

ISSN 1819-3161

ПРОБЛЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ

5/2012

CONTROL  SCIENCES

РЕДКОЛЛЕГИЯ

Ф.Т. Алескеров, А.А. Амбарцумян, В.Н. Афанасьев, Р.Р. Бабаян, Л.П. Боровских, В.Н. Бурков, акад. РАН С.Н. Васильев, В.А. Виттих, Б.Г. Волик, А.А. Дорофеюк, акад. РАН С.В. Емельянов, Э.Л. Ицкович, чл.-корр. РАН И.А. Каляев, В.Ю. Кнеллер, О.С. Колосов, О.П. Кузнецов, В.В. Кульба, В.Г. Лебедев, акад. РАН В.А. Левин, Г.Г. Малинецкий, В.Д. Малюгин, А.С. Мандель, чл.-корр. РАН Н.А. Махутов, акад. РАН Е.А. Микрин, Р.М. Нижегородцев, В.В. Никитин, чл.-корр. РАН Д.А. Новиков, В.Н. Новосельцев, К.Б. Норкин, Б.В. Павлов, чл.-корр. РАН П.П. Пархоменко, Ф.Ф. Пашенко, С.А. Редкозубов, чл.-корр. РАН А.Ф. Резчиков, Л.И. Розоноер, Е.Я. Рубинович, В.Ю. Рутковский, акад. ГАН М. Салуквадзе, А.Э. Софиев, акад. РАН Е.А. Федосов, А.Д. Цвиркун

РУКОВОДИТЕЛИ РЕГИОНАЛЬНЫХ РЕДСОВЕТОВ (РРС)

ВЛАДИВОСТОК — О.В. Абрамов (4232) 31-02-02
ВОЛГОГРАД — А.А. Воронин (8442) 40-55-06
ВОРОНЕЖ — С.А. Баркалов (4732) 76-40-07
КРАСНОЯРСК — В.В. Огурцов (3912) 27-63-89
КУРСК — С.Г. Емельянов (4712) 50-48-00
ЛИПЕЦК — А.К. Погодаев (4742) 32-80-44
ПЕРМЬ — В.Ю. Столбов (3422) 39-12-97
МИНСК — А.В. Тузиков (10-37517) 284-21-40
САМАРА — В.Г. Засканов (8463) 35-64-07
САРАТОВ — В.А. Твердохлебов (8452) 22-10-42
ТАГАНРОГ — В.М. Курейчик (8634) 39-32-60
ТИРАСПОЛЬ — С.И. Берилл (10-373553) 9-44-87
УФА — Б.Г. Ильясов (3472) 73-78-35



CONTROL SCIENCES

**Научно-технический
журнал**

6 номеров в год

ISSN 1819-3161

УЧРЕДИТЕЛЬ

**Федеральное государственное
бюджетное учреждение науки
Институт проблем управления
им. В.А. Трапезникова РАН**

**Главный редактор
чл.-корр. РАН**

Д.А. Новиков

**Заместители главного
редактора**

Л.П. Боровских, Ф.Ф. Пащенко

Редактор

Т.А. Гладкова

Выпускающий редактор

Л.В. Петракова

Издатель

ООО «Сенсидат-Плюс»

Адрес редакции
117997, ГСП-7, Москва,
ул. Профсоюзная, д. 65, к. 410.
Тел./факс (495) 334-92-00

E-mail: pu@ipu.ru

Интернет: http://pu.mtas.ru

Оригинал-макет
и электронная версия
подготовлены
ООО «Адвансед Солюшнз»

Отпечатано в ИПУ РАН

Заказ № 102

Подписано в печать
2.10.2012 г.

Журнал зарегистрирован
в Министерстве Российской
Федерации по делам печати,
телерадиовещания и средств
массовых коммуникаций

Свидетельство о регистрации
ПИ №77-11963 от 06 марта 2002 г.

Журнал входит в Перечень ведущих
рецензируемых журналов и изданий,
в которых должны быть опубликованы
основные научные результаты
диссертаций на соискание ученой
степени доктора и кандидата наук

Подписные индексы:
80508 и **81708** в каталоге Роспечати;
38006 в объединенном каталоге
«Пресса России»

Цена свободная

© Федеральное государственное
бюджетное учреждение науки
Институт проблем управления
им. В.А. Трапезникова РАН

ПРОБЛЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ

5.2012

СОДЕРЖАНИЕ

Анализ и синтез систем управления

- Корноушенко Е.К.** Управление равновесными состояниями билинейных нормированных моделей 2
- Постнов С.С.** Исследование задачи оптимального управления для одиночного и двойного интеграторов дробного порядка с помощью метода моментов 9

Управление в социально-экономических системах

- Хоперсков А.В., Храпов С.С., Писарев А.В.** и др. Задача управления гидрологическим режимом в эколого-экономической системе «Волжская ГЭС — Волго-Ахтубинская пойма». Ч. 1. Моделирование динамики поверхностных вод в период весеннего паводка 18
- Бондарик В.Н., Коргин Н.А.** Механизмы распределения ресурсов на основе неманипулируемых симметричных анонимных процедур голосования с делегированием 26
- Кисельгоф С.Г.** Моделирование приемной кампании: вузы различного качества и абитуриенты с квадратичной функцией полезности 33
- Жилик А.В., Кашеев В.А., Крянев А.В.** Регулирование очереди в системах массового обслуживания с большим числом обслуживаемых каналов 41

Управление сложными технологическими процессами и производствами

- Амбарцумян А.А., Потехин А.И.** Групповое управление в дискретно-событийных системах 46

Информационные технологии в управлении

- Зак Ю.А.** Свойства допустимых и оптимальных последовательностей выполнения работ на одной машине. 54

Управление в медико-биологических системах

- Макаренко А.В., Новосельцев В.Н.** Синергия в системе естественных технологий организма 62
- Кычкин А.В.** Разработка информационно-диагностической технологии для мониторов пульсовой волны 69

Управление подвижными объектами и навигация

- Крутова И.Н., Суханов В.М.** Динамика гиросиловой стабилизации крупногабаритных спутников при использовании настраиваемого ПД-алгоритма управления 74
- Андрienko А.Я., Бельский Л.Н., Заплатин М.И.** и др. Цифровая система управления расходом топлива ракет-носителей «Союз-2» и «Союз-СТ» . . . 81

Хроника

- Александр Артёмович Амбарцумян** 84

* * *

- Contents & abstracts 88

УПРАВЛЕНИЕ РАВНОВЕСНЫМИ СОСТОЯНИЯМИ БИЛИНЕЙНЫХ НОРМИРОВАННЫХ МОДЕЛЕЙ

Е.К. Корноушенко

Рассмотрен класс так называемых билинейных нормированных моделей (БНМ), состояния которых и внешние воздействия определены в кубе $[0, 1]^n$, а допустимые управления — в кубе $[-1, 1]^p$, $p < n$. В предположении, что совокупности управлений и внешних воздействий на БНМ являются константными векторами, а БНМ — асимптотически устойчива, решается задача поиска управлений, переводящих БНМ в какое-либо равновесное состояние, «достаточно близкое» к наперед заданному состоянию. Представлены процедуры обеспечения условий, достаточных для решения указанной задачи и гарантирующих корректность интерпретации процессов в БНМ в терминах качественных шкал $[0, 1]$ и $[-1, 1]$. Приведен пример, иллюстрирующий все этапы решения исходной задачи управления.

Ключевые слова: билинейная нормированная модель, асимптотическая устойчивость, управляемое равновесное состояние, допустимое управление.

ВВЕДЕНИЕ

При разработке интеллектуальных систем управления широко используются графовые модели как средство наглядного отображения структуры информационных потоков в исследуемой системе [1]. При исследовании динамики графовой модели каждой переменной модели сопоставляется уравнение, описывающее в функциональной форме зависимость значений данной переменной от значений переменных, непосредственно влияющих на данную переменную. В литературе большое внимание по понятным причинам уделяется линейным графовым моделям. Подчеркивается необходимость обращения к более сложным моделям, разработки методологии использования таких моделей в практических ситуациях [1].

При моделировании разнообразных практических ситуаций (экономических, политических и др.) приходится учитывать тот факт, что некоторые переменные могут входить в модель лишь как мультипликаторы при других переменных (к таким мультипликаторам относятся удельные цены (товаров, услуг и т. п.), всевозможные ставки налогов, пошлин и т. д.). Учет подобных мультипликаторов в модели приводит к тому, что в уравнения модели начинают входить билинейные члены, что

сразу же ограничивает возможность применения линейных методов при анализе такой модели.

Предмет настоящего рассмотрения — качественные билинейные нормированные модели (БНМ), функционирующие в дискретном времени, причем значения координат состояния БНМ определены в качественной непрерывной шкале $[0, 1]$. Некоторые (или все) уравнения БНМ содержат билинейные члены в виде произведений мультипликаторов на координаты состояния БНМ, эти мультипликаторы рассматриваются как управления, с помощью которых можно изменять динамику БНМ. Рассмотрение ограничено выбором константных управлений, значения которых лежат в интервале $[-1, 1]$. Основная задача настоящей работы состоит в том, чтобы для асимптотически устойчивой БНМ, определенной в кубе $[0, 1]^n$, найти константные управления, переводящие БНМ из произвольного начального состояния в какое-либо равновесное состояние, «достаточно близкое» (разъяснение этого термина см. далее в § 2) к наперед заданному состоянию (не обязательно равновесному). Сформулированы достаточные условия, при которых эта задача имеет решение, предложена процедура нахождения искомого управления.

В общем случае анализ управляемости (равновесных) состояний билинейной системы представ-



ляет собой довольно сложную математическую задачу. Так, в работе [2] проведен детальный анализ особых множеств лишь для двумерной билинейной модели и показано, что даже в этом случае особые множества могут иметь весьма сложную форму. Возможность получения результатов, представленных в настоящей работе, обусловлена рядом существенных упрощений: введением дискретного времени, константностью управлений, наложением достаточных условий, гарантирующих асимптотическую устойчивость БНМ.

1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим БНМ, функционирующую в безразмерном дискретном времени и определяемую в матричной форме как

$$X(t+1) = AX(t) + B(U)X(t) + W, \quad t \in J_+. \quad (1)$$

Здесь t — моменты дискретного времени, принадлежащие множеству J_+ неотрицательных целых чисел, состояния $X(t)$ для любого $t \in J_+$ принадлежат положительному единичному кубу $K = [0, 1]^n$, A — $(n \times n)$ -матрица коэффициентов при линейных членах БНМ, $U_K = [-1, 1]^p$ — множество p -векторов $U = (u_1, \dots, u_p)$ константных управлений, $u_k \in [-1, 1]$, $k = 1, \dots, p$, $p < n$. Запись $B(U)$ означает, что элементами $(n \times n)$ -матрицы B являются те или иные управления u_p , являющиеся координатами вектора U и стоящие (с соответствующими коэффициентами) при тех или иных координатах вектора состояния X . Структура матрицы $B(U)$ определяется конкретным видом модели (1). Координаты вектора W интерпретируются как независимые внешние воздействия на БНМ, также определенные в интервале $[0, 1]$, внешние воздействия считаются неизменными на рассматриваемом интервале моделирования. При переходе к другому интервалу моделирования (например, при моделировании какого-либо сценария развития ситуации) вектор W заменяется на константный вектор W' , соответствующий другому интервалу моделирования и т. д.

Замечание 1. Далее считаем, что каждое управление $u_i \in U$ может входить не более одного раза в каждое из уравнений БНМ и каждое из уравнений БНМ содержит не менее одного управления. ♦

Для каждого состояния $X(0) \in K$, каждого константного вектора управлений $U \in U_K$ и вектора внешних воздействий W обозначим через $x(\cdot, X(0), U, W)$ траекторию БНМ с начальным состоянием $X(0)$ и заданными векторами U и W . Для БНМ каждая траектория определяется однозначно на J_+ для

каждого $t \in J_+$, при этом $X(t, X(0), U, W)$ непрерывно зависит от $X(0)$, U и W . При существовании предела $\lim_{t \rightarrow \infty} X(t, X(0), U, W)$ предельная точка $X^*(U, W)$ называется *управляемым равновесным состоянием* (РС)¹, соответствующим векторам U и W .

Наложим очень важное ограничение на БНМ. Будем считать, что для любого константного вектора $U \in U_K$ справедливо:

$$\|A + B(U)\| < 1, \quad (2)$$

где $\|A + B(U)\|$ — евклидова норма матрицы $A + B(U)$. Из неравенства (2) следует, что БНМ в этом случае асимптотически устойчива (а. у.), т. е. всякая траектория БНМ стремится к соответствующему РС. Для обеспечения условия (2) может потребоваться дополнительная процедура стабилизации БНМ, рассматриваемая в § 3.

Следующая проблема вытекает из того факта, что даже при выполнении условия (2) множество управляемых РС может выходить за границы куба K . Достаточным условием принадлежности всех траекторий БНМ к кубу K служит выполнение следующих покоординатных соотношений:

$$A_i X(t) + B(U)_i X(t) + W_i \in [0, 1], \\ i = 1, \dots, n, \quad t \in J_+, \quad X(t) \in K, \quad U \in U_K, \quad (3)$$

для каждого i , где индекс i при матрице обозначает i -ю строку этой матрицы. В § 4 показано, что для обеспечения условий (3) необходимо в общем случае введение соответствующих ограничений на величину допустимого интервала значений для каждого из управлений. В силу этого исходный куб управлений U_K «сжимается» до параллелепипеда

$U_B = [u_k^{\min}, u_k^{\max}]^p$. С множеством U_B , которое назовем *множеством допустимых управлений*, ассоциируется *множество* $X_{\text{упр}}(U_B, W)$ *управляемых РС*, определяемое как множество предельных точек $X^*(U, W)$ траекторий $X(t, X(0), U, W)$, $X(0) \in K$, $U \in U_B$ при фиксированном векторе W . Множество $X_{\text{упр}}(U_B, W)$ может иметь весьма сложную форму (как минимум, не быть выпуклым множеством), его оценка даже для БНМ небольшой размерности может представлять довольно трудоемкую задачу.

Замечание 2. Обеспечение «вложимости» траекторий БНМ в куб K необходимо в целях корректной интерпретации процессов в БНМ в терминах качественных шкал $[0, 1]$ для значений координат состояний БНМ и $[-1, 1]$ для значений управлений.

¹ Далее везде звездочка при векторе состояния будет обозначать РС.

2. ФОРМУЛИРОВКА И РЕШЕНИЕ ИСХОДНОЙ ЗАДАЧИ УПРАВЛЕНИЯ

Будем считать, что для исходной БНМ выполняются условия (2) и (3), т. е. исходная БНМ а. у., и ее траектории при начальных состояниях из куба K полностью принадлежат кубу K при допустимых управлениях из множества $U_B = U_K = [-1, 1]^p$. Нетрудно привести примеры таких БНМ. Поскольку при фиксированных константных векторах $U \in U_B$ и W динамика БНМ описывается уравнением

$$X(t+1) = (A + B(U))^{t+1} X(0) + \left(I + \sum_{s=1}^t (A + B(U))^s \right) W, \quad (4)$$

где I — единичная $(n \times n)$ -матрица, то в силу условия (2) первое слагаемое в правой части соотношения (4) стремится к нулю с возрастанием t , а РС в данном случае определяется формулой

$$X^*(U, W) = \left(I + \sum_{t=1}^{\infty} (A + B(U))^t \right) W, \quad (5)$$

и матричный ряд по степеням матрицы $A + B(U)$ — сходящийся. В случае, когда

$$\det(I - (A + B(U))) \neq 0, \quad (6)$$

РС $X^*(U, W)$ может быть найдено из условия $X^*(U, W) = (A + B(U))X^*(U, W) + W$, откуда

$$X^*(U, W) = (I - (A + B(U)))^{-1} W. \quad (7)$$

При выполнении условия (2) матрица $(I - (A + B(U)))^{-1}$ в формуле (7) является сходящимся рядом. Важно подчеркнуть, что координаты вектора U , входящие в эту формулу существенно нелинейным образом (в виде отрезков степенных рядов), принадлежат некоторому p -мерному многообразию в кубе K . Какие-либо конструктивные утверждения о структуре множества $X_{\text{упр}}(W)$ требуют отдельного рассмотрения (см., в частности, замечания в конце настоящего параграфа).

Воспользуемся следующей грубой оценкой множества $X_{\text{упр}}(U_B, W)$. Обозначим через $\text{vert}(U_B)$ множество вершин параллелепипеда U_B , а через $\{X^*(U_v)\}$ — множество управляемых РС, соответствующих вершинам $U_v \in \text{vert}(U_B)$ и, естественно, принадлежащих множеству $X_{\text{упр}}(U_B, W)$. Обозначим через X_B интервальный вектор (брус), описанный вокруг множества $\{X^*(U_v)\}$, рассматриваемого как многогранник. Сложности с оценкой множе-

ства $X_{\text{упр}}(U_B, W)$ возникают, в частности, в силу того, что в общем случае многогранник $\{X^*(U_v)\}$ может быть криволинейным, при этом элементы его граней могут выходить за границы множества X_B .

Формальная постановка решаемой в данной работе задачи выглядит следующим образом. Пусть $X' \in X_B$ — некоторое заданное состояние (не обязательно равновесное). Необходимо определить вектор $U(X') \in U_B$ константных управлений, переводящий БНМ из произвольного начального состояния внутри бруса X_B в РС X^* , «достаточно близкое»³ к состоянию X' , и оценить степень близости состояния X^* к состоянию X' .

Для решения этой задачи вначале предположим, что задаваемое состояние X' само является равновесным, тогда справедливо предположить, что

$$(A + B(U)) X' = X' - W. \quad (8)$$

В соотношениях (8) неизвестны лишь значения «точных» константных управлений из множества U_B , образующих искомый вектор U . Переносим все известные слагаемые в правую часть, получаем переопределенную систему из n линейных уравнений относительно p управлений:

$$GU^T = H, \quad (9)$$

в которой допустимое решение U^* должно принадлежать множеству U_B . Это требование реализуется наложением p соответствующих двусторонних ограничений на значения координат u_k искомого вектора U :

$$u_k \geq -1, \quad u_k \leq 1, \quad k = 1, \dots, p. \quad (10)$$

Для простоты ограничимся случаем, когда (n, p) -матрица G ($p < n$) в выражении (8) имеет полный ранг⁴, т. е.

$$\text{rank}(G) = p. \quad (11)$$

Решение задачи (9), (10) находится с помощью обыкновенного метода наименьших квадратов (МНК) с учетом ограничений. Из условия (11) следует единственность МНК-решения U^* , определяющего РС $X^*(U^*)$. В силу ограничений (10)

² В силу сказанного ранее, искомое РС X^* может не принадлежать брусу X_B .

³ Не зная границ множества $X_{\text{упр}}(U_B, W)$, говорить о РС, ближайшем к состоянию X' , некорректно; в этом случае термин «достаточно близость» означает тот факт, что порядки поординатных разностей между X' и X^* меньше порядка тех значащих цифр, которые учитываются при моделировании в указанных качественных шкалах.

⁴ Это условие всегда можно обеспечить незначительной коррекцией координат заданного состояния X' .



вектор U^* является допустимым управлением, так что РС $X^*(U^*) \in K$. При выполнении для вектора U^* условия (6) искомое РС $X^*(U^*)$ вычисляется по формуле (7), а близость решения $X^*(U^*)$ к X' связывается с порядком покоординатных разностей между X' и $X^*(U^*)$ (см. предыдущую сноску). Описанный подход к решению исходной задачи можно назвать *МНК-подходом*. Практическая пригодность этой задачи зависит от размеров множества $X_{\text{упр}}$ в кубе K , что определяется свойствами самой БНМ, и от размеров бруса X_B .

Расширение МНК-подхода на поиск допустимых управлений путем учета нелинейных вхождений управлений u_k в выражение (5) и применения алгоритмов нелинейной оптимизации вряд ли возможно для практических значений n и p (по крайней мере, такая задача составляет предмет отдельного рассмотрения). Кроме того, с учетом сказанного ранее о сложности формы множества $X_{\text{упр}}$, можно предположить, что плотность распределения управляемых РС может оказаться разной в разных областях множества $X_{\text{упр}}$. В такой ситуации невозможно предложить какие-либо априорные оценки для координат разностей $X' - X^*(U^*)$, связав их с координатами задаваемого состояния X' . С другой стороны, учитывая качественный характер рассматриваемой БНМ, высокая точность решения $X^*(U^*)$ может и не потребоваться, поскольку при качественном рассмотрении ситуаций важно правильно управлять тенденциями протекающих процессов. В этом плане предложенный подход может быть практически перспективен.

3. ФОРМАЛЬНАЯ ПРОЦЕДУРА СТАБИЛИЗАЦИИ БНМ

Суть стабилизации состоит в том, чтобы, не изменяя структуры исходных уравнений БНМ, уменьшить (но не обнулить) количественные значения коэффициентов (но не управлений) при координатах состояния в этих уравнениях. Рассмотрим два варианта стабилизации БНМ: путем нормирования столбцов матрицы $A + B(U)$ и путем умножения этой матрицы на стабилизирующий множитель.

Вариант А. Стабилизация путем нормировки столбцов матрицы $A + B(U)$. Обозначим через f_k правые части уравнений (1). Поскольку каждая из функций f_k непрерывна по переменным состоя-

ния, рассмотрим якобиан $J(X) = \left\{ \frac{\partial f_k}{\partial x_i} \right\}_{i,k=1,\dots,n}$,

вычисляемый в некоторой точке $X \in K$ и зависящий от управлений u_s как от параметров. Заменим все элементы каждой строки в нем их абсолютны-

ми значениями и положим $u_s = 1, s = 1, \dots, p$, результирующую неотрицательную матрицу обозначим как M_J . Нормируем матрицу M_J , для чего элементы k -го столбца в матрице M_J делим на соответствующий нормирующий множитель $N_k, k = 1, \dots, n$, определяемый как сумма элементов этого столбца плюс некоторая константа $\alpha > 0$ (о которой см. далее). В итоге для результирующей матрицы $M_{J,N} = M_J D$, где D — диагональная матрица с элементами $1/N_k$ на главной диагонали, обеспечивается условие $\|M_{J,N}\| < 1$. Обозначим $A' + B'(U) = (A + B(U))D$, при этом для любого $U \in U_K \|A' + B'(U)\| < 1$.

Назовем БНМ с матрицами A' и $B'(U)$ *стабилизированной*. Для удобства переменные состояния в стабилизированной БНМ обозначим как z_k , причем значения переменных z_k по-прежнему принадлежат интервалу $[0, 1]$, а управлений — интервалу $[-1, 1]$. Достоинство данного варианта заключается в его «щадящем» характере: нормирующие множители для столбцов матрицы M_J выбираются независимо, и их значения зависят от суммы модулей элементов соответствующего столбца.

Вариант Б. Стабилизация путем умножения матрицы $A + B(U)$ на стабилизирующий множитель. Это частный случай варианта А, когда $D = k_{\text{stab}} I$, где, как и ранее, I — единичная $(n \times n)$ -матрица. Его достоинство состоит в пропорциональности евклидовых норм матриц M_J и $M_{J,D}$:

$$\|M_{J,N}\| = k_{\text{stab}} \|M_J\|. \quad (12)$$

Отсюда получаем простое правило выбора значения k_{stab} : значение нормы матрицы $M_{J,N}$ выбирается с учетом длины интервала моделирования, наблюдаемых скоростей сходимостей процессов в БНМ к равновесным значениям и т. д. Для выбранного значения $\|M_{J,N}\|$ значение k_{stab} определяется из соотношения (12), причем

$$A' + B'(U) = k_{\text{stab}} (A + B(U)). \quad (13)$$

Важное свойство данного варианта стабилизации заключается в пропорциональности собственных значений матриц $A' + B'(U)$ и $A + B(U)$: $\lambda'_i = k_{\text{stab}} \lambda_i, i = 1, \dots, n$. Это говорит о том, что апериодические и колебательные составляющие в динамике исходной БНМ сохраняются и в стабилизированной БНМ. Более того, из соотношений (5) и (13) следует, что для любого конечного T между элементами матричного ряда $\sum_{t=1}^T (A + B(U))^t$ исходной БНМ и элементами матричного ряда

$\sum_{t=1}^T (A' + B'(U))^t$ стабилизированной БНМ существует зависимость

$$(A' + B'(U))^t = k_{stab}^t (A + B(U))^t, \quad \forall t \in J_+, \quad t > 0. \quad (14)$$

Поскольку на конечном интервале моделирования длины T динамика исходной БНМ описывается уравнением (4), то при условии, что траектории исходной и стабилизированной БНМ начинаются из нулевого состояния $X(0) = 0$, между элементами этих траекторий существует взаимосвязь вида (14).

Замечание 3. При выполнении условия (6) асимптотическая оценка для любого управляемого РС стабилизированной БНМ находится с помощью формулы (7), в которой матрицы A и $B(U)$ заменены на матрицы A' и $B'(U)$. Выбор константы α в варианте А стабилизации БНМ либо значения k_{stab} в варианте Б определяется эмпирически путем анализа скорости сходимости элементов матричного ряда $\sum_{t=1}^{\infty} (A'' + B''(U))^t$ к предельным значениям. Условием выбора этих параметров служит выполнение неравенства

$$\sum_{t=|T|+1}^{\infty} (A' + B'(U))^t \leq \|\beta\|,$$

где $|T|$ — наименьшая длина используемых интервалов моделирования, а $\|\beta\|$ — евклидова норма допустимой накапливаемой ошибки из-за обрезания матричного ряда на уровне $|T|$. ♦

Наличие линейных членов и аддитивных добавок w_i в уравнениях стабилизированной БНМ может привести к тому, что при использовании интервала $[-1, 1]$ для значений управлений возможен выход некоторых из управляемых РС из куба K . Чтобы устранить подобные ситуации, допустимые интервалы для значений управлений необходимо сузить до некоторых пределов, что и описывается далее.

4. ВЛОЖЕНИЕ ТРАЕКТОРИЙ СТАБИЛИЗИРОВАННОЙ БНМ В КУБ K

Рассмотрим два варианта сужения интервалов допустимых управлений.

Вариант 1. Пусть каждое управление u_k в стабилизированной БНМ может принимать константные значения из интервала $[u_k^-, u_k^+]$, где $0 \geq u_k^- \geq -1$, $0 \leq u_k^+ \leq 1$ — неизвестные значения. Обозначим через $\bar{X}^i$ интервальный вектор, координаты которого, соответствующие переменным состояниям,

входящих в i -е уравнение БНМ, заменены интервалами $[0, 1]$. Аналогично, пусть, $\bar{U}^i$ — интервальный вектор, в котором каждое управление u_k , входящее в i -е уравнение БНМ, заменено интервалами $[u_k^-, u_k^+]$, а w_i — исходное «точечное» значение.

Найдем наименьшее $(f_i^-(\bar{X}^i, \bar{U}^i, w_i))$ и наибольшее $(f_i^+(\bar{X}^i, \bar{U}^i, w_i))$ значения интервальной функции $\tilde{f}_i(\bar{X}^i, \bar{U}^i, w_i)$, $i = 1, \dots, n$ по правилам интервальной арифметики⁵. При этом каждое из условий вида (3) трансформируется в два линейных неравенства вида:

$$f_i^-(\bar{X}^i, \bar{U}^i, w_i) \geq 0, \quad u_k^-, u_k^+ \in U^i, \quad i = 1, \dots, n, \quad (15)$$

$$f_i^+(\bar{X}^i, \bar{U}^i, w_i) \leq 1, \quad u_k^+, u_k^- \in U^i, \quad i = 1, \dots, n. \quad (16)$$

Подчеркнем, что эти условия формируются с учетом ограничений

$$0 \geq u_k^+ \geq -1, \quad 0 \leq u_k^- \leq 1, \quad k = 1, \dots, p,$$

поэтому достаточно проверить лишь совместность совокупности неравенств (15), (16). Если система неравенств (15), (16) совместна, ее решение определяет p -мерный параллелепипед $U_B = [u_k^{*-}, u_k^{*+}]^p$ в кубе K с длинами сторон $[u_k^{*-}, u_k^{*+}]$, $k = 1, \dots, p$, содержащий нулевой вектор управлений $U = 0$. Этот факт является недостатком варианта 1 в силу его неприменимости в ряде ситуаций. Так, если в матрице A_i отсутствуют положительные элементы, а сумма Sa_i^- абсолютных значений отрицательных элементов i -й строки матрицы A_i меньше w_i , для вектора $U = 0$ невозможно выполнение условия (15). Аналогично, если в матрице A_i отсутствуют отрицательные элементы, а сумма Sa_i^+ положительных элементов i -й строки матрицы A_i больше $1 - w_i$, для вектора $U = 0$ невозможно выполнение условия (16). Вариант 2 свободен от подобных недостатков.

Вариант 2. Будем считать, что каждое управление u_k может принимать константные значения из интервала $[u_k^{\min}, u_k^{\max}]$, где $u_k^{\min} \geq -1$, $u_k^{\max} \leq 1$ — неизвестные значения (т. е. в отличие от варианта 1 интервалы $[u_k^{\min}, u_k^{\max}]$ могут быть знакоопреде-

⁵ Другими словами, для каждого из $2n$ интервальных уравнений, реализующих соответствующее условие (3), найдем границы объединенного множества решений (см., например, работу [3]).



ленными). При этом система неравенств (15), (16) трансформируется в систему

$$f_t^-(\bar{X}^i, \bar{U}^i, w_i) \geq 0, \\ u_k^{\min}, u_k^{\max} \in U^i, \quad i = 1, \dots, n, \quad (17)$$

$$f_t^+(\bar{X}^i, \bar{U}^i, w_i) \leq 1, \\ u_k^{\max}, u_k^{\min} \in U^i, \quad i = 1, \dots, n, \quad (18) \\ u_k^{\min} \geq -1, \quad u_k^{\max} \leq 1, \quad k = 1, \dots, p, \\ u_k^{\max} - u_k^{\min} \geq 0, \quad k = 1, \dots, p.$$

Поскольку, по аналогии с вариантом 1, неравенства (17), (18) формируются с учетом соответствующих ограничений на значения $u_k^{\min}$, $u_k^{\max}$, на совместность достаточно проверить систему неравенств (17), (18). Для такой проверки удобен критерий С.Н. Черникова (см. работу [4], теорему 1.5). В Приложении на конкретном примере показано применение этого критерия. Искомые значения $u_k^{\min}$, $u_k^{\max}$, $k = 1, \dots, p$, находятся с помощью обыкновенного МНК.

Таким образом, в результате выполнения описанных этапов исходная БНМ трансформируется в стабилизированную БНМ с множеством U_B допустимых управлений, для которой полностью пригодна процедура решения исходной задачи, описанная в § 2. Приводимый далее простой пример служит конкретной иллюстрацией рассмотренных этапов. Построение и анализ более сложной БНМ для конкретной экономической ситуации планируется представить в отдельной работе.

ПРИЛОЖЕНИЕ

ПРИМЕР

Исходные данные. Пусть исходная БНМ описывается уравнением в матричной форме:

$$X(t+1) = AX(t) + B(U)X(t) + W,$$

где $X(t) = (x_1(t), \dots, x_4(t))$ — вектор переменных состояния в момент t , матрицы A и $B(U)$ имеют вид⁶:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0,4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0,3 & 0,5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & u_2 & 0 & u_3 \\ u_3 & 0 & u_1 & 0 \\ -u_2 & u_3 & 0 & 0 \\ 0 & -u_1 & u_2 & -u_3 \end{pmatrix},$$

⁶ Поскольку изначально значения всех управлений определены в интервале $[-1, 1]$, то для наглядности полагаем, что при нормировке матрицы $A + B(U)$ исходные коэффициенты в линейных членах включаются в соответствующие управления, поэтому в матрицу $B(U)$ управления входят без коэффициентов.

а $W = (0, 1; 0, 3; 0; 0, 5)^T$ — вектор независимых внешних воздействий. Управления u_1 , u_2 и u_3 — константные со значениями из интервала $[-1, 1]$.

Стабилизация БНМ. Для стабилизации выберем вариант Б с использованием стабилизирующего множителя k_{stab} . В данном случае матрица M_J имеет вид:

$$M_J = A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -0,4 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -0,3 & 0,5 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \|M_J\| = 2,3798.$$

Значение k_{stab} выбрано равным $1/2,7 = 0,3704$, так что при любом $U \in U_K \|A' + B'(U)\| < 0,8814$. При длине интервала моделирования, равной 20, справедливо:

$$\left\| \left(\sum_{t=1}^{\infty} (k_{stab} M_J)^t \right) W - \left(\sum_{t=1}^{20} (k_{stab} M_J)^t \right) W \right\| = 0,0413. \quad (П.1)$$

Это выражение можно рассматривать как верхнюю границу для ошибки при определении координат РС, обусловленной остатком матричного ряда от 20-го такта до его равновесных значений. Если при моделировании мы следим за значениями первого знака после запятой в вычисляемых значениях переменных БНМ, то ошибка, оцененная согласно формуле (П.1), представляется вполне приемлемой.

Вложение стабилизированной БНМ в куб К. Следующий шаг состоит в обеспечении выполнения условия (3) для БНМ с матрицей $A' + B'(U)$. Выберем вариант 2 сужения допустимых интервалов значений для управлений. Совокупности линейных неравенств (17), (18), обозначенные в данном случае как (П.2), выглядят следующим образом:

$$\begin{aligned} 0,3704 u_2^{\min} + 0,3704 u_3^{\min} &\geq -0,1; \\ 0,3704 u_1^{\min} + 0,3704 u_3^{\min} &\geq -0,1519; \\ -0,3704 u_2^{\max} + 0,3704 u_3^{\min} &\geq +0,1111; \\ -0,3704 u_1^{\max} + 0,3704 u_2^{\min} - 0,3704 u_3^{\max} &\geq -0,5; \\ 0,3704 u_2^{\max} + 0,3704 u_3^{\max} &\leq +0,9; \\ 0,3704 u_1^{\max} + 0,3704 u_3^{\max} &\leq +0,7; \\ -0,3704 u_2^{\min} + 0,3704 u_3^{\max} &\leq +0,8148; \\ -0,3704 u_1^{\min} + 0,3704 u_2^{\max} - 0,3704 u_3^{\min} &\leq +0,5. \end{aligned} \quad (П.2)$$

Для простоты полагаем, что матрица системы неравенств (17), (18) размером 8×6 , является матрицей полного ранга⁷. Совместность этой системы неравенств

⁷ Полноту ранга этой матрицы всегда можно обеспечить добавлением в какое-либо уравнение незначительного регуляризующего члена.

проверяем по С.Н. Черникову с помощью теоремы 1.5 из работы [4]. Для этого выберем наибольший невырожденный минор M_1 , содержащий строки 2—4 из первой четверки неравенств (со знаком $\geq$) и строки 2—4 из второй четверки неравенств (со знаком $\leq$). Будем обрамлять минор M_1 снизу какой-либо из оставшихся строк (1-й или 5-й) из совокупности (П.2), и справа — столбцом соответствующих свободных членов. Два таких «расширенных» минора обозначим как M_{2_1} и M_{2_2} . Согласно теореме 1.5 [4] необходимым и достаточным условием совместности системы неравенств (П.2) является выполнение условий:

$$\frac{1}{\det(M_1)} \det(M_{2_i}) \geq 0, \quad i = 1, 2,$$

справедливость которого легко проверяется. Поскольку матрица данной системы неравенств — полного ранга, то она имеет единственное МНК- решение для значений $u_k^{\min}$, $u_k^{\max}$, $k = 1, 2, 3$, определяющее интервалы значений допустимых управлений:

$$u_1 \in [-1, 0,2271], \quad u_2 \in [-0,7855, 1] \\ \text{и } u_3 \in [0,7639, 1].$$

Заметим, что интервал для u_3 является знакоопределенным. Декартово произведение этих интервалов является искомым множеством U_B допустимых управлений, не выводящих траектории БНМ из куба K , начинающиеся в нем.

Решение исходной задачи управления. Пусть $\text{vert}(U_B)$ — множество вершин найденного ранее параллелепипеда U_B . Определим множество РС вида $\{X^*(U_v)\}$, где $U_v \in \text{vert}(U_B)$, и вложим его в брус X_B , который в данном случае имеет вид:

$$X_B = [0,0733; 0,4880] \times [0,2978; 0,5561] \times \\ \times [0,0726; 0,2607] \times [0,2843; 0,54554].$$

Пусть заданное состояние есть $X' = (0,2; 0,5; 0,2; 0,5) \in X_B$. В результате операций, проводимых над аналогом уравнения (7) в данном случае, система (8) приобретает следующий вид:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,1 \\ 0,9398 \\ 0,1259 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{П.3})$$

с добавлением ограничений

$$0 \geq u_k \geq u_k^{\min}, \quad 0 \leq u_k \leq u_k^{\max}, \\ k = 1, \dots, 3. \quad (\text{П.4})$$

МНК-решение задачи (П.3), (П.4) есть $U^* = (-0,2052; 0,1776; 0,7639)$. При этом РС $X^*(U^*) = (0,2476; 0,4163; 0,2027; 0,4248)$, причем разность $X' - X^*(U^*) = (0,0476; -0,0837; 0,0027; -0,0752)$. Если в проводимых вычисле-

ниях обращать внимание лишь на первый знак после запятой, то координаты полученной разности говорят о приемлемом качестве найденного решения.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Описанный подход к построению и анализу билинейных нормированных моделей ориентирован на практическое их применение в моделировании, прежде всего, социально-экономических систем (СЭС). Необходимо отметить двойственность положения автора: с одной стороны — билинейные системы с сопутствующими математическими проблемами, с другой — моделирование плохо формализованных и слабо структурированных СЭС. Важно подчеркнуть, что при моделировании СЭС все элементы модели — переменные, коэффициенты, уравнения — должны быть предметно интерпретированы, а происходящие в модели процессы не должны противоречить известным правилам, характеризующим данную предметную область. Если в математических исследованиях по билинейным системам всякая переменная есть величина, допускающая над собой те или иные операции, то в моделях СЭС переменная есть конкретное понятие, контекстно (в зависимости от предметной области) связанное с другими понятиями модели. Именно поэтому математические результаты, полученные для билинейных систем, могут быть слабо интерпретируемыми в качественных моделях СЭС. Цель настоящей работы — дать методологию построения практических билинейных моделей, для чего и был принят ряд допущений, упрощающих анализ билинейных систем.

ЛИТЕРАТУРА

1. Васильев В.И., Ильясев Б.Г. Интеллектуальные системы управления. Теория и практика. — М.: Радиотехника, 2009. — 312 с.
2. Жермоленко В.Н. Особые множества и динамические свойства билинейных систем управления // Фундаментальная и прикладная математика. — 2005. — Т. 11, № 8. — С. 105—117.
3. Калмыков С.А., Шокин Ю.И., Юлдашев З.Х. Методы интервального анализа. — Новосибирск: Наука, 1986. — 363 с.
4. Черников С.Н. Линеинные неравенства. — М.: Наука, 1968. — 488 с.

Статья представлена к публикации руководителем РРС Б.Г. Ильясовым.

Корноушенко Евгений Константинович — д-р техн. наук, гл. науч. сотрудник, Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, г. Москва, ☎ (495) 334-90-00, ✉ ekorno@mail.ru.



ИССЛЕДОВАНИЕ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ ОДИНОЧНОГО И ДВОЙНОГО ИНТЕГРАТОРОВ ДРОБНОГО ПОРЯДКА С ПОМОЩЬЮ МЕТОДА МОМЕНТОВ

С.С. Постнов

Дана постановка задачи оптимального управления для двух динамических систем дробного порядка: одиночного и двойного интеграторов. Задача сведена к проблеме моментов. Выведены основные уравнения и формулы, позволяющие получать решение задачи. Исследованы зависимости нормы управления и минимального времени перехода в конечное состояние от показателей дифференцирования. Проведен сравнительный анализ результатов для исследуемых систем.

Ключевые слова: оптимальное управление, проблема моментов, интегратор, дробная производная Капуто.

*Светлой памяти Анатолия Григорьевича Бутковского
посвящается*

ВВЕДЕНИЕ

Метод моментов — весьма мощный и эффективный инструмент исследования и решения задач оптимального управления системами с сосредоточенными или распределенными параметрами [1, 2]. В настоящей работе этот метод применяется для решения и исследования задачи оптимального управления динамическими системами, описываемыми с помощью линейных обыкновенных дифференциальных уравнений дробного порядка. Рассмотрение проводится для двух простых систем — одиночного и двойного интеграторов дробного порядка.

Задачи управления системами, описываемыми дифференциальными уравнениями дробного порядка, получили развитие лишь в последние годы [3–7]. При постановке и решении задачи оптимального управления динамической системой дробного порядка в опубликованных на сегодня работах применяются вариационные методы, не

позволяющие, в отличие от метода моментов, явным образом учитывать ограничения на норму управления и работать с разрывными управлениями. Применение же метода моментов для исследования задачи оптимального управления динамической системой дробного порядка ранее не рассматривалось. Отметим также, что принцип максимума, аналогичный принципу максимума Л.С. Понтрягина для систем целого порядка, для систем дробного порядка на сегодня не доказан.

В настоящей работе дробная производная в определяющих уравнениях понимается в смысле Капуто [8, 9]. Для одиночного интегратора дробного порядка решение задачи оптимального управления получено в явном виде. Для двойного интегратора дробного порядка выведено базовое уравнение, позволяющее получать решение задачи для заданных значений показателей дифференцирования, правой границы временного интервала, на котором рассматривается задача, и начальных и конечных условий.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть функции $q(t)$ и $u(t)$, определены на отрезке $[0, T]$, $T > 0$. Пусть функция $u(t)$, называемая в дальнейшем управлением, принадлежит пространству $M[0, T]$ измеримых и почти всюду ограниченных на отрезке $[0, T]$ функций с нормой

$$\|u(t)\| = \text{vrai max}_{t \in [0, T]} |u(t)|.$$

Здесь под обозначением vrai max подразумевается существенный максимум функции $u(t)$ как нижняя грань множества чисел, таких, что множество значений аргумента $t \in [0, T]$, для которых значение функции $u(t)$ превышает упомянутые числа, имеет меру нуль [1]. Функцию $q(t)$, определяющую состояние динамической системы в момент времени $t \in [0, T]$, будем считать обладающей всеми необходимыми свойствами для существования решений рассматриваемых далее уравнений, в частности, дифференцируемой хотя бы один раз.

Дробную производную произвольного нецелого порядка $\alpha \in (0, 1)$ от функции $q(t)$ будем понимать как левостороннюю дробную производную Капуто [8, 9]:

$${}_0D_t^\alpha q(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t \frac{dq(\xi)}{d\xi} \frac{d\xi}{(t-\xi)^\alpha}.$$

Одиноким интегратором дробного порядка (или просто дробным интегратором) будем называть динамическую систему, поведение которой описывается следующим дифференциальным уравнением дробного порядка:

$${}_0D_t^\alpha q(t) = u(t), \quad (1)$$

где ${}_0D_t^\alpha$ — оператор дробного дифференцирования порядка $\alpha \in (0, 1)$. Начальное и конечное условия для системы (1) зададим в виде:

$$q(0) = q_0, \quad (2)$$

$$q(T) = b_T. \quad (3)$$

Двойным интегратором дробного порядка (или двойным дробным интегратором) будем называть динамическую систему из двух связанных дробных интеграторов, поведение которой описывается следующей системой дифференциальных уравнений дробного порядка:

$${}_0D_t^\alpha q_1(t) = q_2(t), \quad (4a)$$

$${}_0D_t^\beta q_2(t) = u(t). \quad (4б)$$

Для данной системы зададим начальные условия в виде

$$q_1(0) = q_1^0, \quad q_2(0) = q_2^0 \quad (5)$$

и конечные условия в виде

$$q_1(T) = b_1^T, \quad q_2(T) = b_2^T. \quad (6)$$

Заметим, что при $\alpha = 1$ в уравнении (1) и при $\alpha = \beta = 1$ в уравнениях (4а, б) данные уравнения переходят в уравнения для однокимого и двойного интеграторов первого порядка, подробно изученные в работе [1]. Отметим также физический смысл уравнений дробного порядка: одна из популярных интерпретаций таких уравнений заключается в том, что нецелый порядок дифференцирования приводит к появлению эффективной диссипации. Например, система (4а, б) при $\alpha = \beta = 1$ описывает движение тела в соответствии со вторым законом Ньютона в среде без диссипации, а в случае дробных показателей эта система уже описывает движение с учетом потерь, например, в вязкой среде [9].

В дальнейшем будем следовать терминологии работы [1]. Поставим следующую задачу оптимального управления. Найти управление $u(t)$, $t \in [0, T]$, такое, чтобы система (1) или (4а, б) перешла из заданного начального состояния $q(0)$ или $(q_1(0), q_2(0))$ в заданное конечное состояние $q(T)$ или $(q_1(T), q_2(T))$.

При этом рассматриваются две разновидности данной задачи с разными дополнительными требованиями:

- чтобы норма управления $\|u\|$ в пространстве $M[0, T]$ достигла минимального значения, когда значение T задано (задача А);
- чтобы время управления T было минимальным при условии $\|u\| \leq l$, $l > 0$, l задано (задача Б).

2. ПРИВЕДЕНИЕ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ К ПРОБЛЕМЕ МОМЕНТОВ

Рассмотрим вначале однокимый интегратор дробного порядка. Известно, что обратной операцией к дробному дифференцированию Капуто является дробное интегрирование Римана—Лиувилля [8, с. 265]. Следовательно, решение уравнения (1) можно получить, вычислив интеграл Римана—Лиувилля порядка α от обеих частей уравнения [8—10]. С учетом начального условия (2)

$$q(t) = q_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t \frac{u(\tau) d\tau}{(t-\tau)^{1-\alpha}}. \quad (7)$$



Записав формулу (7) для конечного состояния и воспользовавшись конечным условием (3), получим классическую одномерную l -проблему моментов [1]:

$$\int_0^T G_T^\alpha(\tau) u(\tau) d\tau = a(T), \quad (8)$$

где

$$G_T^\alpha(\tau) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \frac{1}{(T-\tau)^{1-\alpha}}, \quad (9)$$

$$a(T) = b_T - q_0. \quad (10)$$

Отметим, что формула (10) совпадает с аналогичной формулой для момента в задаче для интегратора первого порядка [1].

В случае двойного интегратора дробного порядка, как и в случае одиночного, можно получить явное решение уравнений (4а, б) [8–10] (см. Приложение 1). Учтя начальные условия (5) и записав полученное решение для конечного состояния (6), получим классическую двумерную l -проблему моментов [1]:

$$\int_0^T G_2^\beta(\tau) u(\tau) d\tau = a_2(T), \quad (11а)$$

$$\int_0^T G_1^{\alpha+\beta}(\tau) u(\tau) d\tau = a_1(T), \quad (11б)$$

где

$$G_2^\beta(\tau) = \frac{1}{\Gamma(\beta)} \frac{1}{(T-\tau)^{1-\beta}}, \quad (12а)$$

$$G_1^{\alpha+\beta}(\tau) = \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)} \frac{1}{(T-\tau)^{1-\alpha-\beta}}, \quad (12б)$$

$$a_2(T) = b_2^T - q_2^0, \quad (13а)$$

$$a_1(T) = b_1^T - q_1^0 - \frac{q_2^0 T^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}. \quad (13б)$$

Формула (13а), как и формула (10), полностью аналогична формуле для соответствующего момента в задаче о двойном интеграторе первого порядка [1]. Заметим также, что и для проблемы (8), и для проблемы (11а, б) выполнены условия разрешимости проблемы моментов в пространстве $M[0, T]$ [1, 2].

3. РЕШЕНИЕ ПОЛУЧЕННОЙ ПРОБЛЕМЫ МОМЕНТОВ

Как известно [1], l -проблема моментов вида

$$\int_0^T g_i(\tau) u(\tau) d\tau = a_i(T), \quad i = \overline{1, n}, \quad u(t) \in M[0, T] \quad (14)$$

сводится к решению следующей задачи: найти

$$\min_{\xi_1, \dots, \xi_n} \left(\int_0^T \left| \sum_{i=1}^n \xi_i g_i(t) \right| dt \right) = \frac{1}{\lambda_n} \quad (15)$$

при условии

$$\sum_{i=1}^n a_i(T) \xi_i = 1. \quad (16)$$

При этом минимальная норма управления $\|u\| = \lambda_n$.

Решение задачи А дается в виде [1]:

$$u(t) = \lambda_n \operatorname{sign} \left(\sum_{i=1}^n \xi_i^* g_i(t) \right), \quad t \in [0, T]. \quad (17)$$

Решением задачи Б являются [1] минимальное время перехода в конечное состояние T^* и управление

$$u(t) = l \operatorname{sign} \left(\sum_{i=1}^n \xi_i^* g_i(t) \right), \quad t \in [0, T^*], \quad (18)$$

где величины ξ_i^* находятся из решения задачи (15), (16) при $T = T^*$. Значение T^* находится как наименьшее действительное неотрицательное число, удовлетворяющее при заданном числе $l > 0$ уравнению

$$\lambda_n(T^*) = l. \quad (19)$$

В случае одиночного интегратора имеем в формуле (14) $n = 1$ и $g_1(\tau) = G_T^\alpha(\tau)$. После необходимых выкладок при решении задачи (15), (16) с учетом явных выражений (9) и (10) можно найти величины ξ_1^* и λ_1 и, подставив их в формулу (17), показать, что решением задачи А будет функция

$$u(t) = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{T^\alpha} (b_T - q_0). \quad (20)$$

Решение задачи Б, полученное на основании формул (18) и (19), для одиночного интегратора дробного порядка запишется как

$$T^* = (\Gamma(\alpha+1) |b_T - q_0| / l)^{1/\alpha}, \quad (21)$$

$$u(t) = l \operatorname{sign}(b_T - q_0), \quad t \in [0, T^*]. \quad (22)$$

В случае двойного интегратора в формуле (14) имеем $n = 2$, $g_1(\tau) = G_1^{\alpha+\beta}(\tau)$, $g_2(\tau) = G_2^\beta(\tau)$. Выразив ξ_1 через ξ_2 из формулы (16) и подставив их в формулу (15), а также используя формулы (12а, б), можно записать выражение, стоящее под модулем в формуле (15), в виде:

$$f(t, \xi_2) = \frac{1}{a_1(T)} \frac{(T-t)^{\alpha+\beta-1}}{\Gamma(\alpha+\beta)} + \left(\frac{(T-t)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} - \frac{a_2(T)(T-t)^{\alpha+\beta-1}}{a_1(T)\Gamma(\alpha+\beta)} \right) \xi_2. \quad (23)$$

Здесь возможны два случая: функция (23) меняет или не меняет знак на отрезке $[0, T]$. В первом случае нужно найти точку пересечения ее графика с осью времени и учесть изменение знака в этой точке при взятии интеграла в формуле (15). Точка пересечения определяется формулой:

$$t' = T - \left[\frac{a_1 \xi_2 \Gamma(\alpha+\beta)}{(a_2 \xi_2 - 1) \Gamma(\beta)} \right]^{1/\alpha}. \quad (24)$$

Можно показать (см. Приложение 2), что задача (15), (16) сводится к поиску минимума по ξ_2 функции

$$F(\xi_2) = \frac{2\alpha}{(\alpha+\beta)\Gamma(\beta+1)} \left[\frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\beta)} \right]^{\beta/\alpha} \times \left(\frac{a_2(T)\xi_2 - 1}{q_1(T)} \right)^{-\beta/\alpha} \xi_2^{1+\beta/\alpha} + \frac{T^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} \frac{a_2(T)\xi_2 - 1}{a_1(T)} - \frac{T^\beta}{\Gamma(\beta+1)} \xi_2. \quad (25)$$

Минимум в данном случае может быть найден из решения уравнения

$$F'(\xi_2) = 0, \quad (26)$$

допускающего, вообще говоря, неединственное решение. Поиск минимального значения в данном случае будет зависеть от конкретных значений показателей дифференцирования α и β , определяющих степень результирующего уравнения. Найденное таким образом минимальное значение ξ_2^* в соответствии с формулой (17) определит решение задачи А. При решении задачи Б найденное из формулы (15) значение λ_2 необходимо подставить в уравнение (19), решение которого даст величину T^* , а соответствующее управление определится по формуле (18).

Если функция (23) не меняет знака на отрезке $[0, T]$, то выкладки существенно упрощаются, и решения задач А и Б могут быть получены явно.

Решение задачи А в соответствии с формулой (17) определяется выражением

$$u(t) = \frac{a_1(T)\Gamma(\alpha+\beta+1)}{T^{\alpha+\beta}}.$$

Решение задачи Б, в свою очередь, исходя из формул (18) и (19), дается следующими выражениями:

$$T^* = (|a_1(T)|\Gamma(\alpha+\beta+1)/l)^{1/(\alpha+\beta)}, \\ u(t) = l \operatorname{sign}[a_1(T^*)], \quad t \in [0, T^*].$$

4. АНАЛИЗ ПОЛУЧЕННЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

Продemonстрируем, что во всех случаях полученные формулы для решений задач А и Б переходят в их аналоги, полученные для одиночного и двойного интегратора первого порядка, если положить соответствующие показатели дифференцирования равными 1. Действительно, как известно [1], решение задачи А для одиночного интегратора первого порядка дается формулой

$$u^1(t) = (b - q_0)/T, \quad (27)$$

а решение задачи Б — формулами

$$T_1^* = |b_T - q_0|/l, \quad (28)$$

$$u^1(t) = l \operatorname{sign}(b_T - q_0), \quad t \in [0, T_1^*]. \quad (29)$$

Сравнение формул (20) и (27), (21) и (28), (22) и (29) показывает, что при $\alpha = 1$ они идентичны. Интересно отметить, что формулы (22) и (29) одинаковы по форме и отличаются лишь областью определения; т. е. для одиночного дробного интегратора зависимость от порядка дифференцирования явно не присутствует в формуле для оптимального по быстродействию управления.

Для двойного интегратора первого порядка при произвольных начальных и конечных условиях решение задач А и Б приводит к квадратному уравнению относительно ξ_2 [1], в которое переходит уравнение (26) при $\alpha = \beta = 1$.

