УДК 519.23/25:004.891

УПРАВЛЕНИЕ ЗАПАСАМИ ТОВАРОВ АЖИОТАЖНОГО СПРОСА

А. Г. Беляков, А. В. Лапин, А. С. Мандель

Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова, г. Москва

Рассмотрена проблема управления запасами товаров, пользующихся повышенным спросом, в условиях априорной неопределённости статистических характеристик спроса. Предложены два подхода к формализации проблемы и адаптивные алгоритмы управления запасами.

ВВЕДЕНИЕ

Значительная часть выручки многих товаропроизводителей обусловлена выпуском ими товаров ударного, повышенного спроса, товаров, которые в текущий момент являются "писком моды". Яркими примерами товарных рынков, на которых мода диктует возникновение ажиотажного спроса, можно считать торговлю книгами, аудио- и видеозаписями, CD- и DVD-дисками с популярной музыкой и видеопродукцией, одеждой, косметикой, так называемыми пищевыми добавками и многими другими изделиями, способными стать настоящими "хитами сезона". Естественно, что формирование ассортимента таких товаров напрямую связано с грамотным решением задач пассивного и активного маркетинга. В данном случае под пассивным маркетингом мы понимаем аналитическое изучение наблюдаемого на рынке спроса с целью выработки предложений по выводу на рынок новых видов "сверхмодной" продукции, а под активным — организацию и проведение эффективных рекламных кампаний.

После того, как портфель "хитов" сформирован и выработана стратегия продаж, включающая в себя выбор графиков проведения рекламной кампании и согласованных с ними (по датам) графиков продаж, особую актуальность приобретает проблема определения объёмов и графиков выпуска (если у фирмы-производителя имеется собственная торговая сеть) или приобретения (если речь идет о торгово-закупочной компании) соответствующих товаров.

Чтобы рассчитать указанные производственные или закупочные графики, необходимо располагать адекватной моделью спроса на впервые выпускаемые на рынок виды товаров. Общая особенность сверхмодных товаров состоит в том, что львиная доля их продаж приходится на ограниченный отрезок времени, который, как правило, исчисляется несколькими неделями (обычно от 7—8 до 14—16). По завершении периода потребительского ажиотажа соответствующие товары либо вытесняются с рынка новыми "хитами", либо переходят в разряд "классики", т. е. таких товаров, которые пользуются устойчивым, но в десятки раз меньшим спросом. Важно, что доля выручки от продажи особо модных товаров нередко составляет более половины общего объёма выручки торговых и производственно-торговых организаций. Причем вся информация о том, каким спросом они, эти товары, будут пользоваться на всем интервале их активных продаж, носит чисто предположительный характер, а любые ошибки в сформулированных предположениях могут приводить к очень большим потерям — от утраты потребительского спроса в случае его недооценки до создания бессмысленно больших запасов товаров, спрос на которые оказался переоценённым.

1. СТАТИСТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА КРИВЫХ СПРОСА В ИНТЕРВАЛАХ АЖИОТАЖНЫХ ПРОДАЖ

Как отмечено во Введении, период ажиотажного спроса на большинство сверхмодных товаров обычно исчисляется несколькими неделями. Назовём соответствующий интервал времени $T = N\tau$ (где τ — выбранная единица измерения времени, в нашем случае неделя) периодом продаж. Иначе говоря, период продаж — это тот интервал времени, на протяжении которого регистрируются значения спроса, заметно превышающие средние. По завершении периода продаж спрос резко спадает, уменьшаясь в десятки раз.

В распоряжении авторов имеется база данных по истории продаж нескольких тысяч видов товаров, многие из которых принадлежат к рассматриваемому в статье классу "хитов", т. е. товаров ажиотажного спроса. Проведенный анализ показал, что среди товаров ажиотажного спроса чаще всего встречаются 3 варианта поведения кривых спроса в периоде продаж:

1) "одногорбые" кривые спроса (рис. 1, *а*, см. 3-ю стр. обложки);

2) "двугорбые" кривые спроса (рис. 1, *б*);

3) "внесистемные" кривые спроса (рис. 1, *в*).

Кривые спроса, поименованные "внесистемными", представляют собой чередование более чем двух максимумов и минимумов спроса в периоде продаж.

