamma_n \leqslant$ $\leqslant b_1 < 2(1 + \|A\|L)^{-1}$, сходится по норме пространства к множеству $\mathfrak{m}$: $\lim\limits_{n \to \infty} \rho(\varphi_n, \mathfrak{m}) = 0$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Сам факт, что для нелинейных задач справедлив метод типа метода минимальных невязок, представляется интересным. Как упомянутая классическая теорема разрешимости уравнения Гаммерштейна дает лишь грубые достаточные условия существования решения, так и теорема 2 настоящей работы дает лишь достаточные условия сходимости итерационного процесса. И в том, и в другом случае мы ничего не можем сказать о единственности и локализации полученной функции: речь идет исключительно о *некотором* "корне" уравнения. Это проявление обстоятельства, о котором М. А. Красносельский писал в монографии [10]: "Единственность решения — явление нетипичное для операторных уравнений с существенными нелинейностями". Таким образом, для выяснения, куда сходится процесс и с какой скоростью, необходима дополнительная информация об изучаемом уравнении. На практике в данном случае полезно то, что мы имеем дело с методом *типа* градиентного спуска, и параметры метода можно выбирать произвольными достаточно малыми положительными числами, уменьшая их, если сходимость не достигнута.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бобылев Н. А., Исмаилов И. Г.* Итерационные процедуры в задачах управления и оптимизации // Приборы и системы управления. — 1997. — № 2. — С. 15—18.
2. *Исмаилов И. Г.* О приближенном построении оптимальных управлений многоканальными сетевыми системами // Тез. докл. VI Всесоюзного совещания "Управление многосвязными системами". — Суздаль, 1990. — С. 67—68.
3. *Исмаилов И. Г.* Управление динамической моделью многоканальной сети связи // Тез. докл. III Всесоюзного совещания по распределенным автоматизированным системам массового обслуживания. — Винница, 1990.
4. *Исмаилов И. Г.* Приближенные процедуры решения задач управления и оптимизации. — М.: МАКС Пресс, 2002.
5. *Бобылев Н. А.* К теории фактор-методов приближенного решения нелинейных задач // Доклады АН СССР. — 1972. — 199. — № 1. — С. 9—12.
6. *Вайникко Г. М.* Анализ дискретизационных методов. — Тарту: Изд-во Тартуского ун-та, 1976.
7. *Красносельский М. А.* Топологические методы в теории нелинейных интегральных уравнений. — М.: Гостехиздат, 1956.
8. *Красносельский М. А., Крейн С. Г.* Об итерационном процессе с минимальными невязками // Матем. сб. — 1952. — Т. 31, № 2.
9. *Интегральные* операторы в пространствах суммируемых функций // М. А. Красносельский, П. П. Забрейко, Е. И. Пустыльник, П. Е. Соболевский. — М.: Наука, 1966.
10. *Красносельский М. А., Забрейко П. П.* Геометрические методы нелинейного анализа. — М.: Наука, 1975.

☎ *(095) 334-79-00*

E-mail: ilham_is@mail.ru ❑