Решение задачи А для двойного интегратора первого порядка при $q_2^0 = b_2^T = 0$ дается формулой [1]:

$$u^2(t) = \frac{4(b_1^T - q_1^0)}{T^2} \operatorname{sign} \left(\frac{T/2 - t}{b_1^T - q_1^0} \right). \quad (30)$$

Для дробного двойного интегратора решение задачи А при $q_2^0 = b_2^T = 0$, как можно показать на

основе решения уравнения (26), записывается в виде:

$$u(t) = -\gamma \frac{a_1(T)}{T^{\alpha+\beta}} \operatorname{sign} \left(\frac{(T-t)^{\alpha} - 2^{-\alpha/\beta} T^{\alpha}}{a_1(T)} \right), \quad t \in [0, T], \quad (31)$$

где $\gamma = 2^{\alpha/\beta} \Gamma(\alpha + \beta + 1) / (2^{\alpha/\beta} - 1)$. Видно, что при $\alpha = \beta = 1$ формула (31) сводится к формуле (30).

При рассмотрении задачи Б дополнительно предположим $q_1^0 > 0$, $b_1^T = 0$ для упрощения явных формул. Для двойного интегратора первого порядка решение задачи Б дается формулами:

$$T_2^* = 2\sqrt{q_1^0/l}, \quad (32)$$

$$u^2(t) = l \operatorname{sign} \left(\frac{t}{q_1^0} - \frac{1}{\sqrt{l q_1^0}} \right), \quad t \in [0, T_2^*]. \quad (33)$$

Аналогичные формулы для двойного дробного интегратора имеют вид

$$T^* = \left(\gamma \frac{q_1^0}{l} \right)^{\frac{1}{\alpha+\beta}}, \quad (34)$$

$$u(t) = l \operatorname{sign} \left[\frac{2^{-\alpha/\beta} (T^*)^{\alpha} - (T^* - t)^{\alpha}}{q_1^0} \right], \quad t \in [0, T^*]. \quad (35)$$

В случае задачи Б также несложно убедиться, что при $\alpha = \beta = 1$ формула (34) переходит в формулу (32), а формула (35) приводится к формуле (33). Также заметим, что в общем случае задачи А и Б могут не иметь решений: условие $\lambda_2 > 0$ может не выполняться и соответствующее уравнение для T^* (следующее из уравнения (19)) может не иметь действительного неотрицательного корня.

Таким образом, все полученные для одиночного и двойного дробных интеграторов формулы переходят в свои «целочисленные» аналоги при задании показателей дифференцирования, равными единице.

Заметим также, что система уравнений (4а, б) при $\beta \rightarrow 0$ сводится к одному уравнению (1). Можно показать, что в этом случае имеет место и переход формул, полученных для двух связанных интеграторов, в формулы, полученные для одного интегратора. Действительно, выполнив предельный переход при $\beta \rightarrow 0$ в формуле (31), можно убедиться, что она сводится к формуле (20). Аналогично, формулы (34) и (35) в пределе при $\beta \rightarrow 0$ сводятся к формулам (21) и (22) соответственно.

5. РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТОВ

Рассмотрим задачу перевода системы в нулевое конечное состояние. Основное внимание уделим зависимости базовых величин от порядка дифференцирования. Для двойного дробного интегратора рассмотрим случаи различных начальных условий. Расчеты и визуализация результатов осуществлялись средствами пакета MatLab 7.9.

Зависимость нормы управления в задаче А для одиночного дробного интегратора (см. формулу (20)) от порядка дифференцирования приведена на рис. 1 при различных значениях q_0 . Здесь и далее (если не оговорено иное) правая граница временного интервала в задаче А задается равной $T = 100$, а ограничение на норму управления в задаче Б — в виде $l = 1$. Видно, что приведенные на рис. 1 зависимости имеют монотонно-убывающий характер, а при фиксированном α минимальная норма управления растет с ростом q_0 (и, соответственно, с ростом момента $a(T)$).

На рис. 2 представлена зависимость нормы управления в задаче А, определяемой формулой (20), от величины T для одиночного дробного интегратора. Видно, что качественно эта зависимость соответствует случаю интегратора первого порядка (эта зависимость также приведена на графике — кривая для $\alpha = 1$): с ростом интервала наблюдения норма управления уменьшается. При фиксированном T в области $T < 1$ с ростом показателя дифференцирования норма управления растет. В области значений $T > 1$ наблюдается обратная тенденция.

На рис. 3 представлена зависимость наименьшего времени перехода в конечное состояние T^*

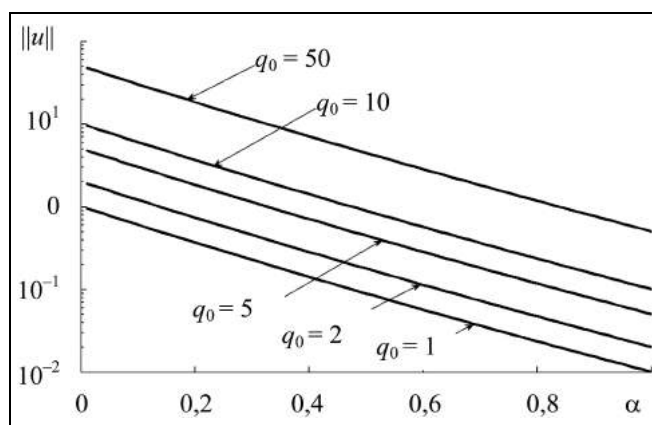


Рис. 1. Зависимость нормы управления от порядка дробного дифференцирования для одиночного дробного интегратора (по оси ординат — логарифмическая шкала)

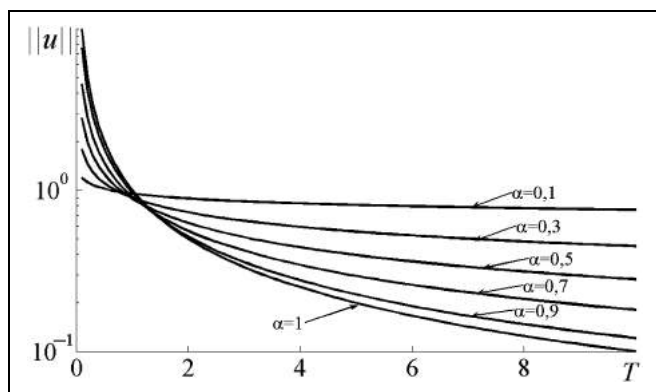


Рис. 2. Зависимость нормы управления от правой границы временного интервала для дробного интегратора при различных значениях показателя дифференцирования (по оси ординат — логарифмическая шкала)

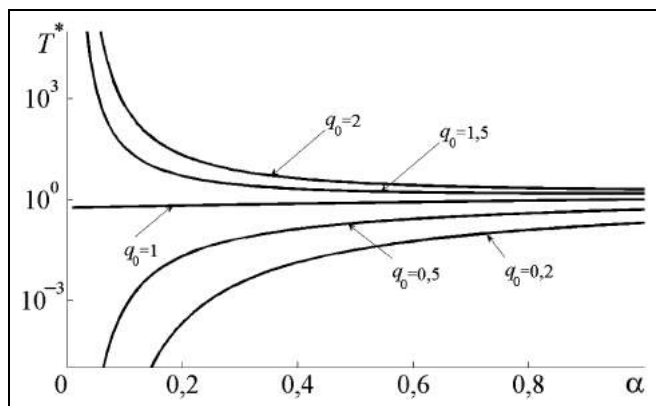


Рис. 3. Зависимость минимального времени перехода в конечное состояние от порядка дифференцирования для дробного интегратора (по оси ординат — логарифмическая шкала)

от показателя дифференцирования при различных значениях q_0 . Видно, что при $|a(T)| = |b_T - q_0| = 1$ зависимость имеет слабовозрастающий характер. При $|b_T - q_0| < 1$ возрастающий характер зависимости выражен заметно сильнее, так как в этом случае, согласно формуле (21), в формуле появляется степенная функция $|b_T - q_0|^{1/\alpha}$. Аналогично, при $|b_T - q_0| > 1$ в формуле (21) степенная функция вида $|b_T - q_0|^{1/\alpha}$ обуславливает выраженный быстроспадающий характер.

Рассмотрим теперь задачу перевода в нулевое конечное состояние для двойного интегратора при $q_1^0 \neq 0$ и $q_2^0 = 0$. В этом случае зависимость от порядка дифференцирования присутствует только в функциях $G_1^{\alpha+\beta}(t)$ и $G_2^\beta(t)$, а выражения для мо-

ментов совпадают со случаем двойного интегратора целого порядка. Решение уравнения (26) при этом сильно упрощается и последующие вычисления по формулам (25), (15), (16) и (19) приводят к явным аналитическим зависимостям. В этом случае можно получить также простую явную формулу для точки изменения знака функции (24):

$$t' = T(1 - 2^{-1/\beta}). \quad (36)$$

Анализ формулы (36) показывает, что положение данной точки (момента переключения) определяется только показателем дифференцирования второго интегратора в системе (4а, б). Причем это положение оказывается локализованным на отрезке $[T/2, T]$, смещаясь слева направо при уменьшении показателя дифференцирования β . При $\beta = 1$ имеем $t' = T/2 \forall \alpha \in [0, 1]$, как и для случая двойного интегратора первого порядка [1].

На рис. 4 приведены трехмерные графики зависимости нормы управления от показателей дифференцирования α и β в случае задачи А (формула (31)) при $t = T$, $q_1^0 = 1$. Видно, что данная зависимость имеет немонотонный характер и характеризуется определенным диапазоном значений показателей интегрирования, в котором норма управления достигает максимального значения. На рис. 5 приведены сечения трехмерных графиков, изображенных на рис. 4: зависимости нормы управления от показателя дифференцирования α при различных фиксированных значениях показателя дифференцирования β . Видно, что при малых показателях β данные зависимости являются немонотонными и имеют максимум в области малых α . В области $\beta > 0,3$ поведение этих зависимостей становится монотонным и, аналогично случаю простого интегратора, наблюдается уменьшение модуля управления при росте показателя дифференцирования α . Большим значениям показателя

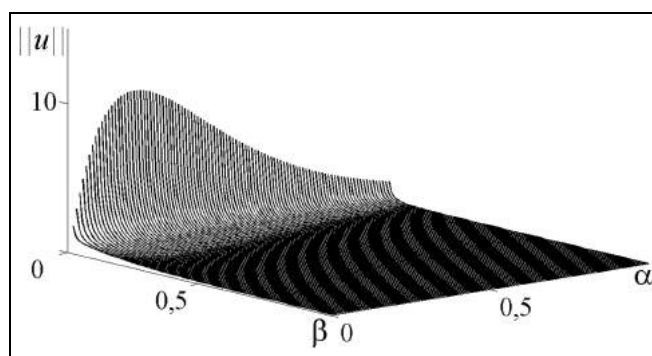


Рис. 4. Зависимость нормы управления от показателей дифференцирования для двойного дробного интегратора в случае задачи А

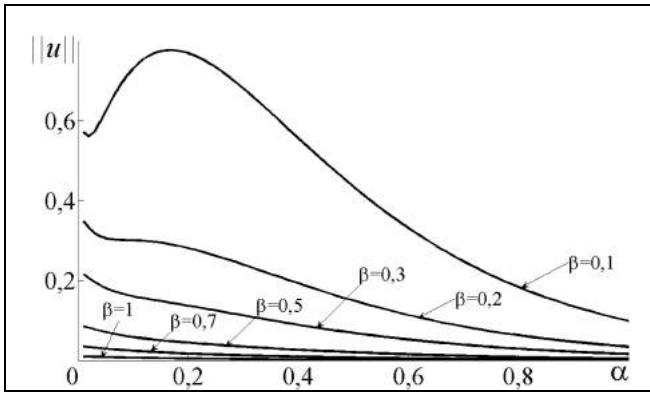


Рис. 5. Зависимости нормы управления от показателя дифференцирования α при различных фиксированных значениях показателя дифференцирования β для двойного дробного интегратора в случае задачи А

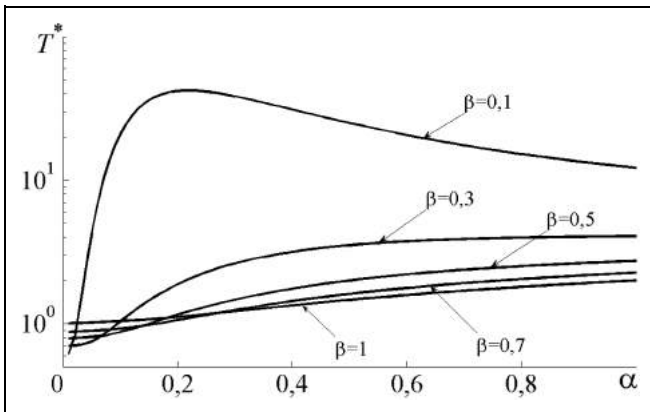


Рис. 6. Зависимость минимального времени перехода в конечное состояние для двойного дробного интегратора Капуто при различных значениях показателей дифференцирования (по оси ординат — логарифмическая шкала)

дифференцирования β соответствуют меньшие значения нормы управления.

Отметим, что значения модуля управления неинвариантны относительно перестановки $\alpha \leftrightarrow \beta$, т. е. двойной интегратор неинвариантен к перестановке переменных $q_1 \leftrightarrow q_2$. Это вполне понятно из анализа формулы (31), дающей различные уравнения для поиска экстремума модуля управления по α и β .

Зависимость нормы управления от T при фиксированных показателях дифференцирования α и β аналогична зависимости, приведенной ранее для простого интегратора (см. рис. 2) и здесь не приводится.

На рис. 6 показаны зависимости минимального времени перехода в конечное состояние для нескольких значений показателя дифференцирова-

ния β в зависимости от показателя дифференцирования α . Здесь полагалось $q_1^0 = 1$. Видно, что приведенные зависимости имеют слабо выраженный минимум в области малых α . При малых α и β , как и на рис. 5, зависимость имеет максимум. Кроме того, в области $\alpha < 0,2$ при фиксированном α минимальное время перехода T^* растет с увеличением β , а в области $\alpha > 0,2$ наблюдается обратная тенденция.

Рассмотрим также задачу о переводе в нулевое конечное состояние для двойного интегратора при $q_1^0 = 0$ и $q_2^0 \neq 0$. Данный случай отличается от предыдущего, главным образом, тем, что в выражении (136) для момента $a_1(T)$, сохраняется зависимость от порядка дифференцирования α . При этом уравнение (26) в случае $\alpha = \beta$ сводится к квадратному и, следовательно, дает возможность нахождения явного аналитического решения задачи оптимального управления. Найдя величину ξ_2^* и подставив ее в выражение (25) и уравнение (15), получим:

$$\lambda_2 = \frac{q_2^0}{D(\alpha)T^\alpha}, \quad (37)$$

$$\text{где } D(\alpha) = A(\alpha) \left[\frac{A(\alpha) - 1}{A(\alpha)\Gamma(\alpha + 1)} \left(\frac{A(\alpha) - 1}{A(\alpha)} \frac{\Gamma(2\alpha)}{\Gamma(\alpha)} - 1 \right) + \frac{\Gamma(\alpha)}{2\Gamma(2\alpha)} \right], A(\alpha) = \left[\frac{2\Gamma^2(2\alpha)}{(\Gamma(2\alpha) - \alpha\Gamma^2(\alpha))^2 + \Gamma^2(2\alpha)} \right]^{1/2}.$$

Решением задачи А будет функция

$$u(t) = \frac{q_2^0}{D(\alpha)T^\alpha} \times \text{sign} \left[\frac{1}{q_2^0} \left(\frac{A(\alpha) - 1}{\Gamma(\alpha)} - A(\alpha) \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{\Gamma(2\alpha)} \left(1 - \frac{t}{T} \right)^\alpha \right) \right], \quad t \in [0, T]. \quad (38)$$

В случае задачи Б при заданном $l > 0$ минимальное время перехода в конечное состояние на основании формул (19) и (37) определяется формулой:

$$T^* = (q_2^0 / l D(\alpha))^{1/\alpha}. \quad (39)$$

Соответствующее управление

$$u(t) = l \text{sign} \left[\frac{1}{q_2^0} \left(\frac{A(\alpha) - 1}{\Gamma(\alpha)} - A(\alpha) \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{\Gamma(2\alpha)} \left(1 - \frac{t}{T^*} \right)^\alpha \right) \right], \quad t \in [0, T^*]. \quad (40)$$

Характер зависимостей нормы управления (38) в задаче А от порядка дифференцирования и правой границы временного интервала, а также зависимости наименьшего времени перехода (39) от порядка дифференцирования качественно совпадает с поведением аналогичных зависимостей для одиночного интегратора (см. рис. 1–3). Это подтверждает и сравнение формул (38)–(40) с формулами (20)–(22) соответственно.

Точка пересечения функции (23) с осью абсцисс, согласно формуле (24), определяется выражением:

$$t' = T \left[1 - \left(\frac{\Gamma(2\alpha)}{\alpha \Gamma^2(\alpha)} \frac{A(\alpha) - 1}{A(\alpha)} \right)^{1/\alpha} \right]. \quad (41)$$

Численные расчеты по формуле (41) показывают, что в данном случае эта точка находится на интервале $t' \in [0, 7T, T]$, т. е., по сравнению с формулой (36), в данном случае левая граница области значений величины t' сдвигается вправо.

Аналогичным образом аналитические решения могут быть получены для случаев $\alpha/\beta = 2^{\pm 1}$ и $\alpha/\beta = 3^{\pm 1}$, приводящих к уравнениям 3-й и 4-й степени соответственно.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе задача оптимального управления одиночным и двойным дробным интегратором сведена к I -проблеме моментов. В общем виде получены явные аналитические формулы или базовые уравнения, позволяющие находить оптимальное (в смысле минимума нормы управления или времени перехода в конечное состояние) управление и минимальное время перехода в конечное состояние при заданном ограничении на норму управления. Показано, что все полученные формулы переходят в свои аналоги для одиночного и двойного интеграторов первого порядка, если положить соответствующие показатели дифференцирования равными единице. Также показано, что формулы, полученные для двойного дробного интегратора, сводятся к формулам для одиночного дробного интегратора при $\beta \rightarrow 0$. Приведены результаты расчетов для ряда случаев, демонстрирующие характер зависимости основных величин от показателей дифференцирования и правой границы временного отрезка, на котором рассматривается задача.

Полученные в данной работе результаты могут найти применение в задачах управления системами нецелого порядка. В отличие от опубликованных ранее результатов, полученных в рамках вариационного подхода, полученные результаты могут

быть применимы при ограничениях на норму управления и разрывных управлениях. В качестве конкретных физических систем, для которых может быть реализовано данное управление, можно указать механические системы с вязким трением и наследственными эффектами, микроструктурированные и плазмopodobные (в том числе, электрохимические) среды различной природы. Одна из интересных аппаратных реализаций подобных систем — суперконденсатор или конденсатор с фрактальным характером структуры электродов. Благодаря такой структуре эффективная площадь и, следовательно, емкость суперконденсатора достигает огромных значений. В настоящее время подобные устройства пытаются использовать для создания блоков питания для различных систем, в том числе транспортных средств (электромобилей и др.).

Полученные результаты могут также оказаться полезными при построении алгоритмов настройки контроллеров нецелого порядка, применяемых сегодня, например, для управления системами электропитания и кондиционирования.

Автор выражает свою искреннюю благодарность В.А. Кубышкину за плодотворное обсуждение материала данной работы и полезные советы и замечания. Идея рассмотрения динамических систем дробного порядка с управлением и применения для их описания метода моментов была предложена автору А.Г. Бутковским.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Взяв интеграл Римана—Лиувилля соответствующего порядка от правой и левой частей уравнений (4а, б), будем иметь:

$$q_1(t) - q_1(0) = {}_0I_t^\alpha q_2(t),$$

$$q_2(t) - q_2(0) = {}_0I_t^\beta u(t).$$

Для получения окончательного явного решения системы (4а, б) выразим $q_2(t)$ из второго равенства и подставим это выражение в первое из полученных равенств. Далее воспользуемся полугрупповым свойством интеграла Римана—Лиувилля:

$${}_0I_t^\alpha ({}_0I_t^\beta u(t)) = {}_0I_t^{\alpha+\beta} u(t).$$

В итоге, с учетом начальных условий (5), получим:

$$q_1(t) = q_1^0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_0^t \frac{u(\tau) d\tau}{(t-\tau)^{1-\alpha-\beta}},$$

$$q_2(t) = q_2^0 + \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^t \frac{u(\tau) d\tau}{(t-\tau)^{1-\beta}}.$$



ПРИЛОЖЕНИЕ 2

ЛИТЕРАТУРА

Вычислим интеграл, входящий в формулу (15) для двойного интегратора в случае, когда подынтегральная функция $f(t, \xi_2)$ меняет знак на отрезке интегрирования. Выражение (23) для подынтегральной функции с учетом формулы (24) можно записать в виде:

$$f(t, \xi_2) = \frac{(T-t)^{\alpha+\beta-1}}{\Gamma(\beta)} [(T-t)^{-\alpha} - (T-t')^{-\alpha}] \xi_2.$$

Отсюда видно, что при $\xi_2 > 0$: $f(t, \xi_2) > 0$ при $t > t'$ и $f(t, \xi_2) < 0$ при $t < t'$. Тогда

$$\begin{aligned} & \int_0^T |\xi_1 G_1^{\alpha+\beta}(t) + \xi_2 G_2^\beta(t)| dt = \\ & = - \int_0^{t'} f(t, \xi_2) dt + \int_{t'}^T f(t, \xi_2) dt = \\ & = \frac{1}{a_1(T)} \frac{2(T-t')^{\alpha+\beta} - T^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} + \\ & + \left(\frac{2(T-t')^\beta - T^\beta}{\Gamma(\beta+1)} - \frac{a_2(T) 2(T-t')^{\alpha+\beta} - T^{\alpha+\beta}}{a_1(T) \Gamma(\alpha+\beta+1)} \right) \xi_2. \end{aligned}$$

В случае $\xi_2 < 0$ аналогичное вычисление дает тот же конечный результат. Подставив сюда выражение для t' из формулы (24), получим формулу (25). Задача (15) сведется к следующему виду:

$$\min_{\xi_1, \xi_2} \left(\int_0^T |\xi_1 G_1^{\alpha+\beta}(t) + \xi_2 G_2^\beta(t)| dt \right) = \min_{\xi_2} F(\xi_2) = \frac{1}{\lambda_2},$$

где $F(\xi_2)$ определяется формулой (25).

1. Бутковский А.Г. Методы управления системами с распределенными параметрами. — М.: Наука, 1975. — 568 с.
2. Красовский Н.Н. Теория управления движением. — М.: Наука, 1968. — 476 с.
3. Fractional-order Systems and Controls: Fundamentals and Applications / C.A. Monje, et al. — London: Springer-Verlag, 2010. — 429 p.
4. Fractional Order Systems. Modelling and Control Applications / R. Caponetto, et al. — Singapore: World Scientific, 2010. — 195 p.
5. Agrawal O.P. A General Formulation and Solution Scheme for Fractional Optimal Control Problems // Nonlin. Dyn. — 2004. — Vol. 38. — P. 323–337.
6. Agrawal O.P. A Formulation and Numerical Scheme for Fractional Optimal Control Problems // J. Vibr. Control. — 2008. — Vol. 14, N 9–10. — P. 1291–1299.
7. Frederico G.S.F., Torres D.F.M. Fractional Optimal Control in the Sense of Caputo and the Fractional Noether's Theorem // Int. Math. Forum. — 2008. — Vol. 3, N 10. — P. 479–493.
8. Тарасов В.Е. Модели теоретической физики с интегрированием дробного порядка. — Ижевск: РХД, 2011. — 568 с.
9. Учайкин В.В. Метод дробных производных. — Ульяновск: Артишок, 2008. — 512 с.
10. Podlubny I. Fractional Differential Equations. — San Diego: Academic Press, 1999. — 341 p.

Статья представлена к публикации членом редколлегии В.Ю. Рутковским.

Постнов Сергей Сергеевич — аспирант, Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, г. Москва, ✉ postnov.sergey@inbox.ru.

Содержание сборника "Управление большими системами", 2012, вып. 38

- ✓ Кульба В.В., Косяченко С.А., Шелков А.Б. Методология исследования проблем обеспечения безопасности на железнодорожном транспорте
- ✓ Матюхин В.Г. Концептуальное моделирование процессов управления на железнодорожном транспорте
- ✓ Ахметзянов А.В., Бахтадзе Н.Н., Власов С.А. и др. Поддержка принятия управленческих решений на основе интеллектуальной обработки и анализа данных мониторинга деятельности компании ОАО «РЖД»
- ✓ Дорофеюк А.А., Дорофеюк Ю.А., Мандель А.С. и др. Современные требования к безопасности железнодорожного транспорта и методы интеллектуального анализа в задаче построения экспертно-аналитической модели для прогнозирования состояния железнодорожных путей и полосы отвода
- ✓ Каркищенко А.Н., Гречухин И.А. Статистическое распознавание лиц по геометрии характерных точек для систем транспортной безопасности
- ✓ Павлов В.Л., Уманский В.И. Разработка системы поддержки принятия решений по оценке показателей пропускной способности участков железных дорог
- ✓ Ханычев В.В., Милованов М.А. Разработка системы интеллектуального мониторинга и контроля обстановки в целях обеспечения безопасности объектов железнодорожной инфраструктуры со стороны прилегающей водной акватории
- ✓ Явна В.А., Каспржицкий А.С., Кругликов А.А. и др. Этапы проектирования интеллектуальной системы мониторинга объектов транспортной инфраструктуры
- ✓ Амбарцумян А.А., Браништов С.А. Моделирование движения поездов на пассажирской станции
- ✓ Кибзун А.И., Наумов А.В., Иванов С.В. Двухуровневая задача оптимизации деятельности железнодорожного транспортного узла
- ✓ Лазарев А.А., Мусатова Е.Г. Целочисленные постановки задачи формирования железнодорожных составов и расписания их движения
- ✓ Каплунов С.М., Вальес Н.Г., Фурсов В.Ю. и др. Диагностика состояния конструкций и сооружений инфраструктуры РЖД с учетом интенсивных аэродинамических нагрузок от скоростных составов
- ✓ Карабутов А.А., Жаринов А.Н., Ивочкин А.Ю. и др. Лазерно-ультразвуковая диагностика продольных напряжений рельсовых плетей
- ✓ Колесников В.И., Мясникова Н.А., Жукова Ю.В. и др. Методы диагностики состояния многослойного антифрикционного наномодифицированного покрытия на боковой поверхности головки рельса



ЗАДАЧА УПРАВЛЕНИЯ ГИДРОЛОГИЧЕСКИМ РЕЖИМОМ В ЭКОЛОГО-ЭКОНОМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЕ «ВОЛЖСКАЯ ГЭС – ВОЛГО-АХТУБИНСКАЯ ПОЙМА».

Ч. 1. Моделирование динамики поверхностных вод в период весеннего паводка

А.В. Хоперсков, С.С. Храпов, А.В. Писарев, А.А. Воронин,
М.В. Елисеева, И.А. Кобелев

Представлена гидродинамическая численная модель динамики поверхностных вод на территории северной части Волго-Ахтубинской поймы, служащей основой постановки и решения оптимизационной и теоретико-игровой задачи управления паводковым гидрологическим режимом для эколого-экономической системы «Волжская ГЭС – Волго-Ахтубинская пойма». Рассчитаны временные зависимости площади затопления для различных гидрографов, исследованы условия обводнения территории.

Ключевые слова: управление гидрологическим режимом, динамика поверхностных вод, уравнения мелкой воды, численные методы, Волго-Ахтубинская пойма.

ВВЕДЕНИЕ

В экосистеме Нижнего Поволжья особое место занимает Волго-Ахтубинская пойма (ВАП) — уникальное природное образование, простирающееся на 450 км от Волгограда до Астрахани и представляющее собой россыпь нескольких тысяч озер, разнообразные лиственные леса вдоль берегов многочисленных рек, ериков и протоков, заливные луга с редкими цветами и травами (рис. 1). Главное богатство флоры ВАП, содержащей 460 видов растений, — пойменные дубравы с 200—300-летними дубами. Здесь обитают 59 видов рыб, из которых осетровые составляют 8 %, 200 видов птиц, среди которых множество редких и исчезающих. Так, в ВАП зафиксировано 24 из 100 имеющихся на территории России гнездовий орлана-белохвоста [1]. В 2000 г. в северной части поймы создан природный парк площадью 1000 кв. км.

Современный гидрологический режим ВАП, полностью определяемый хозяйственно-экономическими приоритетами, ведет к ее деградации:

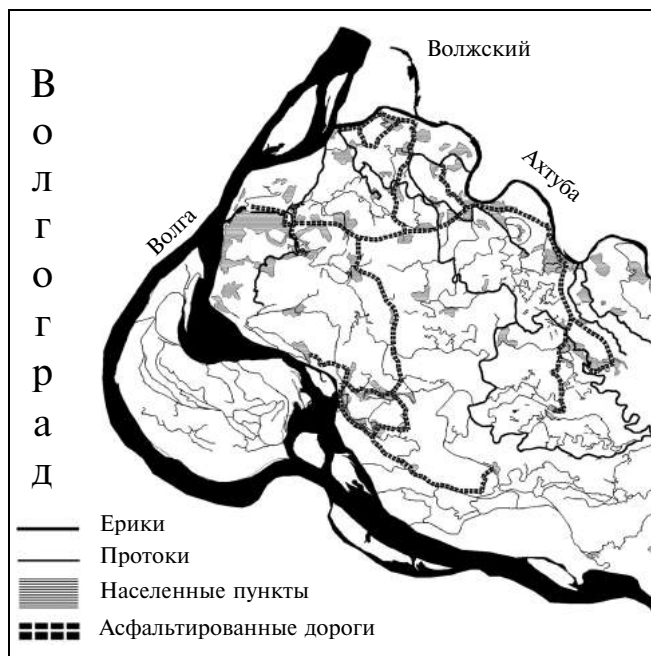


Рис. 1. Общая структура гидросистемы Волго-Ахтубинской поймы



объем летнего водостока р. Волги сокращен по сравнению с природным более чем на 30 %, а зимнего — вырос более чем в два раза; время искусственного весеннего паводка ("спепппуска"), водный теплозапас, изменчивость условий понизились в два раза; рыбные запасы и площади нерестилищ сократились в десятки раз [2]. Кардинально изменить негативную динамику невозможно без создания комплексной системы эколого-экономического управления социоприродохозяйственной системой «Волжская ГЭС — Волго-Ахтубинская пойма».

В настоящей работе представлена гидродинамическая модель для расчета динамики поверхностных вод на территории ВАП. Изучены особенности затопления ВАП в зависимости от режима пущка воды через Волжскую ГЭС (гидрографа $Q(t)$) с учетом свойств рельефа местности. Продемонстрирован алгоритм построения оптимального гидрографа, который должен лежать в основе оптимального управления рассматриваемой системой. Созданная модель динамики поверхностных вод на территории северной части ВАП может служить основой постановки и решения оптимизационной и теоретико-игровой задачи управления паводковым гидрологическим режимом для эколого-экономической системы «Волжская ГЭС — Волго-Ахтубинская пойма».

1. МОДЕЛЬ ДИНАМИКИ ПОВЕРХНОСТНЫХ ВОД НА ТЕРРИТОРИИ ВОЛГО-АХТУБИНСКОЙ ПОЙМЫ

1.1. Основные уравнения

Динамика поверхностных вод удовлетворяет приближениям модели мелкой воды, поэтому при моделировании пользуются уравнениями Сен-Венана [3, 4], получающимися в результате усреднения исходных трехмерных уравнений гидродинамики по вертикальной координате z в предположении постоянной плотности воды ρ . В результате для закона сохранения массы можно записать уравнение непрерывности для тонкого слоя жидкости толщиной $h(x, y, t)$:

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \text{div}(h\mathbf{v}) = q, \quad (1)$$

где $\mathbf{v} = \{v_x, v_y\}$ — скорость течения жидкости в горизонтальной плоскости (x, y) , усредненная по вертикальной координате z . Функция источника $q(x, y, t)$ описывает процессы, связанные с поступлением и изъятием воды из расчетной области (испарение, осадки, фильтрация, работа гидросооружений). Отметим полное совпадение уравнения (1)

с уравнением непрерывности для жидкости или газа плотности ρ в случае двумерного течения при формальной замене ρ на h . Аналогично, после усреднения по координате z уравнение движения жидкости (закон сохранения импульса) для скорости $\mathbf{v}$ имеет вид

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -g \nabla \eta + \mathbf{f}^{cor} + \mathbf{f}^{fric} + \mathbf{f}^{wind}, \quad (2)$$

здесь $\eta(x, y, t) = h(x, y, t) + b(x, y)$ — уровень свободной поверхности жидкости, функция $b(x, y)$ определяет рельеф, g — ускорение свободного падения. Первое слагаемое в правой части уравнения (2) обусловлено действием силы тяжести на слой жидкости, а второе слагаемое $\mathbf{f}^{cor} = 2[\mathbf{v} \times \boldsymbol{\Omega}]$ — действием силы Кориолиса ($\boldsymbol{\Omega}$ — угловая скорость вращения Земли). Удельная сила придонного трения между поверхностью Земли и слоем жидкости определяется выражением $\mathbf{f}^{fric} = \lambda \mathbf{v}|\mathbf{v}|/2$, где $\lambda = 2gm^2/h^{4/3}$ — коэффициент гидравлического трения. Коэффициент m шероховатости дна по Маннингу определяется мелкомасштабными особенностями подстилающей поверхности, например, типом растительности (кустарник, лесные массивы), структурой поверхности почвы (песок, пашня, характер растительности) и увеличивается по мере возрастания степени ее неоднородности. Слагаемое $\mathbf{f}^{wind} = K\rho_a(\mathbf{w} - \mathbf{v})|\mathbf{w} - \mathbf{v}|/(\rho h)$ — удельная сила воздействия воздуха атмосферы на воду, ρ_a — плотность воздуха, $\mathbf{w}$ — скорость ветра, коэффициент K зависит от состояния водной поверхности.

Обсудим факторы, определяющие баланс источников и стоков воды q в уравнении (1).

- Через плотину ГЭС за малый интервал времени dt проходит объем воды Qdt , который распределяется непосредственно за плотиной. В результате за время dt на элементарной площадке dS уровень воды повысится на величину $dt dQ/dS$.
- Введем интенсивность испарения воды q_e , которая в общем случае зависит от температуры воды T_w и воздуха T_a , его влажности α , облачности β , ветра. Имеется ряд феноменологических формул для оценки скорости испарений с водной поверхности [5]. Например, среднегодовые значения суммы испарений в северной части Каспийского моря лежат в пределах 600—1200 мм, в апреле ~50 мм, в июне может увеличиваться до ~150 мм.
- Определение скорости фильтрации q_f представляется наиболее сложным, поскольку, помимо влияния температуры T_w , в общем случае имеем зависимость q_f от толщины слоя воды, структу-

ры грунта, глубины промерзания H_g , насыщенности влагой грунта I_g и его температуры T_g .

- Интенсивность осадков q_r является внешним фактором и для периода «апрель — июнь» на территории ВАП, как правило, сопоставима с величиной q_e .

С учетом перечисленных факторов запишем для баланса интенсивностей источников и стоков воды (м/с):

$$q(x, y, t) = \frac{dQ}{dS} + q_0 = \frac{dQ}{dS} + q_r(t) - q_f(x, y, h, I_g, H_g, T_g, T_w) - q_e(h, \alpha, \beta, T_w, T_a). \quad (3)$$

На территории ВАП выполняется условие $q_0 < 0$, а характерные абсолютные значения q_0 лежат в пределах 1–10 см/сут. Функция dQ/dS локализована в окрестности Волжской плотины, а величина q_0 характеризует всю моделируемую территорию. В данной работе при моделировании ограничимся рассмотрением случая $q_0 = \text{const}$.

Отметим некоторые характерные параметры рассматриваемых течений. Течения, формирующиеся в процессе затопления ВАП, являются докритическими на основной части территории (число Фруда $Fr < 1$), но в области динамических границ «вода — сухое дно» может быть сверхкритическим ($Fr > 1$). Течения нестационарные, включают в себя развитую систему вихрей и сдвиговые течения. Рассматриваемая задача достаточно жесткая, поскольку характерное время нестационарных мелкомасштабных процессов составляет

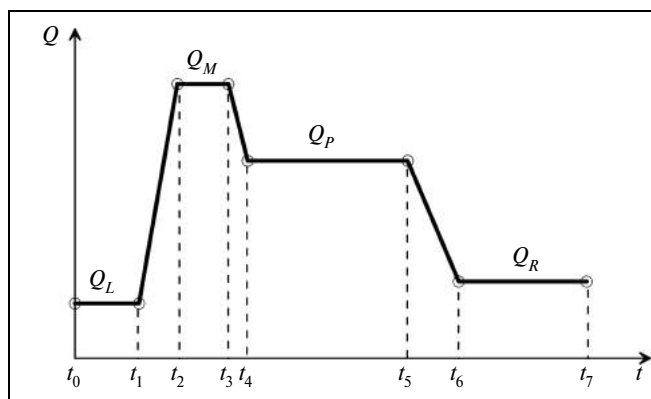


Рис. 3. Модель гидрографа: этап t_4 – t_5 с постоянным значением Q_p называется «рыбохозяйственной полкой»; постоянное значение Q_m на интервале t_2 – t_3 соответствует «сельскохозяйственной полке»

всего несколько минут, тогда как максимальное время весеннего затопления достигает 100 сут.

Экологический гидрограф состоит из двух частей: меженного (постоянного) и паводкового (рис. 2), имитирующего бурный и короткий местный разлив и последующий более долгий проход большой воды с севера. Введем нормализованный гидрограф $Q(t)$ в виде кусочно-непрерывной функции (рис. 3), обладающий всеми характерными особенностями реального гидрографа. Таким образом, гидрограф $Q(t)$ определяется набором чисел $t_i, i = 0, 1, 2, \dots, 7, Q_L, Q_M, Q_P$ и Q_R . Такая модель гидрографа облегчает процедуру оптимизации. Определим также скорость нарастания гидрографа на интервале (t_1, t_2) $\sigma_p = dQ/dt = (Q_M - Q_L)/(t_2 - t_1)$ и скорость снижения $\sigma_m = (Q_M - Q_L)/(t_4 - t_3)$. По данным гидрографов за ряд последних лет имеем $\sigma_p \sim \sigma_m \sim (1-4) \cdot \text{тыс. м}^3/(\text{с} \cdot \text{сут})$.

1.2. Численный метод

Численное решение системы (1), (2) строится на декартовой сетке с числом ячеек $N_x \times N_y$. Размер ячейки $\Delta x \times \Delta y$ определяет погрешность расчета и выбирается исходя из качества рельефа $b(x, y)$, которое будем называть также функцией рельефа. Характерная особенность рассматриваемой задачи состоит в сложном характере рельефа, содержащего многочисленные нерегулярные и даже разрывные участки. Это предъявляет особые требования к численным алгоритмам интегрирования уравнений мелкой воды.

В основу алгоритма положен оригинальный численный метод cSPH-TVD, предполагающий совместное применение TVD- и SPH-подходов [6].

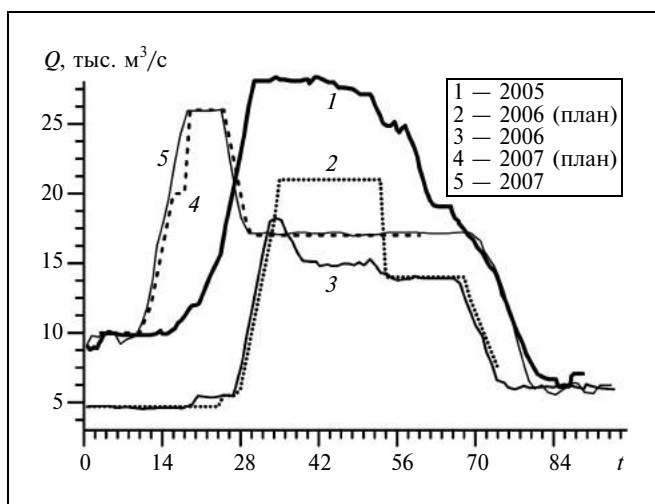


Рис. 2. Примеры гидрографов Волжского гидроузла для ряда лет



Его важная особенность заключается в устойчивом сквозном счете для нестационарной границы типа «вода — сухое дно». Аналогичная проблема возникает при моделировании астрофизических течений, и ее решение может быть основано на модификации приближенного метода решения задачи Римана HLLC [7, 8]. При нулевых значениях плотности (давления) в ячейках расчетной области в алгоритм автоматически добавляются дополнительные характеристические скорости, определяющие потоки физических величин через границы ячеек. Условием корректности модифицированного метода HLLC служит положительность плотности на границах ячеек. Метод TVD хорошо зарекомендовал себя при моделировании сложных сверхзвуковых течений, включающих в себя нестационарную систему взаимодействующих ударных волн [9]. Реализованный численный алгоритм обеспечивает второй порядок точности интегрирования по времени и второй порядок точности по пространственным координатам. Численная схема консервативна и хорошо сбалансирована [6].

Метод cSPH-TVD состоит из двух основных этапов лагранжевого (частицы) и эйлерового (сетка). Поэтому, помимо декартовой сетки ($x_i = i\Delta x$, $y_j = j\Delta y$), внутри каждой сеточной ячейки содержится «жидкая» частица, которая характеризуется массой $\rho h\Delta x\Delta y$, импульсом $\rho h\mathbf{v}\Delta x\Delta y$ и положением $\tilde{\mathbf{r}}$ центра масс в пространстве. Частица может свободно перемещаться внутри ячейки и ее положение в начальный момент времени совпадает с центром ячейки $\mathbf{r}_{i,j} = \{x_i, y_j\}$. В численной модели все величины, входящие в исходные уравнения (1), (2), представляются в виде сеточных функций:

$$f(\tilde{\mathbf{r}}, t) \rightarrow f(\tilde{\mathbf{r}}_{i,j}, t_n) \equiv f_{i,j}^n \text{ или } f(\hat{\mathbf{r}}, t) \rightarrow f(\hat{\mathbf{r}}_{i,j}, t_n) \equiv \hat{f}_{i,j}^n.$$

Рассмотрим отдельно каждый из этапов cSPH-TVD-метода.

1. Лагранжев этап (SPH). Определяются изменения характеристик «жидких» частиц, обусловленные действием на них источников/стоков, гидродинамических и внешних сил (см. далее соотношения (6) и (7)). Для описания динамики «жидких» частиц представим систему уравнений (1), (2) в консервативной лагранжевой форме:

$$\frac{d\mathbf{U}}{dt} = \mathbf{F}, \quad (4)$$

$$\text{где } \mathbf{U} = \begin{pmatrix} h \\ h\mathbf{v} \end{pmatrix}, \mathbf{F} = \begin{pmatrix} q \\ -gh\nabla\eta + h(\mathbf{f}^{cor} + \mathbf{f}^{fric} + \mathbf{f}^{wind}) \end{pmatrix}.$$

Для аппроксимации пространственных производных, входящих в уравнение (4), применяется

модифицированный SPH-подход с использованием сглаживающего ядра W [6]:

$$(\nabla\eta)_{i,j} = \sum_{k=i-1}^{i+1} \sum_{l=j-1}^{j+1} \eta_k \nabla_{i,j} W(\mathbf{r}_{i,j} - \mathbf{r}_{k,l}). \quad (5)$$

В качестве ядра (5) могут служить кубический сплайн Монагана или функция $\exp\{-(x-x_j)^2/(\Delta x)^2 - (y-y_j)^2/(\Delta y)^2\}$. Применяя алгоритм «предиктор—корректор» для интегрирования по времени уравнения (4) для каждой частицы, получим рекуррентные соотношения, определяющие динамику частиц:

$$\tilde{\mathbf{U}}_{i,j}^{n+1/2} = \mathbf{U}_{i,j}^n + \frac{\Delta t_n}{2} \mathbf{F}_{i,j}(\mathbf{U}^n, \mathbf{r}^n),$$

$$\tilde{\mathbf{r}}_{i,j}^{n+1/2} = \mathbf{r}_{i,j}^n + \frac{\Delta t_n}{2} \tilde{\mathbf{v}}_{i,j}^{n+1/4} \text{ (предиктор)}, \quad (6)$$

$$\tilde{\mathbf{U}}_{i,j}^{n+1} = \mathbf{U}_{i,j}^n + \Delta t_n \mathbf{F}_{i,j}(\tilde{\mathbf{U}}^{n+1/2}, \tilde{\mathbf{r}}^{n+1/2}),$$

$$\mathbf{r}_{i,j}^{n+1} = \mathbf{r}_{i,j}^n + \Delta t_n \tilde{\mathbf{v}}_{i,j}^{n+1/2} \text{ (корректор)}. \quad (7)$$

Для устойчивости численной схемы на первом этапе необходимо, чтобы за время интегрирования Δt_n частица не вышла за пределы ячейки.

2. Эйлеров этап (TVD). Вычисляются потоки массы и импульса, обусловленные перемещением жидкости через границы ячеек. Разность втекающих и вытекающих в ячейку потоков позволяет определить изменения характеристик «жидких» частиц, рассчитанных на предыдущем этапе в момент времени $t_{n+1} = t_n + \Delta t_n$, при возвращении их в исходное состояние, т. е. в центры ячеек (см. выражение (9)). Представим систему уравнений (1), (2) в консервативной эйлеровой форме:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial y} = \mathbf{F}, \quad (8)$$

где $\mathbf{J} = \mathbf{U} \cdot \mathbf{v}_x$ и $\mathbf{G} = \mathbf{U} \cdot \mathbf{v}_y$ — потоки массы и импульса в направлениях x и y соответственно. Проведя конечно-разностную аппроксимацию уравнения (8), получим:

$$\mathbf{U}_{i,j}^{n+1} = \tilde{\mathbf{U}}_{i,j}^{n+1} - \Delta t_n \left[\frac{\mathbf{J}_{i+1/2,j}^{n+1/2} - \mathbf{J}_{i-1/2,j}^{n+1/2}}{\Delta x} + \frac{\mathbf{G}_{i,j+1/2}^{n+1/2} - \mathbf{G}_{i,j-1/2}^{n+1/2}}{\Delta y} \right]. \quad (9)$$

Значения потоков $\mathbf{J}_{i\pm 1/2,j}^{n+1/2} = \mathbf{J}(\tilde{\mathbf{U}}_{i\pm 1/2,j}^{n+1/2})$ и $\mathbf{G}_{i,j\pm 1/2}^{n+1/2} = \mathbf{G}(\tilde{\mathbf{U}}_{i,j\pm 1/2}^{n+1/2})$ с полуцелыми индексами вычисляются на границах ячеек в момент времени

$t_{n+1/2} = t_n + \Delta t_n/2$. Величины $\tilde{U}_{i\pm 1/2,j}^{n+1/2}$ и $\tilde{U}_{i,j\pm 1/2}^{n+1/2}$ находятся из решения соответствующих задач Римана [6, 7] при выполнении TVD-принципа, обеспечивающего невозрастание полной вариации численного решения [8].

Для устойчивости численной схемы на втором этапе необходимо, чтобы за время интегрирования Δt_n возмущения не распространились на расстояние, превышающее размер ячейки. Таким образом, для устойчивости численного алгоритма cSPH-TVD необходимо:

$$\Delta t < \min_{i,j} \left(\frac{\Delta x}{2|v_{xi,j}|}, \frac{\Delta y}{2|v_{yi,j}|}, \frac{\Delta x}{\sqrt{gh_{i,j}} + |v_{xi,j}|}, \frac{\Delta y}{\sqrt{gh_{i,j}} + |v_{yi,j}|} \right).$$

1.3. Цифровая карта

Ключевой фактор, определяющий качество гидродинамического расчета, состоит в соответствии используемой функции рельефа $b(x, y)$ реальной местности. В численной модели для построения сеточной функции $b_{i,j} = b(x_i, y_j)$ учитывались данные дистанционного зондирования Земли, локальные и собственные данные GPS-измерений. Основой функции рельефа служат спутниковые данные ASTER и SRTM, способные обеспечить разрешение до 20 м в плоскости Земли и до 1 м по вертикали. Модель речного дна строилась по данным лоций. На основе GPS-измерений был актуализирован рельеф в критических зонах — протоках, через которые происходит поступление воды в равнинную часть поймы во время весеннего попуска. Ерики непосредственно соединены с Волгой и Ахтубой, а под протоками будем понимать русловые выходы из ериков.

2. РЕЗУЛЬТАТЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ

2.1. Особенности прохождения воды через пойму

Отметим наиболее характерные черты весеннего заполнения северной части ВАП по результатам численного интегрирования уравнений Сен-Венана (1)–(3).

- Процесс начальной стадии затопления происходит в три характерных этапа: подъем уровня воды в Волге и Ахтубе; заполнение основных ериков; поступление воды в пойму через протоки.
- Можно выделить два критических значения параметра Q_M . Уровень $Q_M < 20$ тыс. м³/с при современном состоянии рельефа не позволяет проникнуть воде в пойму (заполняются только ос-

новные ерики). При значениях $Q_M > 30$ тыс. м³/с имеем чрезвычайно сильное затопление, существенно ограничивающее хозяйственную деятельность (сельское и дачное хозяйство, строительство, проживание). На рис. 4 (см. цветную вклейку) показана картина заполнения северной части ВАП при $Q_M = 20, 25$ и 30 тыс. м³/с в случае $t_3 - t_2 > 10$ сут.

2.2. Динамика интегральных параметров

Введем интегральные характеристики затопления поймы

$$S(t) = \iint_{\Sigma} I(h) dx dy, \quad I(h) = \begin{cases} 1, & h \geq h_{\min} \\ 0, & h < h_{\min} \end{cases},$$

$$V(t) = \iint_{\Sigma} h(x, y, t) dx dy,$$

определяющие площадь, которая находится под водой, и объем воды соответственно (интегрирование ведется для заданной территории по площади, где $h > h_{\min}$). Типичные значения $h_{\min} = 20$ см. Величины $S(t)$ и $V(t)$ в модели вычисляются для всей расчетной области $\Sigma_0 = 2153$ км², а также для различных участков. Особый интерес представляет территория ВАП $\Sigma_{VAP} = 741$ км² за вычетом русел Волги и Ахтубы. Перед началом весеннего попуска воды без учета талых вод площадь S_{VAP} , занятая водой на территории Σ_{VAP} , не превышает 1 %. Для всей расчетной области площадь затопления и соответствующий объем воды будем обозначать S_0 и V_0 . Степень затопления междуречья характеризует безразмерная величина $s = S_{VAP}/\Sigma_{VAP}$.

На рис. 5 показан вид функций $S_0(t)$ и $V_0(t)$ с момента начала попуска воды по результатам наших расчетов, в которых использовались плановые гидрографы за последние пять лет. Графики $V_0(t)$ и $S_0(t)$ имеют характерный максимум, повторяя в целом вид гидрографа $Q(t)$. Наличие рыбной полки лучше проявляется на зависимости $V_0(t)$, чем на зависимости $S_0(t)$. Этот эффект обусловлен большей чувствительностью площади затопления к испарению/фильтрации и особенностям растекания воды на неоднородном рельефе местности.