В результате кривые спроса 1-го, 2-го и 3-го типов были объединены в соответствующие классы, а данные по ним (в пределах каждого класса) специальным образом пронормированы с тем, чтобы привести все кривые к одной и той же максимальной амплитуде и одному и тому же периоду продаж. В частности, вместо каждой из кривых спроса $\xi_i(t)$ в периоде продаж $[0,\ T_i]$ использовались кривые $\eta_i(t')$, которые получались из кривых $\xi_i(t)$ заменой переменных: $t' = t/T_i$, $\eta_i(t') = \xi_i(t)/\max\limits_{t\in[0,\ T_i]}\xi_i(t)$.

После этого из ансамблей нормированных кривых, относящихся к каждому конкретному классу, отбирались "похожие" кривые (скажем, такие кривые из класса "одногорбых", у которых момент времени t', когда достигается значение $\max\limits_{t\in[0,\ T_i]}\xi_i(t)$, совпадал). Затем для выделенных подансамблей рассчитывались оценки коэффициентов попарной корреляции для значений соседних во времени точек (отстоящих друг от друга на один временной шаг, до нормировки равный τ). Не будем приводить вида соответствующих зависимостей оценок коэффициентов корреляции от момента времени t', ограничимся лишь тем, — и только это будет важно для дальнейшего — что отметим несколько чрезвычайно примечательных фактов:

— для подансамблей кривых спроса класса 1 ("одногорбые" кривые) значение коэффициента попарной корреляции почти во всем периоде продаж оказалось большим, чем 0,85;

— для подансамблей кривых спроса класса 2 ("двугорбые" кривые) значение коэффициента попарной корреляции почти во всем периоде продаж оказалось большим, чем 0,6;

— для ансамбля кривых спроса класса 3 ("внесистемные" кривые) значение коэффициента корреляции крайне редко превышало порог 0,1.

Отсюда следует, что можно выделить такие подансамбли (синонимы: подтипы, подклассы) кривых 1-го и 2-го типов (особенно в случае "одногорбых" кривых спроса), для которых в нормированном варианте реализуются "почти" детерминированные зависимости спроса от времени (значительная "доля" случайности "сосредоточена" только в значениях T_i) и $\max\limits_{t\in[0,\ T_i]}\xi_i(t)$.

Напротив, кривые спроса 3-го типа гораздо естественнее описывать моделью последовательности взаимно независимых случайных величин, причем, не исключено, с одним общим для всех значений спроса распределением вероятностей (модель стационарного дискретного по времени "белого шума").

2. ДВА ПОДХОДА К ПОСТАНОВКЕ И РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ ИДЕНТИФИКАЦИИ МОДЕЛИ И СИНТЕЗА АЛГОРИТМОВ УПРАВЛЕНИЯ ЗАПАСАМИ ТОВАРОВ АЖИОТАЖНОГО СПРОСА

В соответствии с отмеченным выше фактом преобладания в полном ансамбле наблюдавшихся кривых спроса двух типов статистических особенностей этих кривых можно рассматривать два основных подхода к формализации, и соответственно, способам идентификации и анализа моделей управления запасами (или производством) товаров ажиотажного спроса.

А именно, для новых видов товаров повышенного спроса, которые потенциально классифицируются как принадлежащие к двум первым типам ("одногорбые" и "двугорбые" кривые), следует применять схему управления по прогнозу на базе модели детерминированного тренда (параметры которого также предстоит определить) с малыми случайными вариациями в окрестности тренда. В рамках такого подхода "центром тяжести" решения задачи управления запасами становится формирование хороших прогнозов спроса (см. § 3). При наличии таких прогнозов последующее решение задачи управления запасами сводится к применению классических детерминированных или вероятностных моделей управления запасами [1, 2].

Впрочем, задача построения "хороших" прогнозов оказывается достаточно проблематичной, поскольку для всех новых ("сверхмодных") товаров и достаточно коротком периоде продаж приходится работать с вообще отсутствующей либо очень короткой выборкой данных и основная нагрузка переносится на синтез процедур подготовки хорошей априорной информации. В данном варианте задача формирования прогноза будет решаться в рамках экспертно-статистического подхода [3—5] с применением метода аналогов [6, 7] (см. § 3).

Второй подход связан с кривыми спроса третьего типа ("внесистемными"). В этом варианте задача управления запасами решается в условиях стохастической неопределенности при весьма малой априорной информации и для её решения будут строиться адаптивные процедуры (см. § 4 и 5).

3. ЭКСПЕРТНО-СТАТИСТИЧЕСКАЯ СХЕМА ПРОГНОЗИРОВАНИЯ ПО МЕТОДУ АНАЛОГОВ

Метод аналогов основан на предположении о том, что при прогнозировании коротких временных рядов эксперты, не располагая значительной априорной информацией о спросе на вновь выпускаемый на рынок товар, пытаются строить прогнозы, основываясь на имеющихся у них представлениях об аналогичных объектах или процессах, предыстория которых им, экспертам, полностью известна. Предполагается также, что число таких объектов или процессов достаточно велико и что пространство признаков объектов, информация о которых составляет основное содержание профессионального опыта экспертов, поддается чёткой или — что встречается достаточно часто — размытой классификации [8—12]. Формально это означает, что для заданного функционала метрического типа

$$D = \sum_i p^{A_i}\chi\left(\frac{M^{A_i}}{p^{A_i}}\right),$$

где χ — выпуклая функция, A_i — классы точек, p^{A_i} — априорные вероятности классов A_i, а M^{A_i} — первые ненормированные моменты классов A_i, можно построить алгоритмы (в частности, рекуррентные) отыскания его экстремума. При этом принадлежность к классу (если он — чёткий), устанавливается характеристической функцией, принимающей на объекте, принадлежащем фиксированному классу, значение 1 (в противном случае она равна 0), а если класс — нечёткий (размытый), то — функцией принадлежности $h_i(x) : 0 \leqslant h_i(x) \leqslant 1$, причем $\sum_i (h_i(x))^2 = 1$.

Фактически это означает, что опыт эксперта может быть определённым образом структурирован, однако явной необходимости в выполнении подобной классификации в пространстве признаков объектов, вообще говоря, нет, поскольку эксперт самостоятельно распоряжается имеющимся у него опытом, а схема автоматической классификации — это просто формальная модель структуры рассматриваемого пространства.

Структуризация и анализ собственного опыта позволяют эксперту для каждого из вновь предъявленных ему временных рядов (который в дальнейшем называется *объектом прогнозирования*, ОП) формировать список ранее наблюдавшихся объектов, которые с его, эксперта, точки зрения являются аналогами нового ОП.

Предъявленный эксперту ОП представляет собой отрезок временного ряда длины N: $y(t)$, $t = 0, 1, 2, ..., M$ (в частном случае M может быть равно 0: случай полного отсутствия выборки данных). В ответ на предъявленную ему выборку данных и/или сообщаемое ему наименование ОП эксперт формирует перечень объектов-аналогов, которые представлены в базе данных системы прогнозирования “полными” временными рядами, т. е. рядами, длина которых существенно превосходит величину M.

Пусть Z — множество номеров указанных экспертом объектов-аналогов, для каждого из которых эксперт имеет право (но не обязан) задать ещё две числовые характеристики: коэффициент похожести l_k, $k \in Z$, (если значение коэффициента похожести не задано, то по умолчанию он полагается равным единице) и коэффициент масштаба s_k, $k \in Z$ (если значение коэффициента масштаба не задано, то по умолчанию он также полагается равным единице).

Итак, в результате взаимодействия эксперта с экспертно-статистической системой прогнозирования формируется множество Z аналогов рассматриваемого ОП. Для данного множества аналогов в базе данных системы прогнозирования содержится информация о “полных”, т. е. представленных гораздо более длинными временными рядами реализациях процесса функционирования объектов-аналогов. Эта информация представляет собой набор $\{x_k(t), k \in Z, t = 0, 1, 2, ..., M_1\}$, где $M_1 \gg M$. Кроме того, заданы также множества значений коэффициентов похожести $\{l_k, k \in Z\}$ и коэффициентов масштаба $\{s_k, k \in Z\}$.

Теперь для вычисления прогноза значений временного ряда ОП в моменты времени t, $t > M$, можно воспользоваться следующей формулой:

$$\hat{y}(t) = \frac{1}{L} \sum_{k \in Z} \alpha_k l_k s_k x(t), \qquad (1)$$

где $L = \sum_{k \in Z} l_k$. При $M > 0$ значения коэффициентов α_k, $k \in Z$, из формулы (1) определяются в результате решения следующей задачи минимизации:

$$\min_{\{\alpha_k,\, k \in Z\}} \sum_{t=1}^{M} \left(\frac{1}{L} \sum_{k \in Z} \alpha_k l_k s_k x(t) \right)^2 .$$

Если $M = 0$ (т. е. выборка данных по ОП вообще отсутствует), то все коэффициенты α_k, $k \in Z$, полагаются равными 1.