Результаты моделирования подтверждаются параметрами экологической катастрофы 2006 г. в ВАП, произошедшей вследствие сильного сокращения объема и продолжительности паводка ($Q_M = 17,5$ тыс. м³/с, см. рис. 3). Для гидрографа 2006 г. (см. рис. 2) заполнение поймы в численной

Ч. 1. Моделирование динамики поверхностных вод в период весеннего паводка»
(см. с. 18–25)

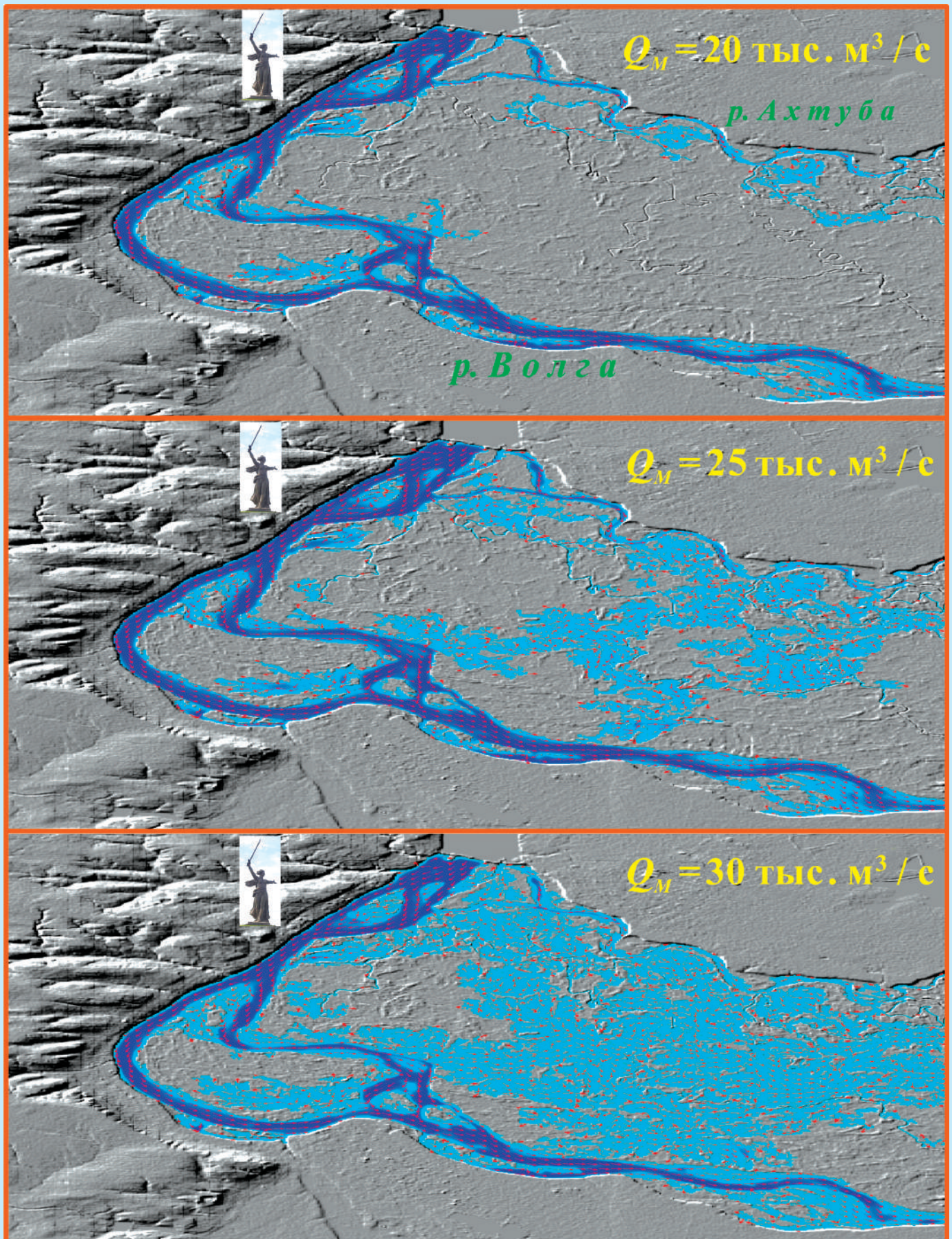


Рис. 4. Структура течения в пойме при различных значениях Q

2.3. Переходная характеристика системы

Рассмотрим реакцию гидрологической системы ВАП на изменения гидрографа $Q(t)$. Зафиксируем скорость подъема гидрографа на интервале $t_1 - t_2$ и построим стационарные решения для набора постоянных значений Q_M . На рис. 6 приведены зависимости $s(t)$ и $V_{\text{ВАП}}(t)$ при включении воздействия $Q(t)$ от $Q_L = 5$ тыс. м³/с до Q_M с последующей поддержкой ппуска воды на постоянном уровне. Для каждого фиксированного значения Q_M достигается стационарный уровень затопления s_{max} . Та-

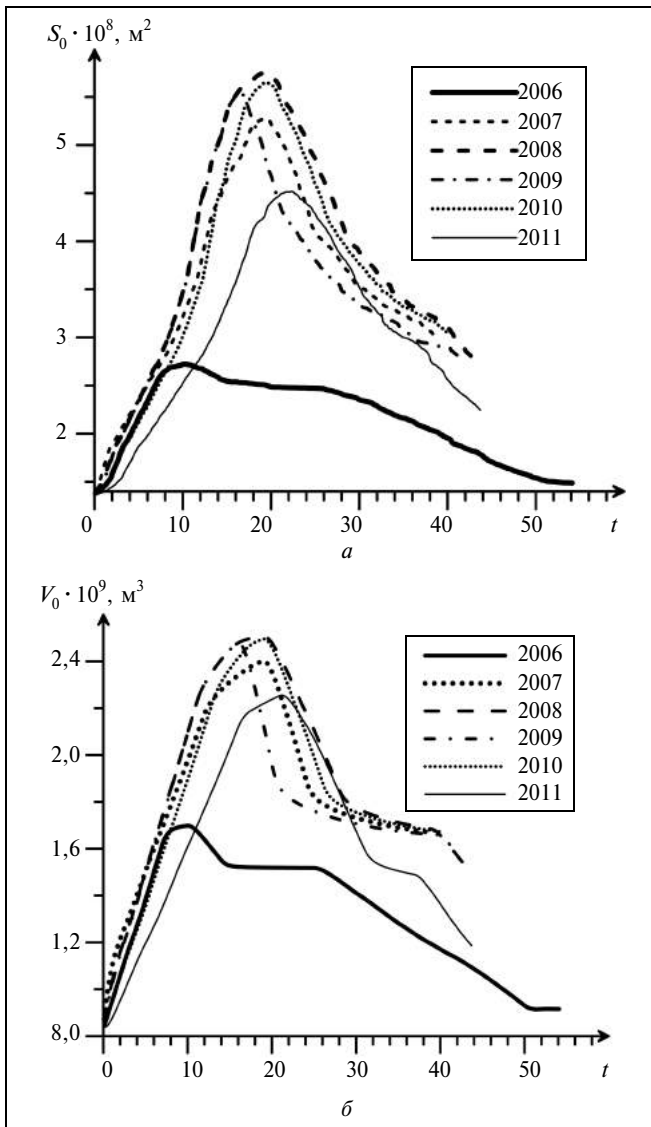


Рис. 5. Площадь затопления (а) в северной части ВАП и соответствующий объем воды (б) для гидрографов за 2006—2010 гг.; $q_0 = -10$ см/сут

модели не происходит, максимальная площадь затопления в два раза меньше, чем для гидрографов 2007—2010 гг. Выделяется также маловодный 2011 г., причем максимальный объем воды отличается от случая 2008 г. всего на 8 %, а максимальная площадь затопления в 2011 г. оказывается меньше на 22 % по сравнению с 2008 г. Причиной такого результата явилось более медленное нарастание величины Q до максимального значения в прошлом году.

Адекватность модели подтверждается результатами сравнения с данными наблюдений о площади водной поверхности в различные годы с использованием данных спутника Landsat-7.

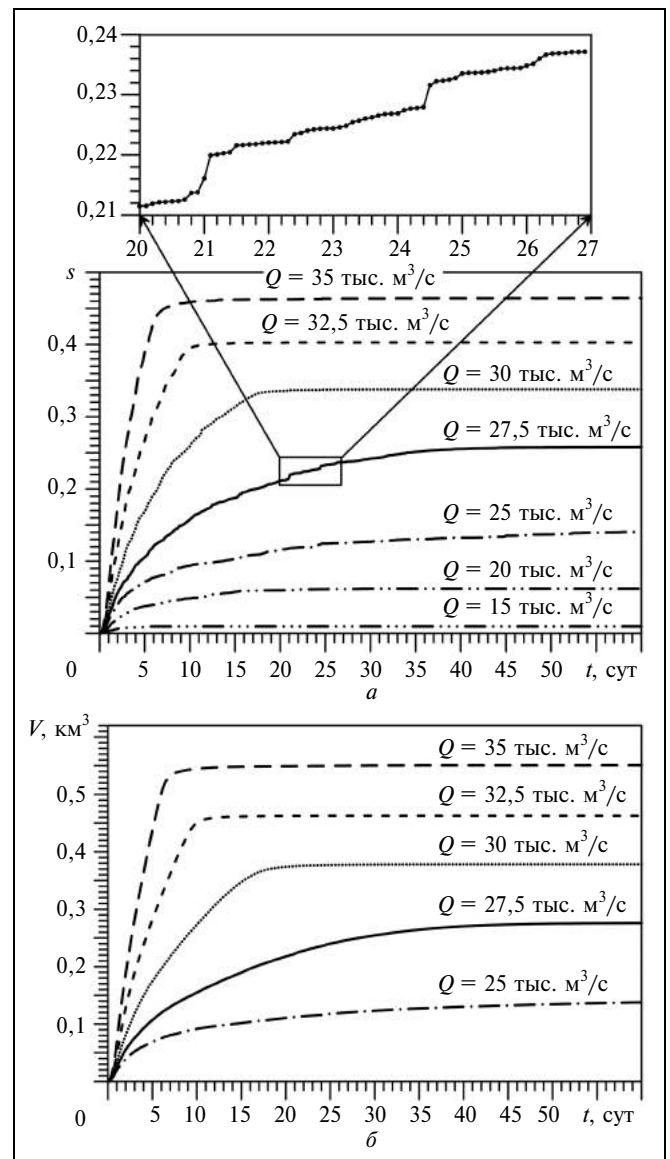


Рис. 6. Зависимости относительной площади затопления (а) северного участка ВАП и соответствующего объема воды (б) для различных значений Q_M

ким образом, при увеличении сброса воды через плотину имеем реакцию гидрологической системы в виде функции $s_{\max}(Q_M)$.

Характерное время достижения стационара τ уменьшается с ростом Q_M , начиная примерно со значений $Q_M > 27$ тыс. м³/с, при малых попусках воды она не выходит за систему ериков и наиболее крупных протоков. Таким образом, величина $\tau(Q_M)$ имеет максимум при $Q_M \approx 27$ тыс. м³/с. Затопление территории имеет характерный скачкообразный характер (см. врезку на рис. 6), что связано с выходом воды из русел ериков/протоков по мере их заполнения. Рис. 7 (см. цветную вклейку) наглядно показывает, что даже при трехкратном увели-

чении попуска воды по сравнению с уровнем в межень Q_L (см. рис. 3) вода в пойму не поступает.

При $Q_M > 30$ тыс. м³/с получаем катастрофическое затопление северной части поймы, а для южной астраханской части ВАП ситуация оказывается еще более тяжелой.

Таким образом, существует критическое значение площади $s_{\max}$, обусловленное недопущением затопления населенных пунктов, дачных массивов, сельскохозяйственных угодий и другой инфраструктуры. Такое ограничение диктуется безопасностью человеческой деятельности в ВАП. Второе ограничение снизу $s_{\min}$ должно исходить из экологических требований, связанных с воспроизводством рыбных запасов, заполнением озер, обеспечивая сохранность ландшафта и биоресурсов. При достижении площади затопления $s = s_{\max}$ необходим переход с сельскохозяйственной полки на рыбную (см. рис. 3).

Рассмотрим реакцию ВАП на обратный процесс снижения мощности прохождения воды через плотину от значения Q_M до различных уровней $Q_{Lm} < \dots < Q_{L2} < Q_{L1} < Q_L$. Существует критическое значение Q_L , при котором относительная площадь затопления $s = s_{\min}$. На рис. 8 показаны зависимости $s(t)$ в процессе перехода $s_{\min} \rightarrow s_{\max} \rightarrow s_{\min}$ для различных значений Q_M . Проведены более 100 численных экспериментов по затоплению ВАП, служащие основой постановки и решения оптимизационной и теоретико-игровой задачи управления паводковым гидрологическим режимом для эколого-экономической системы «Волжская ГЭС — Волго-Ахтубинская пойма».

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Описана численная гидродинамическая модель весеннего затопления территории северной части Волго-Ахтубинской поймы (ВАП) для реалистичного рельефа местности с учетом основных физических и метеорологических факторов. Характер затопления поймы при использовании реальных гидрографов последних лет хорошо согласуется с данными наблюдений. В частности, хорошо воспроизводятся ситуации чрезвычайно полноводного 2005 г. и катастрофически засушливого 2006 г., приведшего к экологической катастрофе в ВАП. Адекватность модели подтверждается количественным сравнением результатов моделирования с данными об уровне воды на четырех гидропостах в северной части ВАП. Изучена реакция гидрологического состояния ВАП на изменения уровней гидрографа. Представленная модель не учитывает

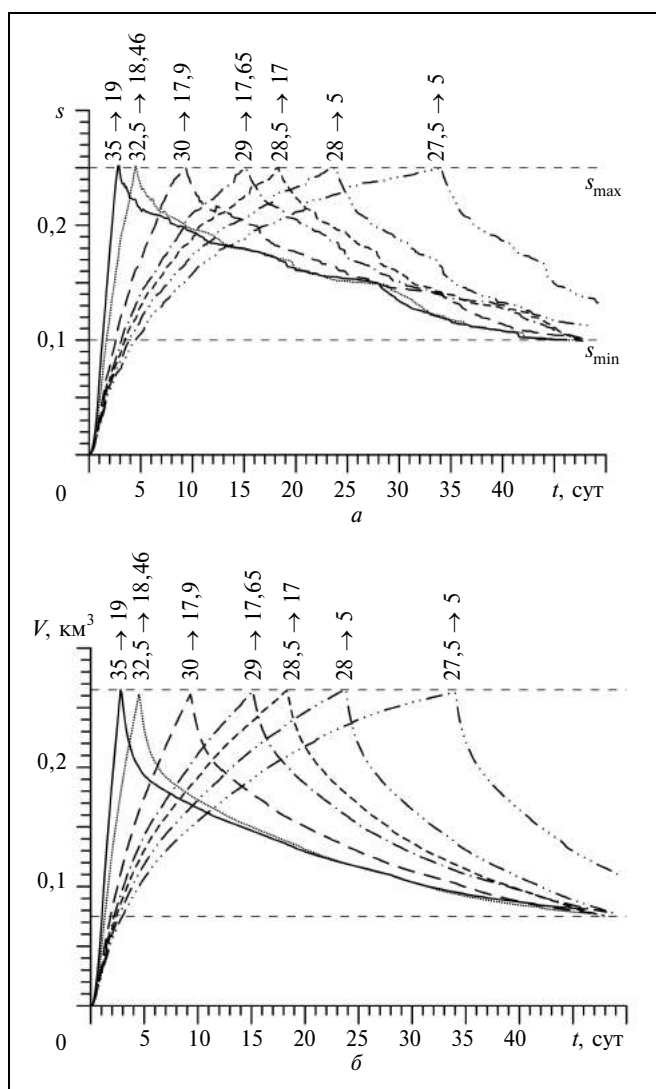


Рис. 8. Зависимость площади (а) и объема (б) затопления ВАП при переходе $Q_M \rightarrow Q_L$ (значения Q в тыс. м³/с приведены около соответствующих пиков)

Ч. 1. Моделирование динамики поверхностных вод в период весеннего паводка»
(см. с. 18–25)

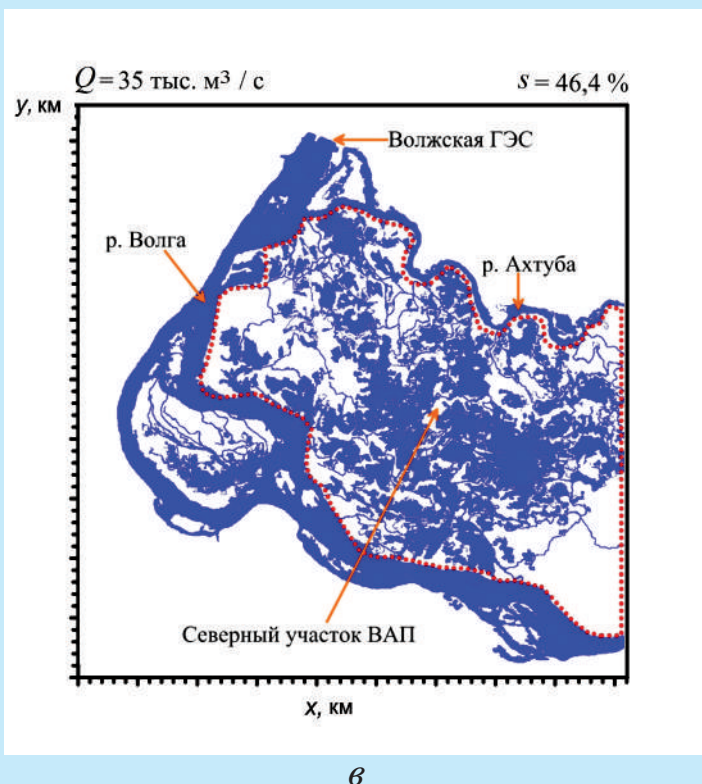
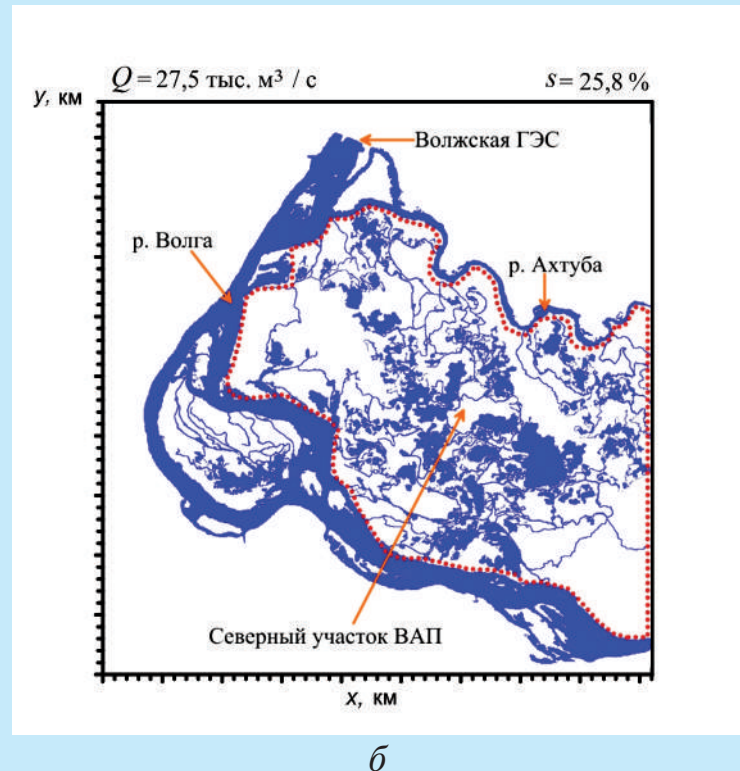
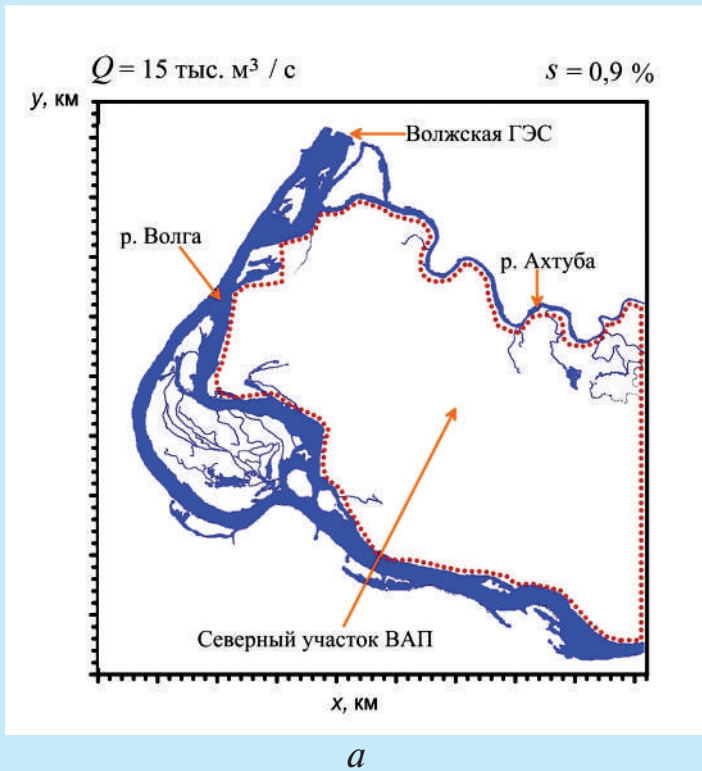


Рис. 7. Области затопления ВАП
при различных значениях попуска воды
через плотину:

a – 15 тыс. м³ / с;

б – 27,5 тыс. м³ / с;

в – 35 тыс. м³ / с



прогрессирующей деградации русел из-за нарушения естественного гидрологического режима ВАП, существенно ухудшающей динамику воды во время весеннего затопления. Для уточнения требуются полевые исследования. Предварительные оценки масштаба деградации позволяют сделать вывод о возможности повышения эффективности гидрографа путем очистки русел ВАП.

Построенную гидродинамическую модель предполагается использовать для постановки и решения оптимизационной и теоретико-игровой задачи управления паводковым гидрологическим режимом в эколого-экономической системе «Волжская ГЭС — Волго-Ахтубинская пойма».

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 11-07-97025), ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России 2009—2013 гг.» (проект № 14.В37.21.028), Минобрнауки (тема «Системы мониторинга, диагностики и управления в экологии и медицине на основе информационных технологий и компьютерного моделирования»).

Авторы благодарны НИВЦ МГУ им. М.В. Ломоносова за предоставленную возможность воспользоваться суперкомпьютером «Ломоносов».

ЛИТЕРАТУРА

1. Анализ экологических последствий эксплуатации Волгоградского водохранилища для сохранения биоразнообразия основных водно-болотных территорий Нижней Волги / И.В. Землянов, О.В. Горелиц, А.Е. Павловский и др. / Отчет о НИР ФГУ «ГОИН». — М., 2010. — 675 с.
 2. Особо охраняемые природные территории Волгоградской области / В.А. Брылев, Н.О. Рябинина, Е.В. Комиссарова и др. — Волгоград: Альянс, 2006. — 256 с.
 3. Еремин М.А., Хоперсков А.В. Компьютерная модель прорыва волжской плотины // Вестник Волгоградского государственного университета / Сер. 1: Математика. Физика. — 2006. — № 10. — С. 139—142.
 4. Воеводин А.Ф., Никифоровская В.С., Остапенко В.В. Математическое моделирование трансформации волн паводков в руслах с поймами // Метеорология и гидрология. — 2008. — № 3. — С. 88—95.
 5. Расчет испарения с акватории Каспийского моря по данным дистанционного зондирования / С.А. Лебедев, А.М. Сирота, Л.П. Остроумова, А.Г. Костяной // Современные проблемы дистанционного зондирования Земли из космоса. — 2008. — Т. 5, № 2. — С. 141—147.
 6. Численная схема для моделирования динамики поверхностных вод на основе комбинированного SPH-TVD подхода / С.С. Храпов, А.В. Хоперсков, Н.М. Кузьмин и др. // Вычислительные методы и программирование. — 2011. — Т. 12. — С. 282—297.
 7. Karelsky K.V., Petrosyan A.S. Particular solutions and Riemann problem for modified shallow water equations // Fluid Dynamics Research. — 2006. — Vol. 38, N 5. — P. 339—358.
 8. Еремин М.А., Хоперсков А.В., Хоперсков С.А. Конечно-объемная схема интегрирования уравнений гидродинамики // Изв. Волгоградского государственного технического университета / Сер.: Актуальные проблемы управления, вычислительной техники и информатики в технических системах. — 2010. — Т. 6, № 8. — С. 24—27.
 9. Khoperskov A.V., Khrapov S.S., Nedugova E.A. Dissipative-Acoustic Instability in Accretion Disks at a Nonlinear Stage // Astronomy Letters. — 2003. — Vol. 29. — P. 246—257.
- Статья представлена к публикации членом редколлегии чл.-корр. РАН Д.А. Новиковым.
- Хоперсков Александр Валентинович** — д-р физ.-мат. наук, профессор, ☎ (8442) 46-48-94, ✉ khoperskov@rambler.ru,
- Храпов Сергей Сергеевич** — канд. физ.-мат. наук, доцент, ☎ (8442) 46-48-94,
- Писарев Андрей Владимирович** — аспирант, ☎ (8442) 46-48-94, ✉ andrew_pisarev@mail.ru,
- Воронин Александр Александрович** — д-р физ.-мат. наук, профессор, ☎ (8442) 46-02-61, ✉ voronin@volsu.ru,
- Елисеева Мария Владимировна** — магистрант, ☎ (8442) 46-02-61,
- Кобелев Иван Александрович** — аспирант, ☎ (8442) 46-48-94,
- Волгоградский государственный университет, кафедра информационных систем и компьютерного моделирования.

Новая книга

Цыганов В.В. Адаптивные механизмы и высокие гуманитарные технологии. Теория гуманитарных систем. — М.: Академический Проект; Альма Матер, 2012. — 346 с.

Глобальные изменения приводят к ухудшению среды обитания человека. Угрожающий темп негативных изменений травмирует людей, ведет к массовой депрессии и недовольству, революциям и войнам. Чтобы избежать этого, люди должны научиться быть счастливыми даже в условиях быстрых перемен. Для этого необходимы эффективные методы и механизмы самоорганизации и адаптации к изменениям. Для их построения в книге исследуются и разрабатываются психонейрофизиологические модели человека как объекта управления в условиях динамики и неопределенности. На их основе создаются адаптивные механизмы самоуправления, взаимодействия с другими людьми и овладения ими, направленные на повышение качества жизни, наполнение ее смыслом. Эти механизмы положены в основу высоких гуманитарных технологий, призванных согласовывать интересы личности и общества в условиях перемен, сделать жизнь более гармоничной и счастливой. Разработаны теоретические основы анализа, синтеза и проектирования адаптивных механизмов функционирования гуманитарных систем.

Для изучающих современные проблемы управления человеком и обществом и пути их решения.

МЕХАНИЗМЫ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ РЕСУРСОВ НА ОСНОВЕ НЕМАНИПУЛИРУЕМЫХ СИММЕТРИЧНЫХ АНОНИМНЫХ ПРОЦЕДУР ГОЛОСОВАНИЯ С ДЕЛЕГИРОВАНИЕМ

В.Н. Бондарик, Н.А. Коргин¹

Рассмотрена задача распределения ресурсов на основании мнений агентов и допускающая возможность делегирования — когда любой агент может в качестве заявки сообщать не полный вектор распределения, а лишь отдельные его компоненты. Описаны симметричные анонимные обобщенные медианные схемы, дополненные процедурами делегирования, которые могут применяться для решения данной задачи.

Ключевые слова: неманипулируемые механизмы планирования, управление проектами, распределение ресурсов, обобщенные медианные схемы, механизмы последовательного распределения ресурсов.

ВВЕДЕНИЕ

Рассматривается задача распределения ресурсов (например, ограниченного финансирования) в объеме R между m проектами. Финансирование определяется на основании согласования интересов n лиц (агентов) — при этом каждый из агентов может быть заинтересован в определенном распределении объемов финансирования.

Обозначим: множество проектов M , $\#M = m$; множество агентов N , $\#N = n$; множество допустимых вариантов распределения ресурсов

$$A = \{x = (x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}_m^+ \mid \sum_{j=1}^m x_j \leq R\}.$$

Заинтересованность агентов описывается их функциями полезности $u_i(x): A \rightarrow \mathbb{R}_1$, $i \in N$, причем функция $u_i(x)$ известна лишь самому агенту $i \in N$.

Будем рассматривать случай *сепарабельных* *однопиковых* функций полезности. Обозначим $\tau_{ji} = \arg \max_{x_j} u_i(x)$ — оптимальное количество ресурсов, которое с точки зрения агента i следует выделить на проект j . Любой агент может быть безразличен к тому, какое количество ресурса следует выделить на отдельные проекты — $\exists k \in M \partial u_i(x)/\partial x_k \equiv 0$. Набор $\tau_i = \{\tau_{ji}\}_{j \in M_i}$ будем называть

точкой пика агента $n \in N$, где $M_i \subseteq M$ — множество проектов, не безразличных этому агенту.

В работе описывается класс механизмов распределения ресурсов, которые являются *неманипулируемыми* в рамках описанной модели. Речь идет о механизмах, в которых у агентов спрашиваются их предпочтения (точнее, только точки пика), и для каждого агента сообщение истинной информации о своих предпочтениях служит доминантной стратегией (т. е. наилучшим из доступных ему сообщений вне зависимости от того, что сообщают другие агенты). К механизмам будут предъявляться требования *анонимности*, т. е. итоговое распределение ресурсов должно быть симметричным относительно перестановок агентов, и *симметричности* — априори все проекты, на которые нужно распределять ресурсы, одинаково важны, и любые два проекта, при одинаковых заявках на их финансирование со стороны агентов, должны получать одинаковое финансирование.

1. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

«Традиционная» постановка задачи распределения ресурсов представляет собой модель, в которой каждый из агентов заинтересован лишь в получении финансирования для одного своего проекта ($\tau_{ii} \in [0, R]$, $m = n$). Для подобной постановки задачи класс неманипулируемых механизмов достаточно хорошо описан и исследован — см, например, работы [1, 2]. Этот класс условно называется *механизмы последовательного распределения*

¹ Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ, проект № 12-07-00365-а.



ресурсов (МППР). В частности, в рамках традиционной постановки было доказано, что существует единственный анонимный неманипулируемый механизм, эффективный по Парето [3, 4], в котором сообщения агентов $\tau_i = \tau_{ii}$, $i \in N$, упорядочивались по возрастанию, после чего распределение ресурсов определялось следующим образом:

$$x_i = \min \left\{ \tau_i, \frac{R - \sum_{j < i} x_j}{n - (i - 1)} \right\}, \quad i \in N. \quad (1)$$

Задача распределения ресурсов рассматривалась также в постановке задачи *многокритериальной активной экспертизы* [5] — когда для каждого агента актуально, какое количество ресурсов следует выделить на каждый из проектов. Для каждого агента оптимальное количество ресурсов, выделяемое на отдельный проект, не зависит от того, какое количество ресурсов будет выделено на остальные — такие предпочтения агентов называются *многочисленно однополюсными*. Для данной постановки задачи неманипулируемыми являются механизмы на основе *обобщенных медианных схем* (ОМС). В этих процедурах объем финансирования каждого из проектов определяется независимо (от того, сколько будет выделено ресурсов на другие проекты) на основе *медианной* процедуры голосования, представляющей собой неманипулируемый механизм однокритериальной активной экспертизы. Однако в соответствии с работой [6] данные механизмы не являются эффективными по Парето. Более того, многие из ОМС *недопустимые* (*нереализуемые*) — они могут давать в качестве результата недопустимое распределение ресурсов (превышающее бюджетное ограничение) даже в том случае, когда агенты сообщают варианты распределения, удовлетворяющие бюджетному ограничению. В статье [7] на основе *блочного метода* анализа реализуемости ОМС (предложенного в работах [8, 9]) были описаны классы анонимных *симметричных* (когда для каждого проекта используется одна и та же процедура голосования) обобщенных медианных схем, которые допустимы в качестве механизма распределения ресурсов. Для симметричных и анонимных ОМС *блочное представление* [9] можно записать следующим образом [7]. Обозначим $\forall z \in [0, R]$ $\mathfrak{R}(z) \in 2^N \setminus \emptyset$ — множество подмножеств N , которые являются *выбирающими правыми коалициями* для данного z при описании обобщенных медианных схем в терминах семейства систем выбирающих коалиций (подробнее об этом понятии см. в работах [5, 8–10]). Отрезок $[0, R]$ разбивается на $k \leq n$ отрезков $[z_{l-1}, z_l]$, $l \in \{\underline{k}, \dots, \bar{k}\}$, $1 \leq \underline{k} < \bar{k} \leq n$, $z_{\underline{k}-1} = 0$, $z_{\bar{k}} = R$. Причем $\forall l \in \{\underline{k}, \dots, \bar{k}\}$, $\forall S \in \mathfrak{R}(z_l)$ $\#S \geq l$ и $\forall z \in (z_{l-1}, z_l]$ $\mathfrak{R}(z) = \mathfrak{R}(z_l)$. Иначе говоря, при оп-

ределении объема финансирования для отдельного проекта $j \in M$ с помощью данной процедуры номер отрезка определяет минимальное число агентов, для которых объем финансирования z не превышает их заявки на финансирование для данного конкретного проекта. Возможно, что для каких-то $l \in \{\underline{k}, \dots, \bar{k}\}$ $z_{l-1} = z_l$. Обозначим $B_W = \{B_w\}_{w \in W}$ — разбиение куба $[0, R]^m$ на блоки, где $W = \{w = (w_1, \dots, w_m) : \forall j \in M \ w_j \in \{\underline{k}, \dots, \bar{k}\}\}$,

$B_w = \prod_{j=1}^m [z_{w_j-1}, z_{w_j}]$ — отдельный блок. Именно

разбиение $B_W = \{B_w\}_{w \in W}$ — описывает *блочное представление* обобщенной медианной схемы. Блочное представление лежит в основе блочного метода анализа реализуемости ОМС при заданном множестве допустимых альтернатив. В частности, для исследуемой задачи распределения ресурсов, ОМС реализуема, если для любого B_w , такого что

$$\sum_{j=1}^m z_{w_j-1} \leq R, \text{ но } \sum_{j=1}^m z_{w_j} > R \text{ выполнено условие} \quad \sum_{j=1}^m w_j \geq (m-1)n + 1. \quad (2)$$

С помощью данного блочного представления было показано [5], что:

— при $m > n$ существует единственная допустимая симметричная анонимная ОМС, определяемая выражением

$$x_j = \min_{i \in N} (\tau_{ji}), \quad j \in M; \quad (3)$$

— при $m = n$ любая допустимая симметричная анонимная ОМС определяется выражением

$$x_j = \max \left\{ z \in (0, R] : \# \{i \in N : \tau_{ji} \geq z\} \geq n - \left\lceil \frac{R-z}{R-z_{n-1}} \right\rceil \right\}, \quad z_{n-1} \leq R/m, \quad j \in M; \quad (4)$$

— при $m < n$, любая допустимая симметричная анонимная ОМС должна удовлетворять требованиям: задающая ее система правых выбирающих коалиций $\mathfrak{R}(z)$ разбивает отрезок $[0, R]$ не более чем на $k = \left\lceil \frac{n-1}{m-1} \right\rceil + 1$ частей отрезками $[z_{l-1}, z_l]$, $l \in \{n-k+1, \dots, n\}$, $z_{n-k} = 0$, $z_n = R$; для любого индекса $l \in \{n-k+1, \dots, n\}$, $\forall S \in \mathfrak{R}(z_l)$ $\#S \geq l$ и $\forall z \in (z_{l-1}, z_l]$ $\mathfrak{R}(z) = \mathfrak{R}(z_l)$. При этом z_l , $l \in \{n-k+1, \dots, n\}$ должны подбираться так, чтобы для любого B_w , такого что $\sum_{j=1}^m z_{w_j-1} \leq R$, но $\sum_{j=1}^m z_{w_j} > R$, выполнялось условие (2).

Было также показано, что если симметричная анонимная ОМС допустима для распределения ресурсов при некоторых m и n , то она также допустима при $\tilde{m} < m$ и том же n .

Описанный класс допустимых симметричных анонимных ОМС значительно уже всего класса симметричных анонимных ОМС, которые являются неманипулируемыми механизмами коллективного выбора на кубе $[0, R]^m$. Исследуем, можно ли расширить описанный класс путем введения *делегирования* — возможности агентам сообщать заявки на финансирование только части проектов.

В работе [11] было доказано, что любой МПРР может быть представлен в виде ОМС, дополненной *правилом делегирования*, определяющим для каждого агента его заявки относительно объемов финансирования тех проектов, которые ему безразличны. Принципиально для полученного результата, что априори было известно, в каком из проектов заинтересован каждый из агентов. В частности, было показано, что анонимный МПРР представим в виде симметричной ОМС

$$x_i = \max\{z \in [0, R] \mid \#\{j \in N \mid \tau_{ij} \geq z\} > \max(n+1-R/z, 0)\}, \quad i \in N, \quad (5)$$

дополненной правилом делегирования

$$\tau_{ij} = \min\left\{\tau_i, \frac{R - \tau_j - \sum_{k < i_j} \tau_{kj}}{n - i_j}\right\}, \quad i, j \in N, \quad (6)$$

где i_j — номер агента i в упорядочении агентов из $N \setminus \{j\}$ в порядке возрастания значений их точек пиков.

В рамках данной работы ответим на следующие вопросы.

Когда в симметричных анонимных ОМС делегирование допустимо?

Какие правила делегирования допустимы для симметричных анонимных ОМС?

Позволяет ли введение делегирования расширить класс симметричных анонимных ОМС, допустимых в качестве механизма распределения ресурсов?

2. ДОПУСТИМОСТЬ ДЕЛЕГИРОВАНИЯ В ОБОБЩЕННЫХ МЕДИАННЫХ СХЕМАХ

Вопрос о том, когда в симметричных анонимных ОМС делегирование допустимо, можно разделить на два уточняющих.

Прежде всего, можно ли допускать делегирование заявок в неманипулируемом механизме, если нет априорной информации о том, какой агент к финансированию каких проектов безразличен? Ответ на него достаточно очевиден — правило делегирования должно обеспечивать допустимые за-

явки агента — в нашем случае $\sum_{j \in M} \tau_{ji} \leq R, \forall i \in N$.

Поэтому, любой агент в качестве своего сообщения самостоятельно может выбрать любую из заявок, которая может быть реализована в рамках делегирования. Тем самым, сама возможность делегировать выбор заявок на финансирование ряда проектов не расширяет возможности манипулирования (конечно, при условии, что правило делегирования выбрано корректное, об этом — в следующем параграфе).

Далее, можно ли требовать от агента делегирования сообщения своей заявки по тем проектам, финансирование которых ему не безразлично? Ответ — нельзя. Для обоснования этого ответа рассмотрим простой пример.

Пример 1. Пусть $n = 3, m = 3$. Пусть первый агент имеет представление об оптимальном финансировании первого и второго проектов: $\tau_{11} + \tau_{21} = R$, в то время как второй и третий агенты заинтересованы только в определенном финансировании соответствующих проектов: $\tau_{22}, \tau_{33} \leq R$. Более того, с точки зрения первого агента потери от недофинансирования первого проекта гораздо меньше, чем от недофинансирования второго проекта. Каждому агенту разрешено сообщить свои предпочтения лишь по соответствующему проекту: первый по первому, второй по второму, третий — по третьему. Определение своих заявок по другим проектам они обязаны делегировать. Единственный анонимный и симметричный механизм для данной постановки задачи — это МПРР (1), который также может быть представлен в виде ОМС (5) с правилом делегирования (6). Предположим, что $\tau_{11} \leq 1/3$, а $1/3 < \tau_{21} < \tau_{22} < \tau_{33}$. В этом случае первый агент, сообщая заявку $s_{11} < \tau_{11}$, уменьшает недофинансирование проекта 2 на $(\tau_{11} - s_{11})/2$, тем самым увеличивая свою полезность. ♦

Таким образом, для произвольной ОМС делегирование допустимо всегда, но только «добровольное» — каждый агент должен иметь возможность принимать решение самостоятельно: делегировать ли механизму определение его заявки на финансирование любого из проектов или сообщить ее самостоятельно.

3. ДОПУСТИМЫЕ ПРАВИЛА ДЕЛЕГИРОВАНИЯ

Определим, какие правила делегирования являются допустимыми в симметричных анонимных ОМС, применяемых в качестве механизмов распределения ресурсов. В работе [12] показано, что в процессе делегирования могут учитываться заявки других агентов. Однако очевидно, что правила делегирования также должны быть анонимными — в них не может учитываться, кто из агентов что сообщает. Допустимые правила должны быть также симметричными, т. е. для любых двух направлений финансирования из тех, для которых агентом делегируется определение его заявки, при одинаковых прочих условиях, учитываемых правилом



делегирования, должны определяться одинаковые объемы финансирования в качестве заявки данного агента. По аналогии с требованиями, в соответствии с которыми в работе [11] было получено правило (6), количество ресурсов, которое составляет сумму заявок, определенных правилом делегирования, не должно превышать $R_i = R - \sum_{j \in M_i} \tau_{ji} -$

ресурсов, доступных к делегированию агентом $i \in N$. В то же время, правило делегирования должно обеспечивать сумму заявок делегирующего агента как можно ближе к бюджетному ограничению, если это не противоречит интересам других агентов.

Обозначим $m_i = \#M_i$, $N_j \subseteq N$ — множество агентов, сообщивших свои заявки по проекту $j \in M$, $n_j = \#N_j$.

Утверждение 1. В симметричной анонимной ОМС, применяемой как механизм распределения ресурсов, любое правило делегирования должно быть представимо в виде

$$\tau_{ji} = \min \left\{ \hat{x}_j, \frac{R_i - \sum_{k < j_i} \tau_{ki}}{m - m_i - j_i} \right\}, \quad i \in N, \quad j \in M \setminus M_i, \quad (7)$$

где $\hat{x}_j$ определяется только на основании сообщений агентов из N_j с помощью анонимной однокритериальной ОМС, а j_i — номер проекта из $M \setminus M_i$ в упорядочении по возрастанию $\hat{x}_j$. ♦

Доказательства этого и последующих утверждений приведены в Приложении.

Опишем два «крайних» правила из класса, удовлетворяющих выражению (7). Правило делегирования будем называть *толерантным*, если $\hat{x}_j = \min_{i \in N_j} (\tau_{ji})$. Правило делегирования будет называть *позитивным*, если $\hat{x}_j = \max_{i \in N_j} (\tau_{ji})$.

При применении толерантного правила делегирования любой агент $i \notin N_j$ как бы «не вмешивается» в «конфликт» агентов из N_j , сообщая в качестве своей заявки по проекту j не более чем $\min_{i \in N_j} (\tau_{ji})$. Обозначим $\underline{x}_j$ — объем финансирования для направления $j \in M$, который может быть обеспечен самостоятельно агентами из N_j в рамках заданной ОМС, применяемой для распределения ресурсов (т. е. когда $\forall i \notin N_j \tau_{ji} = 0$): $\underline{x}_j = \max\{z \in [0, R] | \{i \in N_j | \tau_{ji} \geq z\} \in \mathfrak{R}(z)\}$, где система выбирающих правых коалиций $\mathfrak{R}(z)$ описывает применяемую для распределения ресурсов ОМС. Тогда под конфликтом подразумевается то, что $\underline{x}_j$ может быть больше оптимального финансирования проекта

$j \in M$ для некоторых агентов из N_j , т. е. $\underline{x}_j \geq \min_{i \in N_j} (\tau_{ji})$.

Заявки агентов из $N \setminus N_j$ не меняют множества агентов $S = \{i \in N | \tau_{ji} \geq \underline{x}_j\}$, тем самым не изменяя результат выбора по направлению j .

Если же $\underline{x}_j < \min_{i \in N_j} (\tau_{ji})$, то такой «конфликт» отсутствует — финансирование, которое могут обеспечить самостоятельно агенты из N_j , меньше оптимального для любого из них. В этом случае агенты не из множества N_j , благодаря правилу делегирования, позволяют увеличить объем финансирования данного направления не более чем до $\min_{i \in N_j} (\tau_{ji})$, тем самым не инициируя «конфликт».

Позитивное правило делегирования, в отличие от толерантного, максимально влияет на конфликт интересов агентов из N_j , так как при его применении $\underline{x}_j \geq \underline{x}_j$.

Продemonстрируем действия различных правил делегирования на примере.

Пример 2. Пусть $n = 5$, $m = 3$. Обозначим знаком «_» отсутствие предпочтений по данному проекту у агента. Пусть наилучшие объемы финансирования проектов с точки зрения агентов следующие: $\tau_1 = \{1, _, _ \}$, $\tau_2 = \{_, _, 1/2\}$, $\tau_3 = \{_, 1/2, _ \}$, $\tau_4 = \{1/4, _, _ \}$, $\tau_5 = \{_, 1/3, 1/4\}$. Для определения распределения ресурсов применяется симметричная анонимная ОМС, допустимая при данных n и m :

$$x_j = \max\{z \in (0, R] | \# \{i \in N | \tau_{ji} \geq z\} \geq n - 1\}, \quad j \in M.$$

В рамках данной ОМС по любому из проектов заинтересованные в определенном его финансировании агенты не могут самостоятельно обеспечить выделение на него ненулевого финансирования: $\forall j \in M \underline{x}_j = 0$.

Проанализируем, какими будут векторы заявок агентов в зависимости от выбора правила делегирования. Для агента 1, вне зависимости от правила делегирования, возможна единственная заявка $\tau_1 = \{1, 0, 0\}$. Агенты 2 и 3 при любом правиле делегирования, удовлетворяющем выражению (7), будут сообщать $\tau_2 = \{1/4, 1/4, 1/2\}$ и $\tau_3 = \{1/4, 1/2, 1/4\}$.

Для агентов 4 и 5 в зависимости от выбора правила делегирования полные векторы заявок будут разными.

Пусть применяется толерантное правило делегирования. Тогда $\tau_4 = \{1/4, 1/3, 1/4\}$, $\tau_5 = \{1/4, 1/3, 1/4\}$. Векторы заявок по проектам: $\{1, 1/4, 1/4, 1/4, 1/4\}$ для первого, $\{0, 1/4, 1/2, 1/3, 1/3\}$ для второго и $\{0, 1/2, 1/4, 1/4, 1/4\}$ для третьего агента. В этом случае результатом выбора будет вектор финансирования $x = \{1/4, 1/4, 1/4\}$.

Пусть применяется позитивное правило делегирования. Тогда $\tau_4 = \{1/4, 3/8, 3/8\}$, $\tau_5 = \{5/12, 1/3, 1/4\}$. Векторы заявок по проектам будут: $\{1, 1/4, 1/4, 1/4, 5/12\}$ для первого, $\{0, 1/4, 1/2, 3/8, 1/3\}$ для второго и $\{0, 1/2, 1/4, 3/8, 1/4\}$ для третьего агента. Но на итоговое распределение финансирования это не повлияет — результатом выбора будет $x = \{1/4, 1/4, 1/4\}$. ♦

Утверждение 1 описывает допустимый класс правил делегирования для симметричных и анонимных ОМС, но не позволяет дать ответ на воп-

рос, можно ли путем делегирования расширить класс неманипулируемых механизмов распределения ресурсов для рассматриваемой задачи.

4. АНОНИМНЫЕ И СИММЕТРИЧНЫЕ ОБОБЩЕННЫЕ МЕДИАННЫЕ СХЕМЫ, ДОПУСТИМЫЕ КАК МЕХАНИЗМЫ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ РЕСУРСОВ С ДЕЛЕГИРОВАНИЕМ

Гарантированным делегированием будем называть ситуацию, когда априори известно, что агенты готовы делегировать определение своих заявок по отдельным проектам. С помощью этого понятия результат, полученный в работе [11], можно сформулировать в форме следующего утверждения.

Утверждение 2. *Класс симметричных анонимных неманипулируемых механизмов распределения ресурсов не расширяется при введении возможности делегирования и может быть расширен только при гарантированном делегировании.* ♦

Иными словами, сама возможность делегирования не позволяет расширить класс неманипулируемых ОМС и, как следствие, обеспечить Парето-эффективность принимаемых решений.

Обозначим $\mu = \min_{i \in N} (m - t_i)$ — уровень делегирования, минимальное число проектов, безразличных кому-либо из агентов. Для МПРР $\mu = m - 1$, что является максимальным уровнем делегирования.

Утверждение 3. *Для произвольных $m, n \geq 2$ при гарантированном делегировании с уровнем μ , допустимыми в качестве механизмов распределения ресурсов являются ОМС, которые допустимы без гарантированного делегирования при том же n и $\tilde{m} = m - \max\{0, \mu - 1\}$.*

Следствие. Механизм распределения ресурсов на основе симметричной анонимной ОМС с делегированием для любых $m \geq 3, n > 2$ может быть Парето-эффективен только при $\mu = m - 1$. ♦

С учетом полученных в этом параграфе и в работе [7] результатов, в зависимости от m, n и μ , допустимы следующие анонимные и симметричные ОМС:

— при $m - \max\{0, \mu - 1\} > n$ существует единственная допустимая симметричная анонимная ОМС, определяемая выражением (3);

— при $m - \max\{0, \mu - 1\} = n$ любая допустимая симметричная анонимная ОМС определяется выражением (4);

— при $m - \max\{0, \mu - 1\} < n$ любая допустимая симметричная анонимная ОМС должна удовлетворять требованиям: задающая ее система правых выбирающих коалиций $\mathcal{R}(z)$ разбивает отрезок $[0, R]$ не более чем на $\tilde{k} = \left\lceil \frac{n-1}{\tilde{m}-1} \right\rceil + 1$ частей от-

резками $[z_{l-1}, z_l], l \in \{n - \tilde{k} + 1, \dots, n\}, z_{n-\tilde{k}} = 0,$

$z_n = R, \tilde{m} = m - \max\{0, \mu - 1\}$; для любого индекса $l \in \{n - \tilde{k} + 1, \dots, n\}, \forall S \in \mathcal{R}(z_l) \#S \geq l$ и $\forall z \in (z_{l-1}, z_l] \mathcal{R}(z) = \mathcal{R}(z_l)$. При этом $z_p, l \in \{n - \tilde{k} + 1, \dots, n\}$ должны подбираться так, чтобы для любого набора индексов $\tilde{w} = \{w_1, \dots, w_{\tilde{m}}\}$, таких

что $\sum_{j=1}^{\tilde{m}} z_{w_{j-1}} \leq R$, но $\sum_{j=1}^{\tilde{m}} z_{w_j} > R$, выполнялось условие:

$$\sum_{j=1}^{\tilde{m}} w_j \geq (\tilde{m} - 1)n + 1.$$

Проиллюстрируем полученный результат примером.

Пример 3. Пусть $n = 5, m = 6$. Предположим, что с точки зрения двух агентов оптимально отдать все финансирование на проект 1, оставшихся трех агентов — отдать все финансирование на проект 2. Вектор заявок для проекта 1 будет $\{1, 1, 0, 0, 0\}$, для проекта 2 — $\{0, 0, 1, 1, 1\}$, для проектов 3–6 — $\{0, 0, 0, 0, 0\}$. В этой ситуации делегирования не будет, так как каждый агент требует отдать все доступное финансирование на один проект. Но информация о том, какое максимальное число проектов может быть интересно для любого из агентов, все равно будет влиять на то, какие механизмы допустимо применять для распределения ресурсов.

В отсутствии гарантированного делегирования или при $\mu = 1$ допустима ОМС $x_j = \min_{i \in N} (\tau_{ji}), j \in M$. В соответствии с этим механизмом ни на один проект не будет выделено никакого финансирования, так как минимальная заявка на финансирование любого из проектов равна нулю.

Если $\mu = 2$, то любая допустимая ОМС описывается как

$$x_j = \max \left\{ z \in (0, R] \mid \# \{i \in M \mid \tau_{ji} \geq z\} \geq 5 - \left\lceil \frac{R-z}{R-z_{n-1}} \right\rceil \right\},$$

$$z_{n-1} \leq R/5, j \in M.$$

При любом механизме, на основе такой ОМС при рассматриваемых мнениях агентов об оптимальном распределении финансирования ни на один проект также не будет выделено никакого финансирования, так как для этого необходимо, чтобы минимум четыре агента просили ненулевое финансирование для проекта.

Если $\mu = 4$, то любая допустимая ОМС задается разбиением $[0, R]$ не более чем на три части последовательностью $\{z_l\}_{l \in \{2, 3, 4, 5\}}, z_2 = 0, z_3 = R/3 - y, z_4 = R/3 - 2y, z_5 = R, y \in [0, R/3]$. В рамках нашего примера финансирование будет выделено только на проект 2 в объеме $x_2 = R/3 - y$.

Если $\mu = 5$, то любая допустимая ОМС задается разбиением $[0, R]$ не более чем на 5 частей неубывающей последовательностью $\{z_l\}_{l \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}}$, такой что $z_0 = 0, z_1 + z_4 \leq R, z_2 + z_3 \leq R, z_5 = R$.

В этом случае на проект 1 будет выделяться финансирование в объеме z_2 , на проект 2 — в объеме z_3 . Если



в ОМС $z_2 + z_3 = R$, то финансирование будет полностью распределено между проектами 1 и 2.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Полученные результаты позволяют конструировать механизмы распределения ресурсов для следующей ситуации. Необходимо принимать решение о распределении ресурсов на основании мнений агентов. Каждый агент может быть заинтересован в том, чтобы итоговое финансирование отдельных (быть может, всех) проектов было как можно ближе к оптимальному с его точки зрения. И эта заинтересованность формализуется в виде сепарабельных однопиковых предпочтений.

Для случая, когда априори все направления выделения ресурсов равнозначны, а мнения всех агентов равноценны, показано, что любой неманипулируемый механизм представим в виде обобщенной медианной схемы с правилом делегирования на основе механизмов последовательного распределения ресурсов.

Основной результат заключается в том, что при переходе от многомерно-однопиковых к сепарабельным и однопиковым предпочтениям, принципиальный вид неманипулируемых механизмов не меняется, дополняясь лишь процедурой делегирования. Класс допустимых процедур был также описан — было показано, что он основан на механизмах последовательного распределения ресурсов.

Важным представляется тот факт, что для определения вида допустимых ОМС большую роль играет не то, какое число проектов предлагается для финансирования, а то, каково максимальное число проектов, в определенном финансировании которых может быть заинтересован один агент. Чем меньше это число, тем менее строгим становятся требования, предъявляемые к согласованности мнений агентов относительно того, каким должно быть распределение. Выполнение этих требований необходимо, чтобы хоть какое-то финансирование могло быть выделено хотя бы на один проект.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство утверждения 1. Правило делегирования (6) отвечает всем перечисленным требованиям, но оно работает в условиях, когда $\forall j \in M n_j \leq 1$, т. е. в определенном финансировании каждого из проектов заинтересован не более чем один агент. Для случая, когда $\exists j \in M n_j > 1$ необходимо уточнить, как именно должна будет определяться заявка делегирующего агента. В силу требования симметричности, изначально ресурсы доступные к делегированию агентом $i \in N$ $R_i = R - \sum_{j \in M_i} \tau_{ji}$ должны поровну распределяться между направлениями из $M \setminus M_i$, т. е. первоначально для каж-

дого проекта из $M \setminus M_i$ доступно $\frac{R - \sum_{k \in M_i} \tau_{ki}}{m - m_i}$ ресурсов.

Это количество сопоставляется с величиной $\hat{x}_j$, которая должна определяться на основании заявок агентов из N_j . При этом, в ситуации, когда $\forall j \in M n_j \leq 1$, с учетом единственности анонимного МПРР, правило делегирования должно быть эквивалентно правилу (6). Откуда получаем, что правило делегирования должно иметь вид (7).

Определим допустимые $\hat{x}_j$. В соответствии с работой [12], величина $\hat{x}_j$ должна быть неманипулируемой по заявкам агентов из N_j . С учетом требования, что мнение агентов из N_j должно учитываться при определении заявок делегирующих агентов для данного направления, получаем, что $\hat{x}_j \in [\min\{\tau_{ji}\}_{i \in N_j}, \max\{\tau_{ji}\}_{i \in N_j}]$, т. е. правило делегирования должно быть медианной схемой. С учетом требования анонимности механизма распределения ресурсов — анонимной медианной схемой. Утверждение 1 доказано.