Остальные детали процедуры прогнозирования по методу аналогов, включая корректировку множества объектов-аналогов, подробно описаны в статье [7].

Процедура прогнозирования на основе метода аналогов обладает двумя серьёзными преимуществами:
- диалог ведётся на понятном эксперту-предметнику языке, без употребления специальных статистических терминов типа “тренд”, “значения временных рядов” и т. п.;
- подбор аналогов позволяет накапливать большие объёмы экспертной информации об объекте прогнозирования; при этом вполне возможно не только построение тренда на основе временных рядов объектов-аналогов или вычисление интервальных оценок значений конкретных элементов временных рядов, но и применение других методов статистической обработки информации об объектах-аналогах.

При выборе аналогов помимо корректировки самого множества аналогов эксперту необходимо предоставить возможность внесения различных количественных корректировок и, в том числе, изменять весовые коэффициенты, которые характеризуют степень близости прогнозируемого ряда (ОП) к тем или иным аналогам из выбранного экспертом списка, и осуществлять корректировки оценок будущих значений временного ряда для ОП (прогнозов), рекомендуемых системой поддержки принятия решений.

Таким образом, первоначальный прогноз формируется на основе выбранных аналогов с учётом заданных экспертом весовых коэффициентов. Причём, если в прогнозировании принимает участие несколько экспертов, то в качестве весовых коэффициентов может выступать частота упоминания экспертами соответствующего аналога.

В работах [7, 13] приведены описания экспертно-статистической системы прогнозирования по методу аналогов ЭКСПАМ и системы имитационного моделирования ЭКСПРИМ, которая позволяет оценить достоверность формируемых с помощью системы ЭКСПАМ прогнозов. Структура системы ЭКСПАМ приведена на рис. 2 (см. 3-ю стр. обложки).

4. УПРАВЛЕНИЕ ЗАПАСАМИ: АДАПТИВНЫЙ ПОДХОД

Рассмотрим постановку задачи управления запасами на складе на протяжении конечного интервала времени при статистически неопределённых характеристиках спроса и наличии сформированной в результате применения экспертно-статистического подхода априорной информации. Задача заключается в выборе оптимальной стратегии управления, т. е. последовательности заявок на пополнение запасов, которая минимизирует суммарные средние издержки. Воспользуемся для решения задачи методом адаптивного динамического программирования [14, 15].

В рассматриваемой системе управление осуществляется на конечном интервале времени T. Через равные промежутки времени длительности τ (предполагается, что $T = N\tau$, где N — натуральное число) осуществляется контроль состояния (уровня запасов) системы. Будем отсчитывать время от конца периода и обозначим через t_n момент времени за n шагов до окончания интервала T. На каждом подинтервале $[t_n; t_{n-1})$ принимается решение о подаче (или неподаче) и размере заявки u_n на пополнение запасов. Будем считать, что все заявки полностью удовлетворяются поставщиком. Спрос η_n в интервале $[t_n; t_{n-1})$ описывается моделью вида:

$$\eta_n = D(N-n, \theta) + \xi_n, \quad n = 1, 2, ..., N-1, \qquad (2)$$

где $D(k, \theta)$, $k = 1, 2, ..., N-1$, — известная с точностью до вектора неизвестных параметров θ функция "прямого" времени k, а $\{\xi_n\}_{n=1}^{N-1}$ — последовательность независимых одинаково распределённых случайных величин с функцией распределения $F(z, \theta)$ (зависящей от того же неизвестного вектора параметров θ). Функция $D(k, \theta)$, $k = 1, 2, ..., N-1$, из правой части формулы (2) описывает принадлежность спроса к одному из классов, выделенных в § 1, и, как указано в конце § 2, чаще всего таким классом будет класс 3 внесистемных кривых спроса.

Обозначения:

h — удельные издержки хранения в единицу времени;

d — удельные издержки вследствие дефицита в единицу времени;

C — стоимость единицы товара при его закупке у производителя (или себестоимость его производства в случае производственно-торговой компании);

A — постоянные затраты при подаче заказа на пополнение запасов;

$F(z, \theta)$ — функция распределения уровня спроса z в интервале $[t_n; t_{n-1})$, зависящая от неизвестного вектора параметров θ;

$G_0(\theta)$ — априорное распределение вектора θ (в момент времени t_N);

$G_k(\theta)$ — апостериорное распределение вектора θ (в момент времени t_{N-k}, т. е. на k-м шаге "прямого" времени, $n + k = N$);

$C_n^*(x, G_k)$ — минимально возможное значение суммарных издержек от момента времени t_n до конца периода продаж T при условии, что в момент t_n товарный запас был x; а апостериорное распределение значения вектора параметров θ на k-м шаге в прямом времени ($k + n = N$) равно $G_k(\theta)$;

β — коэффициент дисконтирования.

Задача заключается в определении такой последовательности заявок u_n ($n = N, N-1, ..., 1$) на пополнение запасов (стратегии управления), которая минимизирует средние суммарные издержки за весь период T, т. е. стратегии, определяющей функционал $C_N^*(x, G_0)$.

Выпишем уравнения адаптивного динамического программирования:

$$\begin{aligned} C_n^*(x, G_k) = \min_{u \ge 0}\Big[(A + cu)^+ + \\ + \int_\Theta \Big[h \int_0^{x+u} (x + u - \xi - D(N-n, \theta))dF(\xi, \theta) + \\ + d \int_{x+u}^{\infty} (\xi + D(N-n, \theta) - x - u)dF(\xi, \theta) + \\ + \beta \int_0^{\infty} C_{n-1}^*(x + u - \xi - D(N-n, \theta), G_{k+1}) \times \\ \times f(\xi, \theta)d\xi \Big] dG_k(\theta) \Big], \end{aligned} \qquad (3)$$

где Θ — множество возможных значений параметра θ.

Здесь и далее интегралы понимаются в смысле Стилтьеса, что означает обычное интегрирование, если соответствующее распределение абсолютно непрерывно (в этом случае $dF(\xi, \theta) = f(\xi, \theta)d\xi$, где $f(\xi, \theta)$ — плотность вероятности спроса на одном шаге процесса динамического программирования), и обычное суммирование, если распределение дискретно, а

$$x^+ = \begin{cases} x, \text{ если } x > 0, \\ 0, \text{ если } x \le 0. \end{cases}$$

Очевидно, что $C_0^*(x, G_N) = 0$ при любом апостериорном распределении $G_N(\theta)$. Поэтому издержки на последнем шаге $[t_1, t_0)$ (или первом шаге в обратном времени) могут быть представлены формулой:

$$\begin{aligned} C_1^*(x, G_{N-1}) = \min_{u \ge 0}\Big\{ (A + cu)^+ + \\ + \int_\Theta \Big[h \int_0^{x+u} (x + u - \xi - D(N-1, \theta))dF(\xi, \theta) + \\ + d \int_{x+u}^{\infty} (\xi + D(N-1, \theta) - x - u)dF(\xi, \theta) \Big] dG_{N-1}(\theta) \Big\}. \end{aligned} \qquad (4)$$

Таким образом, на каждом шаге минимизируемый функционал является функцией текущего состояния системы и полученного к этому моменту апостериорного распределения вектора параметров θ.

Рассмотрим систему в момент времени (прямого) $t^{(k)}$, т. е. через k шагов от начала периода планирования (периода продаж), или, что то же самое, в момент t_n, где $n + k = N$, за n шагов до конца планирования.

Пусть на пройденных интервалах $[t^{(0)}, t^{(1)})$, $[t^{(1)}, t^{(2)})$, $[t^{(2)}, t^{(3)})$, ..., $[t^{(k-1)}, t^{(k)})$ был зафиксирован спрос $z^{(1)}, z^{(2)}, ..., z^{(k)}$. Так, после первого интервала $[t^{(0)}, t^{(1)})$ был зафиксирован спрос $z^{(1)}$.

Для упрощения последующих формул рассмотрим случай, когда распределение $F(z, \theta)$ абсолютно непрерывно и имеет плотность вероятности $f(z, \theta)$. Тогда, в соответствии с формулой Байеса, апостериорная плотность dG_1 может быть записана как

$$dG_1(\theta) = \frac{f(z^{(1)}, \theta)\, dG_0(\theta)}{\int\limits_{\Theta} f(x^{(1)}, \theta)\, dG_0(\theta)}. \tag{5}$$