Доказательство утверждения 2. При отсутствии гарантированного делегирования возможна ситуация, когда несколько агентов, или даже все, сообщают свои заявки на финансирование всех проектов; т. е. ОМС, используемая в качестве механизма распределения ресурсов, должна быть реализуемой в случае многомерно-однопиковых предпочтений агентов. Отсюда следует, что при введении возможности делегирования класс симметричных анонимных механизмов распределения ресурсов не расширяется. Поскольку ОМС (5) не является допустимой в случае многомерно-однопиковых предпочтений при $m = n > 2$, то вывод о том, что с введением гарантированного делегирования класс симметричных анонимных неманипулируемых механизмов распределения ресурсов может быть расширен, очевиден.

Доказательство утверждения 3. С помощью блочного подхода было показано, что для любого блока B_w из блочного разбиения куба $[0, R]^m$, порожаемого

ОМС, такого что $\sum_{j=1}^m z_{w_j-1} \leq R$, но $\sum_{j=1}^m z_{w_j} > R$, при от-

сутствии делегирования должно быть выполнено условие (2). Проанализируем, как трансформируется это условие при введении гарантированного делегирования.

Определим, какое минимальное число агентов допустимо для выбора ненулевого финансирования при заданных $m, n \geq 2$ и $\mu \geq 2$. Пусть для одного проекта все агенты просят финансирование в объеме $R - \varepsilon$. Тогда сумма допустимых заявок любого из агентов по другим проектам не должна превышать ε . В отсутствие делегирования нереализуемый результат мог быть получен, если каждый агент распределял эту величину между $m - 2$ проектами, сообщая заявку $\varepsilon/(m - 2)$, а минимальное число агентов q , которое позволяет выбрать ненулевое финансирование проекта, не удовлетворяло условию $q(m - 1) \geq n(m - 2) + 1$. Аналогично, если задан минимальный уровень делегирования μ , то эту же величину любой агент может распределить между $m - \mu - 1$ проектами, сообщая заявку $\varepsilon/(m - \mu - 1)$. Чтобы такой уро-

вень финансирования не мог быть назначен всем $m - 1$ проектам, необходимо и достаточно, чтобы минимальное число агентов $\tilde{q}$, которое позволяло бы выбрать ненулевое финансирование проекта при данном уровне делегирования, удовлетворяло условию $\tilde{q}(m - \mu) \geq n(m - \mu - 1) + 1$. Отсюда получаем $\tilde{q} \geq n - \left\lfloor \frac{n-1}{m-\mu} \right\rfloor$, что экви-

валентно q для $\tilde{m} = m - \max\{0, \mu - 1\}$, того же n и отсутствия делегирования. Данный результат означает, что для «крайних» блоков с индексами $w = \{\exists! l \in M : w_l = n, \forall j \in M \setminus \{l\} w_j = \tilde{q}\}$, которые всегда являются граничными, условие (2) принимает следующий вид. Для любого $\tilde{M} \subset M$ такого что $\#\tilde{M} = \tilde{m}$ и $l \in \tilde{M}$:

$$\sum_{j \in \tilde{M}} w_j \geq (m - \mu)n + 1 = (\tilde{m} - 1)n + 1.$$

Кроме того, полученный результат означает, что допустимая ОМС может порождаться системой правых выбирающих коалиций $\mathcal{R}(z)$, разбивающих отрезок $[0, R]$ не более чем на $\left\lfloor \frac{n-1}{\tilde{m}-1} \right\rfloor + 1$ частей отрезками $[z_{l-1}, z_l]$,

$$l \in \{\tilde{q}, \dots, n\}, z_{\tilde{q}-1} = 0, z_n = R.$$

Определим, какой максимальный объем финансирования $z_{\tilde{q}}$ может быть выделен на отдельный проект при голосовании за него минимально допустимым числом агентов $\tilde{q}$. Пусть $\forall i \in N, \#M_i = m - \mu$ и $\forall j \in M_i, \tau_{ji} = z_{\tilde{q}}$. Пусть $\bar{m} = \{j \in M : x_j = z_{\tilde{q}}\}$. Тогда максимальное допустимое значение $\bar{m}$ определяется условиями $\bar{m} \tilde{q} \leq n(\tilde{m} - 1) \leq (\bar{m} + 1)$.

Учитывая, что определение $z_{\tilde{q}}$ актуально только при $\tilde{m} \geq n$, получаем

$$\bar{m} \leq \tilde{m} + \frac{n - \tilde{m}}{n(\tilde{m} - 1) - (n - 1)} \leq \bar{m} + 1.$$

Тогда максимальное число проектов, для которых не менее $\tilde{q}$ агентов могут попросить $z_{\tilde{q}} - \tilde{m}$. Следовательно, $z_{\tilde{q}} \leq R/\tilde{m}$, что также соответствует требованиям к симметричным анонимным ОМС, допустимым для распределения ресурсов при $\tilde{m} \geq n$.

По аналогии с крайним блоком и значением $z_{\tilde{q}}$, нетрудно получить, что остальные $z_l, l \in \{\tilde{q}, \dots, n\}$, следует определять следующим образом. Для любого набора индексов $\tilde{w} = \{w_1, \dots, w_{\tilde{m}}\}$, таких что $\sum_{j=1}^{\tilde{m}} z_{w_j-1} \leq R$,

но $\sum_{j=1}^{\tilde{m}} z_{w_j} > R$, должно выполняться условие:

$$\sum_{j=1}^{\tilde{m}} w_j \geq (\tilde{m} - 1)n + 1.$$

Это означает, что при заданных $m, n \geq 2$ и $\mu \leq m - 1$ симметричная анонимная ОМС допустима для распределения ресурсов тогда и только тогда, когда она является допустимой для того же n и $\tilde{m} = m - \max\{0, \mu - 1\}$. Утверждение 3 доказано.

Доказательство следствия. ОМС могут быть эффективными по Парето при $n > 2$ только при $m \leq 2$ (см, например [6]). Из утверждения 3 следует, что при $\mu = m - 1$ допустимыми для распределения ресурсов являются ОМС, которые являются допустимыми при $\tilde{m} = 2$ в отсутствие делегирования. Откуда получаем, что при $\mu = m - 1$ возможно обеспечение Парето эффективности распределения ресурсов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Новиков Д.А. Теория управления организационными системами. — 2-е изд. — М.: Физматлит, 2007. — 584 с.
2. Коргин Н.А. Эквивалентность и неманипулируемость неанонимных приоритетных механизмов распределения ресурсов // Управление большими системами. — 2009. — № 26. 1. — С. 319—347.
3. Sprumont Y. The division problem with single-peaked preferences: A characterization of the uniform rule // Econometrica. — 1991. — Vol. 59. — P. 509—519.
4. Модели и механизмы распределения затрат и доходов в рыночной экономике / В.Н. Бурков, И.И. Горгидзе, Д.А. Новиков и др. — М.: ИПУ РАН, 1997. — 61 с.
5. Бурков В.Н., Искаков М.Б., Коргин Н.А. Применение обобщенных медианных схем для построения неманипулируемого механизма многокритериальной активной экспертизы // Проблемы управления. — 2008. — № 4. — С. 38—47.
6. Nehring K., Puppe C. Efficient and strategy-proof voting rules: A characterization // Games and Economic Behavior. — 2007. — Vol. 59, iss. 1. — P. 132—153.
7. Бондарик В.Н., Коргин Н.А. Применение блочного метода для определения допустимых неманипулируемых механизмов активной экспертизы при решении задачи распределения ресурсов // Системы управления и информационные технологии. — 2012.
8. Коргин Н.А. Анализ реализуемости результатов многокритериальной экспертизы — применение «свойства пересечения» // Проблемы управления. — 2009. — № 6. — С. 18—27.
9. Korgin N. Algorithmic Verification of Feasibility for Generalized Median Voter Schemes on Compact Ranges // Proc. of the 18th World Congress of the IFAC, Milan, Italy, August 29 — September 2, 2011. — P. 824—829.
10. Barberá S. Strategy-proof social choice / In: Arrow K.J., Sen A.K., Suzumura K. (Eds.), Handbook of Social Choice and Welfare. — 2006. — Vol. 2.
11. Коргин Н.А. Представление механизма последовательного распределения ресурсов как неманипулируемого механизма многокритериальной активной экспертизы // Управление большими системами. — 2012. — Вып. 36. — С. 186—208.
12. Berga D., Strategy-proofness and single-plateaued preferences // Mathematical Social Sciences. — 1998. — Vol. 35, iss. 2. — P. 105—120.

Статья представлена к публикации членом редколлегии Ф.Т. Алескеровым.

Бондарик Владимир Николаевич — канд. техн. наук, зав. кафедрой, Московский физико-технический институт (государственный университет), г. Долгопрудный, ☎ (499) 197-12-31,

Коргин Николай Андреевич — канд. техн. наук, вед. науч. сотрудник, Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, г. Москва, ☎ (495) 335-60-37, ✉ nkorgin@ipu.ru.



МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРИЕМНОЙ КАМПАНИИ: ВУЗЫ РАЗЛИЧНОГО КАЧЕСТВА И АБИТУРИЕНТЫ С КВАДРАТИЧНОЙ ФУНКЦИЕЙ ПОЛЕЗНОСТИ

С.Г. Кисельгоф

Приведены сведения о системе приема в вузы России на основании результатов Единого государственного экзамена (ЕГЭ). Построена математическая модель выбора абитуриентом вузов для подачи заявлений. На основе спрогнозированного выбора абитуриентов смоделирована приемная кампания. Показаны недостатки существующего механизма зачисления абитуриентов в вузы.

Ключевые слова: обобщенные паросочетания, абитуриенты, механизм зачисления, ЕГЭ.

ВВЕДЕНИЕ

Рассматривается построение модели приемной кампании в российских государственных вузах. Считается, что все вузы и все абитуриенты разделены на некоторое число категорий в зависимости от их «качества», и деление на категории известно всем участникам. В настоящее время выбор абитуриента в рамках приемной кампании ограничен пятью вузами. При подаче документов абитуриент ориентируется на «качество» вуза и ожидаемую вероятность поступления в этот вуз. В предположении о квадратичных функциях полезности абитуриента и экспоненциальном падении ожидаемой вероятности поступления при росте качества вуза оказывается, что абитуриент будет всегда подавать документ в вуз, поступление в который он считает гарантированным (качество такого вуза считаем соответствующим качеству подготовки абитуриента), а также в один или два вуза качеством выше на три «категории», от одного до трех вузов качеством выше на две категории и один вуз на категорию выше. В результате при существующей системе приема (которая описана далее) сильно пострадают вузы качества «выше среднего»: они недоберут студентов, так как сильные абитуриенты уйдут в наиболее привлекательные вузы, а более слабые будут лишены возможности перейти на освободившиеся места из-за ограниченного числа «волн» зачислений в приемной кампании. Кроме того, возможны несправедливые ситуации, когда относительно более слабые абитуриенты получают места

в более сильных вузах, чем относительно более сильные абитуриенты.

Математические модели и анализ механизмов зачисления абитуриентов в вузы давно развиваются в литературе по обобщенным паросочетаниям. Ключевые результаты получены в работах [1–3]. Основные положения теории обобщенных паросочетаний изложены в книге [4]. Обзор исследований по данной тематике дан в работе [5].

1. ОРГАНИЗАЦИЯ ПРИЕМНОЙ КАМПАНИИ В РОССИЙСКИХ ГОСУДАРСТВЕННЫХ ВУЗАХ

Все абитуриенты, кроме редких особых случаев, оцениваются вузом в соответствии с суммой баллов, набранных ими в сумме по трем или четырем предметам на ЕГЭ. Перечень предметов утверждается Министерством образования и науки для каждой специальности и един для всех вузов, осуществляющих подготовку по данной специальности. Решение относительно учета результатов по одному из четырех предметов принимает самостоятельно каждый вуз. Например, при поступлении на направление «Экономика» Министерством утверждены четыре предмета: математика, русский язык, обществознание и иностранный язык. Однако вуз вправе исключить иностранный язык из числа предоставляемых абитуриентом результатов ЕГЭ. На практике такой возможностью пользуется большинство вузов, поэтому далее мы для простоты будем предполагать, что число предметов всегда равно трем.

Приемная кампания включает в себя этап подачи заявлений и этап зачислений, которые описаны далее. Отметим, что несущественные для дальнейшего исследования детали намеренно опущены.

На этапе подачи заявлений абитуриенты подают заявления в интересующие их вузы. В 2010 г. число вузов, в которые мог подавать заявления абитуриент, было ограничено пятью. В каждом вузе абитуриент мог подавать заявление не более чем на три специальности. Заявления принимались приемными комиссиями вузов до середины июля.

Заявление для поступления на определенную специальность принимается при наличии копии аттестата о полном среднем образовании и результатов ЕГЭ по трем предметам, соответствующим этой специальности. Набор предметов утверждается централизованно и не может изменяться самим вузом. Для каждого абитуриента рассчитывается сумма баллов, набранных по указанным трем предметам. Вуз не вправе устанавливать веса предметов при суммировании. Таким образом, при подаче заявления на одну и ту же специальность в разные вузы абитуриент имеет одинаковую сумму баллов ЕГЭ вне зависимости от вуза.

После окончания приема заявлений начинается этап зачисления, который проходит в две «волны». В *первой волне зачислений* вузы объявляют списки абитуриентов, которых они готовы принять. Список всех подавших заявления на некоторую специальность сортируется по сумме баллов ЕГЭ, его верхнюю часть образует список принимаемых абитуриентов, число принимаемых должно соответствовать числу мест. Если число заявлений меньше числа мест в вузе, то все подавшие заявления включаются в список принимаемых абитуриентов. До 4 августа абитуриенты должны были принести подлинник аттестата в один из вузов, включивших их в список. Если до установленного срока включенный в список принимаемых абитуриент не предоставил подлинник, то он выбывает из дальнейшего конкурса на эту специальность в этом вузе. Абитуриенты, принесшие подлинник, переходят в разряд официально рекомендованных к зачислению.

На *второй волне зачислений* из списка абитуриентов каждой специальности вычеркиваются те, кто был включен в список принимаемых абитуриентов, но не принес подлинник. С учетом этого в верхнюю часть списка снова попадают новые принимаемые абитуриенты, при этом общее число принимаемых абитуриентов не превышает числа мест. Абитуриент, который принес подлинник аттестата в первой волне зачислений, имеет право забрать его и принести в другой вуз, включивший его в список принятых только на втором этапе, но

более для этого абитуриента предпочтительный. В остальном правила те же — до установленного централизованно срока (9 августа) вузы ждут абитуриентов с подлинниками аттестатов. После этого централизованная приемная кампания заканчивается, и вузы издают приказы о зачислении тех абитуриентов, которые принесли подлинники аттестатов.

2. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим прием абитуриентов на одну специальность в государственные вузы в соответствии с описанными в § 1 правилами.

Пусть:

A — множество всех абитуриентов;

A_i — множество абитуриентов группы i , $i = \overline{1, M}$, т. е. абитуриенты разбиты на M групп по качеству подготовки: чем выше номер категории, тем лучше подготовка (и сумма баллов ЕГЭ) входящих в нее абитуриентов;

B — множество всех вузов;

B_j — множество вузов категории по качеству j , $j = \overline{1, M+1}$, т. е. вузы разбиты на $M+1$ категорию по качеству образования (репутации): чем выше номер категории, тем более высокого качества образование дают входящие в нее вузы. Вузы $(M+1)$ -й категории представляют особую категорию элитных вузов с наилучшим качеством подготовки.

Обозначим число абитуриентов в каждой группе через $k_i = |A_i|$, а число вузов в каждой категории через $n_j = |B_j|$. Примем, что в каждой категории одинаковое число вузов, т. е. $n_1 = n_2 = \dots = n_{M+1} = n$. Число мест в каждом вузе примем одинаковым и равным L . Относительно числа мест в вузе мы придерживаемся предположения о том, что при невозможности сравнить между собой нескольких абитуриентов вуз вынужден зачислить их всех, даже если это приводит к превышению первоначальной квоты.

Будем считать, что все вузы имеют одинаковые предпочтения на множестве абитуриентов, устроенные следующим образом. Абитуриенты с одинаковым качеством подготовки попадают в одну группу A_i , причем группы, как было указано ранее, упорядочены по качеству подготовки. Чем выше качество подготовки абитуриента (номер его группы, i), тем предпочтительнее он для вуза. Абитуриентов с одинаковой подготовкой вузы сравнить между собой не могут.

Предположение об одинаковых предпочтениях вузов справедливо в том случае, если мы рассмат-



риваем прием только на одну расширенную специальность, на которой в разных вузах требуется одинаковый набор результатов ЕГЭ, т. е. абитуриенты имеют одинаковую сумму баллов.

Для моделирования текущей ситуации на российском образовательном рынке сделаны следующие предположения о предпочтениях абитуриентов и способе принятия ими решений.

- Вузы из более высокой категории предпочтительнее вузов из более низкой категории для любого абитуриента.
- Каждый абитуриент ранжирует вузы внутри категории одинакового качества в индивидуальном порядке.
- Полезность u_a от поступления в вуз $b \in B_j$ для некоторого абитуриента a задается как $u_a(j, s_b) = (j + s_b)^2$, $0 < s_b \leq 1$, где j — категория вуза по качеству, а s_b — величина, характеризующая предпочтительность поступления в вуз b по сравнению с другими вузами категории j .
- Значение s_b определяется местом вуза в ранжировке данного абитуриента. А именно, если вуз является лучшим для абитуриента a среди вузов категории j , то $s_b = 1$. Если вуз l -й по предпочтительности в этой категории, то $s_b = (n + 1 - l)/n$, т. е. значение s_b задается таким образом, чтобы любой вуз категории $j + 1$ был заведомо предпочтительнее любого вуза из категории j .
- Кроме полезности от поступления, вузы оцениваются абитуриентами по вероятности поступления, прямо пропорциональной качеству подготовки абитуриента и обратно пропорциональной категории вуза:

$$p = \begin{cases} 2^{i-j}, & j \geq i, \\ 1, & j < i. \end{cases}$$

Таким образом, абитуриенту $a \in A_i$ невыгодно подавать документы в вуз $b \in B_j$, если $i > j$, так как это будет заведомой потерей по сравнению с гарантированным вузом из категории $j = i$.

- Если абитуриенту не удастся поступить ни в один вуз, его полезность считается равной нулю.

Предположения сделаны с учетом неполноты информации, имеющейся у абитуриентов.

Каждый абитуриент должен выбрать набор из пяти вузов. Для каждого набора оценивается ожидаемая полезность, абитуриент выбирает набор с наибольшей ожидаемой полезностью. Будем считать, что все абитуриенты придерживаются следующего разумного принципа: «Если я зачислен сразу в несколько вузов, то выбираю лучший, т. е.

приносящий наибольшую полезность от поступления».

Рассмотрим абитуриента a из группы A_i и его набор, состоящий из пяти вузов. Вузы в наборе упорядочены по предпочтительности для абитуриента a : первый вуз (категория j_1) самый лучший, последний (категория j_5) — самый худший.

Ожидаемая полезность поступления в лучший вуз

$$\bar{u}_a(j_1, s_1) = 2^{i-j_1} (j_1 + s_1)^2.$$

Если абитуриент не поступит в лучший вуз (а это произойдет с вероятностью $p = 1 - 2^{i-j_1}$), то он будет рассматривать следующий вуз в своем наборе.

Абитуриент считает события «поступил в вуз b_1 » и «поступил в вуз b_2 » независимыми, поэтому вероятность того, что абитуриент не поступил в первый вуз, но поступил во второй, оценивается как произведение вероятностей этих событий. Тогда ожидаемая полезность поступления во второй вуз

$$\bar{u}_a(j_2, s_2) = (1 - 2^{i-j_1}) 2^{i-j_2} (j_2 + s_2)^2.$$

Естественно, должно быть выполнено условие $j_1 + s_1 > j_2 + s_2$, поскольку ранее мы обозначили через j_1 категорию лучшего в наборе вуза.

Ожидаемая полезность поступления в 3-, 4- и 5-й вузы в наборе вычисляется аналогичным образом. Итоговое выражение для ожидаемой полезности абитуриента a выглядит так:

$$\begin{aligned} \bar{u}_a = & 2^{i-j_1} (j_1 + s_1)^2 + (1 - 2^{i-j_1}) (2^{i-j_2} (j_2 + s_2)^2 + \\ & + (1 - 2^{i-j_2}) (2^{i-j_3} (j_3 + s_3)^2 + (1 - 2^{i-j_3}) \times \\ & \times (2^{i-j_4} (j_4 + s_4)^2 + (1 - 2^{i-j_4}) 2^{i-j_5} (j_5 + s_5)^2))). \end{aligned} \quad (1)$$

Замечание. В литературе [1, 2] широко применяются коалиционные игровые модели для моделирования задач о распределении абитуриентов по вузам. Ядро соответствующей игры составляют так называемые попарно стабильные паросочетания.

Для указанных моделей известно, что если предпочтения всех вузов на множестве абитуриентов одинаковы (как при моделировании приема на одну специальность в разные вузы), то равновесное распределение абитуриентов по вузам — попарно стабильное паросочетание — единственно [2].

К сожалению, в текущей российской ситуации распределение абитуриентов по вузам не соответствует попарно стабильному паросочетанию. Таким образом, теоретико-игровое моделирование не позволяет реалистично описать текущую ситуа-

цию, а также выявить недостатки существующего способа организации приемной кампании. Поэтому мы отказались от использования теоретико-игровой модели. ♦

3. ПОВЕДЕНИЕ АБИТУРИЕНТОВ

После того, как сделаны предположения о полезности абитуриента, можно определить, в какие вузы он будет подавать заявления. Для поиска наилучшего набора вузов мы будем решать задачу максимизации ожидаемой полезности (1), пользуясь принципом динамического программирования. Далее приводятся полученные результаты. Доказательство некоторых утверждений дано в Приложении, полное доказательство не приводится в силу громоздкости, см. его в работе [5].

В результате решения оптимизационной задачи абитуриента выявлено, что в качестве самого слабого вуза в наборе любой абитуриент $a \in A_i$, $i \geq 2$, будет выбирать свой «любимый» вуз из соответствующей категории B_i , поступление в который он считает гарантированным.

При дальнейшем анализе оказывается, что абитуриенты разных групп подготовки не единодушны в своем выборе. Они выбирают различные наборы вузов в зависимости от своей группы A_i и числа вузов n в каждой категории качества. Если это число мало, значит, абитуриенты имеют хорошо детализированные представления о качестве вузов. Если же это число, напротив, достаточно велико, то абитуриенты находятся в ситуации существенной неопределенности, так как при сравнении больших наборов вузов вынуждены опираться только на свои личные впечатления.

Теперь покажем, как величина n , характеризующая уровень неопределенности относительно качества образования вузов, влияет на выбор абитуриентов. Сначала рассмотрим общую картину выбора абитуриентов при разных значениях n . Мы будем рассматривать ситуации, начиная с $n = 3$.

Ситуация $n = 2$ не представляет интереса и в некотором смысле является вырожденной, так как предполагает очень высокий уровень «определенности» в представлениях абитуриентов о вузах.

Заметим, что мы изначально не задаем фиксированное число групп одинаковой подготовки абитуриентов и категорий вузов. Ясно также, что абитуриенты самых сильных групп оказываются в особом положении в силу ограниченности выбора, поэтому их поведение должно быть рассмотрено особо. Из-за ограниченности объема статьи мы не будем рассматривать здесь эту ситуацию (см. работу [5]).

3.1. Выбор при разных уровнях неопределенности

В результате поиска оптимального поведения абитуриентов было выявлено, что все ситуации в зависимости от величины n (уровня неопределенности) окажутся объединены в четыре ступени, между которыми поведение групп абитуриентов будет качественно отличаться.

1. *Ступень самой низкой неопределенности*, $n = 3, 4$. Если абитуриентам известно очень подробное разбиение вузов на категории по качеству образовательных услуг (каждая категория содержит три или четыре вуза одного качества), то абитуриенты с низким качеством подготовки выберут свои «любимые» вузы из категорий от B_i до B_{i+4} . Абитуриенты с более высоким качеством подготовки выберут два вуза из категории B_{i+3} и по одному вузу из категорий B_{i+2} , B_{i+1} , B_i .

В табл. 1 представлен выбор абитуриента в зависимости от n (характеристики уровня неопределенности) и i (уровня подготовки абитуриента). В результате анализа было выявлено, что абитуриенты разделятся на типы в зависимости от качества подготовки, причем поведение будет одинаковым внутри каждого типа. Строки соответствуют типам абитуриентов с разным уровнем подготовки. Второй и третий столбец описывают, абитуриенты из каких именно групп (A_i) по качеству подготовки будут отнесены к «слабому» и «сильному» типу в зависимости от значения n . В последних пяти столбцах представлен выбираемый абитуриентом набор из пяти вузов.

Уже здесь проявляется закономерность, которая будет наблюдаться все время: при каждом конкретном n чем слабее группа абитуриентов, тем более рискованный набор они выбирают. Например,

Таблица 1

Выбор абитуриентов при $n = 3$ и $n = 4$

Абитуриенты	$n = 3$	$n = 4$	Вуз 1	Вуз 2	Вуз 3	Вуз 4	Вуз 5
«Сильные»	$i \geq 6$	$i \geq 3$	$(i + 3, 1)$	$(i + 3, (n - 1)/n)$	$(i + 2, 1)$	$(i + 1, 1)$	$(i, 1)$
«Слабые»	$2 \leq i \leq 5$	$i = 2$	$(i + 4, 1)$	$(i + 3, 1)$	$(i + 2, 1)$	$(i + 1, 1)$	$(i, 1)$



при $n = 3$ абитуриенты из группы A_5 выберут набор вузов из категорий $(B_{i+4}; B_{i+3}; B_{i+2}; B_{i+1}; B_i)$, в то время как более сильные абитуриенты группы A_6 выберут менее рискованный набор из категорий $(B_{i+3}; B_{i+3}; B_{i+2}; B_{i+1}; B_i)$.

2. *Степень низкой неопределенности, $5 \leq n \leq 14$.* На второй степени неопределенности абитуриенты разделяются на три условных типа: «сильные», «средние» и «слабые» абитуриенты.

Заметим, что при $n \geq 5$ абитуриенты всегда выбирают лучший вуз из категории B_{i+3} и худший вуз из (гарантированной для них) категории B_i . Различия в выборе абитуриентов разных типов заключаются только в выборе трех оставшихся вузов в наборе (табл. 2).

С увеличением n граница качества подготовки, отсекающая «слабых» от «средних», сдвигается вверх, граница, отделяющая «средних» от «сильных», сдвигается вниз. Таким образом, множество абитуриентов «среднего» типа сжимается и, при росте неопределенности, исчезает.

Абитуриент, относящийся к «слабому» типу при данном n , выбирает два вуза из категории B_{i+3} , два вуза из категории B_{i+2} и гарантированный вуз своей категории B_i . Абитуриенты из «средних» групп подготовки вместо второго вуза из категории B_{i+2} выбирают вуз из категории B_{i+1} и рискуют меньше, чем слабые абитуриенты. Наконец, сильные абитуриенты выбирают вместо второго вуза из категории B_{i+3} второй вуз из категории B_{i+2} . Таким образом, сильные абитуриенты рискуют в наименьшей степени.

3. *Степень средней неопределенности, $15 \leq n \leq 37$.* При дальнейшем увеличении n , а значит, росте не-

определенности, «исчезает» промежуточный средний тип абитуриентов (табл. 3). Сильные и слабые абитуриенты делают тот же выбор, что и соответствующие типы при меньших значениях n .

Сильные абитуриенты рискуют меньше и выбирают один вуз из категории B_{i+3} , два вуза из категории B_{i+2} , один вуз из категории B_{i+1} и гарантированный вуз категории B_i . Слабая часть абитуриентов выбирает гораздо более рискованный набор — два вуза из категории B_{i+3} и два вуза из категории B_{i+2} .

Заметим, что граница «сильные — слабые» смещается вверх с увеличением n , т. е. все больше абитуриентов попадают в группы слабых и больше рискуют.

Здесь мы также можем отметить циклическое изменение структуры групп абитуриентов: при самых низких n абитуриенты разбились на две группы, затем появились «средние» абитуриенты. На данной степени неопределенности «средние» снова исчезли, однако при самых высоких значениях n , они, как мы увидим далее, снова появятся.

4. *Степень высокой неопределенности, $n \geq 38$.* Эта, последняя, степень характеризуется очень высоким уровнем неопределенности и, по всей видимости, должна быть рассмотрена в большей степени для законченности анализа, нежели для практического применения результатов. На этой степени снова выделяются три типа абитуриентов (табл. 4) с разным поведением: «сильные», «средние» и «слабые». Естественно, границы типов в смысле качества подготовки будут отличаться от таковых на второй степени неопределенности. При увеличении n граница между средними и сла-

Таблица 2

Выбор абитуриентов при $n = 5$ и $n = 14$

Абитуриенты	$n = 5$	$n = 14$	Вуз 1	Вуз 2	Вуз 3	Вуз 4	Вуз 5
«Сильные»	$i \geq 47$	$i \geq 13$	$(i + 3, 1)$	$(i + 2, 1)$	$(i + 2, (n - 1)/n)$	$(i + 1, 1)$	$(i, 1)$
«Средние»	$4 \leq i \leq 46$	$i = 12$	$(i + 3, 1)$	$(i + 3, (n - 1)/n)$	$(i + 2, 1)$	$(i + 1, 1)$	$(i, 1)$
«Слабые»	$2 \leq i \leq 3$	$i \leq 11$	$(i + 3, 1)$	$(i + 3, (n - 1)/n)$	$(i + 2, 1)$	$(i + 2, (n - 1)/n)$	$(i, 1)$

Таблица 3

Выбор абитуриентов при $n = 15$ и $n = 37$

Абитуриенты	$n = 15$	$n = 37$	Вуз 1	Вуз 2	Вуз 3	Вуз 4	Вуз 5
«Сильные»	$i \geq 12$	$i \geq 16$	$(i + 3, 1)$	$(i + 2, 1)$	$(i + 2, (n - 1)/n)$	$(i + 1, 1)$	$(i, 1)$
«Слабые»	$2 \leq i \leq 11$	$2 \leq i \leq 15$	$(i + 3, 1)$	$(i + 3, (n - 1)/n)$	$(i + 2, 1)$	$(i + 2, (n - 1)/n)$	$(i, 1)$

Выбор абитуриентов при $n = 38$ и $n = 50$

Абитуриенты	$n = 38$	$n = 50$	Вуз 1	Вуз 2	Вуз 3	Вуз 4	Вуз 5
«Сильные»	$i \geq \frac{n}{2} - 2$	$i \geq \frac{n}{2} - 2$	$(i + 3, 1)$	$(i + 2, 1)$	$(i + 2, (n - 1)/n)$	$(i + 1, 1)$	$(i, 1)$
«Средние»	$16 \leq i \leq \frac{n}{2} - 3$	$14 \leq i \leq \frac{n}{2} - 3$	$(i + 3, 1)$	$(i + 2, 1)$	$(i + 2, 1)$	$(i + 1, 1)$	$(i, 1)$
«Слабые»	$2 \leq i \leq 15$	$2 \leq i \leq 13$	$(i + 3, 1)$	$(i + 3, (n - 1)/n)$	$(i + 2, 1)$	$(i + 2, (n - 1)/n)$	$(i, 1)$

быми, как ни странно, опускается вниз, а граница между сильными и средними ползет вверх.

Средние абитуриенты выбирают один вуз из категории B_{i+3} и три вуза из категории B_{i+2} . Сильные и слабые делают тот же выбор, что и в предыдущих случаях. Здесь соблюдается закономерность: чем сильнее абитуриент, тем менее рискованный набор он выбирает.

4. МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРИЕМНОЙ КАМПАНИИ

Теперь, когда мы определили ожидаемое поведение абитуриентов, можно предсказать развитие приемной кампании. Для этого рассмотрим числовой пример, задав параметр M , определяющий число категорий вузов и групп абитуриентов; параметр n , определяющий число вузов в каждой категории одинакового качества и характеризующий уровень неопределенности; число абитуриентов в группах по качеству подготовки.

Поскольку в нашей модели считается одинаковым число вузов в категории и число мест в вузе, то места будут распределены равномерно по качеству.

Относительно предпочтений абитуриентов будем предполагать, что каждый вуз встречается на первом, втором и далее местах в ранжировках абитуриентов внутри категории одинаковое число раз. Таким образом, в данной модели мы не будем вводить случайную составляющую, связанную с предпочтениями абитуриентов.

4.1. Равномерное распределение абитуриентов

Рассмотрим следующий пример. Пусть:

$M = 10$, т. е. 10 категорий абитуриентов и 11 категорий вузов;

$n = 20$, число вузов в категории;

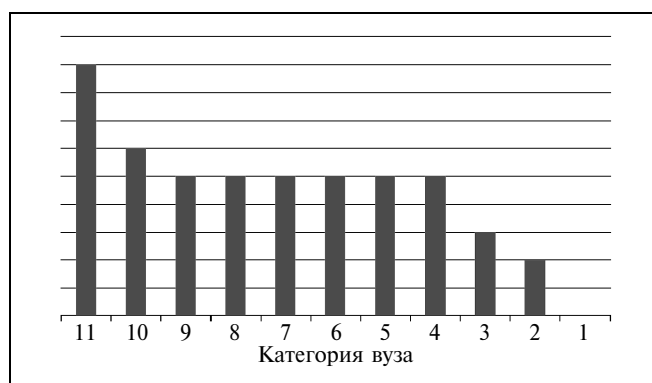
число абитуриентов совпадает с числом мест в вузах;

абитуриенты распределены по категориям равномерно.

Общее число вузов будет равно $20 \cdot 11 = 220$, а число мест — $220L$. Абитуриенты распределены по категориям равномерно, поэтому $\forall i k_i = |A_i| = 220L/10 = 22L$.

На первом этапе каждый абитуриент категорий $2 \leq i \leq 8$ подаст заявление в вуз своей категории, в два вуза категории B_{i+2} и два вуза категории B_{i+3} . Абитуриенты из двух верхних категорий, в принципе не имеющие категории вузов B_{i+3} , также сделают выбор, максимизирующий их ожидаемую полезность. Для абитуриента из лучшей категории A_{10} набор будет включать вуз своей категории и четыре вуза категории B_{11} . Для абитуриента из категории A_9 набор будет включать один вуз своей категории, один вуз категории B_{10} и три вуза категории B_{11} . Для абитуриента из группы A_1 наилучшим будет выбор, не включающий гарантированный вуз: один вуз из B_2 , два вуза из B_3 и два вуза из B_4 .

Рис. 1 демонстрирует ожидаемое число заявлений в одном вузе каждой категории. После того, как спрогнозировано поведение абитуриентов, можно легко смоделировать проведение приемной кампании в соответствии с принятым в настоящее время (см. § 1) механизмом. Ожидаемые ре-


Рис. 1. Число поданных заявлений

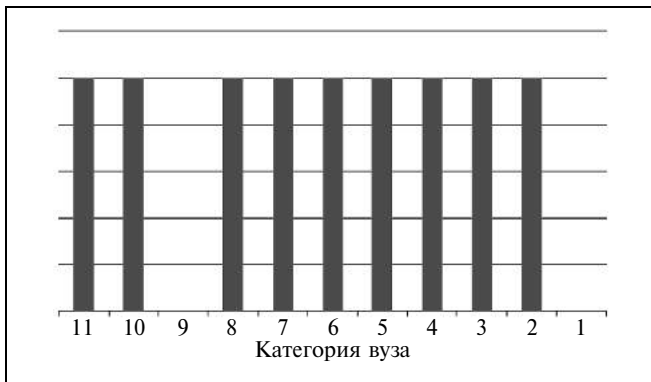


Рис. 2. Число зачисленных абитуриентов

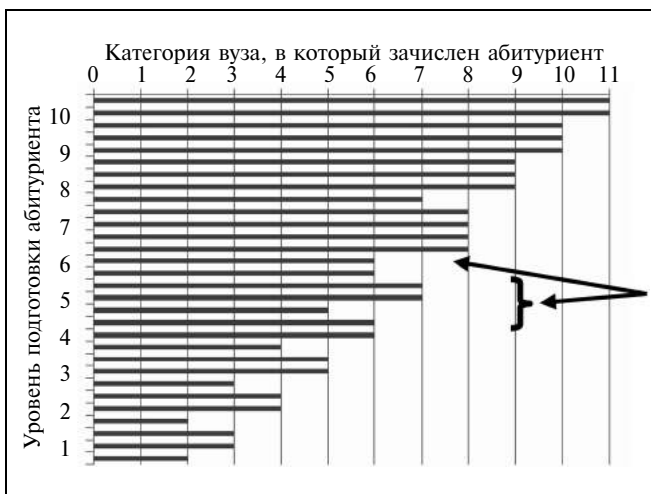


Рис. 3. Число зачисленных абитуриентов из разных групп по категориям вузов

зультаты приемной кампании представлены на рис. 2. В соответствии с этим прогнозом, каждый вуз, кроме вузов из категории B_8 , получит по 1,1L абитуриентов, а вузы девятой и первой категорий останутся без абитуриентов вовсе.

Таким образом, абитуриентов не набирают не только самые слабые вузы, но и вузы качества выше среднего.

4.2. Неполная информация о распределении абитуриентов

Рассмотрим модификацию исходной модели:

$M = 10$, т. е. 10 групп абитуриентов и 11 категорий вузов;

$n = 20$, число вузов в категории;

абитуриенты распределены по группам равномерно;

число абитуриентов меньше числа мест в вузах, а именно равно $0,75 \cdot 220L$.

Предположим, что вузы могут более четко оценить качество подготовки абитуриента, чем сами абитуриенты. С точки зрения вуза каждая из групп абитуриентов разделяется на три подгруппы, различимые по качеству подготовки.

Содержательно можно пояснить наше предположение следующим образом: абитуриенты, набравшие 60, 61 или 62 балла на ЕГЭ по математике, считают себя абитуриентами примерно одного качества подготовки (поскольку не располагают точной информацией о своих конкурентах). В то же время вузы способны отличить этих абитуриентов и, при наличии ограничения по числу мест, отказать первому и второму абитуриенту в пользу третьего.

При сделанном предположении предпочтения абитуриентов не изменятся, поскольку они не получают дополнительной информации о вузах, соответственно, все приведенные ранее выводы будут верны и в этой модели.

На рис. 3 графически представлен результат приемной кампании для данного примера. Отметим, что в такой ситуации будет наблюдаться «несправедливое» зачисление, например, абитуриенты группы A_7 зачислены в вузы категории B_8 , в то время как некоторые абитуриенты группы A_8 попали в вузы более слабой категории B_7 .

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предложен способ моделирования поведения абитуриента при выборе набора вузов для подачи заявлений, а также смоделирован ход приемной кампании для различных ситуаций — при разной имеющейся у вузов и абитуриентов информации и разном соотношении числа мест и числа абитуриентов. Данная модель позволяет высветить слабые места существующего в России механизма распределения абитуриентов по вузам. Простой пример из п. 4.1 иллюстрирует ситуацию, когда абитуриентов недобирают не только самые слабые (как следовало бы ожидать) вузы, но и вузы с качеством образования «выше среднего». Такая невыгодная и вузам, и абитуриентам ситуация возникает из-за ограничения числа волн (две в 2011 г.) механизма зачисления. Эта ситуация приводит к тому, что вузам выгодно нарушать правила зачисления (фактически нарушая тем самым законодательство), чтобы не остаться без абитуриентов.

Дальнейшее развитие данного исследования предполагает два направления. Первое из них — моделирование зачисления в течение нескольких

лет, при котором абитуриенты второго и последующих лет получают дополнительную историческую информацию. Второе направление — моделирование поведения вузов как активных игроков, которое позволило бы описать и предсказать случаи и характер манипулирования механизмом зачисления.

Автор выражает благодарность Ф.Т. Алескерову за всестороннюю поддержку, обсуждения и ценные замечания, а также К.С. Сорокину за важные содержательные комментарии и помощь в подготовке текста. Автор благодарит Лабораторию анализа и выбора решений НИУ ВШЭ за финансовую поддержку.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Докажем, что при сделанных предположениях абитуриент всегда выбирает ровно один вуз, поступление в который считает гарантированным, а остальные вузы он выбирает из более сильных категорий.

Абитуриент должен выбрать пять вузов так, чтобы максимизировать свою ожидаемую полезность. Упорядочим вузы в наборе так, что на первом месте будет стоять лучший вуз из пяти, а на пятом месте — худший. Тогда процесс выбора вузов может быть описан как задача динамического программирования из пяти шагов. Начнем с конца — с выбора самого слабого вуза в наборе.

Выбор наименее предпочтительного вуза в нашем наборе зависит от предпочтений абитуриентов и от того, какой вуз был выбран в качестве четвертого в наборе (так как самый слабый вуз не может быть лучше четвертого и не может совпадать с ним). Выбирать вуз из категории хуже, чем i , для абитуриента нерационально. Сформулируем оптимизационную задачу, решением которой будет выбираемый пятый вуз:

$$\bar{u} = 2^{i-j_5} \left(j_5 + \frac{x_5}{n} \right)^2 \rightarrow \max,$$

$$j_4 + \frac{x_4}{n} \geq j_5 + \frac{x_5}{n} + \frac{1}{n}, \quad (\text{П1})$$

$$j_4 \geq j_5, \quad (\text{П2})$$

$$j_5 \geq i, \quad (\text{П3})$$

$$1 \leq x_5 \leq n, \quad (\text{П4})$$

$$j_5, x_5 \in N, \quad (\text{П5})$$

при каждых заданных j_4, x_4, n и i . Сначала найдем решение задачи без учета ограничений (П2), (П3) и (П5), т. е. без учета решений относительно подачи заявлений в

другие, более сильные вузы и ограничения целочисленности.

Оптимальное значение функции достигается при $x_5^* = n$ (с учетом ограничения (П4)). Тогда функция полезности примет вид $u = 2^{i-j_5} (j_5 + 1)^2$. Эта функция имеет единственную точку максимума при $j_5^* = 2/\ln 2 - 1$. Таким образом, при всех $i \geq 3$ функция полезности для пятого шага является строго убывающей на луче (П3). А значит, максимум с учетом ограничения (П3) достигается при $j_5 = i$. Можно показать, что при $i = 2$ максимальное значение (с учетом целочисленности j_5) также достигается при $j_5 = i$.

Таким образом, максимум целевой функции этой задачи без учета ограничений, связанных с выбором четвертого вуза в наборе, достигается в точке $j_5 = i; x_5 = n$ при всех $i \geq 2$. Выбор более одного вуза из категории $j = i$ заведомо невыгоден, так как поступление в вуз категории i абитуриент считает гарантированным, $p_i = 1$; т. е. выбор более одного вуза из категории i не может увеличить ожидаемую полезность абитуриента. Следовательно, в качестве четвертого и других вузов в наборе абитуриент не будет выбирать гарантированный вуз и, какими бы ни были решения относительно других четырех вузов, в качестве пятого вуза будет выбран гарантированный вуз из категории B_i .

Полное доказательство всех сформулированных утверждений достаточно громоздко, поэтому не включено в данную статью, оно приведено в работе [5].

ЛИТЕРАТУРА

1. Gale D., Shapley L.S. College Admissions and the Stability of Marriage // American Mathematical Monthly. — 1962. — Vol. 69. — P. 9–14.
2. Balinski M., Sonmez T. A Tale of Two Mechanisms: Student Placement // Journal of Economic Theory. — January, 1999. — Vol. 84 (1). — P. 73–94.
3. Abdulkadiroglu A., Sonmez T. School Choice: A Mechanism Design Approach // American Economic Review. — June 2003. — Vol. 93. — P. 729–747.
4. Алескеров Ф.Т., Хабина Э. Л., Шварц Д.А. Бинарные отношения, графы и коллективные решения. — М.: Изд. дом Высшей школы экономики, 2006. — 300 с.
5. Кисельгоф С.Г. Выбор вузов абитуриентами с квадратичной функцией полезности. Препринт WP7/2011/01. — М.: Изд. дом Высшей школы экономики, 2011. — 44 с.

Статья представлена к публикации членом редколлегии А.С. Манделем.

Кисельгоф Софья Геннадьевна — аспирант, преподаватель, Национальный исследовательский университет — Высшая школа экономики, г. Москва,
☎ (495) 621-13-42, ✉ skiselgof@gmail.com.



РЕГУЛИРОВАНИЕ ОЧЕРЕДИ В СИСТЕМАХ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ С БОЛЬШИМ ЧИСЛОМ ОБСЛУЖИВАЮЩИХ КАНАЛОВ

А.В. Жилияк, В.А. Кашеев, А.В. Крянев

Приведены выражения для оценки среднего времени ожидания обслуживания в очереди. Получены простые соотношения, позволяющие определить необходимое число каналов обслуживания в системе массового обслуживания при заданных ограничениях на длину очереди. Отмечено, что полученные результаты могут быть использованы для оптимизации работы крупных call-центров и других систем массового обслуживания с большим числом каналов.

Ключевые слова: система массового обслуживания, call-центр, время ожидания в очереди, классификация Кендалла.

ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время широкое распространение получили, так называемые, центры обработки вызовов или call-центры, которые принимают и обрабатывают звонки (заявки) потенциальных клиентов различных компаний. Спектр компаний, использующих в своей работе call-центры, достаточно широк — это банки, сети туристических агентств, риэлтерские компании, крупные магазины и др. Не будет преувеличением сказать, что call-центр является «лицом компании», поскольку по качеству его работы можно сделать выводы о том, насколько корректно и эффективно компания будет обслуживать заявки клиента в дальнейшем. Рост клиентской базы компании приводит к необходимости расширять возможности call-центра, что вместе с решением вопросов технической оснащенности приводит к необходимости увеличения числа каналов обслуживания. Поэтому крупные компании пользуются услугами собственных или профессиональных call-центров с большим числом каналов обслуживания. Так, call-центр «ВТБ-24» имеет около 200 операторских мест [1], call-центр компании «ИНФОТЕЛЛ» — 500 мест [2], аутсорсинговые call-центры FORTAX и Wiltteam — до 137 и 400 мест соответственно [3, 4].

Очевидно, что в соответствии со своей основной задачей — удовлетворением информационных заявок клиентов в реальном времени — call-центр

служит типичным примером системы массового обслуживания (СМО), и для анализа эффективности его работы можно воспользоваться математическим аппаратом теории массового обслуживания [5].

1. ОСНОВНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СМО

Один из основных параметров СМО — среднее время ожидания обслуживания $\bar{T}_{line}$ или, другими словами, среднее время нахождения заявки на обслуживание в очереди.

Рассмотрим простейшую СМО — систему, в которой поток поступления заявок и поток их обслуживания носят марковский характер, число обслуживающих каналов равно n , время нахождения заявки в очереди не ограничено. Такая СМО в классификации Кендалла [5] обозначается как $M/M/n/\infty$ или $M/M/n$.

В том случае, если поток поступающих заявок в систему и поток их обслуживания не меняются со временем, выражение для среднего числа заявок, находящихся в очереди в СМО типа $M/M/n$, имеет вид [6]

$$\bar{N}_{line} = \frac{\Psi^{n+1}}{(1-\Psi)^2} \frac{1}{U},$$

$$U = \frac{n!}{n^n} \sum_{k=0}^n \frac{(n\Psi)^k}{k!} + \frac{\Psi^{n+1}}{(1-\Psi)}, \quad (1)$$

где Ψ — безразмерная величина, связывающая параметры СМО:

$$\Psi = \lambda / (n\mu), \quad 0 \leq \Psi < 1. \quad (2)$$

Здесь λ — интенсивность потока заявок, поступающих в систему, или среднее число заявок, поступающих в систему в единицу времени; μ — интенсивность обслуживания заявок каждым каналом (предполагается, что для всех каналов $i = 1, \dots, n$ значения μ_i одинаковы, т. е. $\mu = \mu_i = \text{const}$).

Среднее время ожидания заявки в очереди $\bar{T}_{line}$ определяется через среднее число заявок $\bar{N}_{line}$ как

$$\bar{T}_{line} = \bar{N}_{line} / \lambda. \quad (3)$$

Из выражений (1)—(3) следует, что в СМО типа $M/M/n$ существует некоторое минимально возможное число каналов обслуживания. Введем параметр

$$n^* = \lambda / \mu. \quad (4)$$

При $n > n^*$ величина $\bar{T}_{line}$ монотонно убывает с увеличением n . Как известно [5], при $n \leq n^*$ стационарного режима в рамках модели СМО (1)—(3) не существует, и в системе происходит неконтролируемый рост очереди заявок на обслуживание, который, в конечном счете, приводит к отказу от обслуживания части заявок.

2. АНАЛИЗ СМО С БОЛЬШИМ ЧИСЛОМ ОБСЛУЖИВАЮЩИХ КАНАЛОВ

Применим математическую модель (1)—(3) для анализа СМО с большим числом обслуживающих каналов, т. е. для случая $n > n^* \gg 1$ (см. формулу (4)).

Заметим, что использовать выражение для $\bar{N}_{line}$ в форме (1) для расчетов при $n \gg 1$ затруднительно из-за резкой зависимости от n числителя и знаменателя выражения (1). Преобразуем его к более удобному виду.

Выразим первое слагаемое в формуле для $U(1)$ через $e^{n\Psi}$:

$$\sum_{k=0}^n \frac{(n\Psi)^k}{k!} = e^{n\Psi} - \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(n\Psi)^k}{k!},$$

а второе слагаемое представим как сумму бесконечной геометрической прогрессии

$$\frac{\Psi^{n+1}}{(1-\Psi)} = \sum_{k=n+1}^{\infty} \Psi^k,$$

и перепишем выражение для $U(1)$ в виде

$$U = \frac{n!}{n^n} e^{n\Psi} + \sum_{k=n+1}^{\infty} \left[\Psi^k - \frac{n! (n\Psi)^k}{n^n k!} \right] = \frac{n!}{n^n} e^{n\Psi} + \Psi^n \sum_{k=1}^{\infty} \Psi^k \left[1 - \prod_{i=1}^k \frac{n}{n+i} \right]. \quad (5)$$

Далее, первое слагаемое в соотношении (5) преобразуем с помощью формулы Стирлинга:

$$\frac{n!}{n^n} e^{n\Psi} \approx \sqrt{2\pi n} e^{n(\Psi-1)}, \quad (6)$$

а для преобразования множителя во втором слагаемом соотношения (5)

$$\varphi_k(k) = 1 - \prod_{i=1}^k \frac{n}{n+i} \quad (7)$$

воспользуемся выражениями, аппроксимирующими функцию (7) в различных диапазонах значений k :

$$\varphi_k(k) \approx \begin{cases} k(k+1)/N^2, & k \ll N/2; \\ (6k/N-1)/8, & N/2 < k \ll 3N/2; \\ 1, & k > 3N/2, \end{cases} \quad (8)$$

где $N = \sqrt{2n}$.

На рисунке представлены графики функции $\varphi_k(k)$, рассчитанной по точной (7) и приближенной (8) формулам, при различных значениях n ($n \gg 1$).

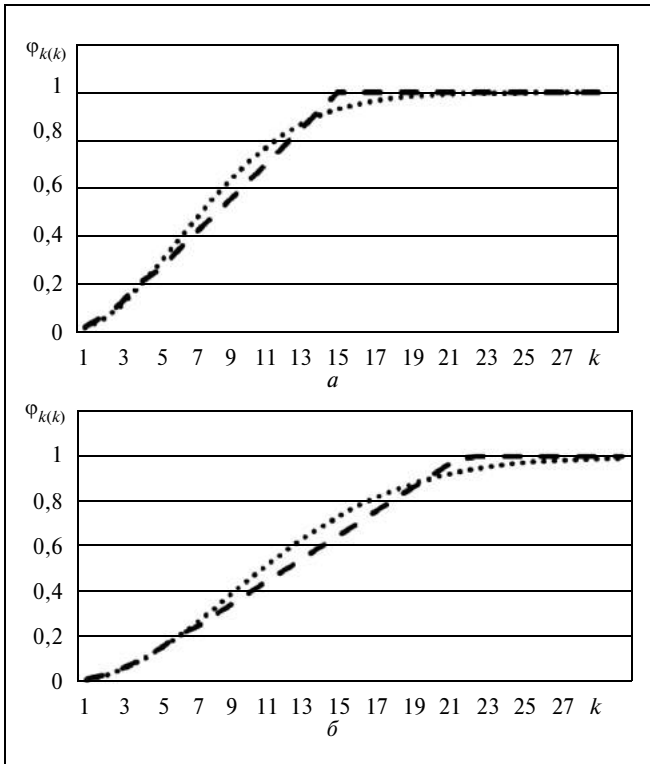
Теперь второе слагаемое выражения (5) можно представить в следующем виде

$$S = \sum_{k=1}^{\infty} \Psi^k \left(1 - \prod_{i=1}^k \frac{n}{n+i} \right) \approx S_1 + S_2 + S_3, \quad (9)$$

где

$$\begin{aligned} S_1 &= \sum_{k=1}^{[N/2]} \Psi^k \frac{k(k+1)}{N^2}, \\ S_2 &= \sum_{k=[N/2]+1}^{[3N/2]} \frac{\Psi^k}{8} \left(\frac{6k}{N} - 1 \right), \\ S_3 &= \sum_{k=[3N/2]+1}^{\infty} \Psi^k. \end{aligned} \quad (10)$$

Запись [...] означает целую часть выражения, заключенного в скобки.