К моменту $t^{(k)}$ апостериорное распределение параметра θ формируется в результате k-кратного применения формулы (5) и принимает следующий вид:

$$dG_k(\theta) = \frac{f(z^{(1)}, \theta) f(z^{(2)}, \theta) \ldots f(z^{(k)}, \theta)\, dG_0(\theta)}{\int\limits_{\Theta} f(z^{(1)}, \theta) f(z^{(2)}, \theta) \ldots f(z^{(k)}, \theta)\, dG_0(\theta)} =$$

$$= \frac{f(z^{(k)}, \theta)\, dG_{k-1}(\theta)}{\int\limits_{\Theta} f(z^{(k)}, \theta)\, dG_{k-1}(\theta)}. \tag{6}$$

Поскольку в силу записи уравнения динамического программирования (3) на $(k + 1)$-м шаге прямого времени в соответствующем подинтервале реализуется значение спроса, равное ξ, то в силу формулы (6) фигурирующее в правой части апостериорное распределение запишется как

$$dG_{k+1}(\theta) = \frac{f(\xi, \theta)\, dG_k(\theta)}{\int\limits_{\Theta} f(\xi, \theta)\, dG_k(\theta)}. \tag{7}$$

Таким образом, с использованием формулы (7) алгоритм (3)—(4) поиска оптимальной стратегии управления запасами в виде совокупности решений $\{u_n, n = 1, 2, ..., N\}$ по пополнению запасов можно представить в виде

$$C_0^*(x,\ G_0) \equiv 0 \text{ для } \forall G_0,$$

$$C_n^*(x,\ G_k) = \min_{u \ge 0} \Bigg[(A + cu)^+ +$$

$$+ h \int\limits_{\Theta} \Bigg[\int\limits_0^{x+u} (x + u - \xi - D(N - n, \theta))\, dF(\xi, \theta) +$$

$$+ d \int\limits_{x+u}^{\infty} (\xi + D(N - n, \theta) - x - u)\, dF(\xi, \theta) +$$

$$+ \beta \int\limits_0^{\infty} C_{n-1}^*(x + u - \xi - D(N - n, \theta),\ G_{k+1}) \times$$

$$\times f(\xi, \theta)\, d\xi \Bigg] dG_k(\theta) \Bigg], \quad n + k = N, \tag{8}$$

где $n = 1, 2, ..., N$, а функция распределения G_{k+1} определяется формулой (7).

5. ПРИБЛИЖЁННАЯ СХЕМА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ АДАПТИВНОГО ДИНАМИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Алгоритм динамического программирования (8) обладает весьма неприятной особенностью: в качестве одного из аргументов функционала $C_n^*(x,\ G_k)$ в правой части уравнений динамического программирования фигурирует функция $G_k(\theta)$. Это делает алгоритм (8) выбора оптимальной стратегии управления запасами неконструктивным. Выход из положения даёт следующая

Теорема. *Пусть существует достаточная статистика вектора параметров* θ, *задаваемая функцией выборки* $\chi(z^{(1)}, ..., z^{(k)})$, *где* $z^{(1)}, ..., z^{(k)}$ *— значения спроса в интервалах* $[t^{(0)}, t^{(1)}), ..., [t^{(k-1)}, t^{(k)})$. *Тогда апостериорное распределение спроса к моменту времени* $t^{(k)}$, *задаваемое формулой* (6), *может быть представлено в виде*:

$$dG_1(\theta) = \frac{f(z^{(1)}, \theta) f(z^{(2)}, \theta) \ldots f(z^{(k)}, \theta)\, dG_0(\theta)}{\int\limits_{\Theta} f(z^{(1)}, \theta) f(z^{(2)}, \theta) \ldots f(z^{(k)}, \theta)\, dG_0(\theta)} =$$

$$= \varphi(\chi(z^{(1)}, z^{(2)}, ..., z^{(k)}) dG_0(\theta). \tag{9}$$

Доказательство. Согласно теореме Дармуа [16] плотности вероятности распределений, допускающих достаточную статистику для параметра θ, могут быть представлены в виде

$$f(z, \theta) = Y(\theta)[U(z)]^{g(\theta)} V(z), \tag{10}$$

где Y, U и V — произвольные аналитические функции своих аргументов.