Графики функции $\varphi_k(k)$, рассчитанной по точной (7) и приближенной (8) формулам при различных значениях n : $a - n = 50$; $б - n = 100$; — точная; — — — — приближенная

Вычислим величины S_1 , S_2 и S_3 (10), учитывая, что S_1 и S_2 могут быть выражены через производные от конечных сумм:

$$\begin{aligned}
 S_1 &= \frac{\Psi}{N^2} \frac{d^2}{d\Psi^2} \left(\Psi \sum_{k=1}^{N/2} \Psi^k \right) = \\
 &= \frac{\Psi}{N^2} \frac{d^2}{d\Psi^2} \left(\frac{\Psi^2(1-\Psi^{N/2})}{1-\Psi} \right) = \\
 &= \frac{\Psi}{N(1-\Psi^2)} \times \\
 &\times \left[\frac{2(1-\Psi^{N/2})}{(1-\Psi)N} - \frac{\Psi^{N/2}}{2} \left(4 - 2\Psi + \left(\frac{N}{2} - 1 \right) (1-\Psi) \right) \right], \quad (11)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 S_2 &= \sum_{k=N/2+1}^{3N/2} \left[\frac{3}{4N} \frac{d}{d\Psi} \Psi^k - \frac{\Psi^k}{8} \right] = \\
 &= \frac{3}{4N} \frac{\Psi^{N/2+1}}{(1-\Psi)^2} \times \\
 &\times \left\{ 1 + \frac{N}{3}(1-\Psi) - \Psi^N \left[1 + \frac{4N}{3}(1-\Psi) \right] \right\}, \quad (12)
 \end{aligned}$$

а S_3 является суммой бесконечной геометрической прогрессии

$$S_3 = \frac{\Psi^{3N/2+1}}{1-\Psi}. \quad (13)$$

Учитывая результаты вычислений (11)–(13), выражение (9) можем записать в виде

$$\begin{aligned}
 S &\approx \frac{\Psi}{(1-\Psi)^2 N} \times \\
 &\times \left[\frac{2(1-\Psi^{N/2})}{N(1-\Psi)} - \Psi^{N/2} \frac{1}{4} (1 + 2(1-\Psi) + 3\Psi^N) \right].
 \end{aligned}$$

Подставив это выражение в формулу (5), получим следующий результат для среднего числа заявок (1), находящихся в очереди на обслуживание:

$$\begin{aligned}
 \bar{N}_{line} &\approx \frac{\Psi}{(1-\Psi)^2} \times \left\{ \sqrt{\pi} N \Psi^{-N/2} \exp \left[-\frac{N^2}{2} (1-\Psi) \right] + \right. \\
 &+ \frac{\Psi}{(1-\Psi)^2 N} \left[\frac{2(1-\Psi^{N/2})}{N(1-\Psi)} - \right. \\
 &\left. \left. - \Psi^{N/2} \left[1 + \frac{1-\Psi}{2} - \frac{3}{4} (1-\Psi^N) \right] \right] \right\}^{-1}. \quad (14)
 \end{aligned}$$

Введя безразмерный параметр

$$\delta_n = 1 - n^*/n = 1 - \Psi, \quad 1 > \delta_n > 0, \quad (15)$$

перепишем выражение (14) в виде

$$\begin{aligned}
 \bar{N}_{line} &\approx \frac{1}{\delta_n} \times \left\{ \sqrt{\pi} \frac{N\delta_n}{1-\delta_n} \exp \left\{ -\frac{N^2}{2} [\delta_n + \ln(1-\delta_n)] \right\} + \right. \\
 &+ \frac{1}{\delta_n N} \left[\frac{2(1-(1-\delta_n)^{N/2})}{N\delta_n} - \right. \\
 &\left. \left. - (1-\delta_n)^{N/2} \frac{1}{4} [1 + 2\delta_n + 3(1-\delta_n)^N] \right] \right\}^{-1}. \quad (16)
 \end{aligned}$$

3. АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ СМО С БОЛЬШИМ ЧИСЛОМ КАНАЛОВ ОБСЛУЖИВАНИЯ

Параметр (15) убывает при приближении n к n^* , и при $n \approx n^*$ (4) его значение удовлетворяет условию $\delta_n \ll 1$ (напомним, что мы анализируем случай $n > n^* \gg 1$). Соответственно, с уменьшением δ_n число заявок $\bar{N}_{line}$ в очереди монотонно возрастает. Эффективный рост числа заявок наблюдается при $\delta_n N < 1$. Упростим выражение (16) для случая

$\delta_n N < 1$, имея в виду, что при этом $\delta_n \ll 1$. Раскладывая выражение (16) в ряд по степеням δ_n и пренебрегая малыми поправками, получим

$$\bar{N}_{line} \approx \frac{1}{\delta_n} \times \left\{ 1 + N\delta_n \left[\sqrt{\pi} \left(\frac{\exp(N^2\delta_n^2/4)}{1 - \delta_n} - 1 \right) + 1 + \frac{2}{5} N\delta_n \right] \right\}^{-1}, \quad \delta_n N < 1. \quad (17)$$

Численные расчеты показали, что при $n > n^* \gg 1$ значение $\bar{N}_{line}$, рассчитанное по формуле (17), отличается от точного значения (1) не более, чем на 3 % при условии $\delta_n N < 2$. Как было отмечено, именно случай малых значений δ_n интересен в смысле формирования очереди, так как при $\delta_n N > 1$ очередь в СМО с большим числом каналов обслуживания практически отсутствует.

Введем безразмерное среднее время $\bar{t}_{line}$ ожидания заявки на обслуживание в очереди [2]. Для этого значение $\bar{T}_{line}$ (3) разделим на среднее время обслуживания одной заявки $\bar{T}_S = 1/\mu$. Тогда

$$\bar{t}_{line} = \bar{T}_{line} / \bar{T}_S = \mu \bar{N}_{line} / \lambda = \bar{N}_{line} / n^*. \quad (18)$$

Учитывая выражение (17),

$$\bar{t}_{line} \approx \frac{1}{n^* \delta_n} \times \left\{ 1 + N\delta_n \left[\sqrt{\pi} \left(\frac{\exp(N^2\delta_n^2/4)}{1 - \delta_n} - 1 \right) + 1 + \frac{2}{5} N\delta_n \right] \right\}^{-1}, \quad \delta_n N < 1. \quad (19)$$

Зададим ограничение T^* на среднюю длину очереди в СМО с $n > n^* \gg 1$:

$$\bar{T}_{line} < T^*. \quad (20)$$

Для безразмерного времени (18) ограничение (20) выглядит как

$$\bar{t}_{line} < \Theta, \quad \Theta = T^* \mu. \quad (21)$$

Оценим число каналов обслуживания m , которое должно быть в СМО ($m > n^* \gg 1$) при выполнении ограничений (20) и (21) на длину очереди. Для этого необходимо найти зависимость $\delta_m = 1 - m/n^*$ от Θ .

Решая уравнение (19) методом последовательных приближений, при $\delta_m \ll 1$ получим

$$\delta_m \approx \frac{1}{\sqrt{2n^*}} \frac{\sqrt{4x\sqrt{(1+x)} + 1} - 1}{2\sqrt{(1+x)}}, \quad (22)$$

где $x = \sqrt{\frac{2}{n^*}} \frac{1}{\Theta}$, и, соответственно, для числа обслуживающих каналов m можем записать

$$m \geq n^* / (1 - \delta_n). \quad (23)$$

При $\Theta > 1$ выражение (23) упрощается:

$$m \geq n^* + 1/\Theta. \quad (24)$$

Результат (23) говорит о том, что в СМО с $n^* \gg 1$ ограничение на длину очереди $\Theta > 1$ выполняется при любом числе каналов обслуживания, так как условие $m > n^*$ — условие существования СМО типа $M/M/m$ (1).

При $\Theta \ll 1$ получим

$$\delta_m \approx \frac{1}{\sqrt{2n^*}} x^{1/4}.$$

Из условия $\delta_n < 1$ определим предельное значение Θ_{min} , при котором может использоваться оценка (23): $\Theta_{min} \approx 1/(n^*)^{5/2}$.

Очевидно, для СМО с $n^* \gg 1$ ограничение на очередь $T^* = \Theta_{min}/\mu$ никакого практического значения не имеет, так как при таких ограничениях среднее время ожидания в очереди на обслуживание можно считать равным нулю. Это означает, что соотношения (22) и (23) могут быть использованы для оценки необходимого числа каналов m обслуживания в СМО с $n^* \gg 1$ для всего практически значимого диапазона ограничений на длину очереди.

В таблице представлены результаты расчетов безразмерного времени ожидания в очереди $\bar{t}_{line}$, проведенные с помощью формулы (19) при $n^* = 100$ для различных значений $n - n^*$, а также значения m (23), рассчитанные для соответствующих значений $\Theta = \bar{t}_{line}$ (19). Как видно из сравнения приведенных в таблице данных, оцененное по формуле (23) необходимое число каналов обслуживания m хорошо (в пределах 1,5 %) согласуется с реальным числом каналов обслуживания n для СМО с $n > n^* \gg 1$ при условии $\delta_n N < 2$. В таблице дано также сопоставление результатов расчета безразмерной длины очереди по классической (1) и упрощенной (19)



Зависимость безразмерного времени ожидания в очереди $\bar{t}_{line}$ от числа каналов n при $n^* = 100$.

Сопоставление результатов расчета $\bar{t}_{line}$ по классической (1) и упрощенной (19) формулам

n	$n - n^*$	Параметр $\delta_n N$	t_{line}		m
			по формуле (1)	по формуле (2)	
101	1	0,141	0,879	0,876	101,00
102	2	0,280	0,386	0,383	102,01
103	3	0,418	0,225	0,222	103,03
104	4	0,555	0,147	0,145	104,06
105	5	0,690	0,103	0,100	105,10
106	6	0,824	0,074	0,072	106,15
107	7	0,957	0,055	0,053	107,21
108	8	1,089	0,041	0,039	108,29
109	9	1,219	0,031	0,030	109,39
110	10	1,348	0,024	0,023	110,52
111	11	1,477	0,018	0,018	111,67
112	12	1,604	0,014	0,014	112,86
113	13	1,729	0,011	0,011	114,10
114	14	1,854	0,008	0,008	115,40
115	15	1,978	0,006	0,007	116,78

формулам для СМО с большим числом обслуживающих каналов ($n \gg 1$) при коэффициенте загрузки ψ , близком к единице.

4. АНАЛИЗ ПОЛУЧЕННЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

Приведем пример оценки числа каналов обслуживания для СМО с $n^* \gg 1$.

Рассмотрим call-центр, в который поступает 100 телефонных звонков в минуту, время обслуживания одного звонка в среднем составляет 60 с, т. е. интенсивность потока заявок в систему $\lambda = 100 \text{ мин}^{-1}$, интенсивность обслуживания $\mu = 1 \text{ мин}^{-1}$, и соответственно $n^* = \lambda/\mu = 100$. Очевидно, условие $n^* \gg 1$ выполнено.

Введем ограничение на среднее время ожидания заявки в очереди $T_1^* = 15 \text{ с}$, т. е. $\Theta_1 = 0,25$. Подставляя эти значения в выражения (22) и (23), определим необходимое число каналов обслуживания: $m_1 \geq 103$.

При снижении времени ожидания в очереди в три раза $T_2^* = 5 \text{ с}$ ($\Theta_2 \approx 0,083$) из соотношения (24) определим: $m_2 \geq 106$.

Дальнейшее сокращение времени ожидания в очереди, например, до $T_3^* = 2 \text{ с}$ ($\Theta_2 \approx 0,033$), приводит к увеличению требуемого числа каналов обслуживания до $m_3 \geq 109$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Полученные результаты анализа СМО с большим числом каналов обслуживания $n \gg 1$ позволяют прогнозировать эффективность работы СМО с помощью оценки среднего времени ожидания обслуживания заявок, а также оперативно регулировать параметры СМО (время обработки одной заявки, число каналов обслуживания) для достижения необходимых временных показателей обслуживания клиентов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Сошина В. Call-центр ВТБ 24: время ожидания — 30 секунд // Банковское обозрение. — 2008. — № 8. — С. 110.
2. URL: <http://infotell.ru/press-centr/305--lr> (дата обращения: апрель 2012 г.).
3. URL: <http://www.fortax.ru/about/history.html> (дата обращения: апрель 2012 г.).
4. URL: <http://www.wilstream.ru/about/> (дата обращения: апрель 2012 г.).
5. Гнеденко Б.В., Коваленко И.Н. Введение в теорию массового обслуживания. — М.: ЛКИ, 2011. — 402 с.
6. Крянев А.В., Жилък А.В. Методика нормирования численности расчетно-кассового персонала с использованием элементов теории массового обслуживания // Экономический анализ: теория и практика. — 2009. — № 20. — С. 44—47.

Статья представлена к публикации членом редколлегии А.С. Манделем.

Жилък Анастасия Владимировна — соискатель кандидатской степени, Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ», гл. специалист группы компенсаций и льгот, ОАО «Мосэнерго», г. Москва, ☎ 8(495) 957-19-57 доб. 42-30, ✉ zhilyakav@mosenergo.ru,

Кашеев Владимир Александрович — канд. физ.-мат. наук, директор отделения, ОАО «Высокотехнологический научно-исследовательский институт неорганических материалов им. академика А.А. Бочвара», г. Москва, ✉ rpp@bochvar.ru,

Крянев Александр Витальевич — д-р физ.-мат. наук, профессор, Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ», г. Москва, ☎ (495) 323-90-72, ✉ avkryanev@mephi.ru.

ГРУППОВОЕ УПРАВЛЕНИЕ В ДИСКРЕТНО-СОБЫТИЙНЫХ СИСТЕМАХ

А.А. Амбарцумян, А.И. Потехин

Под групповым управлением понимается способ управления конфигурацией автономных компонентов объекта в целях выполнения заданной технологической функции. Идея заключается в создании двухуровневой системы управления с использованием на нижнем уровне моделей поведения каждого компонента, а групповое управление реализуется моделью управляющего компонента, взаимодействующего с моделями нижнего уровня. Рассмотрены два типа группового управления: заданы последовательности совместного выполнения операций автономными компонентами, заданы ограничения на сочетание технологических операций, выполняемых различными компонентами.

Ключевые слова: групповое управление, дискретно-событийные модели, сети Петри, автономные компоненты, структурно-сложные системы.

ВВЕДЕНИЕ

Групповое управление (ГУ) технологическим оборудованием как способ управления конфигурацией автономных компонентов объекта (*структурой потоков материалов и изделий*) в целях выполнения заданной технологической функции (задачи) широко применяется в промышленности. В настоящее время ГУ выполняется на основе «жесткой схемы» конечно-автоматных моделей. Однако это несовместимо с объективно изменяющейся на сооружаемом объекте технологией, поскольку при сооружении объекта (5–7 лет после проекта), как правило, имеют место отклонения в поставляемом оборудовании от проекта и изменения в технологических процессах. Поэтому смена конфигурации оборудования закрепляется в регламенте, должностных инструкциях и неформальных действиях персонала с использованием дистанционного управления каждым исполнительным механизмом. Тем самым закладывается *чрезвычайно низкий уровень автоматизации управления*. Это служит причиной гипертрофированно высокой степени участия оператора в управлении, вследствие чего наблюдается рост потерь по причине человеческого фактора и как следствие снижение эффективности и безопасности системы. В настоящей статье предлагается подход к ГУ на основе дискретно-событийных моделей автономных ком-

понентов (АК) объекта и заданных логических ограничений на их поведение. Основные концепты подхода: раздельное моделирование АК объекта, формирование требований к их совместному поведению, синтез управляющего компонента системы.

Подход к проектированию ГУ оборудованием с дискретным поведением, опирающимся на формальную модель объекта, на наш взгляд, состоит в дискретно-событийном моделировании, включая парадигму супервизорного управления в рамках теории дискретно-событийных систем (ДСС), которое активно развивается в ряде научных центров мира [1–7]. В работах А.А. Амбарцумяна [8, 9] исследованы так называемые «структурированные ДСС» в рамках триплета $[G, K, S]$: поставлена и решена задача формального синтеза «неблокирующего» супервизора S при компонентном задании объекта G и описании ограничений K на его компоненты.

В настоящей работе ставится задача разработать модель и методы формального синтеза ГУ технологическим оборудованием объекта при заданных моделях АК и требований (ограничений) к групповому управлению. Рассмотрены два типичных ограничения на формирование группового управления:

— ограничения K заданы в виде требуемой последовательности выполнения технологических операций АК;



— ограничения K заданы в виде допустимого сочетания технологических операций.

Наша модель группового управления предполагает сетевую систему, в которой модели нижнего уровня определяются функциональностью объекта, а компонент верхнего уровня, обеспечивающий групповое управление, будет ограничивать порядок выполнения операций, определяемый только назначением группы. Такое разделение позволяет предположить, что *локальные изменения в алгоритме функционирования отдельных АК будут приводить лишь к локальным изменениям управляющего компонента.*

1. БАЗОВЫЕ ПОНЯТИЯ И ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Модель ДСС, по нашему мнению, служит подходящей моделью для представления группового управления АК в виде двухуровневой структуры. Напомним, что ДСС — это триплет $[G, K, S]$, где G — объект, K — спецификация (ограничение на поведение объекта), а S — супервизор (управляющий компонент ДСС), обеспечивающий поведение объекта G в соответствии с ограничениями K . Отличительная особенность данной работы состоит в моделировании поведения объекта G и супервизора S сетями Петри. Сеть Петри S определяется через структуру и разметку: $S = (P, T, Pre, Post)$, где P — множество из n позиций, T — множество из m переходов t_i (множества конечны, не пусты и в графической форме сеть S изображается двумя типами вершин — кружками и палочками). Для всякого перехода t_i по функциям инцидентности определяются множества его входных $pre(t_i)$ и выходных $post(t_i)$ элементов. Аналогично для позиций. Эти функции расширяют и на соответствующие подмножества множеств P и T . Вектор $\mu: P \rightarrow N$ (вектор разметки сети) каждой позиции ставит в соответствие целое положительное число (при графическом представлении сети Петри разметка позиции представляется точками в кружке, которые называют метками). Число меток в позиции p_j обозначается как $\mu(p_j)$. Сеть Петри — это пара (S, μ_0) , где μ_0 — начальная разметка. В работе используются как традиционный способ, так и способ задания сети Петри матрицей инцидентности (различий) W , т. е. $S = (P, T, W, \mu_0)$. Терминология и нотация по сетям Петри заимствована из работ [4, 5].

Уточним постановку задачи группового управления: объект G задан совокупностью сетей Петри всех его АК, спецификация K определена в виде множества ограничений на совместное поведение компонентов. Далее рассмотрим два типичных ограничения:

— заданы последовательности совместного выполнения операций автономными компонентами объекта;

— заданы ограничения на сочетание технологических операций, выполняемыми различными компонентами.

Требуется синтезировать алгоритм группового управления, т. е. построить супервизор S в виде сети Петри.

Первый шаг конструирования группового управления состоит в моделировании всех компонентов объекта G сетями Петри. Как показано в работе А.А. Амбарцумяна [8], для решения задачи ГУ модель каждого компонента можно предварительно упростить путем сжатия всех состояний, не участвующих во взаимодействии с другими компонентами, в одно условно-подготовительное состояние, и таким образом получить *упрощенную* модель компонента, содержащую только состояния активности: «работа», «не работа» и соответствующие события.

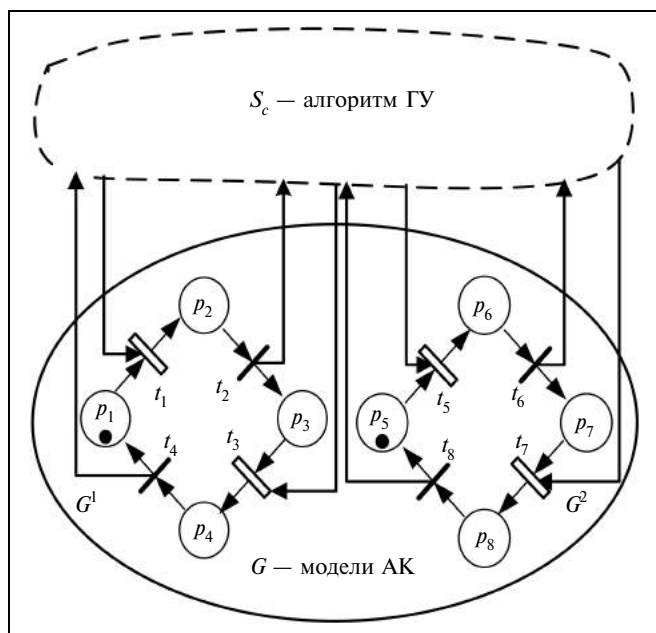
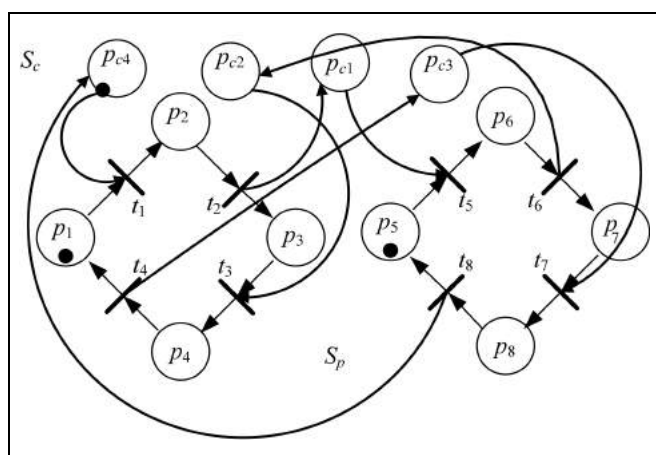
2. СИНТЕЗ АЛГОРИТМА ГУ ПРИ ЗАДАННЫХ ОГРАНИЧЕНИЯХ НА ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ ОПЕРАЦИЙ

Теоретические основы данного параграфа изложены в работах А.А. Амбарцумяна [8, 9]. Пусть ДСС — это триплет $[G, K, S]$. Объект $G = [G^1, G^2, \dots, G^n]$ — это совокупность автономных компонентов, которые будем моделировать автоматными сетями Петри. Каждая сеть Петри — это совокупность позиций, переходов, входных и выходных дуг и начальной разметки. Напомним, все переходы сети сопоставляются событиям и классифицируются на неуправляемые, ожидаемые и управляемые (последние на рисунках будем изображать палочками).

Спецификация K — это множество строк, определяющих требуемую последовательность срабатывания переходов АК. Требуется синтезировать ГУ в виде сети Петри супервизора S_c такой, чтобы объединенная сеть $S = [S_p, S_c]$ выполняла бы только те последовательности переходов, которые определены в спецификации K .

Пусть $K = [u_1, u_2, \dots]$ — это язык, заданный строкам u , где каждая u_i -я последовательность срабатывания переходов в объекте G . Например, последовательность $u = t_1, t_2, t_5, t_6, t_3, t_4, t_7, t_8, t_1$ соответствует заданному порядку открытия и закрытия компонентов (например, задвижек трубопровода), рис. 1.

Определение 1. Пара соседних переходов (t_i, t_j) в строке u называется несвязной парой (*n-парой*), если в сети S объекта не существует позиции p_k такой, что $t_i \in pre(p_k)$ и $t_j \in post(p_k)$. ♦

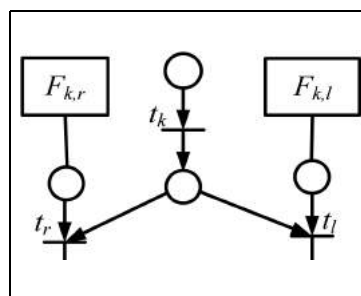
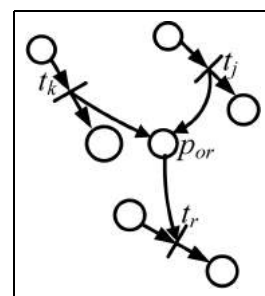

Рис. 1. Объединенная сеть $S = [S_p, S_c]$

Рис. 2. Результирующая сеть $S = [S_p, S_c]$

Вначале кратко изложим базовый метод синтеза алгоритма ГУ, когда ограничение задано одной неповторной строкой u срабатывания переходов [8]. Согласно определению 1 находим множество n -пар переходов в заданной строке u : (t_2, t_5) , (t_6, t_3) , (t_4, t_7) , (t_8, t_1) . Заметим, что второй переход в каждой n -паре является управляемым.

Далее, каждой n -паре переходов (t_i, t_j) , в сети S_c строится структура (t_i, p_c, t_j) , где p_c — позиция супервизора S_c , а переходы $t_i \in pre(p_c)$ и $t_j \in post(p_c)$. В нашем случае имеем (t_2, p_{c1}, t_5) , (t_6, p_{c2}, t_3) , (t_4, p_{c3}, t_7) , (t_8, p_{c4}, t_1) .

Результатом работы метода служит сеть S_c из четырех управляющих позиций ($p_{c1}, \dots, p_{c4}$) и соответствующих связей. Результирующая сеть, состоящая из сети S_c и исходной сети S_p объекта, представлена на рис. 2.

В сети S_c определим ее начальное состояние. Нетрудно видеть, что метка начального состояния сети S_c должна находиться в позиции p_{c4} . Как и декларировалось ранее, при проектировании алгоритма ГУ на первом уровне сохраняются алгоритмы управления автономными компонентами (сеть S_p), а на втором уровне сеть S_c , содержащая позиции $p_{c1}, \dots, p_{c4}$, реализует алгоритм ГУ. В общем случае имеет место многократность и вариантность срабатывания механизмов рассредоточенного объекта, что приводит к многообразию вариантов взаимодействия компонентов. Это отражается в типичной логической схеме последовательности строк $u: = \downarrow^{m1} t_k t_r \dots t_k t_r \downarrow^{m2} t_j t_r \dots t_j t_r \uparrow^{m1} t_{a1} \uparrow^{m2} t_{a2} \dots t_{an} \uparrow^{m2} t_{an}$, в которой возможны различные n -пары: с совпадающими первыми (например $t_k t_l$ и $t_k t_r$) или вторыми событиями ($t_k t_r$ и $t_j t_r$) (символы событий заменены символами переходов). В работе [9] разработан метод синтеза алгоритма ГУ для общего случая. Изложим основные идеи метода. Кратко метод состоит из двух этапов. На первом из них по всем строкам спецификаций выявляются n -пары и конструируется матрица запусков MF . Ее строки помечены переходами, являющимися первыми компонентами в n -парах, а столбцы помечены переходами, являющимися вторыми компонентами в n -парах. Далее $MF(j, i) = 1$, если t_j, t_i — n -пара, иначе $MF(j, i) = 0$. На втором этапе для каждой строки матрицы запусков MF формируется звено передачи управления (типовой подсети в зависимости от типа n -пар). Эти звенья преобразуются в типовые расширения матрицы $W(n \times m)$ — матрицы инцидентности сети процесса S_p . Типовые подсети в зависимости от типа n -пар изображены на рис. 3 и 4.


Рис. 3. Входная часть сети S_c для n -пар типа $t_k t_l$ и $t_k t_r$

Рис. 4. Выходная часть сети S_c для n -пар типа $t_k t_r$ и $t_j t_r$



Так на рис. 3 изображена входная часть структуры прямого взаимодействия (СПВ), т. е. структуры S_c , обеспечивающей срабатывание переходов в сети S_p в порядке, определенном n -парой с совпадающим первым событием $(t_k t_l \text{ и } t_k t_r)$. Здесь $F_{k,l}$ и $F_{k,r}$ — выходы так называемого автомата — агента F . Агент F — автомат Мура, единичное значение этих выходов зависит от предыстории события p_k и всегда ортогональны. Подробности синтеза автомата F изложены в работе [9]. На рис. 4 изображена выходная часть СПВ для n -пар с совпадающими вторыми событиями $(t_k t_r \text{ и } t_j t_r)$. В этом случае в СПВ вводится дополнительная позиция p_{or} , выполняющая функцию сборки (операция «ИЛИ»).

3. СИНТЕЗ АЛГОРИТМА ГУ ПРИ ЗАДАНЫХ ОГРАНИЧЕНИЯХ НА СОЧЕТАНИЕ СОСТОЯНИЙ

Для решения задачи ГУ при ограничениях на сочетание состояний модель АК желательно упростить путем сжатия всех состояний, не участвующих в взаимодействии АК, в одно состояние и включить в упрощенную модель только состояния, соответствующие активности («работа» — «не работа») и соответствующие события.

В качестве примера рассмотрим упрощенный вариант пекарни — комплекс, состоящий из трех печей и двух роботов, обслуживающих выгрузку выпечки, рис. 5. (Этот пример — несколько модифицированная версия примера из работы [7]).

Ограничения на функционирование комплекса: все агрегаты работают циклически; любая печь, как только выпечка готова, должна немедленно

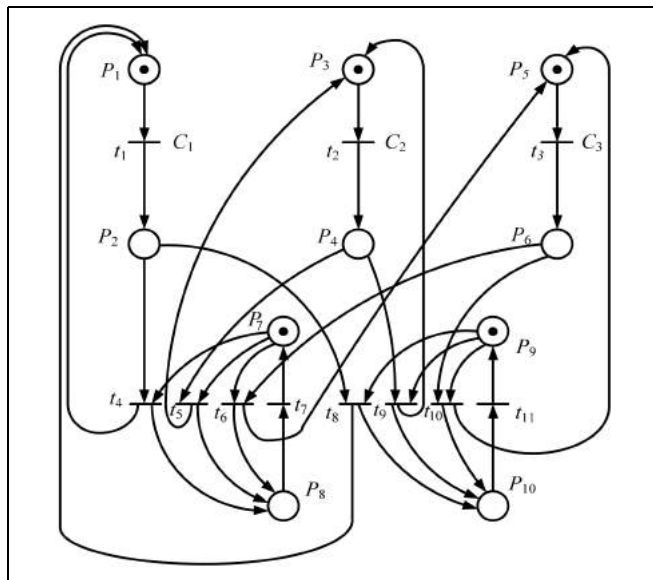


Рис. 5. Упрощенная модель пекарни

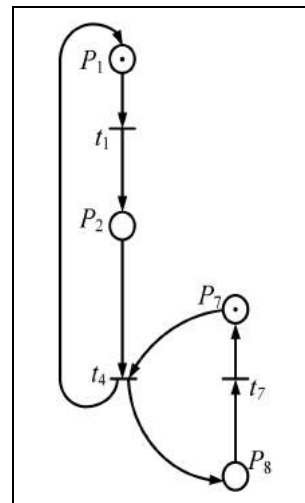


Рис. 6. Комплекс «одна печь — один робот» (П1 — Р1)

разгрузиться; печь разгружается любым свободным роботом. Работа печей представлена позициями: 1-я — p_1, p_2 , 2-я — p_3, p_4 , 3-я — p_5, p_6 ; робот 1 — p_7, p_8 робот 2 — p_9, p_{10} . Переходы t_1, t_2, t_3 управляемые и соответствуют командам (событиям) запуска соответствующей печи, переходы t_4, t_5, t_6 и t_8, t_9, t_{10} неуправляемые и выполняют функцию синхронизации работы роботов и печей.

Несмотря на простоту рассматриваемого комплекса, задача ГУ имеет достаточно общий характер. Вот одна из обобщающих формулировок задач. Дано две группы параллельно работающих агрегатов $A = \{a_i | i = \overline{1, n}\}$ и $B = \{b_j | j = \overline{1, k}\}$, $k < n$, таких, что для выполнения функционального назначения каждого $a_i \in A$ требуется его партнерство (коалиция) с любым из вспомогательных агрегатов (сервисов) $b_j \in B$. Задача группового управления заключается в динамическом (по мере готовности и запросов на группирование) формировании непересекающихся пар агрегатов, отвечающих требованиям к «партнерству».

Модель взаимодействия печей и роботов подробно рассмотрим на фрагменте комплекса «одна печь — один робот» (П1 — Р1), изображенного на рис. 6. Здесь позиция p_1 соответствует состоянию «ожидание» печи 1, переход t_1 — управляемый, его срабатывание переводит печь в позицию p_2 (загрузка и выпечка), переход t_4 — неуправляемый (ожидание выпечки), его срабатывание переводит печь в исходную позицию p_1 и одновременно переводит робот 1 в позицию p_8 (разгрузка печи). По окончании разгрузки — срабатывание перехода t_7 — робот переходит в позицию p_7 . Функционирование данного фрагмента можно описать в виде таблицы переходов (табл. 1).

Таблица 1

Таблица переходов фрагмента П1–Р1

	t_1	t_4	t_7	p_1	p_2	p_7	p_8	p_1	p_2	p_7	p_8
1	0	0	0	1	0	1	0	1	0	1	0
2	1	0	0	1	0	1	0	0	1	1	0
3	0	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0
4	0	1	0	0	1	1	0	1	0	0	1
5	0	0	0	1	0	0	1	1	0	0	1
6	0	0	1	1	0	0	1	1	0	1	0
7	0	0	0	1	0	1	0	1	0	1	0

В левой части табл. 1 (слева от двойной линии) представлено текущее состояние фрагмента, в правой части — следующее состояние. Значение перехода $t_i = 1$ означает срабатывание i -го перехода, значение позиции $p_j = 1$ означает нахождение метки в j -й позиции. Данную таблицу можно рассматривать как способ построения так называемого дерева достижимости (ДД), используемого в теории сетей Петри.

3.1. Основные понятия и определения

Рассмотрим некоторые понятия и определения, необходимые для дальнейшего построения супервизора при заданных ограничениях.

Определение 2. Состояние сети — это ее разметка $\mu: P \rightarrow N$ (вектор разметки сети S) — каждой позиции, ставящая в соответствие целое положительное число.

Определение 3. Пусть $\mu(i)$ произвольная разметка сети с $P = \{p_1, \dots, p_m\}$. Опорной функцией разметки $\mu(i) = \text{Sup}(\mu(i))$ будем называть множество имен маркированных (имеющих метку) позиций в разметке $\mu(i)$. ♦

Для краткости значение $\text{Sup}(\mu(i))$ будем называть состоянием s_i сети S (имеется в виду состояние при разметке $\mu(i)$). Например, если $P = \{p_1, \dots, p_5\}$ и $\mu(i) = [011000]$, то $s_i = p_2p_3$. Очевидно, что s_i — это иное обозначение разметки $\mu(i)$.

Определение 4. Пусть M_R — множество достижимых маркировок сети S из μ_0 , тогда $M_F \subset M_R$ называется множеством запрещенных (forbidden) состояний двух типов: состояний, противоречащих исходным ограничениям (устанавливаются разработчиком на основе технологического анализа объекта) или тупики (dead lock) и состояний, которые при возникновении неуправляемого события приводят в состояния уже отнесенные к запрещенным. ♦

В нашем примере каждый агрегат (печи и роботы) моделируются сетью Петри, содержащей всего две позиции — активная и пассивная (начальная). Позиции $p_2, p_4, p_6, p_8, p_{10}$ — активные по-

зиции, позиции p_1, p_3, p_5, p_7, p_9 — начальные. Исходя из технологического анализа функционирования объекта безусловно запрещенным состоянием сети S является состояние $s = p_2, p_4, p_6, p_8, p_{10}$, а также пять состояний, содержащих по четыре активных позиции (например, состояние $p_1, p_4, p_6, p_8, p_{10}$ и т. д.), так как технологически невозможна одновременно выгрузка печей и их загрузка-выпечка.

В работах [6, 9] конструирование супервизора (контроллера) базируется на знании запрещенных состояний сети, получаемых по полному ДД. Это сопряжено, прежде всего, с необходимостью анализа всех достижимых состояний, а также с получаемой сложностью управляющего компонента ДСС, реализующего собственно алгоритм ГУ, прямо пропорциональной числу запрещенных состояний.

Вместе с тем появлению запрещенного состояния всегда предшествует факт другого события — срабатывание некоторого управляемого перехода, допустимого для состояния предшествующего запрещенному. В настоящей работе мы исследуем именно этот феномен.

В множестве разрешенных состояний $M_A = M_R \setminus M_F$, важным подмножеством являются граничные разрешенные состояния M_{BA} (border authorized states).

Определение 5. Пусть T_c — подмножество управляемых переходов. Тогда *граничные разрешенные состояния* M_{BA} — это подмножество допустимых состояний ($M_{BA} \subseteq M_A$), из которых имеется управляемый переход ($t_j \in T_c$) в запрещенные состояния M_F . ♦

Такие переходы t_j будем называть *граничными управляемыми переходами*. В нашем примере граничными управляемыми переходами являются t_1, t_2 и t_3 .

3.2. Нахождение граничных разрешенных состояний

Обычно нахождение достижимых состояний (разрешенных и запрещенных) достигается путем построения полного ДД. Покажем, как найти множество разрешенных состояний, а также множество граничных разрешенных состояний M_{BA} без явного построения ДД. Кроме этого, разработаем процедуру нахождения логических условий с целью блокирования граничных управляемых переходов.

Обратимся к табл. 1, которая является полным описанием ДД фрагмента «печь 1 — робот 1» (П1 — Р1), ее можно упростить, оставив те строки, где имеется единичное значение какого-либо из переходов. Нетрудно видеть, что состояние p_1p_2



Таблица 2

Таблица переходов
(П1–Р1)

	p_2	p_8	p_2	p_8
t_1	0	0	1	0
t_4	1	0	0	1
t_7	0	1	0	0

Таблица 3

Таблица переходов
(П1–Р2)

	p_2	p_8	p_2	p_8
t_1	0	0	1	0
t_8	1	0	0	1
t_{11}	0	1	0	0

Таблица 4а

Таблица переходов
(П2–Р1)

	p_2	p_8	p_2	p_8
t_1	0	0	1	0
t_8	1	0	0	1
t_7	0	1	0	0

Таблица 4б

Таблица переходов
(П2–Р2)

	p_4	p_{10}	p_4	p_{10}
t_1	0	0	1	0
t_8	1	0	0	1
t_{11}	0	1	0	0

Таблица 5а

Таблица переходов
(П3–Р1)

	p_6	p_8	p_6	p_8
t_3	0	0	1	0
t_6	1	0	0	1
t_7	0	1	0	0

Таблица 5б

Таблица переходов
(П3–Р2)

	p_6	p_{10}	p_6	p_{10}
t_3	0	0	1	0
t_{10}	1	0	0	1
t_{11}	0	1	0	0

Таблица 6

Варианты параллельных процессов

П1	П2	П3
Р1	Р2	0
Р2	Р1	0
0	Р1	Р2
0	Р2	Р1
Р1	0	Р2
Р2	0	Р1

может быть либо 01, либо 10. Поэтому в результирующей таблице вместо столбцов $p_1 p_2$ можно оставить один столбец например, p_2 : если $p_2 = 0$, то это означает, что метка находится в позиции p_1 ($p_1 = 1$) и наоборот. В результате таблица переходов (ТП) имеет вид табл. 2. Аналогично получаем ТП для печи 1 и робота 2 (П1 – Р2) (табл. 3), и ТП для фрагментов П2 – Р1 и П2 – Р2 (табл. 4а и 4б) и для фрагментов П3 – Р1 и П3 – Р2 (табл. 5а и 5б).

Из табл. 2–5 видно, что в позициях $p_i, p_j = 10$ или 01 соответствующий фрагмент объекта ($П_i - Р_j$) находится в активном состоянии.

В рассматриваемом объекте возможно одновременное выполнение параллельных процессов, например, печь 1 обслуживается роботом 1, а печь 2 – роботом 2. Возможные варианты параллельных процессов представлены в табл. 6, где печь обозначена как П, робот – как Р, через «0» обозначен факт неработающей печи (одновременное обслуживание сразу трех печей двумя роботами невозможно).

Каждая строка табл. 6 соответствует некоторому варианту фрагментов, находящихся одновременно в активном состоянии. Например, в первой строке таблицы печь П1 с роботом Р1, а также печь П2 с роботом Р1 находятся в активных состояниях. При этом печь П3 должна быть «заблокирована», т. е. должна находиться в нерабочем состоянии. Из табл. 2 видно, что активные состояния фрагмента (П1 – Р1): $p_2 p_8 = 01$ и $p_2 p_8 = 10$, из табл. 4б – для фрагмента (П2 – Р2): $p_4 p_{10} = 01$ и $p_4 p_{10} = 10$. Получим всевозможные сочетания активных состояний этих фрагментов: $p_2 p_4 p_8 p_{10} = (0011, 0110, 1001, 1100)$.

Аналогично из табл. 3 и 4а имеем активные состояния двух фрагментов (П1 – Р2) и (П2 – Р1): $p_2 p_4 p_8 p_{10} = (0011, 0101, 1010, 1100)$.

Таким образом, мы получим множество граничных разрешенных состояний, в которых необходимо блокировать запуск печи П3 (путем блокирования перехода t_3): $p_2 p_4 p_8 p_{10} = (1100, 1010, 1001, 0110, 0101, 0011)$.

Аналогичным образом по табл. 4 и 5 получаем множество граничных разрешенных состояний, в которых необходимо блокировать запуск печи П1 (путем блокирования перехода t_1): $p_4 p_6 p_8 p_{10} = (1100, 1010, 1001, 0110, 0101, 0011)$.

Аналогично по таблицам 2, 3 и 5 – блокировать запуск для печи П2 (путем блокирования перехода t_2): $p_2 p_6 p_8 p_{10} = (1100, 1010, 1001, 0110, 0101, 0011)$.

3.3. Представление множества граничных допустимых состояний булевыми формулами

Сопоставим позиции p_i логическую переменную x_i . Обозначим через $f_i, i = 1, 2, 3$, булеву функцию, принимающую единичное значение на множестве граничных разрешенных состояний, в которых необходимо блокировать запуск печи $П_i$:

$$f_1 = x_4 x_6 \bar{x}_8 \bar{x}_{10} \vee x_4 \bar{x}_6 \bar{x}_8 \bar{x}_{10} \vee x_4 \bar{x}_6 \bar{x}_8 x_{10} \vee \bar{x}_4 x_6 \bar{x}_8 \bar{x}_{10} \vee \bar{x}_4 x_6 \bar{x}_8 x_{10} \vee \bar{x}_4 \bar{x}_6 \bar{x}_8 x_{10};$$

$$f_2 = x_2 x_6 \bar{x}_8 \bar{x}_{10} \vee x_2 \bar{x}_6 \bar{x}_8 \bar{x}_{10} \vee x_2 \bar{x}_6 \bar{x}_8 x_{10} \vee \bar{x}_2 x_6 \bar{x}_8 \bar{x}_{10} \vee \bar{x}_2 x_6 \bar{x}_8 x_{10} \vee \bar{x}_2 \bar{x}_6 \bar{x}_8 x_{10};$$

$$f_3 = x_2 x_4 \bar{x}_8 \bar{x}_{10} \vee x_2 \bar{x}_4 x_8 \bar{x}_{10} \vee x_2 \bar{x}_4 \bar{x}_8 x_{10} \vee \bar{x}_2 x_4 x_8 \bar{x}_{10} \vee \bar{x}_2 x_4 \bar{x}_8 x_{10} \vee \bar{x}_2 \bar{x}_4 x_8 x_{10}.$$

Определим булеву функцию-импликацию, отражающую условие «не срабатывания» соответствующего граничного перехода. Вторая компонента импликации для перехода t_i определяется как инверсия булевой переменной, соответствующей позиции $post(t_i)$:

$$F_1 = f_1 \rightarrow \bar{x}_2; \quad F_2 = f_2 \rightarrow \bar{x}_4; \quad F_3 = f_3 \rightarrow \bar{x}_6.$$

Обобщенная функция «не срабатывания» граничных переходов F равна $F = F_1 F_2 F_3$.

По известной эквивалентности ($a \rightarrow b = \bar{a} \vee b$) переходим к ДНФ (дизъюнктивной нормальной форме) каждой функции, а затем выполним конъюнкцию этих функций и представим ее в совершенной конъюнктивной нормальной форме:

$$\begin{aligned} & (\bar{x}_2 \vee x_4 \vee x_6 \vee \bar{x}_8 \vee \bar{x}_{10})(x_2 \vee x_4 \vee \bar{x}_6 \vee \bar{x}_8 \vee \bar{x}_{10}) \cdot \\ & \cdot (\bar{x}_2 \vee x_4 \vee \bar{x}_6 \vee \bar{x}_8 \vee x_{10})(\bar{x}_2 \vee x_4 \vee \bar{x}_6 \vee x_8 \vee \bar{x}_{10}) \cdot \\ & \cdot (x_2 \vee \bar{x}_4 \vee \bar{x}_6 \vee x_8 \vee \bar{x}_{10})(x_2 \vee \bar{x}_4 \vee \bar{x}_6 \vee \bar{x}_8 \vee x_{10}) \cdot \\ & \cdot (\bar{x}_2 \vee \bar{x}_4 \vee \bar{x}_6 \vee x_8 \vee x_{10})(\bar{x}_2 \vee x_4 \vee x_6 \vee \bar{x}_8 \vee \bar{x}_{10}) \cdot \\ & \cdot (x_2 \vee \bar{x}_4 \vee x_6 \vee \bar{x}_8 \vee \bar{x}_{10}) \cdot \\ & \cdot (\bar{x}_2 \vee \bar{x}_4 \vee x_6 \vee x_8 \vee \bar{x}_{10}) = F. \end{aligned} \quad (10)$$

3.4. Переход к линейным ограничениям

Сделаем несколько замечаний по поводу логических преобразований и обобщенной функции «не срабатывания» граничных переходов F .

- При выполнении перехода к ДНФ автоматически произошел переход к полностью определенным булевым функциям несрабатывания, поэтому в функцию F вошли и переходы из запрещенных состояний.
- Если $F \equiv 0$, то условия отдельных переходов несовместимы и не существует ни одного общего ограничения. Однако возможны всевозможные допустимые комбинации из отдельных функций.
- Соотношение нулей и единиц в корнях уравнения (1) показывает на соотношение меток в позициях сети, и, следовательно, может быть использовано для поиска линейных ограничений.

Для нашего примера функция F тождественно не равна нулю, следовательно, можно найти одно общее свойство, соответствующее ограничению на соотношение меток, и контроллер (супервизор) нашего примера будет содержать одну позицию, обозначим ее p_c . В соответствии с первым из сле-

данных замечаний, не все корни уравнения (1) являются приемлемыми решениями. Прежде всего, среди корней нет наборов, содержащих три единицы. Поскольку в наши ограничения входит требование, что всегда в один и тот же момент времени срабатывает один переход (что означает включение в работу одного агрегата), то решения с четырьмя и более единицами физически недостижимы. Поэтому приемлемыми решениями являются наборы значений $x_2 x_4 x_6 x_8 x_{10}$ для уравнения (1), у которых не более двух единичных значений переменных. Отсюда следует ограничение, задаваемое линейным неравенством на суммарное число меток в позициях $p_2 p_4 p_6 p_8 p_{10}$:

$$\mu(p_2) + \mu(p_4) + \mu(p_6) + \mu(p_8) + \mu(p_{10}) \leq 2. \quad (2)$$

3.5. Синтез контроллера (супервизора)

Задачи синтеза состоят в:

- определении числа позиций в сети супервизора S_c ;
- нахождении матрицы инцидентности W_c сети S_c ;
- определении исходного состояния сети $S_c(\mu_{co})$.

Применим известную методику синтеза контроллера по линейным ограничениям, применяемую в школе P.J. Antsaklis [6].

Как было показано ранее, сеть S_c в нашем примере содержит одну позицию — p_c , т. е. $n_c = 1$.

Из работы [6] следует, что

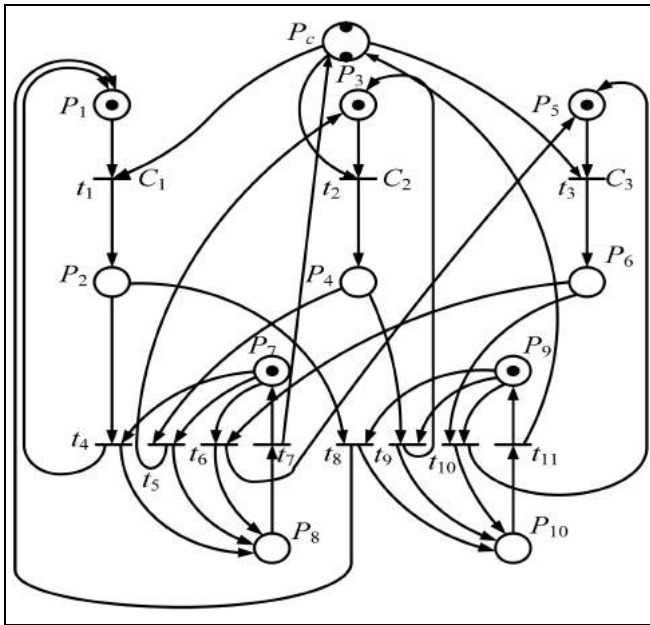
$$W_c = -L \times W_p, \quad (3)$$

где W_p — матрица инцидентности сети S_p . Матрица L размерности ($n_c \times n_p$), в которой i -й разряд строки j содержит 1, если позиция p_i входит в ограничение. В нашем примере $n_c = 1$, $n_p = 10$, и в соответствии с формулой (2) матрица L имеет вид

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

Матрица W_p строится по исходной сети S_p и имеет вид

	t_1	t_2	t_3	t_4	t_5	t_6	t_7	t_8	t_9	t_{10}	t_{11}
1	-1	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0
2	1	0	0	-1	0	0	0	-1	0	0	0
3	0	-1	0	0	1	0	0	0	1	0	0
4	0	1	0	0	-1	0	0	0	-1	0	0
5	0	0	-1	0	0	1	0	0	0	1	0
6	0	0	1	0	0	-1	0	0	0	-1	0

Рис. 7. Объединенная сеть $S = S_p \cup S_c$

В результате вычисления по формуле (3) получим матрицу W_c :

t	t_1	t_2	t_3	t_4	t_5	t_6	t_7	t_8	t_9	t_{10}	t_{11}
P_c	-1	-1	-1	0	0	0	1	0	0	0	1

Исходное состояние μ_{c0} сети S_c определим по формуле $\mu_{p0} L + \mu_{c0} = b$, где $b = 2$ из формулы (4), $\mu_{p0} = 1010101010$.

Таким образом, $\mu_{c0} = 2 - L [1110001100] = 2$.

Формируем объединенную управляемую сеть $S = S_p \cup S_c$ (рис. 7).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В смысле вклада данной работы в теорию дискретно-событийных систем, заметим, что предложенная техника синтеза группового управления по логическим функциям перехода оригинальна и содержит, на наш взгляд, значительный потенциал в плане развития формализмов в определении линейных ограничений по спецификации допустимых переходов.

В прикладном плане, в данной работе предложена модель и методы синтеза группового управления в рамках дискретно-событийной модели на сетях Петри. Принципиальные отличия группового управления в структуре этой модели от традиционной архитектуры реализации группового управления за-

ключаются в возможности формально синтезировать алгоритм группового управления на базе более простых моделей объекта $G = [G^1, G^2, \dots, G^n]$ как совокупности автономных компонентов и спецификации K в виде ограничений; а также в возможности конструирования двухуровневой архитектуры группового управления на базе модульности, определенной в модели. На первом уровне сохраняются алгоритмы управления автономными компонентами, соответствующие модулям $G^1, G^2, \dots, G^n$, а на втором уровне — собственно алгоритм группового управления, формально синтезированный по дискретно-событийной модели объекта G и спецификации K .

ЛИТЕРАТУРА

1. Ramadge J.G., Wonham W. M. Supervisory control of a class of discrete event processes // SIAM Journal of Control and Optimization. — 1987. — N 25. — P. 206—230.
2. Cassandras C.G., Lafortune S. Introduction to discrete event systems. — Dordrecht: Kluwer, 1999.
3. Holloway L.E., Krogh B.H. Synthesis of feedback logic for a class of controlled Petri nets // IEEE Trans. Autom. Control. — 1990. — AC-35. — N 5. — P. 514—523.
4. Giua A., DiCesare F., Silva M. Generalized mutual exclusion constraints on nets with uncontrollable transitions // Proc. IEEE Conf. Syst. Man, Cybern. — 1992. — P. 974—979.
5. Giua A., and Seatzu C. Supervisory control of railway networks with Petri nets // Proc. IEEE Conf. Decis. Contr. — 2001. — P. 5004—5009.
6. Yamalidou K., Moody J O., Lemmon M.D., Antsaklis P.J. Feedback control of Petri nets based on place invariants // IEEE Trans. on Robotics and Automation. — 1996. — N 32 (1). — P. 15—28.
7. Dideban A., Alla H. Reduction of Constraints for Controller Synthesis based on Safe Petri Nets // Automatica. — 2008. — N 44 (7). — P. 1697—1706.
8. Амбарцумян А.А. Моделирование и синтез супервизорного управления на сетях Петри для рассредоточенных объектов. Ч. 1. Механизм взаимодействия и базовый метод // Автоматика и телемеханика. — 2011. — № 8. — С. 151—169.
9. Амбарцумян А.А. Моделирование и синтез супервизорного управления на сетях Петри для рассредоточенных объектов. Ч. 2. Метод синтеза супервизора по множеству последовательностей общего вида // Автоматика и телемеханика. — 2011. — № 9. — С. 173—189.

Статья представлена к публикации членом редколлегии О.П. Кузнецовым.

Амбарцумян Александр Артемович — д-р техн. наук, зав. лабораторией,

Потехин Анатолий Иванович — канд. техн. наук, вед. науч. сотрудник, ☎ (495) 334-90-29, ✉ apot@ipu.ru,

Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, г. Москва.

СВОЙСТВА ДОПУСТИМЫХ И ОПТИМАЛЬНЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТ НА ОДНОЙ МАШИНЕ

Ю.А. Зак

Рассмотрены свойства допустимых и оптимальных последовательностей выполнения заданий на одной машине в условиях наличия ограничений на сроки начала и завершения выполнения работ. Предложены методы решения сформулированной задачи последовательными алгоритмами оптимизации на основе преобразования расписания, допускающего разрывы в выполнении работ в оптимальную последовательность, в которой такие разрывы не допускаются. Приведены числовые примеры.

Ключевые слова: допустимые и оптимальные последовательности выполнения заданий, ограничения на времена выполнения работ, разрывы во времени выполнения работ, последовательные алгоритмы оптимизации.

ВВЕДЕНИЕ

Известно большое число публикаций, в которых рассматриваются постановки и эффективные методы решения «one-machine sequencing problem» — определения оптимальной последовательности выполнения n работ (заданий) на одной машине в условиях, когда заданы времена выполнения работ t_i , ограничения на начальные сроки их выполнения a_i , а также заключительные времена g_i , необходимые для завершения выполнения каждой работы после окончания выполнения ее на данной машине. Все значения $t_i, a_i, g_i, i = 1, \dots, n$, — целые числа. Одновременно на машине не может выполняться более одной работы. Необходимо найти оптимальную последовательность выполнения всех работ на этой машине, а также времена начала x_i и завершения σ_i выполнения каждой из них. В качестве критерия оптимальности рассматривается минимизация срока g_i завершения наиболее поздней из всех работ с учетом добавления заключительного времени обработки каждой из них на других машинах.