Подставляя формулу (10) в выражение (6), получим

$$dG_1(\theta) =$$

$$= \frac{[Y(\theta)]^k [U(z^{(1)}) U(z^{(2)}) \ldots U(z^{(k)})]^{g(\Theta)} V(z^{(1)}) V(z^{(2)}) \ldots V(z^{(k)})\, dG_0(\theta)}{\int\limits_{\Theta} [Y(\theta)]^k [U(z^{(1)}) U(z^{(2)}) \ldots U(z^{(k)})]^{g(\Theta)} V(z^{(1)}) V(z^{(2)}) \ldots V(z^{(k)})\, dG_0(\theta)} =$$

$$= \frac{[Y(\theta)]^k [U(z^{(1)}) U(z^{(2)}) \ldots U(z^{(k)})]^{g(\Theta)}\, dG_0(\theta)}{\int\limits_{\Theta} [Y(\theta)]^k [U(z^{(1)}) U(z^{(2)}) \ldots U(z^{(k)})]^{g(\Theta)}\, dG_0(\theta)}. \tag{11}$$

Из последнего равенства видно, что введенная выше функция φ зависит только от $\chi(z^{(1)}, ..., z^{(k)}) = U(z^{(1)}) U(z^{(2)}) \ldots U(z^{(k)})$, параметра θ и порядкового номера k. ♦

Пример. Рассмотрим случай гауссова распределения с неизвестным средним θ и единичным среднеквадратичным отклонением:

$$f(z, \theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-(z-\theta)^2/2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2} e^{z\theta} e^{-\theta^2/2}.$$

В этом случае формула (11) примет вид

$$dG_k(\theta) =$$

$$= \frac{\exp\{-\theta^2 k/2\} \exp\{-(z^{(1)} + z^{(2)} + \ldots + z^{(k)})\theta\}\, dG_0(\theta)}{\int\limits_{\Theta} \exp\{-\theta^2 k/2\} \exp\{-(z^{(1)} + z^{(2)} + \ldots + z^{(k)})\theta\}\, dG_0(\theta)}.$$

А достаточной статистикой окажется функция $\chi(z^{(1)}, ..., z^{(k)}) = \sum\limits_{i=1}^{k} z^{(i)}$. ♦

Считая, что априорное распределение $G_0(\theta)$ задано, с учётом формулы (9) вместо функционала $C_n^*(x,\ G_k)$ можно ввести совпадающий с ним функционал $B_n^*(x,\ \chi_k) = C_n^*(x,\ G_k)$, где χ_k — значение достаточной статистики χ на k-м шаге прямого времени. Тогда вместо системы уравнений динамического программирования (8) можно записать эквивалентную ей систему уравнений следующего вида:

$$B_0^*(x, \chi_0) = C_0^*(x, G_0) \equiv 0 \text{ для } \forall G_0,$$

$$B_n^*(x, \chi_k) = \min_{u \ge 0}\Big[(A + cu)^+ +$$

$$+ \int_\Theta \Big[h \int_0^{x+u} (x + u - \xi - D(N - n, \theta))dF(\xi, \theta) +$$

$$+ d \int_{x+u}^{\infty} (\xi + D(N - n, \theta) - x - u)dF(\xi, \theta) +$$

$$+ \beta \int_0^{\infty} B_{n-1}^*(x + u - \xi - D(N - n, \theta), \chi_{k+1}) \times$$

$$\times f(\xi, \theta)d\xi\Big]\varphi(\chi_k)dG_0(\theta)\Big], \quad n + k = N, \qquad (12)$$

где $\chi_{k+1} = \chi(z^{(1)}, ..., z^{(k)}, \xi)$, а $n = 1, 2, ... , N$.

Новая система уравнений (12), записанная относительно функций $B_n^*(x, \chi)$ двух аргументов x и χ, формализует конструктивный алгоритм для расчёта оптимальной стратегии. Правда, и у этой системы имеется весьма серьёзный “недостаток”. С увеличением k множество возможных значений достаточной статистики χ_k становится все более обширным, представляя собой как функция прямого времени k расходящийся “конус”. Чтобы записать окончательный алгоритм формирования оптимальной стратегии управления запасами, достаточно вспомнить о том, что при больших значениях k оценки максимального правдоподобия вектора параметров θ становятся очень точными (соответствующие априорные распределения превращаются в “почти” δ-функции по θ). Поэтому без ущерба для точности решения (или при учёте требуемой точности) можно, начиная с некоторого номера k (или соответствующего момента “обратного” времени $n = N - k$), заменить решение задачи адаптивного динамического программирования (12) решением стандартной задачи динамического программирования для той оценки параметра θ, которая определена к данному шагу. Естественно, что при этом придётся решить целое семейство обычных задач динамического программирования для всех возможных к данному шагу значений достаточной статистики χ_k. Идея такого “склеивания” решений иллюстрируется на рис. 3 (см. 3-ю стр. обложки).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предложено два подхода к решению задачи управления запасами товаров ажиотажного спроса: применение процедур экспертно-статистического прогнозирования по методу аналогов и использование алгоритмов адаптивного динамического программирования.

Применение процедур экспертно-статистического прогнозирования является более предпочтительным в тех случаях, когда наблюдаемые зависимости спроса от времени демонстрируют наличие заметных автокорреляций (на уровне коэффициентов парной корреляции 0,5 и выше).

При малых значениях автокорреляций (на уровне коэффициентов парной корреляции 0,1 и ниже) можно считать, что хорошим описанием процесса изменения спроса является модель, представленная уравнением (2). В этом случае адекватным подходом к оптимизации стратегии управления запасами товаров ажиотажного спроса в условиях высокой степени априорной неопределённости становится модель адаптивного динамического программирования.

Алгоритмы адаптивного динамического программирования весьма громоздки и в процессе своего применения предъявляют достаточно жёсткие требования к вычислительным возможностям и памяти используемых вычислительных устройств. Именно поэтому в работе предложена схема приближённого решения задач адаптивного динамического программирования. Целесообразность применения предложенного подхода продиктована актуальностью и содержательной стороной решения задачи оптимизации стратегии управления запасами товаров ажиотажного спроса на достаточно коротком интервале времени, поскольку по завершении этого интервала (названного в статье периодом продаж) процесс изменения спроса утрачивает признаки ажиотажности и суммарный объём прибыли от продаж товара резко спадает.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Хедли Дж., Уайтин Т.* Анализ систем управления запасами. — М.: Мир, 1969.
2. *Barancsi E., Banki G., Borloi R. et al.* Inventory Models (Editor A. Chikan). Budapest: Akademia Kiado, 1990.
3. *Мандель А. С.* Экспертно-статистические системы в задачах управления и обработки информации. Ч. I // Приборы и системы управления. — 1996. — № 12. — С. 34—36.
4. *Мандель А. С.* Экспертно-статистические системы в задачах управления и обработки информации. Ч. II // Приборы и системы управления. — 1997. — № 2. — С. 11—13.
5. *Беляков А. Г., Мандель А. С.* Прогнозирование временных рядов на основе метода аналогов (элементы теории экспертно-статистических систем). — М.: Ин-т пробл. управления, 2002.
6. *Беляков А. Г., Мандель А. С.* Анализ достоверности выводов, формируемых с помощью экспертно-статистических систем. — М.: Ин-т пробл. управления, 2002.
7. *Мандель А. С.* Метод аналогов в прогнозировании коротких временных рядов: экспертно-статистический подход // Автоматика и телемеханика. — 2004. — № 5.
8. *Дорофеюк А. А.* Алгоритмы автоматической классификации // Там же. — 1971. — № 12.
9. *Бауман Е. В., Дорофеюк А. А.* Вариационный подход к задаче автоматической классификации для одного класса аддитивных функционалов // Там же. — 1978. — № 8.
10. *Бауман Е. В., Дорофеюк А. А.* Рекуррентные алгоритмы автоматической классификации // Там же. — 1982. — № 3.
11. *Бауман Е. В.* Методы размытой классификации (вариационный подход) // Там же. — 1988. — № 12.
12. *Бауман Е. В., Дорофеюк А. А.* Классификационный анализ данных // Избр. тр. Междунар. конф. по пробл. управления. — М., 1999. — Т. 1.
13. *Экспертно-статистические* системы прогнозирования коротких временных рядов и имитационно-оценочное моделирование / А. Г. Беляков, А. С. Мандель, А. В. Лапин и др. // Проблемы управления . — 2003. — № 3. С. 30—38 (www.ipu.rssi/period/pu).
14. *Bellman R., Kalaba R.* Dynamic programming and adaptive processes: mathematical foundation // IRE Trans. on AC. — Jan. 1960. — Vol. AC-5, N 1.
15. *Калаба Р.* Математические аспекты адаптивного регулирования // Модели биологических систем. — М.: 1966.
16. *Дюге Д.* Теоретическая и прикладная статистика. — М.: Наука, 1972.

☎ *(095) 334-89-69*

E-mail: manfoon@ipu.rssi.ru ❑