Для сформулированной, как показано в работах [1, 2], NP-сложной задачи предложены достаточно эффективные алгоритмы решения (см., например, работы [1–5]), позволяющие находить точные и

приближенные решения практических задач достаточно большой размерности. Эффективные алгоритмы точного решения задачи с помощью Schrage-algorithms и их модификаций впервые были предложены в работе [1] и развиты в работах [3–5]. Эти алгоритмы наиболее часто применяются в настоящее время для получения точных решений практических задач большой размерности.

Однако для практических приложений календарного планирования производства, организации обслуживания и вычислительного процесса чрезвычайно актуальна постановка задачи, в которой учитываются ограничения на сроки завершения каждого из заданий $d_i, i = 1, \dots, n$. Такая постановка задачи важна как в условиях, когда допускаются разрывы во времени выполнения отдельных работ, так и в условиях, когда ни одна из работ не может прерываться в процессе своего выполнения. В условиях ограничений на сроки завершения отдельных работ даже задача поиска допустимой последовательности их выполнения, как и известная «One-machine sequencing problem» [1–6], также относится к классу NP-сложных задач. В условиях этих дополнительных ограничений автором были предложены алгоритмы решения сформулированных задач [6, 7], позволяющие с таким же объемом вычислений, как и в работе [1], решать такие задачи при отсутствии ограничений. Поиск допустимых и оптимальных расписаний осуществляется



последовательными алгоритмами оптимизации в процессе анализа некоторого множества последовательностей, не допускающих разрывов во времени выполнения заданий.

В данной работе предлагается другой подход, основанный на преобразовании оптимальной и (или) допустимой последовательности, в которой допускаются разрывы во времени выполнения отдельных работ в допустимое и оптимальное расписание, в котором такие прерывания устранены. К преимуществам таких методов следует отнести возможность как на начальном, так и на каждом этапе решения установить факт несовместности заданной системы ограничений и выявить подмножество заданий, временной ресурс выполнения которых должен быть расширен. Оптимальное решение задачи как при наличии ограничений на времена выполнения работ, так и при их отсутствии может быть получено предлагаемым методом с эффективностью, сравнимой с эффективностью упомянутых методов [1].

2. ПОСТАНОВКА И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФОРМУЛИРОВКА ЗАДАЧИ

Пусть $\bar{I}$ — подмножество работ, которые должны быть выполнены на одной машине. Заданы времена выполнения операций t_i , $i \in \bar{I}$, ограничения на начальные и конечные сроки их выполнения $x_i \geq a_i$, $\sigma_i \leq d_i$, а также заключительные времена g_i , необходимые для завершения выполнения каждой работы после окончания выполнения ее на данной машине. Ни одна из операций не может прерываться в процессе ее выполнения, и одновременно на машине не может выполняться более одной операции. Необходимо построить расписание выполнения работ, удовлетворяющее всем сформулированным требованиям и минимизирующее время завершения выполнения наиболее поздней из всех работ с учетом добавления заключительного времени g_i обработки каждого из них на других машинах.

Следовательно, необходимо при выполнении условий, что ни одна из работ не может быть прервана в процессе ее выполнения, найти решение следующей экстремальной задачи:

$$a_i \leq x_i, \quad d_i \geq x_i + t_i, \quad \sigma_i - x_i = t_i, \quad i = 1, \dots, n; \quad (1)$$

$$x_i + t_i + 1 \leq x_j \text{ или } x_j + t_j + 1 \leq x_i, \\ i \neq j, \quad i = 1, \dots, n; \quad (2)$$

$$F = \max_i (\sigma_i + g_i) \rightarrow \min. \quad (3)$$

Без ограничения общности будем полагать, что для всех заданий выполняются условия $a_i + t_i \leq d_i$, $i \in \bar{I}$.

Даже при отсутствии условий непрерывности выполнения каждого из заданий из-за наличия альтернативных ограничений (2), которые могут быть математически строго сформулированы только введением булевых переменных, задача поиска допустимого расписания носит комбинаторный характер и требует специальных методов решения.

3. СВОЙСТВА ДОПУСТИМЫХ И ОПТИМАЛЬНЫХ РАСПИСАНИЙ

Пусть на каком-то s -м этапе решения, $s = 0, 1, 2, \dots, S$, определено некоторое значение критерия оптимальности (3), равное F^s . Минимальная длина расписания не может быть меньше величины

$$F^0 = \max \left\{ \left(\min_{i \in \bar{I}} a_i + \sum_{i \in \bar{I}} t_i + \min_{i \in \bar{I}} g_i \right); \right. \\ \left. \max_{i \in \bar{I}} (a_i + t_i + g_i) \right\}. \quad (4)$$

Определив $F^s \geq F^0$, $s = 1, 2, \dots, S$, обозначим

$$D_i = \begin{cases} d_i & \text{если } d_i + g_i \leq F^s, \\ F^s - g_i & \text{если } d_i + g_i > F^s. \end{cases} \quad (5)$$

Обозначим θ_i^s и τ_i^s — соответственно наиболее ранние и допустимые наиболее поздние сроки начала выполнения i -й работы на машине, обеспечивающие выполнение всех ограничений задачи (1), (2) и значение критерия оптимальности (3) не более величины F^s ,

$$\theta_i^s \geq a_i, \quad \tau_i^s \leq D_i - t_i + 1, \quad (6)$$

где $\theta_i^s \leq x_i^s \leq \tau_i^s$, $i = 1, \dots, n$.

Если в результате преобразований значений θ_i^s и τ_i^s для какой-либо из работ строящейся последовательности будет выполняться неравенство $\theta_i^s > \tau_i^s$, то не может быть построена последовательность, удовлетворяющая всем ограничениям на сроки выполнения работ, со значением критерия оптимальности меньшим или равным величине F^s .

Утверждение 1. Если для каких-либо двух работ O_i и O_j , выполняемых на машине, справедлива следующая система неравенств

$$\theta_i^s + t_i + 1 \geq \tau_j^s, \quad \theta_j^s + t_j + 1 \geq \tau_i^s, \quad (7)$$

то не существует допустимых расписаний выполнения всех работ на машине за время, меньшее или равное F^s .

Утверждение 2. Если для двух работ O_i и O_j , выполняемых на машине, справедливо хотя бы одно из пары условий

$$\tau_j^s < \theta_i^s, \quad \theta_j^s + t_j + 1 \geq \tau_i^s, \quad (8)$$

то в допустимых расписаниях, удовлетворяющих системе ограничений (1), (2) и $F \leq F^s$, работа O_i должна выполняться раньше работы O_j , т. е. $x_i^s + t_i^s + 1 \leq x_j^s$.

Следствия утверждения 2.

$$\begin{aligned} \bar{\theta}_j^s &= \max\{(\theta_i^s + t_i^s + 1); \theta_j^s\}, \\ \bar{\tau}_i^s &= \min\{(\theta_j^s - t_j^s); \tau_i^s\}. \end{aligned} \quad (9)$$

Здесь $\bar{\theta}_j^s$ и $\bar{\tau}_i^s$ — скорректированные допустимые наиболее ранние и поздние сроки начала выполнения соответственно i -й и j -й работы на s -й итерации решения задачи.

Утверждение 3. Если для нескольких работ O_p , $p = 1, \dots, P$, выполняемых на машине, установлено, что они стоят в последовательности их выполнения перед работой O_i , т. е. выполняется условие $x_p^s + t_p^s + 1 \leq x_i^s$, $p = 1, \dots, P$, то справедливы соотношения

$$\begin{aligned} \bar{\theta}_i^s &= \min\left\{\theta_i^s; \left(\max_{1 \leq p \leq P} \theta_p^s + t_p^s + 1\right); \right. \\ &\quad \left. \left(\min_{1 \leq p \leq P} \theta_p^s + \sum_{p=1}^P t_p^s + P\right)\right\}. \quad \diamond \end{aligned} \quad (10)$$

Доказательство следует из условий (7)–(9), а также из того, что время начала выполнения работы O_i не может быть ранее времени завершения всех работ O_p , $p = 1, \dots, P$, предшествующих ей, плюс допустимый наиболее ранний срок начала выполнения работ этого подмножества.

Разобьем все множество выполняемых работ $\bar{I}$ на два подмножества $\bar{I}_1$ и $\bar{I}_2$ — соответственно подмножества работ, для которых заданы и не заданы граничные сроки их завершения выполнения, $\bar{I}_1 \cup \bar{I}_2 = \bar{I}$, $\bar{I}_1 \cap \bar{I}_2 = \emptyset$.

При установленном значении максимальной длины расписания F^s в условиях заданной системы ограничений на сроки выполнения заданий рассмотрим следующий алгоритм вычислений.

Алгоритм 1(s). Значения счетчиков z_{A1} и z_{B1} положим равными нулю.

Шаг 1. Для каждой из двух работ O_i и O_j , выполняемых на машине, проверяется выполнение условий (7) и (8). Если выполняется хотя бы одно

из этих неравенств, то устанавливаем значения $z_{B1} := 2$ и $z_{A1} := 2$, и

$$\begin{aligned} \Delta^s &:= \min(\theta_i^s - \tau_i^s), \text{ либо} \\ \Delta^s &:= \min\{(\theta_i^s + t_i^s + 1 - \tau_j^s); (\theta_j^s + t_j^s + 1 - \tau_i^s)\}. \end{aligned} \quad (11)$$

Если выполняемая работа принадлежит подмножеству работ $\bar{I}_1$, то система ограничений задачи является несовместной, и необходимо расширить временной ресурс, выделенный для выполнения соответствующей работы на величину, не меньшую чем значение Δ^s , и алгоритм завершает работу. Если $i \in \bar{I}_2$ или $j \in \bar{I}_2$, то выполним необходимые вычисления, предусмотренные в шаге 5. В противном случае переходим к шагу 2.

Шаг 2. Рассматриваем все пары работ, выполняемых на машине. Если для какой-то пары работ O_i и O_j выполняются условия (8), то полагаем $z_{A1} := 1$, $z_{B1} := 1$, корректируем соответствующие граничные значения времен начала выполнения работ, выполнив преобразования (9). Переходим к шагу 3.

Шаг 3. Если для нескольких работ O_p , $p = 1, \dots, P$, выполняемых на машине, установлено, что они должны выполняться раньше работы O_i , т. е.

$x_p^s + t_p^s + 1 \leq x_i^s$, $p = 1, \dots, P$, то полагаем $z_{A1} := 1$ и $z_{B1} := 1$ и выполняем пересчет граничных значений времен начала выполнения этих работ по формулам (11), для i -й работы рассчитываем значение $\bar{\theta}_i^s$ по формуле (10). Переходим к шагу 4.

Шаг 4. Если $z_{A1} := 0$, то алгоритм выполнения преобразований завершает свою работу. Если $z_{A1} := 1$, то полагаем $z_{A1} := 0$, и переходим к выполнению шага 1.

Шаг 5. Положив $F^{s+1} = F^s + \Delta^s$, $s := (s + 1)$, выполняем пересчет значений θ_i^s и τ_i^s по формулам (5) и (7), после чего снова выполняем алгоритм 1(s).

Упорядочим все работы по неубыванию значений D_i в последовательность

$$\begin{aligned} \tilde{U} &= \{u_1, u_2, \dots, u_p, \dots, u_n | u_p \in \bar{I}; D_{u_h} \leq D_{u_{h+1}}, \\ &\quad p = 1, \dots, (n - 1)\}. \end{aligned} \quad (12)$$

Утверждение 4. Если хотя бы для одной из работ $u_p \in \tilde{U}$, упорядоченных в последовательности (12), несправедливы условия

$$\max\left(\min_{1 \leq l \leq p-1} q_{u_l} + \sum_{l=1}^{p-1} t_{u_l}; a_{u_p}\right) + t_{u_p} \leq D_{u_p},$$

$p = 1, \dots, n,$



то не существует расписаний, удовлетворяющих системе ограничений задачи. ♦

Доказательство утверждения 4 приведено в работах [6, 7].

4. АЛГОРИТМЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ

Рассмотрим следующий алгоритм построения расписания выполнения работ на одной машине, допускающий прерывание работ в процессе их выполнения (обозначим такое расписание Ψ_1), т. е. построения некоторой последовательности выполнения работ $\tilde{W}(\Psi_1)$, а также определения времен начала и завершения выполнения каждой операции этой последовательности.

Алгоритм 2(s). Обозначим $Q_\xi = |q_\xi(u_p)|$, $p = 1, \dots, n$, количества временных интервалов в момент времени $\xi = 1, \dots, T$, необходимых для завершения выполнения каждой операции. Все операции упорядочены в последовательности (12). В начале работы алгоритма положим $q_\xi(u_p) = t_{u_p}$, $p = 1, \dots, n$. В каждый из временных интервалов $\xi = 1, \dots, T$ выполняем работу u_p , выбираемую из условий

$$u_p = \arg \min_{1 \leq p \leq n} \{D_{u_p} | u_p \in \tilde{U}, \theta_{u_p} \leq \xi, q_\xi(u_p) > 0\}. \quad (13)$$

Если таких работ несколько, то среди них выбираем работу с наименьшим индексом p . Для выбранной операции u_p полагаем $q_\xi(u_p) := q_\xi(u_p) - 1$. Если работ, удовлетворяющих условиям (13) не существует, то в данном ξ -м временном интервале не выполняется ни одна из множества работ. Полагаем $\xi = (\xi + 1)$ и переходим к следующему временному интервалу ξ .

Алгоритм завершает свою работу в некоторый момент времени T , когда выполняются условия $q_T(u_p) = 0$, $u_p \in \tilde{U}$, $p = 1, 2, \dots, n$.

Обозначим $N \geq n$ — суммарное число отрезков времен полного и частичного выполнения различных работ в расписании Ψ_1 .

Пусть построено допустимое расписание выполнения заданий Ψ_1 , т. е. последовательность выполнения операций $\tilde{W}(\Psi_1)$. Обозначим $\bar{\sigma}_i \leq \sigma_i$ — времена завершения выполнения работ в последовательности $\tilde{W}(\Psi_1)$.

Рассмотрим некоторые свойства преобразования этого расписания в расписание работ, не допускающее прерываний времени их выполнения (расписание Ψ_2).

Показано [6], что для последовательности выполнения работ на одной машине $\tilde{U}$, временах вы-

полнения этих работ t_{u_p} и наиболее ранних сроках начала выполнения работ θ_{u_p} , а также в условиях недопустимости прерываний времени выполнения работ справедливо утверждение 5.

Утверждение 5. Если выполняется хотя бы одно из системы неравенств

$$\max \left[\min_{u_p \in \tilde{I}_1} \theta_{u_p} + \sum_{p=1}^l t_{u_p}; \theta_{u_{p+1}} \right] + \theta_{u_{p+1}} > D_{u_p} + 1, \\ p = 1, 2, \dots, (N-1),$$

то не существует допустимых расписаний выполнения работ на этой машине, удовлетворяющих всей системе ограничений на сроки начала и завершения их выполнения. ♦

Пусть некоторая работа j в последовательности $\tilde{W}(\Psi_1)$ начинает выполняться в момент времени ξ и выполняется в течение L_j , $l_j = 1, \dots, L_j$, различных отрезков времени. Обозначим соответственно:

x_j^l, σ_j^l, t_j^l — время начала, окончания и длительности выполнения этой работы на l -м отрезке времени;

$\tilde{\Omega}(j)$ — подмножество работ, выполняемых в $\tilde{W}(\Psi_1)$ в промежутках времени

$$\gamma \in [\sigma_j^1 + 1, \sigma_j^{L_j} = \bar{\sigma}_j], \text{ т. е.}$$

$$\tilde{\Omega}(j) = \{i \in \tilde{W}(\Psi_1) | \sigma_j^1 < x_i^1 < \sigma_j^{L_j} = \bar{\sigma}_j\}; \quad (14)$$

τ_p, x_i — допустимые наиболее поздние и фактические сроки начала выполнения подмножества работ $i \in \tilde{\Omega}(j)$ в расписании Ψ_1 .

Как следствие утверждения 5 может быть сформулировано

Утверждение 6. (1) Если в последовательности $\tilde{W}(\Psi_1)$ хотя бы для одной из работ $i \in \tilde{I}_1$ выполняется неравенство $\bar{\sigma}_i > D_p$, то не существует допустимых расписаний выполнения работ на машине, удовлетворяющей всей системе ограничений при установленной длине расписания F^s .

(2) Если в последовательности $\tilde{W}(\Psi_1)$ хотя бы для одной из работ $i \in \tilde{I}_1$ выполняется неравенство $\bar{\sigma}_i > D_p$, то система ограничений задачи является несовместной. ♦

Доказательство следует из утверждения 4, так как допустимость прерывания выполнения заданий ослабляет систему ограничений утверждения 4.

В качестве другого способа доказательства утверждения 6 может быть рассмотрена возможность

увеличения числа выполняемых работ. Представим каждую j -ю работу расписания $\tilde{W}(\Psi_1)$, которая выполняется с L_j прерываниями, длительностью каждого отрезка выполнения t_j^l и началом x_j^l , $l = 1, \dots, L_j$, в виде L_j различных операций со значениями $\theta_j^l = \theta_j$, $d_j^l = d_j$ и временем выполнения, равным t_j^l . Тогда доказательство утверждения 6 полностью совпадает с доказательством утверждений 4 и 5.

Утверждение 7. Если выполняется система неравенств

$$x_i + t_j - t_j^1 \leq \tau_i \quad \forall i \in \tilde{\Omega}(j),$$

то увеличение длительности интервала выполнения j -й работы до величины t_j и выполнение этой операции до конца без прерываний не приведет к нарушению ограничений на сроки выполнения всех других работ расписания Ψ_1 . ♦

Обозначим $\tilde{U}_1(\xi)$ и $\tilde{U}_2(\xi)$ соответственно подмножество работ последовательности $\tilde{U}$, выполнение которых в момент времени ξ завершено или требуется их завершение, $\tilde{U}_1(\xi) \cup \tilde{U}_2(\xi) = \tilde{U}$, $\tilde{U}_1(\xi) \cap \tilde{U}_2(\xi) = \emptyset$. Число членов в последовательности $\tilde{U}_1(\xi)$ равно $n_1(\xi)$, и они, как и в последовательности $\tilde{U}$, упорядочены по возрастанию значений D_{u_p} . Пусть в момент времени ξ в анализируемой последовательности назначено начало первого отрезка времени выполнения работы j , и длительность этого отрезка равна t_j^1 временным интервалам. Определим

$$\bar{\theta}_i = \theta_i \quad \forall i \in \{\tilde{U}_2(\xi)/j\}; \quad \bar{\theta}_j = \theta_j + t_j^1 + 1.$$

Рассмотрим алгоритм преобразования расписания Ψ_1 в допустимое расписание Ψ_2 , не допускающее разрывов во времени выполнения работ. Алгоритм решения задачи представляет собой ветвящийся процесс последовательного преобразования расписания Ψ_1 в различные расписания $\Psi_1^1(\xi)$ и $\Psi_1^2(\xi)$, каждое из которых некоторым образом устраняет процесс прерывания выполнения первой претерпевающей разрывы работы, начало выполнения которой было в момент времени ξ . После этого анализируется возможность выполнения всех ограничений задачи и исключаются недопустимые продолжения. Процесс решения завершается, если на каком-то ξ -м временном интервале

получено расписание, удовлетворяющее всем ограничениям задачи и не содержащее разрывов во времени выполнения работ.

Каждое преобразованное расписание $\Psi_1^1(\xi)$ или $\Psi_1^2(\xi)$ определяется временем ξ начала выполнения работы, разрыв во времени выполнения которой является первым среди всех работ этой последовательности, индексом этой работы $j \in \Psi_1^B(\xi)$, временем начала $\xi = \{x_j | j \in \Psi_1^B(\xi)\}$ и длительности ее выполнения на данном отрезке $\{t_j^1 | j \in \Psi_1^B(\xi)\}$, а также некоторым признаком $\alpha[\Psi_1^B(\xi)]$; $\alpha = -2$, если данная подпоследовательность не содержит допустимых продолжений, удовлетворяющих системе ограничений на времена выполнения работ; $\alpha = -1$, если не существует допустимых продолжений при значении критерия оптимальности, меньшем или равном F^s , и это значение должно быть увеличено; $\alpha = 1$, если не установлен факт, что не может быть построено расписание, не содержащее разрывов во времени выполнения работ, со значением критерия оптимальности, меньшим или равным F^s ; $\alpha = 0$, если рассмотрены все возможные перспективные преобразования данного расписания; $\alpha = 0,5$, если рассмотрен только один из двух вариантов устранения прерывания выполнения этой работы. Обозначим $\tilde{I}_1[\Psi_1^B(\xi)]$, $\tilde{I}_2[\Psi_1^B(\xi)]$ соответственно подмножество работ в расписании $\Psi_1^B(\xi)$, выполняемых без прерывания до момента времени ξ , и работ, для которых $x_j \geq \xi$, т. е. выполняемых после времени ξ ,

$$\tilde{I}_1[\Psi_1^B(\xi)] \cup \tilde{I}_2[\Psi_1^B(\xi)] = \tilde{I},$$

$$\tilde{I}_1[\Psi_1^B(\xi)] \cap \tilde{I}_2[\Psi_1^B(\xi)] = \emptyset.$$

Алгоритм 3 (s). Шаг 0. В расписании Ψ_1 находим первую работу j , у которой $t_j^1 < t_j$. Если таких работ не существует, то $\Psi_2 = \Psi_1$, и получено решение задачи. В противном случае, полагаем $\xi = x_j^1$. Определяем

$$\Psi_1^1(\xi) = \Psi_1, \quad j \in \Psi_1^1(\xi), \quad \{t_j^1 | j \in \Psi_1^1(\xi)\} = t_j^1, \\ \alpha[\Psi_1^1(\xi)] = 1.$$

Определим подмножества работ $\tilde{I}_1[\Psi_1^B(\xi)]$ и $\tilde{I}_2[\Psi_1^B(\xi)]$. Переходим к шагу 1.



Шаг 1. Находим расписание $\Psi_1^\beta(\omega)$, удовлетворяющее требованиям

$$\Psi_1^\beta(\omega) = \{ \max_{\beta=1,2} \max_{\xi} \{ \Psi_1^\beta(\xi) | \Psi_1^\beta(\xi) \leq 1 \} \}.$$

Если таких расписаний не существует, то переходим к шагу 2. В противном случае — к шагу 3.

Пусть j — номер первой работы в последовательности $\Psi_1^\beta(\omega)$, которая прерывается в процессе ее выполнения.

Шаг 2. Если среди всех расписаний $\Psi_1^\beta(\xi)$, $\beta = 1, 2$, найдется хотя бы одно, для которого признак $\{\alpha[\Psi_1^\beta(\xi)] = 1\}$, то это расписание принимается в качестве Ψ_2 , т. е. является решением задачи. Если таких расписаний не существует, то задача не содержит допустимых решений. Как в первом, так и во втором случаях, алгоритм завершает свою работу, и переходим к шагу 6.

Шаг 3. Преобразуем расписание $\Psi_1^\beta(\omega)$ в расписание $\Psi_1^1(\xi)$, устранив прерывания в выполнении работы $j \in \Psi_1^\beta(\omega)$, для которой $x_j^1 = \omega$, определив

$$\{x_j | j \in \Psi_1^1(\xi)\} = \omega, \quad \{\sigma_j | j \in \Psi_1^1(\xi)\} = \omega + t_j, \\ \xi = \omega + t_j + 1,$$

$$\bar{J}_1[\Psi_1^1(\xi)] = \bar{J}_1[\Psi_1^\beta(\xi)] \cup j,$$

$$\bar{J}_2[\Psi_1^1(\xi)] = \bar{J}_2[\Psi_1^\beta(\xi)]/j.$$

Если $\bar{J}_2[\Psi_1^1(\xi)] = \emptyset$, то определяем подмножество работ $\{\tilde{\Omega}(j) | \Psi_1^\beta(\omega)\}$ в соответствии с выражением (14), где $\tilde{W}_k(\Psi_1) = \Psi_1^\beta(\omega)$. Для всех работ $i \in \{\tilde{\Omega}(j) | \Psi_1^\beta(\omega)\}$ значения x_i^1 и σ_i^1 увеличиваем на $\Delta_j = (t_j - t_j^1)$, т. е. $x_i^1 = x_i^1 + \Delta_j$, $\sigma_i^1 = \sigma_i^1 + \Delta_j$.

Если справедлива система неравенств

$$\sigma_j^1 \leq D_i \forall i \in \{\tilde{\Omega}(j) | \Psi_1^\beta(\omega)\},$$

то получено решение задачи, и алгоритм завершает свою работу. Если $\bar{J}_2[\Psi_1^1(\xi)] \neq \emptyset$, то положив $\omega = \xi$, переходим к шагу 5.

Шаг 4. Если $\alpha[\Psi_1^\beta(\xi)] = 0,5$, преобразуем расписание $\Psi_1^\beta(\omega)$ в расписание $\Psi_1^2(\xi)$, перенеся начало выполнения операции $j \in \Psi_1^\beta(\omega)$ на более поздний срок. Полагаем

$$\{\theta_j | j \in \Psi_1^2(\xi)\} = \omega + x_j^1.$$

Для всех остальных работ множества $\bar{J}_2[\Psi_1^2(\xi)] \neq \emptyset$, выполняемых в расписании $\Psi_1^\beta(\omega)$ после момента времени ω , оставляем значения $\{\theta_i | i \in \Psi_1^2(\bar{t}) \cup \tilde{U}_2(\omega), i \neq j\} = \theta_i$.

Шаг 5. С помощью алгоритма 2s, начиная с момента времени ω , строим расписание $\Psi_1^\beta(\xi)$, допускающее разрывы во времени выполнения операций. Если для вновь построенного расписания выполняется хотя бы одно из неравенств системы неравенств

$$\{\sigma_i | i \in \Psi_1^\beta(\xi)\} > d_i, \quad i \in \bar{I}_1 \cap \bar{J}_2[\Psi_1^\beta(\xi)],$$

то данное расписание не содержит допустимых решений, и полагаем $\alpha[\Psi_1^2(\xi)] = -2$. Если выполняются условия $\{\sigma_i | i \in \Psi_1^\beta(\xi)\} \leq d_i \forall i \in \bar{I}_1$ и при этом для некоторых работ выполняются неравенства $\{\sigma_i | i \in \Psi_1^\beta(\xi)\} > D_i \forall i \in \bar{I}_2$, то полагаем $\alpha[\Psi_1^\beta(\xi)] = -1$. Как в первом, так и во втором случаях строящееся расписание не содержит допустимых продолжений и полагаем $\xi = \omega + 1$.

В случае если $\sigma_i \leq D_i \forall i \in \bar{I}$, полагаем $\alpha[\Psi_1^\beta(\xi)] = 1$. В качестве ξ выбираем, как и в шаге 3, время начала первой работы в расписании $\Psi_1^\beta(\xi)$, выполнение которой не было осуществлено до конца. Значение $\Psi_1^\beta(\omega)$ полагаем равным 0, $\Psi_1^2(\omega) = 0$. Переходим к шагу 1.

Для расписаний $\Psi_1^\beta(\xi)$, $\beta = 1, 2$, если $\alpha[\Psi_1^\beta(\xi)] = 1$, значение ξ как время начала выполнения той операции, в которой происходит прерывание, т. е.

$$\xi = \{ \min_{i \in \Psi_1^\beta(\omega)} x_i^1 t_i^1 < t_i \}. \quad (15)$$

Если задача (15) не имеет решений, то построено допустимое расписание Ψ_2 , не содержащее прерываний во временах выполнения операций, и алгоритм завершает работу.

Шаг 6. Если алгоритм 3(s) завершил свою работу, не построив ни одного расписания Ψ_2 , и среди всех расписаний $\Psi_1^\beta(\xi)$ содержатся только расписания с признаком $\alpha[\Psi_1^\beta(\xi)] = -2$, то задача не имеет допустимых решений и временные ресурсы выполнения некоторых работ должны быть расширены. Если при этом содержатся некоторые расписания, для которых $\alpha[\Psi_1^\beta(\xi)] = -1$, то граничное значение критерия оптимальности должно быть

увеличено на некоторую величину $F^s := F^s + \delta^s$, где $\delta^s = \min_{\beta} \min_{\xi} \min_{i \in J_2[\Psi_1^{\beta}(\xi)]} (\sigma_i - D_i)$.

С новым значением критерия оптимальности последовательно выполняем вычисления (5), (6), алгоритмы 1(s), 2(s) и 3(s) до тех пор, пока не получим решения задачи, либо подтверждения того, что система ограничений задачи является несовместной. ♦

Предложенный алгоритм реализует метод последовательного приближения к оптимальному расписанию снизу $F^0 < F^1 < \dots < F^s < \dots < F^S$, каждая большая итерация которого — некоторая модификация метода ветвей и границ с отсеком неперспективных продолжений. Ветви дерева, не обеспечивающие выполнение всех ограничений задачи или значение критерия оптимальности, равное величине F^s , отсеиваются как неперспективные. На первых шагах алгоритма устанавливается факт несовместности системы ограничений и идентификация узких мест.

5. ИЛЛЮСТРАТИВНЫЕ ПРИМЕРЫ

Пример 1. Необходимо найти допустимую последовательность выполнения пяти работ, начальные сроки, времена и граничные сроки завершения выполнения которых сведены в табл. 1.

При ограничениях на сроки завершения пятой работы $d_5 = 28$ уже в процессе выполнения алгоритма 1s определяется, что система ограничений задачи является несовместна. При увеличении значения $d_5 = 29$ было получено допустимое расписание выполнения работ.

Рассчитав по формулам (5) значения D_p , построим последовательность $\tilde{U} = \{1, 2, 4, 5, 3\}$. Процесс решения сведен в табл. 2. Допустимая последовательность выполнения работ — $\tilde{W}(\Psi_2) = \{3, 1, 2, 4, 5\}$, сроки начала и завершения выполнения работ для расписания Ψ_2 см. в табл. 2.

Пример 2. Необходимо найти оптимальную последовательность выполнения шести работ, начальные сроки a_i , времена t_i и граничные сроки завершения выполнения d_i , а также поствремена g_i (табл. 3).

Вычисленное по формуле (4) значение нижней границы критерия оптимальности равно $F^0 = 33$. Положив $F^1 = 35$, по формуле (5) вычислим значения D_p , которые приведены в последней строке табл. 3.

В соответствии с этими значениями построена последовательность выполняемых работ $\tilde{U} = \{2, 3, 1, 4, 6, 5\}$. Вычисленные по формулам (6) и преобразованные в процессе работы алгоритма 1s значения θ_i и τ_i приведены во втором и третьем столбцах табл. 4. Последовательность $\tilde{W}(\Psi_1)$ определяет построенное алгоритмом 2s расписание, в котором допускается прерывание выпол-

Таблица 1

Исходные данные Примера 1

Показатели	Индексы работ				
	1	2	3	4	5
a_i	6	3	1	19	15
t_i	5	4	7	6	5
$d_i = D_i$	15	18	32	25	(28) 29

Таблица 2

Процесс и результаты решения Примера 1

Но- мер рабо- ты	До- пусти- мое время начала		Последовательность $\tilde{W}(\Psi_1)$, допускающая разрывы времени вы- полнения работ						Расписание Ψ_2 , не допус- кающее раз- рывы време- ни выполне- ния работ		
	θ_i	τ_i	x_i^1	t_i^1	σ_i^1	x_i^2	t_i^2	σ_i^2	x_i	t_i	σ_i
1	6	11	6	5	10	—	—	—	8	5	12
2	3	15	3	3	5	11	1	11	13	4	16
3	1	12	1	2	2	12	5	16	1	7	7
4	19	19	19	6	24	—	—	—	19	6	24
5	25	25	25	5	29	—	—	—	25	5	29

Таблица 3

Исходные данные Примера 2

Показатель	Индексы работ					
	1	2	3	4	5	6
a_i	12	4	1	8	10	15
t_i	7	4	5	4	2	3
d_i	28	15	18	32	32	35
g_i	15	6	5	11	6	10
D_i	20	15	18	24	29	25

Таблица 4

Процесс и результаты решения Примера 2

Но- мер рабо- ты	До- пусти- мое время начала		Последовательность $\tilde{W}(\Psi_1)$, допускающая разрывы времени вы- полнения работ						Расписание Ψ_2 , не допус- кающее раз- рывы време- ни выполне- ния работ		
	θ_i	τ_i	x_i^1	t_i^1	σ_i^1	x_i^2	t_i^2	σ_i^2	x_i	t_i	σ_i
1	12	14	12	7	18	—	—	—	12	7	18
2	4	10	4	4	7	—	—	—	6	4	9
3	1	14	1	3	3	8	2	9	1	5	5
4	8	21	10	2	11	19	2	20	19	4	22
5	10	28	24	2	25	—	—	—	10	2	11
6	19	23	21	3	23	—	—	—	23	3	25



нения работ. Алгоритмом 3s на 2-м шаге преобразования это расписание было преобразовано в последовательность, не допускающую разрывов во времени выполнения работ $\tilde{W}(\Psi_2) = \{3, 2, 5, 1, 4, 6\}$, в которой выполнены все ограничения на сроки выполнения работ и значение критерия оптимальности минимально. Время на начала и завершения выполнения каждой работы в этом расписании приведены в последних столбцах табл. 4. Значение критерия оптимальности определяется шестой работой и равно $F = \sigma_6 + g_6 = 25 + 10 = 35$.

6. РЕЗУЛЬТАТЫ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ ЭКСПЕРИМЕНТОВ

Поскольку сформулированная задача относится к классу NP-сложных, то предложенный алгоритм, реализующий некоторую модификацию метода ветвей и границ, как и алгоритм [1], относится к классу экспоненциально сложных.

Разработанные алгоритмы прошли апробацию при решении тестовых задач построения расписаний, включающих в себя несколько сотен работ. Исходные данные примеров выбирались случайным образом в пределах заданного диапазона значений.

Эффективность алгоритмов решения задач построения расписаний, не допускающих прерывания выполнения работ, зависит от трех параметров: числа N и среднего времени $\bar{T}$ выполняемых заданий и процента работ P , на завершение выполнения которых наложены ограничения. Объем вычислений определяется числом Q пересчетов нижней границы длины расписания, числом W развиваемых ветвей дерева и числом R устраняемых разрывов выполнения работ в процессе решения задачи. Результаты проведенных вычислительных экспериментов приведены в табл. 5.

Как показали результаты большого количества вычислительных экспериментов, при решении тестовых задач достаточно большой размерности (до 1500 работ) благодаря эффективности оценки

длины оптимального расписания точное решение задачи было получено при относительно небольшом числе приближений и ветвлений. Число устранений разрывов в выполнении работ и преобразований расписания Ψ_1 в расписание Ψ_2 при отсутствии ограничений на сроки завершения работ в несколько десятков раз меньше размерности решаемой задачи. Получение допустимых расписаний выполнения работ достигалось за полиномиальное время при числе преобразований расписаний, допускающих разрывы в выполнении работ, равном 5–15.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Построение допустимых и оптимальных расписаний, допускающих разрывы во времени выполнения работ, осуществляется предложенными алгоритмами за полиномиальное время. Факт несовместности системы ограничений и определение «узких мест», требующих расширения временных ресурсов выполнения отдельных работ, устанавливается на первых шагах алгоритмов.

Эффективность решения задач построения оптимальных расписаний без учета ограничений на сроки завершения выполнения работ с помощью предложенных алгоритмов сравнима с эффективностью известных ранее алгоритмов [1].

Предложенные алгоритмы могут успешно применяться в алгоритмах точного и приближенного решения job-shop-problem.

ЛИТЕРАТУРА

1. Carlier J. The one-machine sequencing problem. — European Journal of Operational Research. — 1982. — N 11. — P. 42–47.
2. Lenstra J.K., Rinnooy Kan A.H.G., Brucker P. Complexity of machine scheduling problema. — Annals of Diskrete Mathematics. — 1977. — N 1. — P. 343–362.
3. Domschke W., Scholl A., Voß S. Produktionsplanung. Ablauforganisatorische Aspekte. — Berlin, Heidelberg: Springer Verlag. — 2005. — 456 p.
4. Brucker P. Scheduling Algorithms. — Berlin, Heidelberg and New York: Springer-Verlag, 1998.
5. Лазарев А.А., Графов Е.Р. Теория расписаний. Минимизация суммарного запаздывания для одного прибора. — М.: ВЦ им. А.А. Дородницына РАН, 2004. — 129 с.
6. Зак Ю.А. Прикладные задачи теории расписаний и маршрутизации перевозок. — М.: URSS, 2012. — 394 с.
7. Зак Ю.А. Построение допустимых и оптимальных расписаний выполнения работ на одной машине // Кибернетика и системный анализ. — 2012. — № 1. — С. 62–82.

Статья представлена к публикации членом редколлегии В.Н. Бурковым.

Зак Юрий Александрович — д-р техн. наук, науч. консультант, г. Аахен, Германия, ☎ +49 (0) 241/543255, ✉ yuriy_zack@hotmail.com, http://www.optmorum.de.

Таблица 5

Результаты вычислительных экспериментов

Параметры задачи			Параметры эффективности алгоритма		
N	$\bar{T}$	$P, \%$	Q	W	R
До 200	5–7	10–20	0–6	10–15	12–30
100–200	8–10	До 50	7–11	20–30	25–38
400–500	3–5	До 30	12–20	40–45	42–50
800–100	3–7	До 25	30–42	65–80	90–105
1500	4	15	52	114	136

СИНЕРГИЯ В СИСТЕМЕ ЕСТЕСТВЕННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ ОРГАНИЗМА

А.В. Макаренко, В.Н. Новосельцев

Рассмотрена модифицированная математическая модель естественных технологий организма человека. На качественном уровне исследован процесс возникновения синергии при поражении основных системных составляющих организма. Введена мера интегральной деградации организма человека, на основе которой получены некоторые количественные оценки синергии.

Ключевые слова: математическая модель, естественные технологии, синергия, здоровье, долголетие.

ВВЕДЕНИЕ

В последние годы все чаще возникают задачи управления, где организм человека выступает как целое, в единстве физиологических функций. Появились такие задачи, как измерение и контроль состояния здоровья отдельного человека, расширились рамки медико-социальных и медико-экологических задач (управление спасательными работами при промышленных и транспортных катастрофах, обеспечение безопасности человека в экстремальных ситуациях, оценки последствий радиационных поражений, военная и бытовая нарко- и токсикология).

Для решения возникших задач были развиты новые подходы к моделированию организма человека, в которых он представлен как целостная система, способная противостоять действию разнообразных повреждающих и разрушающих факторов [1]. Цель моделирования состоит уже не в воспроизведении различных частных аспектов управления в организме, а в оценке его целостных свойств, в том числе, в анализе возможных механизмов наступления смерти и путей ее предотвращения. Обычно в медицинских применениях смерть рассматривается как следствие болезни, но повсеместное увеличение продолжительности жизни [2] привело к появлению такого понятия, как смерть от старости. Таковой рассматривается смерть, наступающая при резком ослаблении гомеостатических свойств организма в отсутствие болезни [3]. Гомеостатические механизмы с воз-

растом ухудшаются настолько, что не могут парировать действие даже малейших возмущений, и самое незначительное воздействие становится причиной смерти.

Механизмы наступления смерти от старости напрямую связаны с развитием последних стадий процесса старения. Если на ранних стадиях взаимное влияние физиологических систем проявляется слабо, то на последних возможно возникновение больших и усиливающих друг друга взаимодействий [4]. Синергия, возникающая в организме в результате системных взаимодействий между различными физиологическими механизмами, и анализируется в настоящей работе.

1. БАЗОВАЯ МОДЕЛЬ ОРГАНИЗМА ЧЕЛОВЕКА

Жизненные процессы в клетках организма обеспечиваются генетическими, биохимическими, физиологическими и поведенческими механизмами. Перечень жизненно-важных систем организма можно найти в любом справочнике по физиологии (см., например, [5]). В то же время принципы и механизмы системной интеграции гетерогенных систем в целостный организм до сих пор до конца не решены как в общетеоретическом плане, так и в аспекте математического моделирования. В качестве принципа, интегрирующего физиологические системы в целостный организм, в настоящей работе используется концепция «естественных технологий» организма [6], взятая в ее математико-модельной трактовке [1].



Схема описывает следующие жизненные функции:

- доставка в организм горючего и окислителя (функция систем пищеварения и дыхания);
- внутренний транспорт веществ (функция сердечно-сосудистой системы);
- собственно процессы жизнедеятельности (синтез биополимеров, проведение нервного импульса, мышечные сокращения и др.);
- элиминация и выведение конечных продуктов (функция печени и почек).

Этот перечень легко дополняется и другими функциями, такими как пищеварение или терморегуляция.

Система естественной технологии представляет организм как целостную совокупность физиологических систем. Целостность описания означает, что в модели организма «поддерживается жизнь», т. е. реализуется стационарное неравновесное состояние. Удаление из модели любого жизненно важного компонента (одной из четырех физиологических систем, обеспечивающих жизненные функции) приводит к тому, что моделируемая система теряет устойчивость, жизненные процессы прекращаются, наступает смерть [7].

Таким образом, в системе естественных технологий определяются четыре базовых компартмента:

x_1 , мм рт. ст. — парциальное давление кислорода в артериальной крови;

x_2 , мм рт. ст. — парциальное давление кислорода в тканях организма;

x_3 , % — избыточное количество шлаков, подлежащих элиминации печенью;

x_4 , % — избыточное количество шлаков, подлежащих элиминации почками.

В норме значения компартментов следующие: $\mathbf{x}^* = [100 \ 75 \ 0 \ 0]^T$. Исходя из физического смысла, $\mathbf{x} \geq 0$.

В основе жизнедеятельности организма лежат клеточные процессы (такие как синтез биополимеров в клетках, проведение нервного импульса, активность рецепторов, сокращение мышц и т. п.). Поэтому в модель вводится значение интенсивности протекания клеточных процессов $\omega = 250$ мл O_2 /мин (определенное в норме для здорового человека). Это значение представляет собой так называемый «уровень основного обмена» в норме для здорового человека. Значение ω может возрастать при увеличении нагрузки на организм, а при ухудшении его состояния может уменьшаться. Достижение уровня $\omega = 0$ означает невозможность жизни.

2. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

Оригинальная базовая математическая модель систем организма человека приведена в работе [1]. В настоящей статье она существенным образом модифицирована.

Система уравнений баланса для компартментов, в форме Коши, имеет вид:

$$\frac{dx_1}{dt} = a_1[y_1(\mathbf{x}, t) - y_2(\mathbf{x}, t)], \quad (1a)$$

$$\frac{dx_2}{dt} = a_2[y_2(\mathbf{x}, t) - \omega], \quad (1б)$$

$$\frac{dx_3}{dt} = a_3[\omega - y_3(\mathbf{x}, t)], \quad (1в)$$

$$\frac{dx_4}{dt} = a_4[\omega - y_4(\mathbf{x}, t)], \quad (1г)$$

причем ее решение строится на интервале $t \in [0, +\infty)$. Функция транспортных потоков $\mathbf{y}(\mathbf{x}, t)$ в покомпонентном представлении имеет вид:

$$y_1(\mathbf{x}, t) = b_1(x_0 - x_1)F_1(\mathbf{x}, t), \quad (2a)$$

$$y_2(\mathbf{x}, t) = b_2(x_1 - x_2)F_2(\mathbf{x}, t), \quad (2б)$$

$$y_3(\mathbf{x}, t) = b_3(x_3 + 100)F_3(\mathbf{x}, t), \quad (2в)$$

$$y_4(\mathbf{x}, t) = b_4(x_4 + 100)F_4(\mathbf{x}, t), \quad (2г)$$

здесь $x_0 = 150$ мм рт. ст. — парциальное давление кислорода в атмосфере.

В работе [1] компоненты функции $\mathbf{F}(\mathbf{x}, t)$, описывающей состояние организма, были представлены в кусочно-линейном виде. Такое недифференцируемое представление затрудняло качественный анализ структурных свойств системы, поскольку область решения распадалась на множество подобластей, в которых параметры описания различались между собой. В настоящей статье функция $\mathbf{F}(\mathbf{x}, t)$ представлена аналитическими дифференцируемыми зависимостями, которые в покомпонентной форме записи имеют вид:

$$F_i(\mathbf{x}, t) = F_i^{(1)}(\mathbf{x}, t) F_i^{(2)}(\mathbf{x}, t), \quad F_i \in [0, 1], \quad i = \overline{1, 4},$$

причем

$$F_i^{(1)}(\mathbf{x}, t) = 1 - e^{-c_i(x_2)^3},$$

$$F_i^{(2)}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{1 + d_i e^{g_i(x_3 + x_4)}}. \quad (3)$$

Компонента F_1 функции $\mathbf{F}(\mathbf{x}, t)$ соотнесена с системой дыхания, компонента F_2 — с сердеч-

но-сосудистой системой; компонента F_3 — с печенью, и, наконец, компонента F_4 — с почками.

Значения параметров **a** и **b** в выражениях (1) — уравнения (1a...1г) и (2) — уравнения (2a...2г):

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 500 \\ 1000 \\ 0,079 \\ 0,2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 5 \\ 10 \\ 2,5 \\ 2,5 \end{bmatrix}. \quad (4)$$

Отметим, что значения **b** выбраны из условия $\mathbf{x}|_{x=0} = \mathbf{x}^*$, при $\mathbf{F}(\mathbf{x}, t) \equiv 1$. Численные значения параметра **a** связаны с необходимым условием: при обнулении любой из компонент F_i , смерть в модели (1) должна наступать через тот же отрезок времени, что и в организме человека (масштаб переменной t , сут). Однако точные данные о времени наступления смерти после отключения отдельных систем организма получить достаточно сложно, поэтому воспользуемся оценками. Хорошо известно, что прекращение дыхания ($F_1 \equiv 0$) или кровообращения ($F_2 \equiv 0$) приводит организм к смерти через 5—10 мин. Обнуление величин F_3 и F_4 также приводит к смерти, но данные о времени ее наступления сильно варьируют. В принципе их можно получить, анализируя смерть от острых отравлений, когда в результате приема яда в организме развивается тяжелая нефропатия и гепатопатия [8]. Однако в работе [8] приводятся только вероятностные данные о наступлении смерти, а временные характеристики отсутствуют. В обзоре [9] для многих ядов приводятся границы временных интервалов наступления смерти, из чего можно сделать вывод о времени наступления смерти в пределах 5—10 сут после прекращения функционирования как печени, так и почек. Определенную информацию о времени жизни после прекращения функционирования почек можно получить по данным о подключении к больным искусственной почки (2—3 раза в неделю по 4—6 ч [10]). Сложнее дело обстоит с функцией печени [11]. При летальном отравлении ядом бледной поганки *Amanita Phalloides* в токсикогенной фазе происходит гибель печени, что в соматической фазе (после выведения яда) приводит к периоду ложного выздоровления продолжительностью около 3 сут. Летальный исход наступает спустя 4—6 сут. Таким образом, значения **a** в соотношении (4) выбраны на основании изложенных фактов, давая приемлемое совпадение с реальными ситуациями.

Исходя из формул (3), с учетом выражений (1) и (2), следует, что различные шлаки оказывают одинаковое влияние на гомеостаз, поэтому их

можно рассматривать совместно, введя дополнительную переменную: $x_{34} = x_3 + x_4$.

Постоянные **c**, **d** и **g** в формулах (4) определяются из особых точек функции $\mathbf{F}(\mathbf{x}, t)$:

$$F_i^{(1)}|_{cr} = 0,5; \quad x_2^{cr} = 32,53 \cdot \mathbf{1}; \quad (5a)$$

$$F_i^{(2)}|_{cr} = 0,5; \quad x_{34}^{cr} = 200 \cdot \mathbf{1}; \\ \theta_i^{F2}|_{cr} = -\frac{\pi}{180} \cdot \mathbf{1}, \quad (5b)$$

где $\mathbf{1}$ — единичный вектор, а $\theta_i^{F2}|_{cr}$ — угол наклона касательной к функции $F_i^{(2)}(\mathbf{x}, t)$ в точке $F_i^{(2)}|_{cr}$. В свою очередь, особые точки в формулах (5a) и (5b) выбраны из следующих соображений.

Прежде всего, в норме приняты следующие значения компартментов: $x_1^* = 100$ мм рт. ст.; $x_2^* = 75$ мм рт. ст.; $x_3^* = x_4^* = 0$ %. Значения x_1^* и x_2^* обусловлены литературными данными. Так, напряжение кислорода в артериальной крови составляет порядка 100 мм рт. ст. (около 13,3 КПа) [12]. При движении крови по сосудам напряжение падает, достигая в тканях значений порядка 75 мм рт. ст. [13]. Нулевые значения x_3^* и x_4^* следуют из самой сути этих величин — количества избыточных шлаков, подлежащих элиминации печенью и почками, соответственно. И принимается, что в норме печень и почки выводят ровно столько шлаков, сколько в них образуется, поэтому в них ничего не накапливается, и дополнительно ничего выводить не надо.

Далее, известно [13], что кровь возвращается из тканей к сердцу с напряжением кислорода ~40 мм рт. ст. Из сопоставления этого значения с x_2^* и определяется численное значение x_2^{cr} в формуле (7a) (рис. 1, a). Для всех систем принимаются одинаковые значения (хотя в реальности это скорее не так) в силу ограниченности исходных данных.

Наконец, физиологические функции печени и почек множественны и сложны [14]: метаболизм лекарств и ядов, углеводный обмен — печень; очистка крови и синтез гормонов, экскретирование побочных продуктов, регуляция фосфатов и кальция, превращение аммиака в мочевины — почки. Описать эти множества процессов одним, двумя интегративными параметрами представляется весьма сложной задачей. Но при этом известно, что печень и почки пластичны и способны выдерживать значительные нагрузки по интоксикации [8]. Терминальное значение накопленных шлаков в 300 % (от нормы) суммарно по печени и почкам не выглядит слишком неправдоподобным [14]. Из

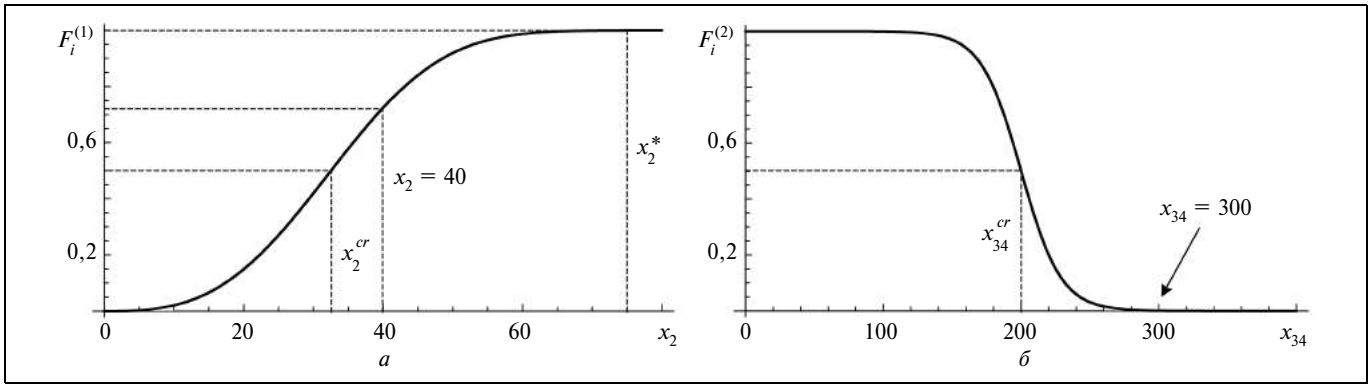


Рис. 1. Графики функций: а — $F_i^{(1)}(x_2)$; б — $F_i^{(2)}(x_{34})$

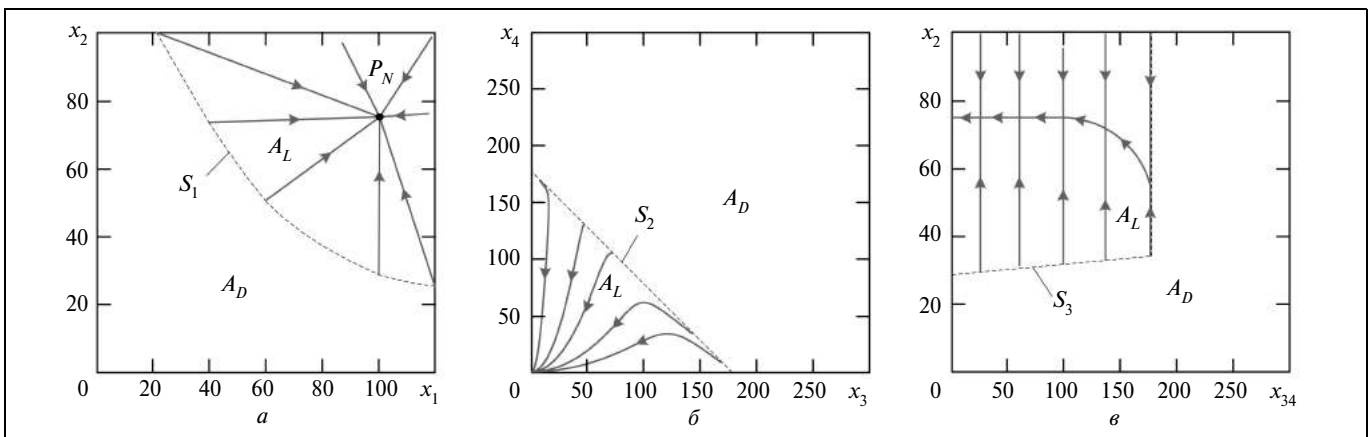


Рис. 2. Фазовые портреты системы (1) в плоскостях: а — (x_1, x_2) ; б — (x_3, x_4) ; в — (x_{34}, x_2)

сопоставления этой величины с x_{34}^* и определяют численные значения x_{34}^{cr} и $\theta_i^{F2}|_{cr}$ в формуле (5б), см. рис. 1, б. Для всех систем, по ранее изложенной причине, опять же принимаются одинаковые значения.

Таким образом, выбранные значения параметров системы (1) в определенной мере эмпирические и не привязаны точно к каким-либо физиологическим или медицинским фактам, но они и не противоречат рассмотренным литературным данным. По этой причине все дальнейшие результаты и выводы необходимо воспринимать и интерпретировать как качественные, демонстрирующие тенденции, в принципе не противоречащие современным представлениям физиологии и медицины.

На рис. 2 показаны фазовые портреты системы (1), полученные численным интегрированием. Отметим, что компоненты, не входящие в соответствующие фазовые плоскости, имеют значения, эквивалентные x^* . Для получения численных ре-

шений системы (1) применялись два адаптивных метода решения жестких нелинейных систем дифференциальных уравнений: Булирша — Штера (Bulirsch — Stoer) и Розенброка (Rosenbrock) четвертого порядка. При получении решений контролировался как шаг интегрирования, так и ошибка, которая по абсолютной величине не превышала 10^{-6} .

Из рис. 2 видно, что система имеет две области: A_L — траектории стремятся к номинальному значению x^* , поддерживаемому гомеостатическим механизмом; A_D — решения системы плохо обусловлены и уходят к значениям x , соответствующим гибели организма. Эти области в подпространствах (x_1, x_2) , (x_3, x_4) и (x_{34}, x_2) разделяются соответственно сепаратрисами S_1 , S_2 и S_3 . Отметим, что в силу вида функций (3) реальные координаты точки равновесия (в области A_L) отличаются от теоретического x^* , т. е. $P_N = (99,98968 \ 74,98452 \ 0,02064 \ 0,02064)$.

3. ИССЛЕДОВАНИЕ СИНЕРГИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК ДЕГРАДАЦИИ ОРГАНИЗМА ЧЕЛОВЕКА

Введем в рассмотрение параметр деградации систем организма человека $\mathbf{h}$, $h_i \in [0, 1]$, и переопределим функцию (3):

$$F_1(\mathbf{x}, t) = h_i F_i^{(1)}(\mathbf{x}, t) F_i^{(2)}(\mathbf{x}, t), \quad (6)$$

причем $h_i = 1$ — означает номинальное состояние i -й системы организма, а $h_i = 0$ — ее полный отказ.

Изучим зависимость положения точки равновесия системы (1) от значения параметра $\mathbf{h}$ и начальных условий $\mathbf{x}(t=0)$:

$$\frac{d}{dt} \mathbf{x} = 0|_{\mathbf{h}, \mathbf{x}(t=0)}. \quad (7)$$

С учетом формул (6) и (7) из выражений (1) и (2) получим систему уравнений:

$$x_2 = \hat{x}_2,$$

$$\hat{x}_2 = x_0 - \frac{\omega}{h_1 F_1(x_2, x_{34}) b_1} - \frac{\omega}{h_2 F_2(x_2, x_{34}) b_2}, \quad (8a)$$

$$x_{34} = \hat{x}_{34},$$

$$\hat{x}_{34} = \frac{\omega}{h_3 F_3(x_2, x_{34}) b_3} + \frac{\omega}{h_4 F_4(x_2, x_{34}) b_4} - 200. \quad (8б)$$

Графоаналитические решения изолированных уравнений (8a) и (8б) представлены на рис. 3. Сплошные линии соответствуют здоровому организму в норме, пунктирные — граничному состо-

янию между областями A_L и A_D . Стрелками обозначено движение решений при ухудшении состояния организма по различным параметрам.

Описание компонент функции $\mathbf{F}(\mathbf{x}, t)$ в виде (3), в отличие от кусочно-линейного представления [1], позволяет получить единые допустимые решения совместной системы уравнений (8a) и (8б). Рассмотрим меру интегральной деградации организма человека:

$$H(\mathbf{h}) = \sqrt{\frac{\hat{x}_2(\mathbf{h}) - x_2^{(2)}}{x_2^* - x_2^{(2)}} \left(1 - \frac{\hat{x}_{34}(\mathbf{h})}{x_{34}^{(2)}} \right)}, \quad (9)$$

причем $H \equiv 1$ — означает номинальное состояние организма ($\mathbf{x}^*$), а $H \equiv 0$ — смерть, ей отвечает область A_D решений системы (1). В формуле (9) величины $\hat{x}_2$ и $\hat{x}_{34}$ представляют собой совместное решение системы уравнений (8a) и (8б) при начальной точке $\mathbf{x}^*$ и различных значениях параметра $\mathbf{h}$.

На рис. 4 наглядно показано, как проявляется синергический эффект — при совместной деградации систем терминальная зона A_D достигается при больших значениях h_i , чем при деградации тех же систем порознь: гибель организма наступает раньше, если деструкции подвергается несколько его систем одновременно. Действительно, равномерная деградация всех четырех систем организма (кривая h_{1-4}), практически эквивалентна деградации дыхательной и сердечно-сосудистой систем (кривая $h_{1,2}$), приводя организм к ранней смерти. Деградация по отдельности печени (h_3) или почек

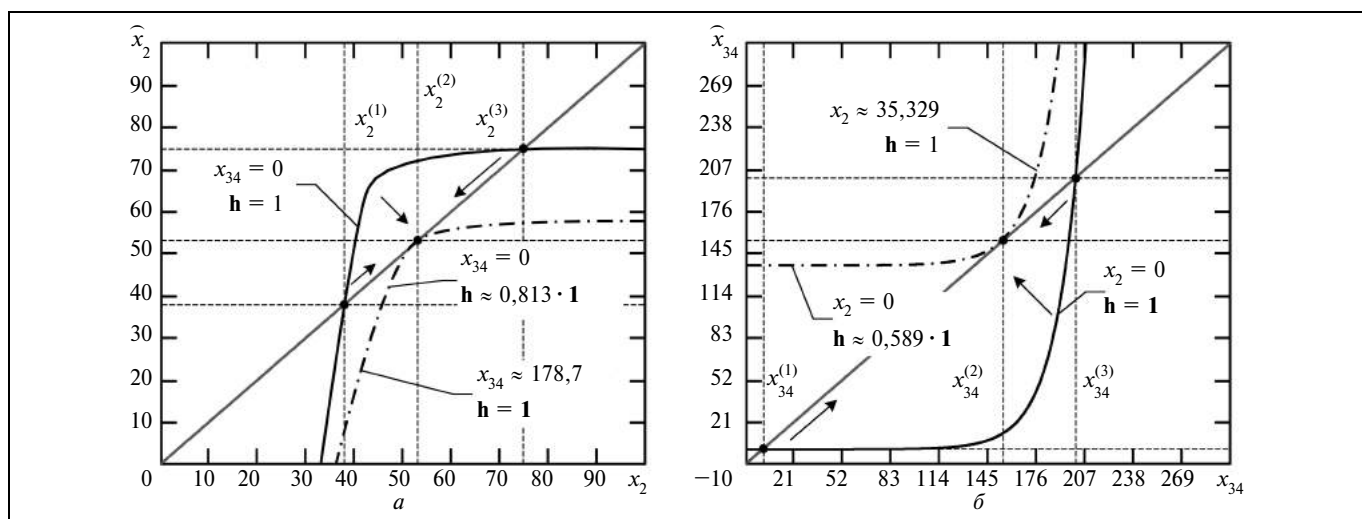


Рис. 3. Графики решений изолированных уравнений: а — уравнения (8a); б — уравнения (8б). Координаты точек: $x_2^{(1)} \approx 38,036$, $x_2^{(2)} \approx 52$, $x_2^{(3)} \approx 75$; $x_{34}^{(1)} \approx 0,043$, $x_{34}^{(2)} \approx 154,312$, $x_{34}^{(3)} \approx 200$

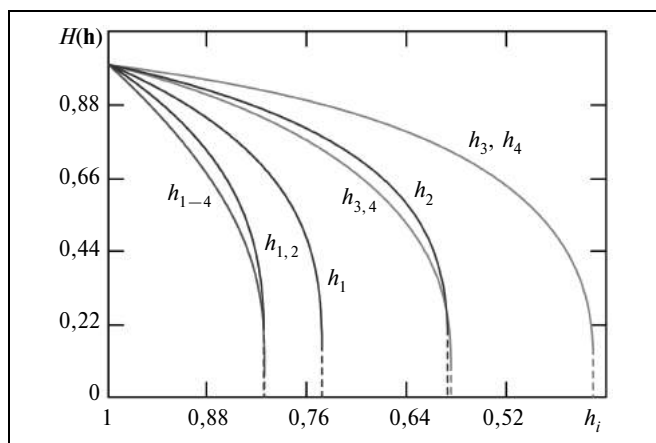


Рис. 4. График меры интегральной деградации систем организма человека (по горизонтальной оси отложены значения h_i для деградирующих систем)

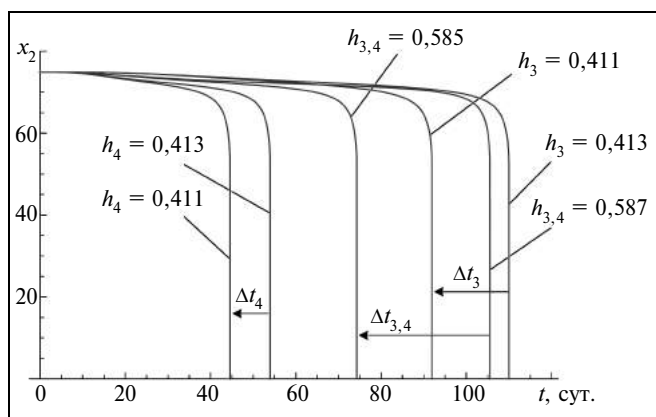


Рис. 5. График эволюции решения системы (1) по переменной x_2 при различном уровне деградации систем организма ($h_i = 1$)

(h_4) дает организму самый сильный запас «прочности», но их совместный отказ ($h_{3,4}$) практически эквивалентен деградации сердечно-сосудистой системы (h_2).

Синергия должна сказываться и при рассмотрении процессов умирания организма во времени. Рассмотрение общего случая представляет здесь определенные трудности, поэтому в данной статье ограничимся характерным примером. Для этого переопределим функцию (6)

$$F_i(\mathbf{x}, t) = F_i^{(1)}(\mathbf{x}, t) F_i^{(2)}(\mathbf{x}, t) = \begin{cases} 1 & t \leq 1; \\ h_i & \text{иначе,} \end{cases}$$

и построим численные решения системы (1) при нормальных начальных условиях $\mathbf{x}^*$ и различных значениях h_i . Рассмотрим также достаточно длин-

ный интервал времени $t \in [0, 120]$ (в сутках), на котором синергия должна проявляться достаточно четко. Графики решений на этом интервале времени, конкретно для $x_2(t)$, показаны на рис. 5.

Деградации подвергается либо печень ($h_3 < 1$), либо почки ($h_4 < 1$) и совместно: печень и почки ($h_{3,4} < 1$). Большие значения h_i — это такие максимальные значения параметра (с тремя значащими знаками после запятой), при которых организм однозначно погибает при $t < 120$. В случае совместной деградации печени и почек взят случай равномерного поражения систем ($h_3 = h_4$). Затем для каждого случая (печень, почки, печень и почки) введена дополнительная малая деградация организма ($\Delta h_i = 0,002$) и вычислено сокращение времени жизни: $\Delta t_3 = 17,96$, $\Delta t_4 = 9,44$, $\Delta t_{3,4} = 31,2$.

Если бы синергия не проявлялась, то $\Delta t_{3,4} = \Delta t_3 + \Delta t_4$, но это не так. Из результатов численного эксперимента следует, что $\Delta t_{3,4} - (\Delta t_3 + \Delta t_4) = 3,8$, относительная разница между нелинейным (неаддитивным, синергичным) случаем $\Delta t_{3,4}$ и линейным (аддитивным) случаем ($\Delta t_3 + \Delta t_4$) составляет 12,18 % (относительно $\Delta t_{3,4}$). Из чего следует, что синергия также проявляется и в динамике смерти — при совместной сопоставимой деградации систем организм умирает раньше.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Под здоровьем принято понимать состояние живого организма, при котором он в целом и все его органы способны полностью выполнять свои функции. На рубеже тысячелетий стало ясно, что здоровье напрямую связано с поддержанием гомеостаза [15]. Оказалось, что организм тем более долговечен, чем дольше в нем поддерживается гомеостаз [16]. Было выяснено, что долголетие, как и здоровье, подвержено влиянию множества внешних факторов, причем в России продолжительность жизни резко уступает как западным, так и восточным странам. Причины этого неизвестны [17]. Одним из объяснений служит синергическое действие на организм множества вредных факторов, таких как курение, алкоголизм, наркомания, плохое питание и медицинское обслуживание [4]. Снятие этих факторов снимет и их синергическое действие на организм, так что продолжительность жизни увеличится больше, чем можно ожидать.

Таким образом, в настоящее время изучение синергии в системах организма становится актуальной задачей. В данной статье на простой модели гомеостаза изучен процесс возникновения синергии в организме и предложен способ ее количественной оценки. Для этого модель естественных

технологий организма [1] модифицирована: кусочно-линейное описание функций, определяющих функционирование организма, заменено на дифференцируемые формы этих функций. Кроме того, сконструирована мера интегральной деградации организма человека.

Такой подход должен оказаться полезным при рассмотрении, например, процессов старения (снижения функциональных способностей организма с возрастом) или при анализе развития процессов умирания во времени. Так, применение рассмотренной модели возможно для изучения летальности различных радиационных воздействий, например, действия полония-210. Замедление старения, приводящее к увеличению долголетия, может возникнуть при элиминации как сильных повреждающих факторов различной физико-химической природы (курения, алкоголизма, наркомании), так и относительно слабых природных и социальных факторов.

Модель, рассмотренная в настоящей статье, дает возможность расширить рамки рассмотрения процессов управления в организме, включив в них анализ роли синергии в обеспечении здоровья и долголетия. В дальнейшем, возможно, удастся выяснить как сокращение курения, алкоголизма и снятие прочих негативных факторов приведет к синергическому увеличению продолжительности жизни в России, что должно поставить ее в единый ряд с развитыми государствами.

ЛИТЕРАТУРА

1. Новосельцев В.Н. Моделирование естественных технологий организма для исследования процессов управления его жизнедеятельностью // Автоматика и телемеханика. — 1992. — № 12.
2. Oeppen J., Vaupel J.W. Demography. Broken limits to life expectancy // Science. — 2002. — Vol. 296. — P. 1029–1031.
3. Fries J.F. Aging, natural death and the compression of morbidity // New England Journ. Med. — 1980. — Vol. 303. — P. 130–135.
4. Новосельцев В.Н. Увеличение продолжительности жизни и условия среды: математическое моделирование. — М.: Фонд «Наука за продление жизни», 2010.
5. Малая медицинская энциклопедия. — М.: Советская энциклопедия, 1987.
6. Уголев А.М. Естественные технологии биологических систем. — Л.: Наука, 1987.
7. Дагаев В.Н., Новосельцев В.Н. Параметризация фармакокинетических моделей для исследования процессов управления в организме // Автоматика и телемеханика. — 1995. — № 4.
8. Лужников Е.А. Клиническая токсикология. — М.: Медицина, 1999.
9. URL: <http://www.ctrl-c.liu.se/~ingvar/methods/index.html> (дата обращения 17.10.2011).
10. Розенталь Р.Л. Лечение хронической почечной недостаточности. — Рига, Зинатне, 1984.
11. Jaeger A., Jehl F., Flesh F., et al. Kinetics of am toxins in human poisoning. Therapeutic implications // Clinical Toxicology. — 1993. — Vol. 31. — N 1. — P. 63–80.
12. Law R., Bukwirwa H. The physiology of oxygen delivery. — Oxford: Oxford Univ. Press. — 2010. — URL: http://www.nda.ox.ac.uk/wfsa/html/u10/u1003_01.htm (дата обращения 15.08/2012).
13. Wilson D.F. Quantifying the role of oxygen pressure in tissue function // Am. Journ. Physiol. Circ. Physiol. — 2008. — Vol. 294. — P. 411–413. — doi: 10.1152/ajpheart.01293.2007.
14. Физиология человека / Под редакцией В.М. Покровского, Г.Ф. Коротько. — М.: Медицина. — 2007.
15. Yashin A.I., Arbeev K.G., Akushevich I., et al. Dynamic determinants of longevity and exceptional health // Curr. Gerontol. Geriatr. Res. — Vol. 2010. — Article ID 381637. — doi:10.1155/2010/381637.
16. Vaupel J.W. Biodemography of human ageing // Nature. — 2010. — Vol. 464 (7288) — P. 536–542.
17. Васин С. Прощание с демографическим дивидендом // Демоскоп Weekly. — 2008. — № 317–318.

Статья представлена к публикации членом редколлегии А.С. Манделем.

Макаренко Андрей Викторович — канд. техн. наук, ст. науч. сотрудник, ✉ avm.science@mail.ru,

Новосельцев Василий Николаевич — д-р техн. наук, гл. науч. сотрудник, ☎ (495) 334-88-91, ✉ novoselec@yandex.ru,

Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, г. Москва.

Новая книга

Модели и методы анализа и синтеза сценариев развития социально-экономических систем: в 2 кн. / под ред. В.Л. Шульца, В.В. Кульбы; Центр исслед. проблем безопасности РАН, Ин-т проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН. — М.: Наука, 2012. — Кн. 1. — 304 с.; Кн. 2. — 358 с.

Изложена методология формирования сценариев развития сложных слабо формализуемых систем, позволяющая исследовать их поведение при различных стратегических управленческих воздействиях. Описаны этапы проектирования сценариев развития. На основе выделения и формализации основных компонентов сценария рассмотрены процедуры и операции в сценарных пространствах, которые позволяют синтезировать сценарий с заданными свойствами. Представлены результаты проектирования сценариев развития ряда социально-экономических систем, полученных на основе имитационного моделирования.

Для научных работников, аспирантов и студентов вузов, специализирующихся в области управления развитием социально-экономических систем.

Авторский коллектив: В.Л. Шульц, В.В. Кульба, Д.А. Кононов, С.А. Косяченко, А.Б. Шелков, И.В. Чернов.



РАЗРАБОТКА ИНФОРМАЦИОННО-ДИАГНОСТИЧЕСКОЙ ТЕХНОЛОГИИ ДЛЯ МОНИТОРОВ ПУЛЬСОВОЙ ВОЛНЫ

А.В. Кычкин

Рассмотрен подход к разработке информационно-диагностической технологии для медицинских программно-аппаратных комплексов — мониторов пульсовой волны артерий человека. Предложена процедура идентификации текущего состояния сосудов исследуемого пациента на основе теории нечеткой логики. Исследована на имитационной модели эффективность предложенной технологии диагностирования заболеваний.

Ключевые слова: монитор пульсовой волны, медицинская диагностика, информационно-диагностическая технология, экспертная система, нечеткая логика, классификация.

ВВЕДЕНИЕ

К настоящему времени накоплен большой фактический материал по изучению, разработке и внедрению в медицинскую практику приборов исследования гемодинамики, моделирования пульсового движения крови в сосудах и установления диагностических признаков состояния кровеносной системы человека. Возросший интерес к этой тематике объясняется тем, что свойства эластичности сосудов играют большую роль в кровообращении. Однако по актуальным данным ВОЗ во всем мире смертность от сердечно-сосудистых заболеваний занимает первое место (30 % от всех заболеваний), по данным World Health Statistics — около 10 % заболеваний сосудов, около 12 % заболеваний сердца. Высокие показатели заболеваемости сосудистой системы человека, поражение людей все более молодого возраста, делают эту проблему одной из важнейших в современном здравоохранении.

Из существующих систем оценки состояния сосудистого русла наиболее адекватны сфигмографические системы, основанные на анализе графического изображения формы пульсовой волны (ПВ), но обладающие недостатками в плане автоматизации самих диагностических процедур и интерпретации их результатов. Полные исследования мониторируемых данных ПВ требуют значительных временных и финансовых затрат, при этом часто неэффективная идентификация диагностических параметров и характеристик пульсовой волны на участке затрудняет оценку общей картины.

Весьма эффективные результаты оценки состояния сосудов могут быть достигнуты с помощью информационно-диагностической технологии (ИДТ), применяемой совместно с мониторами ПВ, при которой осуществляются многоканальное измере-

ние сигналов, расчет комплекса показателей и формирование диагнозов с учетом многозначности логики врача-эксперта [1].

1. ФОРМАЛИЗАЦИЯ ПРОЦЕССА МОНИТОРИНГА ПУЛЬСОВОЙ ВОЛНЫ

Схема оценивания состояния сложного объекта, которым является сосудистая система исследуемого пациента, должна реализовывать следующие отображения измерения сигналов $\varphi: (\Omega, \tau_\omega) \rightarrow (X_m, \tau_m)$; вычисления диагностических параметров (ДП) $\psi: (X_m, \tau_m) \rightarrow (X, \tau)$ и интерпретации оценок состояний сосудов $\delta: (X, \tau) \rightarrow (G, \tau_G)$, где τ_ω — момент времени, при котором сосуд находится в одном из состояний ω из бесконечного множества состояний Ω ; X_m — множество значений измеряемых сигналов на некотором временном интервале измерения τ_m ; X — множество вычисленных ДП во время τ ; G — класс состояния сосудов во время τ_G . Отображения φ и ψ выполняются в автоматическом или полуавтоматическом режимах согласно типовым алгоритмам с помощью технических средств — мониторов ПВ. Операторы таких устройств, как правило, субъективно интерпретируют оценки состояния сосудов согласно трудно формализуемым алгоритмам с учетом многовариантности оценок и нечеткой природы характеристик сложного биологического объекта. При этом исследователи руководствуются личным опытом и результатами наблюдений за пациентом, внося в значение оценки долю субъективности [2, 3].

Рассмотрим мониторинг ПВ как процесс, включающий в себя лишь первые два отображения, в результате которых рассчитываются более информативные ДП, характеризующие состояние сосу-

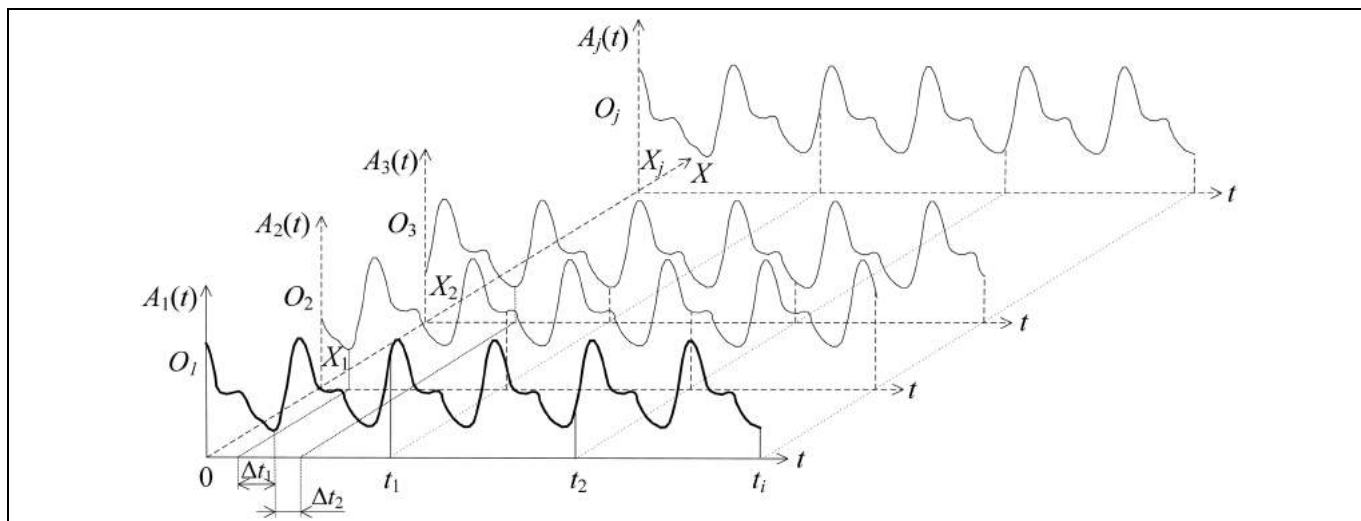


Рис. 1. Графическая интерпретация процесса измерения сигналов пульсовой волны

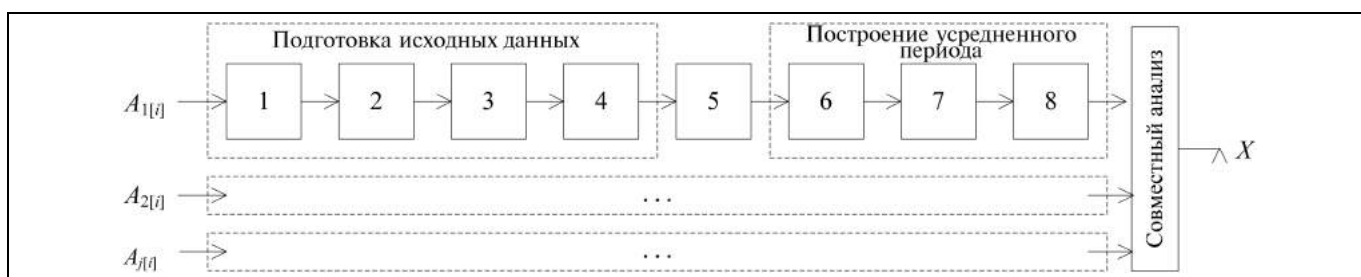


Рис. 2. Схема процесса мониторинга пульсовой волны

дов. Одним из ярких примеров таких параметров является скорость распространения пульсовой волны (СРПВ), теоретически обоснованная во многих исследованиях (А.Л. Мясников, 1958; Н.И. Савицкий, 1956; Г.И. Сидоренко, 1973, Complior, 1999). Эту величину можно получить при исследовании графического изображения колебаний стенки артерий в виде формы ПВ, полученной с помощью неинвазивного метода регистрации сигналов [4]. Однако существуют и другие показатели, например индекс ригидности, индекс аугментации в аорте, индекс эффективности субэндокардиального кровотока, индекс отражения, индекс растяжимости и другие, позволяющие судить об эластичности артерий и уровне их мышечного тонуса. Методика расчета этих показателей схожа и сводится к оценке основных характеристик формы регистрируемой в реальном времени ПВ.

Введем следующие обозначения: A — множество сигналов ПВ, регистрируемых в точках $O_1, \dots, O_j$ поверхности тела человека в рамках одного исследования; T — множество моментов времени расчета ДП из множества X , содержащего искомые параметры состояния сосудов из пространства (X, τ) .

Тогда процесс измерения сигналов ПВ графически можно представить в виде схемы, приведенной на рис. 1.

Цифровой монитор заменяет непрерывный сигнал ПВ $A(t)$ совокупностью его мгновенных значений $A(t_n)$ в моменты времени t_n , осуществляя равномерную дискретизацию с частотой F (шаг $\Delta t = 1/F$). Полученные временные ряды $A_{1[i]}, A_{2[i]}, \dots, A_{j[i]}$, где j — номер сигнала ПВ, i — номер элемента сигнала, являются исходными данными процедур обработки с помощью контурного анализа [5]. Например, СРПВ₁₋₂ между точками O_1 и O_2 рассчитывается как отношение расстояния между датчиками 1 и 2 к среднему времени Δt_1 задержки сигналов, получаемого в результате совместной обработки индексов контрольных точек пары сигналов $A_{1[i]}$ и $A_{2[i]}$. В качестве контрольных точек используются минимальные значения в начале потока ПВ (сistolы — первой более крупной части волны) в рамках одного цикла сердечного ритма.

В общем случае монитор ПВ рассчитывает вектор ДП X на основе последовательности простых математических операций. Упрощенная система



мониторинга ПВ представлена на рис. 2. Она включает в себя блок подготовки исходных данных сигнала ПВ, осуществляющий редактирование 1, масштабирование 2, коррекцию мгновенных значений сигнала 3, удаление тренда 4; блок расчета контрольных точек 5, соответствующих максимальным и минимальным значениям амплитуд систолы и диастолы; блок построения усредненного периода ПВ, содержащий процедуры определения периодов 6, расчета длительности среднего периода 7, калибровки периодов 8; блок совместного анализа усредненных периодов нескольких сигналов.

Процесс мониторинга ПВ, включающий в себя регистрацию сигналов и расчет более информативных ДП, можно считать линейным. Однозначность его результатов определяется детерминированностью методики дискретизации и цифровой обработки сигналов.

2. КЛАССИФИКАЦИЯ СОСТОЯНИЯ СОСУДОВ ЧЕЛОВЕКА НА ОСНОВЕ НЕЧЕТКОЙ ЛОГИКИ

Задача интерпретации ДП, полученных монитором ПВ и характеризующихся значительной вариабельностью, не имеет однозначного алгоритмического решения. Это обусловлено неоднозначностью исходных данных и знаниях о предметной области, например, статистических сведений о зависимостях поведения сосудов от факторов окружающей среды, времени суток, психофизического состояния пациента и др. Одним из перспективных подходов к решению такой задачи служит аппарат интеллектуального анализа данных на основе экспертных систем [6].

Применение экспертных систем в качестве инструментария ИДТ позволит сформировать рекомендации по диагностическим заключениям на основе накопленных данных, знаний и опыта экспертов в области диагностики кровеносных сосудов человека. Экспертная система должна включать в себя базу знаний (БЗ) и механизм вывода, а также компоненты обучения и объяснения выдаваемых рекомендаций [6, 7].

Рассмотрим пример, когда в БЗ будут сохраняться ДП $X_1, \dots, X_m$, представляющие собой значения СРПВ, регистрируемые монитором ПВ на различных участках крупных артерий, а также дополнительные данные о пациенте (m — число параметров). Одновременно с этим эксперт будет вносить заключение о стадии развития заболевания. В результате образуются множество ДП $X_1, \dots, X_N, 1, \dots, m$, рассчитанных по данным исследований $u_1, \dots, u_N$ и сопоставляемые им экспертные заключения $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_N$, где N — число проведенных исследований.

Формальная постановка классификации состояния сосудов с помощью экспертной системы будет выглядеть, как отображение f декартова произведения множеств значений ДП на множество диагнозов:

$$f: \prod_{i=1}^m X_i \rightarrow \mathcal{D}, X_i \in X, \quad (1)$$

где $\mathcal{D} = \{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n\}$ (n — число диагнозов) — множество диагнозов; $X = \{X_1, X_2, \dots, X_m\}$ — множество ДП, f — функция классификации, ставящая в соответствие множеству значений ДП диагноз. Аналитический вид этой функции неизвестен, но на основании знаний в виде опытных данных и оценок, представленных экспертами, возможно ее частичное определение.

При решении задач классификации заболеваний сосудов предполагается, что каждое состояние попадает в один и только один класс. Но в реальных диагностических задачах зачастую нельзя определить точную принадлежность состояния сосудов человека одному классу, т. е. классы заболеваний имеют размытую природу. Теория нечетких множеств дает средство для разрешения этой проблемы [7–9].

Логический вывод осуществляется на основе наблюдаемых и фиксируемых экспертами в БЗ правил формирования диагнозов на этапе обучения системы. На основании приведенного примера измерений СРПВ и данных о пациенте запишем правила:

PP_1 : если $X_1 = X_{1,1}$ и ... если $X_m = X_{1,m}$, то $\mathcal{D} = \varepsilon_1$,

PP_2 : если $X_2 = X_{2,1}$ и ... если $X_m = X_{2,m}$, то $\mathcal{D} = \varepsilon_2$,

...

PP_k : если $X_k = X_{k,1}$ и ... если $X_m = X_{k,m}$, то $\mathcal{D} = \varepsilon_n$,

где X и $\mathcal{D}$ — нечеткие входная переменная ДП и переменная вывода диагноза, X_i и ε_i — соответствующие функции принадлежности (низкое, ниже нормы, норма, выше нормы, высокое).

Задача классификации в соответствии с выражением (1) состоит в отнесении состояния сосудов, заданного входным вектором ДП $X = \{X_1, X_2, \dots, X_m\}$ к одному из определенных классов $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n\}$, т. е. состоит в выполнении отображения вида

$$X = \{X_1, X_2, \dots, X_m\} \rightarrow \mathcal{D} \in \{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n\}.$$

Классификацию на основе нечеткого логического вывода в соответствии с работами [8, 9] предполагается производить по БЗ с помощью алгоритма Мамдани:

$$\bigcup_{p=1}^{m_j} \left[\bigcap_{i=1}^k X_i = a_{i,jp} \text{ с весом } w_{jp} \right] \rightarrow \mathcal{D} = \varepsilon_j, j = \overline{1, n},$$

причем:

$$a_{i,jp} = \int_{\bar{n}_i}^{\bar{n}_i} \mu_{jp}(X_i)/X_i dX_i, \text{ где } X_i \in [\underline{X}_i, \bar{X}_i] \text{ и } \mu_{jp}(X_i) —$$

функция принадлежности входа X_i нечеткому терму $a_{i,jp}$,

$$\varepsilon_j = \int_{\bar{\varepsilon}}^{\bar{\varepsilon}} \mu_j(\varepsilon)/\varepsilon d\varepsilon, \text{ где } \varepsilon \in [\underline{\varepsilon}, \bar{\varepsilon}] \text{ и } \mu_j(\varepsilon) — \text{функ-}$$

ция принадлежности выхода ε нечеткому терму ε_j .

Степени принадлежности состояния сосудов, информативные признаки которого заданы вектором ДП: $X^* = (X_1^*, X_2^*, \dots, X_m^*)$, классам ε_n из БЗ, рассчитываются как

$$\mu_{\varepsilon_j}(X^*) = \bigvee_{p=1, m_j} w_{jp} \cdot \bigwedge_{i=1, m} (\mu_{jp}(X_i^*)), \quad j = \overline{1, k},$$

где $\bigvee(\bigwedge)$ — операция из s -нормы (t -нормы), т. е. из множества реализаций логической операций ИЛИ (И): для операции ИЛИ — нахождение максимума и для операции И — нахождение минимума. В результате получаем такое нечеткое множество состояний сосудов $\tilde{\varepsilon}$, соответствующее входному вектору ДП X^* :

$$\tilde{\varepsilon} = \frac{\mu_{\varepsilon_1}(X^*)}{\varepsilon_1} + \frac{\mu_{\varepsilon_2}(X^*)}{\varepsilon_2} + \dots + \frac{\mu_{\varepsilon_n}(X^*)}{\varepsilon_n}.$$

Для перехода от нечеткого множества, заданного на множестве нечетких термов известных диагнозов $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n\}$, характеризующих стадию развития заболевания, к нечеткому множеству на интервале $[\underline{\varepsilon}, \bar{\varepsilon}]$ необходимо «срезать» функции принадлежности $\mu_{\varepsilon_j}(\varepsilon)$ на уровне $\mu_{\varepsilon_j}(X^*)$ и объединить полученные нечеткие множества. В результате определяется уровень и стадия развития заболевания, более подходящие к введенным параметрам, и формируется диагноз и сохраняется в журнале пациента БЗ.

3. ОЦЕНКА ЭФФЕКТИВНОСТИ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ИНФОРМАЦИОННО-ДИАГНОСТИЧЕСКОЙ ТЕХНОЛОГИИ И МОНИТОРА ПУЛЬСОВОЙ ВОЛНЫ

Для оценки эффективности технологии интерпретации ДП проведем имитационное моделирование системы и сравним полученные результаты

с результатами других известных методов классификации. В качестве альтернативных методов возьмем метод ближайшего соседа, наивный метод Байеса и метод евклидовых расстояний.

В тестовом режиме в БЗ исследований было нанесено более 5000 выборок — различных диагностических параметров СРПВ на участке лучевой артерии и дополнительных данных о пациенте, в том числе возраст (взят постоянным — 50 лет), рост (взят постоянным — 170 см), артериальное давление, масса тела. Диапазоны значений используемых выборок ДП были выбраны произвольным образом (табл. 1).

Далее были выделены группы контрольных выборок и проведена классификация ДП из 5 классов: 1-й класс — «ДП снижен», 2-й класс — «ДП ниже нормы», 3-й класс — «ДП в норме», 4-й класс — «СРПВ выше нормы», 5-й класс — «ДП повышен», идентифицирующих проверочную группу состояний сосудов. Ответы, даваемые ИДТ, интерпретированы как:

- «ДП сосудов принадлежат 1-му классу»;
- «ДП сосудов принадлежат 2-му классу»;
- «ДП сосудов принадлежат 3-му классу»;
- «ДП сосудов принадлежат 4-му классу»;
- «ДП сосудов принадлежат 5-му классу»;
- «ДП сосудов принадлежат новому классу».

Входные данные, распределенные по классам, были подвергнуты контрольной классификации. Далее было подсчитано число совпадающих диагнозов, т. е. одинаковых для эталонных классов и результатов классификации. Для нечеткого классификатора принимался ответ, имеющий степень принадлежности к соответствующему терму более 0,60. Из полученного числа правильных диагнозов определена точность классификации с применением каждого метода на основании расчета степени засоренности правильных ответов: $K_i = (N_i - \underline{N}_i)/N_i$, где i — номер класса; N_i — эталонное число значений ДП, входящих в класс i ; $\underline{N}_i$ — определенное число значений ДП, входящих в класс i ; $(N_i - \underline{N}_i)$ — число ошибочных диагнозов среди ответа i .

Для этих расчетов применялся специально разработанный программный имитатор классификационных процедур, осуществляющий, кроме расчета точности, также оценку машинного времени T , необходимого для вычислительных операций сов-

Таблица 1

Диапазоны значений ДП для заполнения БЗ исследований

Параметр	Низкое	Ниже нормы	Норма	Выше нормы	Высокое
СРПВ, м/с	Менее 5	5—7	7—9	9—11	Более 11
Артериальное давление, мм рт. ст.	Менее 105/65	105/65—115/75	115/75—125/85	125/85—135/95	Более 135/95
Масса тела, кг	Менее 55	55—65	65—75	75—85	Более 85



Таблица 2

**Результаты имитационного моделирования
классификационных процедур**

Наименование классификатора	<i>T</i> , мс	<i>K</i>	<i>T</i> , мс	<i>K</i>	<i>T</i> , мс	<i>K</i>
	100 элементов		500 элементов		1000 элементов	
Метод ближайшего соседа	6,810	0,77	16,660	0,84	30,331	0,96
Наивный метод Байеса	37,182	0,82	71,615	0,87	127,327	0,97
Метод евклидовых расстояний	5,300	0,91	12,390	0,92	14,050	0,92
Нечеткий классификатор	37,458	0,96	88,160	0,99	144,702	0,99

ременной ЭВМ с процессором семейства $\times 86$ (для примера использовалась типовая конфигурация рабочей станции на базе Pentium 4; 3 ГГц) [10]. Результаты имитационного моделирования на группах из 100, 500 и 1000 элементов представлены в табл. 2.

Самыми сложными в смысле воспроизведения механизма вывода оказались два метода: наивный метод Байеса и нечеткой классификации, поскольку в них значительно больше классификационных правил для принятия решения о включении в кластер элементов.

Классификатор на основе нечеткой логики показал худшие результаты по времени выполнения в связи со сложностью самого алгоритма. Однако результаты его работы выгодно отличаются от результатов аналогов высокой точностью при различных выборках.

Во всех случаях время выполнения классификации нелинейно зависит от объема выборки. При увеличении объема выборки в 10 раз время выполнения увеличилось в среднем в 3–5 раз. В то же время при увеличении объема выборки все методы обеспечили приемлемую точность.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предложены и исследованы метод и алгоритмы, обеспечивающие формализацию и обработку знаний о механизмах возникновения и развития заболеваний крупных кровеносных сосудов, с поддержкой многовариантности оценок на основе нечетких высказываний. Предложенная ИДТ — информационно-диагностическая технология — логично дополняет существующую технологию мониторинга пульсовой волны, а результаты ее практического применения могут иметь большое значение при выявлении различных групп забо-

леваний. Предложенный подход к формированию многозначного решения о принадлежности состояния участка сосуда к тому или иному классу близок к логике врача, ставящего диагноз, в связи с чем риск получения некорректного диагноза с помощью ИДТ может быть сведен к минимуму.

Представлены оценки точностных и временных характеристик функционирования имитационной модели предложенной технологии. Полученные результаты позволяют рекомендовать технологию к применению в медицинских исследовательских институтах для раскрытия ключевых факторов, определяющих необходимость развития методов заблаговременного обнаружения отклонений в работе сосудов, обнаружения начальной стадии развития заболеваний, формирования этапов лечения в зависимости от истории заболевания. Разработанная ИДТ сосудов человека может применяться при формировании и накоплении знаний о процессах и механизмах возникновения и развития заболеваний, что необходимо для разработки новых методик лечения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Назаренко Г.И., Гулиев Я.И., Ермаков Д.Е. Медицинские информационные системы: теория и практика. — М.: Физматлит, 2005. — 320 с.
2. Конт В.И. Математические методы и моделирование в здравоохранении. — М.: Медицина, 1987. — 224 с.
3. Распознавание образов и медицинская диагностика / Под ред. Ю.И. Неймарка. — М.: Наука, 1972. — 328 с.
4. Власова С.П., Лебедев П.А., Калакутский Л.И. Возможности компьютерного анализа фотоплетизмограммы в оценке эластических свойств артерий у больных с гипертонической болезнью // Новые информационные технологии в медицине, биологии, фармакологии и экологии: Материалы XI Междунар. конференции. — Ялта, 2003. — С. 58, 59.
5. Файзрахманов Р.А., Кычкин А.В. Алгоритмическое и программное обеспечение диагностики атеросклероза // Проблемы управления. — 2009. — № 2 — С. 66–70.
6. Экспертные системы. Принципы работы и примеры / Под ред. Р. Форсайта. — М.: Радио и связь, 1987. — 350 с.
7. Negnevitsky M. Artificial intelligence: a guide to intelligent systems. Harlow. — England. Addison-Wesley, 2002.
8. Заде Л.А. Понятие лингвистической переменной и его применение к принятию приближенных решений. — М.: Мир, 1976. — 161 с.
9. Прохоренков А.М., Качала Н.М. Использование методов нечеткой логики для определения классификационных характеристик случайных процессов // Вестник МГТУ. — 2006. — № 3. — С. 514–521.
10. Кычкин А.В. Оперативная оценка состояния сосудов человека. Измерительно-информационная технология и инструментальные средства. — Саарбрюккен, Германия: LAP LAMBERT Academic Publishing GmbH, 2011. — 178 с.

Статья представлена к публикации членом редколлегии В.Н. Новосельцевым.

Кычкин Алексей Владимирович — канд. техн. наук, доцент, Пермский национальный исследовательский политехнический университет,
☎ (342) 239-10-39, ✉ ak@itas.pstu.ru, aleksey.kychkin@gmail.com.

ДИНАМИКА ГИРОСИЛОВОЙ СТАБИЛИЗАЦИИ КРУПНОГАБАРИТНЫХ СПУТНИКОВ ПРИ ИСПОЛЬЗОВАНИИ НАСТРАИВАЕМОГО ПД-АЛГОРИТМА УПРАВЛЕНИЯ¹

И.Н. Крутова, В.М. Суханов

Рассмотрены некоторые вопросы компьютерного синтеза параметров настраиваемого пропорционально-дифференциального алгоритма гиросилового управления крупногабаритным упругим спутником, обеспечивающего оптимальное по времени управление ориентацией при наличии инфранизких частот упругих колебаний конструкции. Предложена методика выделения в пространстве параметров модели объекта области таких значений парциальных частот, в которой можно применять упрощенный алгоритм с постоянными коэффициентами без снижения качества управления. Рассмотрена возможность применения адаптивного алгоритма для гиросилового управления упругим спутником с нестационарной моделью.

Ключевые слова: деформируемый космический аппарат, математическая модель, гиросиловое управление ориентацией, гиросин.

ВВЕДЕНИЕ

Рассматривается режим точной гиросиловой стабилизации углового положения деформируемых космических аппаратов (ДКА). В качестве исполнительного органа системы служит силовой гироскопический комплекс (СГК), содержащий три гиродина (ГД), установленных по схеме плоской трехлучевой звезды [1]. При равенстве по модулю собственных кинетических моментов ГД H_k ($k = \overline{1, 3}$ — номер канала стабилизации) каждый из них создает управляющий момент, воздействующий на угловое положение ДКА преимущественно относительно одной («своей») оси, связанной с корпусом системы координат.

Для крупногабаритных спутников связи, относящихся к классу ДКА, низкочастотные упругие колебания конструкции порождают проблему взаимосвязи между колебаниями конструкции и сис-

темой управления основным («жестким») движением космического аппарата (КА), выражающуюся в снижении качества управления, в частности, в ухудшении точности ориентации в заданном направлении и в увеличении времени регулирования. Показано, что по отношению к упругим колебаниям q система, содержащая гироскопический стабилизатор, остается устойчивой даже при отсутствии управления гиродинами и при нулевом собственном демпфировании колебаний конструкции [1]. Физически это объясняется наличием свойства пассивной гироскопической реакции ГД с моментным приводом по оси прецессии. Действительно, упругие колебания инерционно взаимодействуют с корпусом КА и, благодаря гироскопической связи с ГД, передаются на ось прецессии ГД, где они гасятся в демпфирующем устройстве. Однако демпфирующие свойства пассивной гиросtabilизации колебаний в системе, предназначенной для управления угловым положением спутника, относительно невелики и к тому же существенно зависят от частоты колебаний, ухудшаясь при снижении частот.

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 11-08-01037).



В работе [1] рассмотрен также ряд вопросов гиросилового управления упругим КА с использованием в качестве закона управления гиродинами дискретного аналога пропорционально-интегрального алгоритма, сформированного на основе сигналов измерения углового положения ДКА. Наличие интегральной составляющей в законе управления приводит в установившемся режиме к накоплению ошибки углового положения по углам прецессии ГД, что вызывает необходимость периодической разгрузки СГК. Выявлено также наличие влияния упругих низкочастотных (0,1–0,3 Гц) колебаний конструкции на устойчивость и качество системы угловой стабилизации ДКА, хотя и не получено конкретных соотношений, определяющих влияние значений частот на выбор параметров системы из условия обеспечения требуемой динамики процессов управления.

С учетом сказанного в предлагаемой нами работе рассматривается возможность использования в качестве закона управления гиродинами дискретного пропорционально-дифференциального (ПД) алгоритма. Решается задача определения значений коэффициентов ПД-алгоритма, обеспечивающих оптимальное по времени регулирования управление ориентацией ДКА при наличии «инфранизких» (0,01–0,1 Гц) частот упругих колебаний его конструкции. Рассматривается возможность применения адаптивной настройки параметров алгоритма в случае плохой определенности или при изменении частот упругих колебаний ДКА в отдельных каналах гиросtabilизации.

1. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ РАССМАТРИВАЕМОЙ СИСТЕМЫ

Для конкретности перечисленные задачи без нарушения общности будем рассматривать на примере механической структуры геостационарного спутника «Муссон», характерные значения параметров которой, определяющие коэффициенты математической модели объектов рассматриваемого класса, приведены в работах [1, 2].

Уравнения динамики ДКА с СГК из трех ГД, собранных по схеме типа «звезда», в малой окрестности невозмущенного движения могут быть представлены в следующей скалярной форме [1].

- Уравнения динамики ДКА с ГД по каналу курса:

$$I_{\psi} \ddot{\psi} - H_1 \dot{\beta}_1 + a I_{\beta} [\ddot{\beta}_2 + \ddot{\beta}_3 + a(2\ddot{\psi} + \ddot{\phi} + \ddot{\vartheta}) + \dot{\phi}(\dot{\beta}_1 + \dot{\beta}_2) - \dot{\vartheta}(\dot{\beta}_1 + \dot{\beta}_3)] + \tilde{I}_1^{\psi} \ddot{q}_1^{\psi} + \tilde{I}_2^{\psi} \ddot{q}_2^{\psi} = M_{\psi};$$

$$I_{\beta} \ddot{\beta}_1 + k_{\beta} \dot{\beta}_1 + k_{\beta} \beta_1 + a I_{\beta} (\ddot{\phi} + \ddot{\vartheta}) + H_1 \dot{\psi} = M_u^{\psi}(u_{\psi});$$

$$r_{1\psi} \ddot{\psi} + \ddot{q}_1^{\psi} + \Omega_1^{\psi 2} q_1^{\psi} = 0;$$

$$r_{2\psi} \ddot{\psi} + \ddot{q}_1^{\psi} + \Omega_2^{\psi 2} q_2^{\psi} = 0. \quad (1)$$

- Уравнения динамики ДКА с ГД по каналу крена:

$$I_{\phi} \ddot{\phi} - H_2 \dot{\beta}_2 + a I_{\beta} [\ddot{\beta}_1 + \ddot{\beta}_3 + a(2\ddot{\phi} + \ddot{\psi} + \ddot{\vartheta}) + \dot{\vartheta}(\dot{\beta}_2 + \dot{\beta}_3) - \dot{\psi}(\dot{\beta}_1 + \dot{\beta}_2)] + \tilde{I}_1^{\phi} \ddot{q}_1^{\phi} = M_{\phi};$$

$$I_{\beta} \ddot{\beta}_2 + k_{\beta} \dot{\beta}_2 + k_{\beta} \beta_2 + a I_{\beta} (\ddot{\psi} + \ddot{\vartheta}) + H_2 \dot{\phi} = M_u^{\phi}(u_{\phi});$$

$$r_{1\phi} \ddot{\phi} + \ddot{q}_1^{\phi} + \Omega_1^{\phi 2} q_1^{\phi} = 0. \quad (2)$$

- Уравнения динамики ДКА с ГД по каналу тангажа:

$$I_{\vartheta} \ddot{\vartheta} - H_3 \dot{\beta}_3 + a I_{\beta} [\ddot{\beta}_1 + \ddot{\beta}_2 + a(2\ddot{\vartheta} + \ddot{\psi} + \ddot{\phi}) + \dot{\psi}(\dot{\beta}_1 + \dot{\beta}_3) - \dot{\phi}(\dot{\beta}_2 + \dot{\beta}_3)] + \tilde{I}_1^{\vartheta} \ddot{q}_1^{\vartheta} = M_{\vartheta};$$

$$I_{\beta} \ddot{\beta}_3 + k_{\beta} \dot{\beta}_3 + k_{\beta} \beta_3 + a I_{\beta} (\ddot{\phi} + \ddot{\psi}) + H_3 \dot{\vartheta} = M_u^{\vartheta}(u_{\vartheta});$$

$$r_{1\vartheta} \ddot{\vartheta} + \ddot{q}_1^{\vartheta} + \Omega_1^{\vartheta 2} q_1^{\vartheta} = 0. \quad (3)$$

В уравнениях (1)–(3) обозначено: $(\psi, \phi, \vartheta) \in x$ — углы ориентации корпуса ДКА (каналы: курс $\psi \doteq x_1$, крен $\phi \doteq x_2$, тангаж $\vartheta \doteq x_3$); $\beta \doteq (\beta_k)$, $k = \overline{1, 3}$ — углы прецессии рамок ГД соответствующих каналов гиросtabilизации; $q^x = (q_i^x)$, $i = \overline{1, n_x}$ — вектор координат, характеризующих упругие колебания конструкции ДКА по каждому из трех каналов; $H = (H_1, H_2, H_3)$ — равные по модулю кинетические моменты гиродинамов СГК; I_x — моменты инерции ДКА ($I_x \gg 2a^2 I_{\beta}$, где $a = \cos(\pi/4)$, I_{β} — моменты инерции ГД.); $\tilde{I} = (\tilde{I}_i^x)$, $i = \overline{1, n_x}$ — коэффициенты инерционного влияния упругих элементов конструкции на движение корпуса ДКА в соответствующем канале гиросtabilизации; $r_i^x = (r_1^x, r_2^x, \dots, r_{n_x}^x)$ — безразмерные элементы, которые определяются в соответствии с правилом $r_i^x = \tilde{I}_i^x / \tilde{J}_i^x$, где $\tilde{J}_i^x$ — моменты инерции упругих элементов конструкции ДКА; $\Omega^x = (\Omega_1^x, \Omega_2^x, \dots, \Omega_{n_x}^x)$ — парциальные частоты упругих колебаний ДКА в соответствующих каналах управления (от-

метим, что уравнения колебаний упругих солнечных батарей для КА «Муссон» учитывают четыре основных тона, два из которых (q_1^ψ и q_2^ψ) влияют на динамику канала курса, а в каналах крена и тангажа учитывается по одному тону колебаний (q_1^ϕ и q_1^θ соответственно); M_x — возмущающие моменты; $M_u^x(u_x)$ — управляющие моменты, прикладываемые относительно осей рамок ГД; u_x — алгоритм управления соответствующим гирином.

Из уравнений (1)–(3) видно, что все каналы гиросtabilизации даже в рамках линеаризованной модели являются взаимосвязанными, причем структура взаимосвязей обусловлена как инерционными, так и гироскопическими влияниями.

Для измерения углов ориентации $x = (\psi, \phi, \theta)$ используется дискретная система определения углового положения КА с периодом квантования T_q . Кусочно-непрерывные управления гиридинами фиксируются на каждом периоде управления T_0 , который выбирается кратным периоду T_q так, что $n_q = T_0/T_q$ — целое число (для определенности примем $T_0 = 4$ с, $T_q = 0,25$ с). Для обработки измерений на j -м периоде управления воспользуемся следующей процедурой осреднения координаты:

$$\bar{x}_j = n_q^{-1} \sum_{v=1}^{n_q} x_v, \quad x_v = x(vT_q). \quad (4)$$

В отличие от работы [1], где применяется алгоритм управления гиридинами в виде дискретного аналога изодромного звена, в качестве закона управления рассмотрим возможность и особенности применения для управления гиридинами в режиме стабилизации ДКА ПД-алгоритма адаптивного типа (с перестраиваемыми коэффициентами) [3]:

$$u_x(jT_0) = -[k_1^x \bar{x}_j(jT_0) + k_2^x \Delta \bar{x}_j(jT_0)], \quad j = 0, 1, 2, \dots; \quad x = (\psi, \phi, \theta), \quad (5)$$

где $\Delta \bar{x}_j$ — первая разность, $\bar{x}_j$ вычисляется согласно выражению (4); k_{2k} — настраиваемый коэффициент, значение которого определяется на основании приведенного далее решения задачи оптимизации по критерию Q_k , минимизирующему время t_k^* регулирования в k -м канале (при переориентации ДКА), которое в числе прочего зависит от текущего значения частоты Ω_i^x , как правило, низшей ($i = 1$) упругой моды

$$Q_x = t_k^*(k_{2x}, \Omega_i^x) \rightarrow \min_{k_{2x} = \text{var}, \Omega_i^x = \text{const}}, \quad x = (\psi, \phi, \theta). \quad (6)$$

2. ПАРАМЕТРИЧЕСКИЙ СИНТЕЗ СИСТЕМЫ ГИРОСТАБИЛИЗАЦИИ ДКА И ИССЛЕДОВАНИЕ ДИНАМИКИ

Показано, что в силу малости величины aI_β ($\approx 0,25$) по сравнению с моментом инерции ДКА I_x ($\approx 10^4$) перекрестными инерционными влияниями движений ГД в первом приближении можно пренебречь [1]. Это позволяет декомпозировать систему (1)–(3) на три подсистемы, соответствующие изолированным каналам гиросtabilизации:

$$I_x \ddot{x} + \sum_{i=1}^{n_x} \tilde{I}_i^x \ddot{q}_i^x - H \dot{\beta} = M_x; \quad I_\beta \ddot{\beta} + k_\beta \dot{\beta} + H \dot{x} = M(u_x); \quad (7)$$

$$t_{ix} \ddot{x} + \ddot{q}_i^x + \Omega_i^{x2} q_i^x = 0, \quad i = \overline{1, n_x},$$

где n_x — число учитываемых в данном канале упругих мод.

Предварительно решим задачу начального синтеза базовых значений коэффициентов алгоритма (5) на основе одноканальной системы (7) без учета упругости конструкции. При этом уравнения (7) принимают вид

$$I_x \ddot{x} - H \dot{\beta} = M_x, \quad I_\beta \ddot{\beta} + k_\beta \dot{\beta} + H \dot{x} = M(u_x). \quad (8)$$

Характеристическое уравнение этой системы при ее замыкании отрицательной обратной связью (5), формирующей управляющий момент $M(u_x) = -k_0^x (k_1^x x + k_2^x \dot{x})$, прикладываемый к рамке ГД, без учета дискретной фильтрации измеряемых углов ориентации записывается в виде операционного уравнения

$$D(s) = s(s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0) = 0, \quad (9)$$

где s — переменная преобразования Лапласа и

$$a_2 = k_\beta / I_\beta, \quad a_1 = H(H + k_0^x k_2^x) / I_x I_\beta, \quad a_0 = H k_0^x k_1^x / I_x I_\beta. \quad (10)$$

В этом случае условие устойчивости по угловой скорости $\dot{x}$ для системы (8), полученное на основе уравнения (9) с учетом формул (10), имеет вид

$$k_\beta (H + k_0^x k_2^x) > I_\beta k_0^x k_1^x. \quad (11)$$

Известным преобразованием [4] $s = y^3 \sqrt{a_0}$ уравнение (9) приводится к виду

$$D(y) = y^3 + b_2 y^2 + b_1 y + 1 = 0, \quad (12)$$



где $b_2 = a_2/\sqrt[3]{a_0}$, $b_1 = a_1/\sqrt[3]{a_0}$ — параметры Вышнеградского.

Степень устойчивости η_s^x исходного характеристического уравнения (9), определяющая время переходного процесса в системе (8) (для канала $x = (\psi, \varphi, \theta)$), связана со степенью устойчивости η_y уравнения (12) соотношением

$$\eta_s^x = \eta_y \sqrt[3]{a_0}, \quad (13)$$

где η_y определяется из решения уравнения [4]

$$\eta_y^3 - b_2 \eta_y^2 + b_1 \eta_y - 1 = 0.$$

Далее синтез параметров ПД-алгоритма (5) для исходной трехканальной модели с учетом низкочастотных упругих колебаний конструкции ДКА будем осуществлять на основе компьютерного моделирования уравнений (1)–(3), описывающих динамику пространственного углового движения ДКА с силовым гироскопическим из трех гироскопов. Для этого введем числовые значения параметров механической структуры ДКА и параметров СГК в соответствии с приведенными в работах [1, 2] данными для крупногабаритного спутника связи «Муссон»: $I_\psi = 48\,100 \text{ Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с}^2$, $I_\varphi = 7700 \text{ Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с}^2$, $I_\theta = 52\,600 \text{ Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с}^2$, $\tilde{I}_1^\psi = 1630 \text{ Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с}^2$, $\tilde{I}_2^\psi = 9941 \text{ Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с}^2$, $\tilde{I}_1^\varphi = 4285 \text{ Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с}^2$, $\tilde{I}_1^\theta = 6130 \text{ Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с}^2$, $r_{1\psi} = r_{11} = 1$, $r_{2\psi} = r_{21} = 2,32$, $r_{3\varphi} = r_{32} = 1$, $r_{4\theta} = r_{43} = 1$; остальные $\tilde{I}_{ix_k}$, $r_{ix_k} = 0$; $H_k = 170 \text{ Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с}$, $I_\beta = 0,36 \text{ Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с}^2$, $k_\beta = 0,12 \text{ Н} \cdot \text{м}/\text{рад}$, $k_\beta = 2,4 \text{ Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с}/\text{рад}$; $a = \cos(\pi/4) = 0,707$ — параметр СГК типа «звезда». Парциальные частоты колебаний, распределенных по каналам системы в соответствии с уравнениями (1)–(3), составляют: $\Omega_1^\psi \doteq \Omega_{\min} = 2\pi(0,01 \div 0,1 \text{ Гц})$, $\Omega_2^\psi = 1,74\Omega_1^\psi$ — парциальные частоты колебаний в канале курса, $\Omega_1^\varphi = 1,04\Omega_1^\psi$ — частота колебаний в канале крена, $\Omega_1^\theta = 1,13\Omega_1^\psi$ — аналогичный параметр в канале тангажа. Величину $f_{\min} = \Omega_{\min}/(2\pi)$ условно назовем «опорной» частотой ДКА.

Используя приведенные числовые значения соответствующих параметров модели (8) и полученные выше условие устойчивости (11) и выражение (13), позволяющее установить допустимое время регулирования (для жесткого КА) $\bar{t}_p$, выраженное через параметры уравнения (9) соотношением $\bar{t}_p = 3/\eta_s^x$, получим в итоге исходные (номиналь-

ные) значения коэффициентов базового ПД-алгоритма в каждом из каналов управления. В частности, для каналов курса и тангажа с близкими значениями моментов инерции $I_\psi \approx I_\theta$ было получено:

$\bar{k}_0^{\psi, \theta} = 2$, $\bar{k}_1^{\psi, \theta} = 20$, $\bar{k}_2^{\psi, \theta} = 150$. Соответствующие расчеты для канала крена дали: $\bar{k}_0^\varphi = 2$, $\bar{k}_1^\varphi = 15$, $\bar{k}_2^\varphi = 130$. Черта над коэффициентами указывает, что их значения получены без учета упругости конструкции КА.

Процедуру компьютерного синтеза будем осуществлять отдельно по каждому каналу с последующей проверкой методами моделирования «устойчивости» полученных результатов по отношению к возмущениям со стороны других каналов пространственной системы гиросtabilизации углового положения ДКА, заданной уравнениями (1)–(3).

Показано, что время регулирования в системах управления ориентацией ДКА в общем случае зависит от частоты упругих колебаний конструкции, особенно в низкочастотной области, заметно увеличиваясь при понижении частоты колебаний [3].

Поставим задачу поканального параметрического синтеза ПД-алгоритма системы гиросtabilизации ДКА с низкочастотным спектром упругих колебаний конструкции.

Пусть минимальная частота упругих колебаний ДКА, соответствующая частоте колебаний в канале курса $\Omega_{\min} \doteq \Omega_1^\psi$, пошагово, с интервалом дискретности $\Delta_\Omega = 0,0628 \text{ с}^{-1}$ (или $\Delta_f = 0,01 \text{ Гц}$), изменяется в пределах $2\pi(0,1 \div 0,01 \text{ Гц})$. Парциальные частоты колебаний ДКА в остальных каналах управления также изменяются соответствующим образом по соотношениям $\Omega_i^x = k_x \Omega_{\min}$, приведенным выше. Зададим начальное состояние системы (1) — (3) в виде:

$$\begin{aligned} x(0) &= 0,017 \text{ рад}; \quad \dot{x}(0) = 0; \quad \beta_x(0) = \dot{\beta}_x(0) = 0; \\ q_i^x(0) &= \dot{q}_i^x(0) = 0; \quad x = (\psi, \varphi, \theta). \end{aligned}$$

Определяя время регулирования t_x^* известным образом [4]: $|x(t) - x_\infty| \leq \Delta_x$, $t \geq t_x^*$, выберем требуемую точность ориентации ДКА в виде 5 % от установившегося значения так, что $\Delta_x = 5 \cdot 10^{-5} \text{ рад}$. При выбранных ранее базовых значениях параметров ПД-алгоритма (5) ($\bar{k}_1^x, \bar{k}_2^x = \text{const}$) время регулирования t_x^* , изменяясь при изменении значений частот колебаний Ω_i^x , в общем случае не является оптимальным.

Зафиксируем для всей области изменения частот первый коэффициент базового алгоритма $\bar{k}_1^x = \text{const}$, оставив свободным выбор второго коэффициента $k_2^x = \text{var}$.

Решаемая задача состоит в компьютерном поиске для каждого текущего ($n = 1, 2, \dots, N$) набора значений парциальных частот ($\Omega_{\min} = 2\pi f_{\min}$, $\Omega_i^x = k_x \Omega_{\min}$) $_n$ такого оптимального значения ($k_2^x = k_{2\text{опт}}^x$) $_n$, которое в соответствии с критерием (6) обеспечивает для « n -го ДКА» минимальное время регулирования (t_x^*) $_n = \min$, $x = (\psi, \varphi, \vartheta)$.

Результаты решения задачи методами компьютерного моделирования частично приведены в таблице.

В качестве аргумента (варьируемого параметра) здесь принята низшая парциальная частота упругого элемента в канале курса $f_1^\psi = \Omega_{\min}/(2\pi)$, которая (в совокупности с зависящими от нее частотами колебаний в других каналах) определяет частотные свойства ДКА на n -м этапе моделирования ($n = 1, \dots, 10$). В результате поканальной реализации каждого этапа путем вариации коэффициентов алгоритма (5) $k_2^x = \text{var}$, $x = (\psi, \varphi, \vartheta)$, отыскиваются их оптимальные значения ($k_2^x = k_{2\text{опт}}^x$) $_n$ (см. табл.), обеспечивающие минимальное время регулирования в соответствующих изолированных каналах гиросtabilизации $t_{x\min}^*$. Из таблицы видно, что оптимальные значения коэффициентов $k_{2\text{опт}}^\psi(f_{\min})$ и $k_{2\text{опт}}^\vartheta(f_{\min})$ по каналам курса и тангажа в рассматриваемом диапазоне изменения «опорной» частоты $f_{\min}$ практически совпадают, что объясняется относительной близостью моментов инерции ДКА и парциальных частот в этих ка-

налах. Заметное отличие ($\sim 15\%$) коэффициента $k_{2\text{опт}}^\varphi(f_{\min})$ в канале крена вызвано более чем пятикратным отличием момента инерции КА по данному каналу. В таблице также содержится информация о времени затухания $t_{q_i}^*$ упругих колебаний

q_i^x , возбуждаемых управляющими моментами гиросtabilизатора при переориентации ДКА.

Как показали исследования, в области пониженных значений рассматриваемого диапазона частот $\Omega_{\min} = 2\pi(0,1 \div 0,01 \text{ Гц})$, время затухания упругих колебаний значительно превышает время регулирования по углам ориентации, т. е. $t_{q_i}^* \gg t_{x\min}^*$, что

в отдельных случаях может считаться недостатком рассматриваемого способа управления.

В качестве примера на рис. 1 представлены переходные процессы в соответствующих каналах гиросtabilизации ДКА при $k_2^x = k_{2\text{опт}}^x$ для случая $f_{\min} = 0,03 \text{ Гц}$, которому в приведенной таблице соответствует состояние $n = 3$.

Из графиков видно, что время гашения упругих колебаний существенно превышает реализованное оптимальным управлением (5) время регулирования ($t_{x\min}^* \leq 170 \text{ с}$) по углам ориентации. В некоторых случаях такое «вялотекущее» демпфирование колебаний по тем или иным соображениям может оказаться неприемлемым, вследствие чего должна решаться дополнительная задача повышения эффективности управления колебаниями, которая в данной работе не затрагивается.

В соответствии с данными таблицы на рис. 2 построены графики оптимальных значений коэффициентов $k_{2\text{опт}}^\varphi$ и $k_{2\text{опт}}^\vartheta$, минимизирующих время регулирования в каналах крена и тангажа при из-

Некоторые результаты моделирования

n	$f_{\min} = \frac{\Omega_{\min}}{2\pi}, \text{ Гц}$	$k_{2\text{опт}}^\psi$	$t_{\psi\min}^*, \text{ с}$	$t_{q_1}^*, \text{ с}$	$t_{q_2}^*, \text{ с}$	$k_{2\text{опт}}^\varphi$	$t_{\varphi\min}^*, \text{ с}$	$t_{q_1}^*, \text{ с}$	$k_{2\text{опт}}^\vartheta$	$t_{\vartheta\min}^*, \text{ с}$	$t_{q_1}^*, \text{ с}$
1	0,01	400	373	Более 1000	900	319	154	Более 1000	390	158	Более 1000
2	0,02	300	300	1200	573	253	126	1100	305	225	1200
3	0,03	225	110	950	219	197	117	970	235	170	840
4	0,04	170	92	900	93	155	145	700	187	130	650
5	0,05	150	75	860	72	128	140	596	150	115	510
6	0,06	135	72	810	65	109	125	460	128	100	320
7	0,07	105	70	760	46	95	91	307	112	90	199
8	0,08	100	67	650	41	87	73	220	105	81	160
9	0,09	97	63	540	38	83	69	150	100	70	135
10	0,1	95	59	429	33	81	64	126	97	60	112

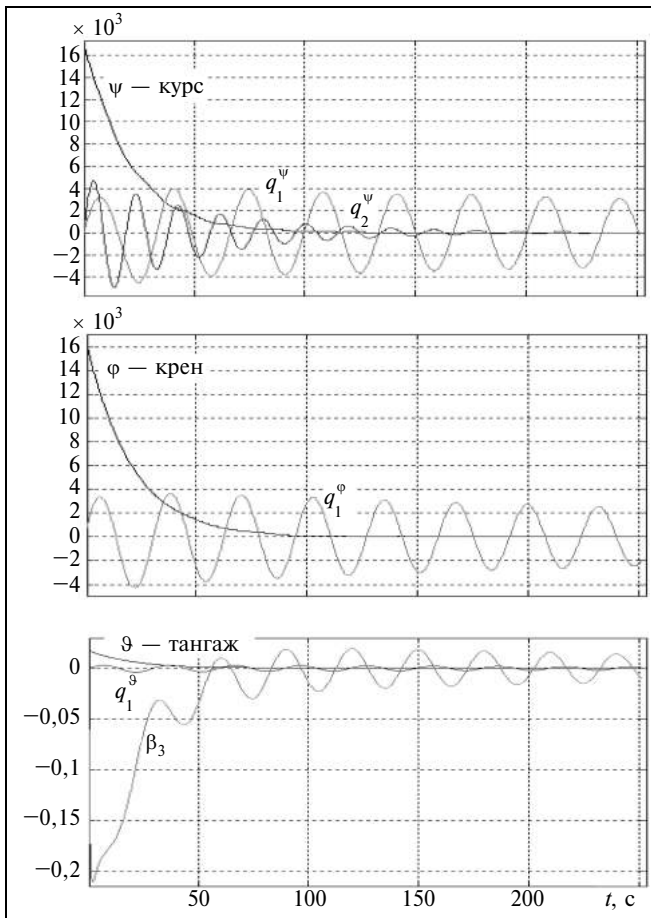


Рис. 1. Переходные процессы при ПД-алгоритме гиросилового трехканального управления ДКА

менении соответствующих парциальных частот колебаний ДКА, связанных с изменяющимся значением «опорной» частоты $f_{\min}$.

3. ДИНАМИКА СИСТЕМЫ ГИРОСТАБИЛИЗАЦИИ ДКА С АДАПТИВНЫМ ПД-АЛГОРИТМОМ

В работе [3] показано, что зависимость типа $k_2^x = k_{2\text{опт}}^x(f_{\min})$ может быть использована для адаптивной настройки соответствующего параметра алгоритма (5) при управлении ДКА с изменяющимся в изолированных каналах спектром частот. Такое поканальное изменение частот упругих колебаний возникает, например, вследствие вращения нежестких панелей солнечных батарей в процессе отслеживания ими направления на солнце.

Для подтверждения целесообразности применения адаптивного управления в этом случае были проведены дополнительные исследования динамики гиросилового управления ориентацией ДКА в канале тангажа при использовании в качестве закона управления гиродинами ПД-алгоритма (5) с

постоянными коэффициентами $\bar{k}_0^g = 2$, $\bar{k}_1^g = 20$ при двух альтернативных фиксированных значениях коэффициента $\bar{k}_2^g = 150$ и $\bar{k}_2^g = 0$.

Результаты компьютерного исследования для двух указанных случаев в виде графиков зависимости времени регулирования от изменяющейся частоты упругих колебаний приведены на рис. 3. В обоих случаях наблюдается резкое увеличение времени регулирования при попадании в область

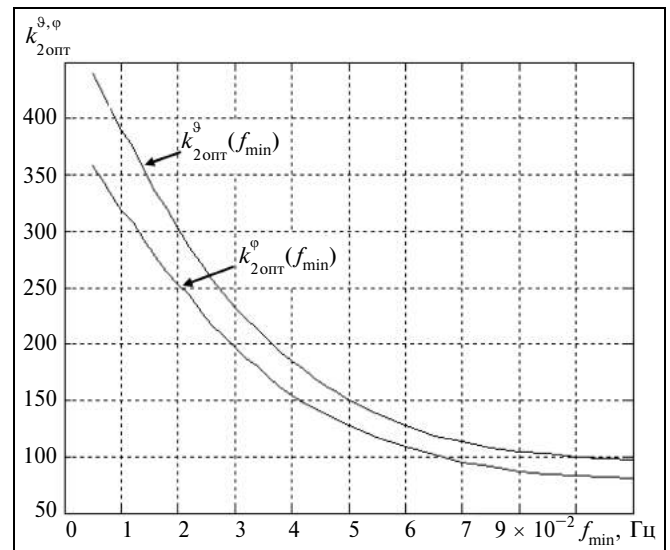


Рис. 2. График зависимости коэффициентов $k_{2\text{опт}}^x$ от частоты упругих колебаний

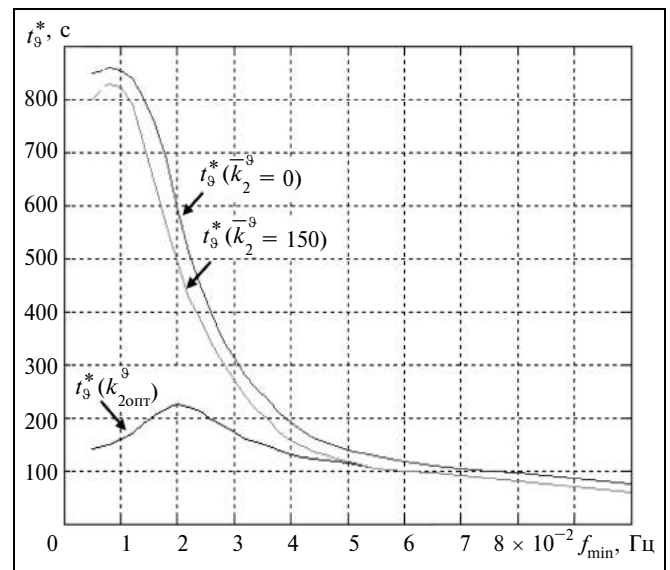


Рис. 3. Графики зависимости времени регулирования от частоты упругих колебаний в канале тангажа для трех типов алгоритма

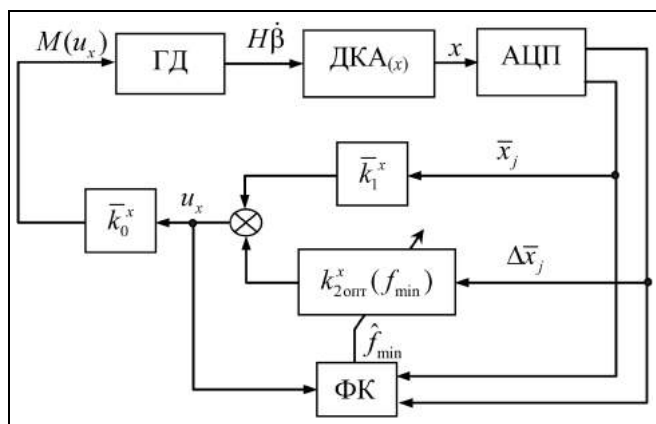


Рис. 4. Структурная схема адаптивной системы изолированного канала гиросtabilизации ДКА: АЦП — аналого-цифровой преобразователь сигнала датчика угла ориентации ДКА; $\hat{f}_{\min}$ — оценка текущего значения изменяющейся «опорной» частоты ДКА на выходе фильтра Калмана ФК, используемая для настройки коэффициента k_2^x

пониженных значений частот упругих колебаний ($f_{\min} < 0,05$ Гц). Присутствующий на рисунке третий график $t_9^*(k_{2opt}^9)$ будет пояснен далее.

Для устранения указанного недостатка в любом из каналов гиросtabilизации используем предложенную в работе [3] процедуру адаптивной настройки коэффициента k_2^x , $x = (\psi, \varphi, \vartheta)$ при изменении частоты $f_{\min}$, используя найденную ранее зависимость $k_{2opt}^x(f_{\min})$ (см. табл. и рис. 2). Подсистема настройки коэффициента k_2^x в общем случае содержит фильтр Калмана, используемый для идентификации текущего значения частоты $f_{\min}$ [5]. Структурная схема изолированного канала гиросtabilизации ДКА с контуром адаптивной настройки коэффициента k_2^x алгоритма (5) приведена на рис. 4.

Результаты моделирования динамики системы гиросtabilизации с настраиваемым указанным образом ПД-алгоритмом управления гирином на примере канала тангажа представлены на рис. 3 в виде графика зависимости времени регулирования от изменяющейся частоты $t_9^*(k_{2opt}^9)$. Видно, что в области относительно высоких частот $f_{\min} \geq 0,05$ Гц все три типа алгоритма реализуют примерно одинаковое время регулирования по координате ϑ . При управлении ДКА в области низких частот $f_{\min} < 0,05$ Гц адаптивный алгоритм обеспечивает заметно более высокое

качество управления по времени регулирования $t_9^*(f_{\min})_{k_{2opt}^9} \ll t_9^*(f_{\min})_{k_2^9 = \text{const}} \quad \forall f_{\min} < 0,05$ Гц.

Компьютерные исследования динамики двух других каналов гиросtabilизации углов ψ и φ показали, что выявленные положительные свойства применения настраиваемого ПД-алгоритма сохраняются и в этих каналах, а, следовательно, и при управлении полным движением ДКА, описываемым моделью (1)–(3).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Проведенные исследования подтвердили возможность применения ПД-алгоритма в качестве закона управления в режиме гиросиловой стабилизации крупногабаритных спутников с ограниченной жесткостью конструкции. Особенно эффективен данный алгоритм при гирином управлении нежесткими спутниками с инфранизкими частотами упругих колебаний, хотя при этом требуется усложнение исходного ПД-алгоритма, заключающееся в необходимости введения процедуры настройки его коэффициента при квазипроизводной (первой разности) регулируемой координаты. Такой усложненный алгоритм целесообразно применять в качестве адаптивного в задачах управления ориентацией деформируемых спутников с изменяющимся спектром низкочастотных упругих колебаний конструкции

ЛИТЕРАТУРА

1. Сомов Е.И. Динамика многократной цифровой системы пространственной гиросиловой стабилизации упругого космического аппарата // Динамика и управление космическими объектами: сб. науч. тр. — Новосибирск, 1992. — С. 46–76.
2. Космические аппараты космодрома «Плесецк» серии «Муссон» // Инф. бюлл. пресс-центра космодрома «Плесецк». — 1994. — № 39. URL: www.plesetzk.ru/index.php?d=doc/inf&p=inf039 (дата обращения 14.08.2012).
3. Крутова И.Н., Суханов В.М. Адаптивный алгоритм управления ориентацией крупногабаритных информационных спутников с изменяющимися параметрами // Проблемы управления. — 2011. — № 5. — С. 74–81.
4. Воронов А.А. Основы теории автоматического управления. Ч. 1. — М.-Л.: Энергия, 1965.
5. Ермилов А.С., Ермилова Т.В. Идентификация нестационарных параметров мод упругих колебаний деформируемых космических аппаратов // Тр. 11-й междунар. конф. «Устойчивость и колебания нелинейных систем управления» / ИПУ РАН. — М., 2010. — С. 121–123.

Статья представлена к публикации членом редколлегии Б.В. Павловым.

Крутова Инесса Николаевна — д-р техн. наук, гл. науч. сотрудник, ☎ (495) 334-87-79,

Суханов Виктор Миньонович — д-р техн. наук, гл. науч. сотрудник, ☎ (495) 334-87-79, ✉ suhv@ipu.ru, Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, г. Москва.



ЦИФРОВАЯ СИСТЕМА УПРАВЛЕНИЯ РАСХОДОВАНИЕМ ТОПЛИВА РАКЕТ-НОСИТЕЛЕЙ «СОЮЗ-2» И «СОЮЗ-СТ»

А.Я. Андриенко, Л.Н. Бельский, М.И. Заплатин, Г.П. Лосев,
Е.Н. Маханек, А.И. Чадаев

Изложены принципы создания цифровой системы управления расходом топлива ракет-носителей «Союз-2» и «Союз-СТ», обеспечивающей повышение их эксплуатационных характеристик.

Ключевые слова: цифровая система, терминальное управление, алгоритмическая защита, летные испытания.

ВВЕДЕНИЕ

С 1950-х гг. было создано несколько поколений систем терминального управления расходом топлива (СУРТ) для отечественных межконтинентальных баллистических ракет (МБР) и ракет-носителей (РН) космического назначения [1, 2].

Системы первого поколения реализованы в виде автономных *аналоговых* приборов — для стенового ракетного изделия 8К51-РД и для первой в мире межконтинентальной ракеты 8К71, а также всех ее последующих модификаций (включая РН «Спутник», «Восток» и др.) — вплоть до РН «Союз».

Системы СУРТ второго поколения были построены на дискретном принципе в виде специализированных (автономных) вычислительных устройств — для МБР 8К68, 8К75, 8К84, 8К99 и др.

И, наконец, широкие возможности, доставляемые современными бортовыми вычислительными комплексами (БЦВК) в части воспроизведения сложных алгоритмов управления, предопределили возникновение третьего — цифрового — поколения СУРТ применительно к РН «Союз-2» и «Союз-СТ».

Переход на цифровые принципы действия СУРТ доставляет дополнительные возможности совершенствования алгоритмов терминального управления расходом топлива в обеспечение:

- улучшения точностных характеристик СУРТ;
- расширения функций, выполняемых системой, — в части формирования признака полной

выработки топлива ракетного блока для повышения:

- либо надежности выведения при рутинной эксплуатации РН;
- либо грузоподъемности в «рискованных» запусках РН (с массой полезного груза, превышающей штатно допустимую).
- совершенствования средств алгоритмической защиты (от сбоя смежных бортовых систем).

1. ЗАДАЧА ТЕРМИНАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ РАСХОДОВАНИЕМ ТОПЛИВА

Уравнение объекта СУРТ (двигательной установки и топливных баков многоблочной ступени РН) имеет вид [3]:

$$\mathbf{x}_i = \mathbf{f}_i(\mathbf{x}_{i-1}, \mathbf{u}_{i-1}, \mathbf{v}, W_i), \quad i = 1, 2, \dots, I + 1. \quad (1)$$

Здесь $\mathbf{x}_i$ — вектор координат объекта (тяги каждого из двигателей ступени, соотношения расходов компонентов топлива в каждом из ракетных блоков и массы компонентов топлива в каждом баке) в дискретный момент i , определяемый, в частности, как момент времени t_i достижения кажущейся скоростью W ракеты порогового значения W_p ; $\mathbf{u}_i$ — значение вектора управления в тот же момент времени (управляющие уставки для регуляторов давления в камерах сгорания и приводов дросселей в магистралях компонентов топлива); $\mathbf{v}$ — случайный и неизменный во времени i вектор возмущений.

Вектор измеряемых координат СУРТ

$$\mathbf{y}_i = \mathbf{x}_i(\mathbf{x}_i, \mathbf{h}_i), \quad i = 1, 2, \dots, I, \quad (2)$$

где $\mathbf{h}_i$ — случайный вектор ошибок измерений.

Требуется определить: функцию управления $\mathbf{u}_i = \mathbf{u}_i(\mathbf{y}_{1i}, \mathbf{u}_{0(i-1)})$, $i = 1, 2, \dots, I$, из некоторого допустимого множества $\mathbf{U}$ и последовательность $\bar{W}_{1I} = (W_1, W_2, \dots, W_I)$, обеспечивающую наименьшее значение риска

$$R = M[\Psi(\mathbf{x}_{I+1})], \quad (3)$$

задаваемого как математическое ожидание M функции потерь Ψ от конечного состояния объекта управления в терминальный момент $I + 1$:

Процедура решения задачи (1)–(3) терминального управления в цифровой СУРТ состоит в следующем:

- на основе принятой модели объекта анализируется поведение системы до текущего момента i (так называемый анализ предыстории процесса управления) и с помощью методов фильтрации находятся статистические оценки действующих в системе возмущений $\mathbf{v}$;

- находится реакция объекта на воздействия, соответствующие найденным оценкам возмущений, в предположении, что после момента i значение управления не изменяется;

- определяется отклонение реакции объекта $\mathbf{x}_{I+1}$ в терминальный момент от заданного значения $\mathbf{x}_{\text{зад}}$;

- полученное отклонение используется как входная команда регулятора, исполнение которой и реализует компенсацию возмущающих воздействий $\mathbf{v}$, естественно, в рамках возможностей, предоставляемых множеством $\mathbf{U}$ допустимых управлений.

2. ОСОБЕННОСТИ РЕАЛИЗАЦИИ ЦИФРОВОЙ СУРТ

Реализованная для РН «Союз-2» и «Союз-СТ» цифровая СУРТ обладает следующими особенностями.

- В области первичной обработки уровнемерной информации:

- для преобразования уровнемерной информации применена гибридная схема, в которой преобразование высокочастотных выходных сигналов мостовой цепи в непрерывные сигналы постоянного тока осуществляется в аналоговом виде, а выполнение остального ряда задач первичной обработки уровнемерной информации реализуется в БЦВК;

- аналого-цифровые преобразователи информации установлены в максимальной близости от измерительных датчиков уровнемеров СУРТ; минимизированы протяженности цепей для передачи аналоговых сигналов и применены кодовые линии связи для передачи информации;

- в БЦВК реализованы более сложные и совершенные алгоритмы обработки уровнемерной информации, позволившие существенно повысить надежность определения моментов времени прохождения уровней компонентов топлива через чувствительные элементы датчиков уровней [4, 5].

- В области подавления автоколебаний в системе регулирования соотношения компонентов (РСК):

- значительно расширена зона нечувствительности по ошибке регулирования;

- введено нелинейное интегрирующее звено с ограничением входного и выходного сигналов для обеспечения заданной точности отработки управляющего сигнала СУРТ при увеличенной зоне нечувствительности;

- улучшена схема построения контура системы РСК, в которой по числу импульсов с датчика расхода в нерегулируемой магистрали и уставочному значению коэффициента объемного соотношения расходов определяется требуемое (программное) число импульсов с датчика расхода, которое должно быть в регулируемой магистрали.

- В области совершенствования алгоритмов терминального управления применительно к штатным и нештатным условиям эксплуатации СУРТ:

- коренным образом обновлены алгоритмы действия СУРТ: (управление формируется с учетом всей полетной предыстории РН);

- от пуска к пуску обновляется параметрическое обеспечение бортовой системы управления путем коррекции массива параметров СУРТ с последующим переводом их из оперативной в долговременную память БЦВК — по мере накопления результатов анализа проведенных пусков.

3. РЕЗУЛЬТАТЫ ЛЕТНЫХ ИСПЫТАНИЙ СУРТ В СОСТАВЕ РН «СОЮЗ-2» И «СОЮЗ-СТ»

К настоящему времени практически завершены летно-конструкторские испытания РН «Союз-2», в ходе проведения которых с 2004 г. осуществлено 16 пусков, и выполнены два пуска РН «Союз-СТ». Пуски РН «Союз-2» проводились со стартовых площадок космодромов Плесецка и Байконура, пуски РН «Союз-СТ» выполнены с французского космодрома «Куру».



В каждом из проведенных пусков РН наряду с решением задач летно-конструкторских испытаний выполнялись задачи (за исключением первого пуска) по выведению космических аппаратов на различные орбитальные траектории с заданными параметрами. По результатам пусков, благодаря наличию в составе системы управления цифровой системы телеметрических измерений, позволившей существенно увеличить объем и качество передаваемой телеметрической информации, автоматизировать процесс обработки полученной информации, была получена уникальная информация, анализ которой показал эффективное и надежное функционирование всех систем РН «Союз-2», в том числе СУРТ.

В части достигнутых результатов функционирования СУРТ можно отметить, что обеспечено выполнение всех заданных в ТЗ на разработку системы управления технических требований, предъявляемых к СУРТ. В частности, точность внутри-блочного регулирования опорожнения баков по бортовой информации на момент срабатывания последних чувствительных элементов датчиков уровней составила для:

- центрального блока не хуже $\pm 0,12$ с;
- боковых блоков не хуже $\pm 0,3$ с;
- блока 3 ступени не хуже $\pm 0,4$ с.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Совмещение средств решения задач управления РН и управления расходом топлива в едином БЦВК позволило значительно сократить массу аппаратуры СУРТ, повысить надежность системы, а также расширить функциональные возможности СУРТ — осуществить, в частности, прогнозирование на борту РН момента окончания топлива, а также реализовать новые способы алгоритмической защиты, обеспечивающие поддержание высокой эффективности действия системы при отдельных отказах в ее аппаратуре.

ЛИТЕРАТУРА

1. Андриенко А.Я., Иванов В.П., Портнов-Соколов Ю.П. Система управления расходом топлива жидкостных ракет. История создания и пути развития // Космонавтика и ракетостроение. — 1999. — Вып. 15. — С. 133—137.
2. Андриенко А.Я., Иванов В.П. Совершенствование энергетических характеристик жидкостных ракет средствами автоматического управления // Проблемы управления. — 2009. — № 1. — С. 66—71; № 2. — С. 59—65.
3. Бортовые терминальные системы управления / Б.Н. Петров, Ю.П. Портнов-Соколов, А.Я. Андриенко, В.П. Иванов. — М.: Машиностроение, 1983.
4. Патент РФ 2397454 от 20.08.2010 г. Устройство для измерения уровня диэлектрического вещества / С.Н. Менделев, М.И. Заплатин, Г.П. Лосев, В.В. Нечаев.
5. Патент РФ 2397455 от 20.08.2010 г. Способ измерения уровня диэлектрического вещества / С.Н. Менделев, М.И. Заплатин, Г.П. Лосев и др.

Статья представлена к публикации членом редколлегии Б.В. Павловым.

Андриенко Анатолий Яковлевич — д-р техн. наук, зав. лабораторией, Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, г. Москва, ☎ (495) 334-88-71, ✉ vladguc@ipu.rssi.ru,

Бельский Лев Николаевич — канд. техн. наук, зам. ген. директора по ракетно-космической тематике, Федеральное государственное унитарное предприятие «Научно-производственное объединение автоматики им. академика Н.А. Семихатова» (ФГУП НПОА им. академика Н.А. Семихатова), г. Екатеринбург, ☎ (343) 350-55-41,

Заплатин Михаил Иванович — гл. специалист, ФГУП НПОА им. академика Н.А. Семихатова, г. Екатеринбург, ☎ (343) 355-95-85, ✉ avt@npoa.ru,

Лосев Герман Петрович — канд. техн. наук, вед. науч. сотрудник, ФГУП НПОА им. академика Н.А. Семихатова, г. Екатеринбург, ☎ (343) 350-90-48, ✉ Losevt@npoa.ru,

Маханек Елена Николаевна — вед. инж.-конструктор, ФГУП НПОА им. академика Н.А. Семихатова, г. Екатеринбург, ☎ (343) 350-90-48,

Чадаев Александр Иванович — канд. техн. наук, ст. науч. сотрудник, Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, г. Москва, ☎ (495) 334-88-71, ✉ vladguc@ipu.rssi.ru.



Не забудьте подписаться!

Подписку на журнал «Проблемы управления» можно оформить в любом почтовом отделении (подписной индекс 81708 в каталоге Роспечати или 38006 в объединенном каталоге «Пресса России»), а также через редакцию с любого месяца, при этом почтовые расходы редакция берет на себя. Отдельные номера редакция высылает по первому требованию.

**Александр Артемович АМБАРЦУМЯН
1943–2012**

21 июля 2012 г. после тяжелой болезни скончался доктор технических наук, профессор, заведующий лабораторией Института проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, член редколлегии журнала «Проблемы управления» Александр Артемович Амбарцумян.

Александр Артемович Амбарцумян родился 31 октября 1943 г. В 1966 г. окончил Омский политехнический институт по специальности «Автоматизация производственных процессов». В 1970—1973 гг. учился в аспирантуре Института проблем управления АН СССР по специальности «Техническая кибернетика». В 1973 г. защитил кандидатскую диссертацию «Автоматизация проектирования иерархических структур дискретных управляющих устройств на наборе унифицированных блоков (на примере технологического оборудования машиностроения)», в 1997 г. — докторс-

кую диссертацию на тему «Концепция, методы и инструментальные средства сквозного проектирования логических алгоритмов в системах управления потенциально опасными технологическими процессами». В 1998 г. ему присвоено ученое звание профессора по специальности: «Математическое и программное обеспечение вычислительных машин, комплексов, систем и сетей».

А.А. Амбарцумян — известный ученый в области информационных технологий управления потенциально опасными технологическими процессами, системотехники, АСУ ТП и логического управления. За годы своей жизни в науке он опубликовал ряд монографий и более ста статей в ведущих отечественных и зарубежных научных журналах. Его работы отличают, с одной стороны, высокий теоретический уровень, а с другой — теснейшая связь с практическими задачами.



Будучи учеником М.А. Гаврилова, Александр Артемович более 30 лет назад возглавил его лабораторию, имевшую большие научные традиции. Развивая их, он разработал оригинальные модели логических алгоритмов, учитывающие специфику распределенных систем управления (структурированные автоматы и след автомата), сформулировал критерии и методы проверки корректности логических алгоритмов на сетях Петри; получил оценки сложности структурирования логических алгоритмов. Под руководством А.А. Амбарцумяна созданы и развиваются СПА-ПС — технические средства программируемой автоматики (в 1994—1997 гг. освоены в серийном производстве на ОАО «Автоматика» г. Омск). С 1997 г. СПА-ПС применяются в проектах распределенных и сосредоточенных автоматизированных систем, важных для безопасности на объектах атомной и тепловой энергетики, газо-нефтедобывающей и перерабатывающей промышленности. Значительна роль коллектива лаборатории и в разработке технического проекта АСУТП Башкирской АЭС, в автоматизации объектов г. Москвы и др.

В 2000—2007 гг. им выдвинута концепция и сформулированы принципы создания автоматизированных систем нового поколения с высокой степенью автоматизации, безопасности и качества управления технологическими процессами. Теоретические результаты А.А. Амбарцумяна и его опыт в проектировании востребован в ряде проектов АСУТП, в том числе в системном проекте АСУТП АЭС «Бушер».

В последние годы А.А. Амбарцумян получил ряд существенных результатов в теории дискретно-событийных систем (часть из них опубликована в журнале «Проблемы управления»), стал известным в западном мире специалистом в этой быстро развивающейся области фундаментальных исследований.

Профессор А.А. Амбарцумян активно занимался педагогической и научно-организационной деятельностью. Считая важной в наше время проблему омоложения научных кадров, он создал молодежную научную школу, вырастил и воспитал многих талантливых молодых ученых. Он являлся председателем ГАК кафедры ИУ-3 в МГТУ им. Н.Э. Баумана, где преподавал многие годы, входил в состав Ученого и Диссертационного советов ИПУ РАН.

Под руководством А.А. Амбарцумяна в 2003 г. проведена международная конференция, посвященная 100-летию со дня рождения М.А. Гаврилова, а затем, начиная с 2008 г., проводятся регулярные российские конференции с международным

участием «Технические и программные средства систем управления, контроля и измерения» (УКИ). В нынешнем году, уже тяжело больной, председатель Оргкомитета УКИ А.А. Амбарцумян активно участвовал в работе третьей по счету конференции, намеревался развернуть на страницах журнала «Проблемы управления» дискуссию по наиболее актуальным вопросам тематики конференции.

Будучи членом редколлегии журнала «Проблемы управления», он активно помогал становлению журнала, заботился о его популяризации и росте авторитета. А.А. Амбарцумян инициировал публикацию ряда оригинальных статей, публиковал и свои научные работы, а также статьи, написанные, условно говоря, в жанре научной публицистики. В частности, запомнились его интереснейшие статьи, посвященные 100-летию М.А. Гаврилова и 50-летию научной деятельности И.В. Прангишвили, из которых читатели узнали о малоизвестных фактах истории развития в нашей стране теории и практики управления.

Александр Артемович был ярко выраженным научным лидером, это проявлялось как в руководстве коллективом лаборатории, так и на заседаниях Ученого совета, семинарах и конференциях. Он был генератором идей, связанных с повышением уровня автоматизации потенциально-опасных производств (АЭС, предприятий по уничтожению химического оружия и др.).

Александр Артемович был широко эрудированным человеком, обладал энциклопедическими знаниями во многих областях науки управления, в истории России и Кавказа. Он был требовательным к научному уровню диссертационных работ и журнальных статей как своих, так и других авторов. Каждый сотрудник лаборатории всегда мог рассчитывать на помощь, поддержку Александра Артемовича, поэтому он пользовался непререкаемым авторитетом не только среди сотрудников лаборатории, но и всего Института.

Он родился в станице Вознесенская Малгобекского района Чечено-Ингушской АССР и всю жизнь считал себя казаком, оказывал помощь станичникам. Он и ушел из жизни казаком, настоящим мужчиной, работая и думая о лаборатории и Институте до последних дней своей жизни.

Память об Александре Артемовиче Амбарцумяне, выдающемся ученом и человеке, навсегда сохранится в наших сердцах.

*Сотрудники Института проблем управления
им. В.А. Трапезникова РАН,
Редколлегия,
Редакция*



МЕРОПРИЯТИЯ IFAC – Международной федерации по автоматическому управлению

Мероприятие	Дата	Место проведения
IFAC FIMA Workshop Multi Vehicle Systems – 2nd	October 3–5, 2012	Espoo FINLAND
IFAC Workshop Engine and Powertrain Control, Simulation and Modeling (E-COSM'12)	October 23–25, 2012	IFPEN, Rueil-Malmaison, Paris FRANCE
IFAC Conference 5th Latin American Control Conference	October 23–26, 2012	Lima PERU
IFAC IFIP Workshop IFAC A-MEST Workshop on Maintenance for Dependability, Asset Management and PHM	November 22–23, 2012	Seville SPAIN
IFAC IEEE, ACM, TRB Conference IEEE International Conference on Connected Vehicles and Expo (ICCVE) 2012	December 5–9, 2012	Beijing CHINA
IFAC Symposium System Structure and Control	February 4–6, 2013	Grenoble FRANCE
IFAC CIGR Conference BIORBOTICS	March 27–29, 2013	SAKAI JAPAN
IFAC Symposium Mechatronic Systems – 2013	April 10–12, 2013	Hangzhou CHINA
IFAC Workshop CONVERGENCE of INFORMATION TECHNOLOGIES and CONTROL METHODS with POWER SYSTEMS	May 22–24, 2013	Cluj-Napoca ROMANIA
IFAC Workshop 11th IFAC Workshop on Intelligent Manufacturing Systems (IMS 2013)	May 22–24, 2013	São Paulo BRAZIL
IFAC no Workshop International Stability, Technology and Culture (SWISS 2013)	June 6–8, 2013	Prishtina KOSOVO
AACC IFAC Conference American Control Conference – ACC 2013 – in cooperation with IFAC	June 17–19, 2013	Washington USA
IFAC IFIP IFIP IEEE Conference Manufacturing Modelling, Management, and Control MIM '2013	June 19–21, 2013	Saint Petersburg RUSSIAN FEDERATION
IFAC IEEE/RAS/EA Symposium Intelligent Autonomous Vehicles, IFAC-IAV 2013	June 26–28, 2013	Gold Coast City AUSTRALIA
IFAC Workshop Adaptation and Learning in Control and Signal Processing – ALCOSP	July 3–5, 2013	Caen FRANCE
IFAC Workshop Periodic Control Systems (PSYCO)	July 3–5, 2013	Caen FRANCE
IFAC IFORS, IMACS, IFIP Symposium Large Scale Complex Systems: Theory and Applications – 13th	July 7–10, 2013	Shanghai CHINA
EUCA IEEE Conference European Control Conference – in cooperation with IFAC (ECC 2013)	July 17–19, 2013	Zürich SWITZERLAND
IFAC Symposium Analysis, Design, and Evaluation of Human-Machine Systems	August 11–15, 2013	Las Vegas USA
IFAC Symposium Mining, Mineral and Metal Processing MMM'13	August 25–27, 2013	San Diego, California USA
IFAC Symposium Advances in Control Education – ACE 2013	August 28–30, 2013	Sheffield UNITED KINGDOM
IFAC ASABE CIGR Conference Conference on Modelling and Control in Agriculture, Horticulture and Post-Harvest Industry – Agricontrol 2013	August 28–30, 2013	Espoo FINLAND
IFAC Conference Conference on Intelligent Control and Automation Science (ICONS 2013)	September 2–4, 2013	Chengdu CHINA
IFAC ESA Symposium Automatic Control in Aerospace – ACA 2013	September 2–6, 2013	Wuerzburg GERMANY
IFAC SICE Symposium 7th IFAC Symposium on Advances in Automotive Control 2013	September 4–7, 2013	Tokyo JAPAN
IFAC Workshop Dependable Control of Discrete Systems (DCDS 4th)	September 4–6, 2013	YORK UNITED KINGDOM
IFAC Symposium Nonlinear Control Systems – NOLCOS 2013	September 4–6, 2013	Toulouse FRANCE
IFAC Conference 6th International Conference on Management and Control of Production and Logistics	September 12–14, 2013	Fortaleza BRAZIL
IFAC IEEE Conference Programmable Devices and Embedded Systems, PDeS 2013	September 25–27, 2013	Velké Karlovice CZECH REPUBLIC
IFAC Ruhr Univ./DFG Workshop Workshop on Distributed Estimation and Control in Networked Systems (NecSys 4th)	September 25–26, 2013	Koblenz GERMANY
IFAC IEEE CSS Workshop Control of Systems Modeled by Partial Differential Equations (CPDE)	September 25–27, 2013	Paris FRANCE
IFAC Symposium Computer Applications in Biotechnology (CAB 2013)	December 16–18, 2013	Mumbai INDIA
IFAC Symposium Dynamics and Control of Process Systems (DYCOPS 2013)	December 18–20, 2013	Mumbai INDIA
IFAC IEEE CSS Symposium 17th System Identification SYSID – 2015	October 19–21, 2015	Beijing CHINA

Более подробную информацию см. на сайте <http://www.ifac-control.org/>



Аспирантура и докторантура

В Институте проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН осуществляется подготовка (по очной и заочной форме) научных кадров в системе послевузовского профессионального образования по следующим специальностям:

- 01.01.02. Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление
- 05.13.01. Системный анализ, управление и обработка информации (по отраслям)
- 05.13.01. Системный анализ, управление и обработка информации (в отраслях информатики, вычислительной техники и автоматизации)
- 05.13.05. Элементы и устройства вычислительной техники и систем управления
- 05.13.06. Автоматизация и управление технологическими процессами и производствами (по отраслям)
- 05.13.10. Управление в социальных и экономических системах
- 05.13.11. Математическое и программное обеспечение вычислительных машин, комплексов и компьютерных сетей
- 05.13.12. Системы автоматизации проектирования (по отраслям)
- 05.13.15. Вычислительные машины, комплексы и компьютерные сети
- 05.13.18. Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ
- 08.00.05. Экономика и управление народным хозяйством
- 08.00.13. Математические и инструментальные методы экономики.

Срок обучения в очной аспирантуре — до 3-х (по специальностям 05.13.01; 05.13.05; 05.13.06; 05.13.12; и 05.13.15 — 4 года), в заочной — до 4-х лет (по специальностям 05.13.01; 05.13.05; 05.13.06; 05.13.12 и 05.13.15 — до 5 лет).

Прием заявлений с приложением копии диплома о высшем профессиональном образовании и списка опубликованных работ (при наличии таковых) — ежегодно до 31 августа.

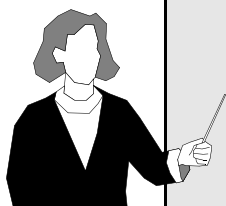
Вступительные экзамены по специальной дисциплине, философии и иностранному языку — до 30 сентября.

Зачисление в аспирантуру по результатам конкурса — до 15 ноября.

<http://www.ipu.ru/node/9662>

Читайте в следующем номере

- ✓ **Федянин Д.Н., Чхартишвили А.Г.** Модель информационного управления в активных сетевых структурах при неполной информированности центра
- ✓ **Воронин А.А., Елисеева М.В., Храпов С.С.** и др. Задача управления гидрологическим режимом в эколого-экономической системе «Волжская ГЭС — Волго-Ахтубинская пойма». Ч. 2. Синтез системы управления
- ✓ **Подлазов В.С.** Параллельная групповая передача «все — всем» в распределенном полном коммутаторе
- ✓ **Шевченко А.М., Солонников Ю.И., Начинкина Г.Н.** Разработка и исследование метода прогнозирования взлета самолета
- ✓ **Парсегов С.Э.** Сверхфинитная стабилизация мультиагентной системы
- ✓ **Чуканов С.Н., Ульянов Д.В.** Декомпозиция векторного поля системы управления на основе построения оператора гомотопии



CONTENTS & ABSTRACTS

CONTROL OF EQUILIBRIUM STATES OF NORMALIZED BILINEAR MODELS 2

Kornoushenko E.K.

The class of so-called normalized bilinear models (NBM), which states and external influences are defined in the cube $[0, 1]^n$, and admissible controls — in the cube $[-1, 1]^p$, $p < n$, is considered. Assuming that controls and external influences on NBM are constant vectors, and NBM is asymptotically stable, the problem of finding controls that transfer NBM from any initial state to some equilibrium state which is close to some preassigned state is solved. The paper provides the procedures for conditions that are sufficient to solve this problem; such procedures are necessary for correct interpretation of the processes in NBM in accordance with qualitative scales $[0, 1]$ and $[-1, 1]$. The appendix contains an example illustrating all stages of solving the specified control problem.

Keywords: normalized bilinear model, asymptotic stability, controllable equilibrium state, admissible control.

INVESTIGATION OF OPTIMAL CONTROL PROBLEM FOR SINGLE AND DOUBLE INTEGRATORS OF FRACTIONAL ORDER USING THE PROBLEM OF MOMENTS APPROACH 9

Postnov S.S.

The paper proposes the statement of optimal control problem for two dynamical systems of fractional order: single and double integrators. The problem is reduced to problem of moments. Basic equations and formula obtained which allow to derive the problem solution. Dependencies of control norm and minimal transition time from order of fractional derivative are investigated. Comparative analysis of results for both of considered systems is carried out.

Keywords: optimal control, moment problem, integrator, fractional derivative, fractional integral.

THE REGIMEN CONTROL TASK IN THE ECO-ECONOMIC SYSTEM «VOLZHSKAYA HYDROELECTRIC POWER STATION — THE VOLGA-AKHTUBA FLOODPLAIN». I. SIMULATION OF DYNAMICS OF SURFACE WATER DURING SPRING FLOODS 18

Khoperskov A.V., Khrapov S.S., Pisarev A.V., et al.

The hydrodynamic numerical model of the dynamics of surface water in the territory of the northern part of the Volga-Akhtuba floodplain is created. Time dependences of the area of flooding for different hydrographs are calculated and the different conditions of flooding area are investigated. These results are the basis of formulating and solving optimization and game-theoretic problem of flood regimen control for the eco-economic system «Volzhskaya hydroelectric power station — the Volga-Akhtuba floodplain».

Keywords: regimen control, dynamics of surface water, shallow water equations, numerical methods, the Volga-Akhtuba floodplain.

RESOURCE ALLOCATION MECHANISMS BASED ON STRATEGY-PROOF SYMMETRIC ANONYMOUS VOTING PROCEDURES WITH DELEGATION 26

Bondarik V. N., Korgin N.A.

The characterization of symmetric anonymous generalized median voting schemes which are suitable for resource allocation by voting with delegation — when any agent is allowed to announce not only whole allocation, which is the best to his opinion, but just several components of this vertex, is provided including the description of class of feasible delegation rules.

Keywords: mechanism design, strategy-proof allotment rules, strategy-proof voting rules, project management.

COLLEGE ENTRANTS' CHOICE WITH QUADRATIC UTILITY FUNCTIONS 33

Kiselgof S.G.

In Russia from 2009 College admission is based on results of Unified State Exam. Entrant applies to no more than five universities. Admission mechanism is defined by government for all state universities. In the paper the authors model how entrant chooses university for application and, based on the entrant's choice prediction, the shortages of the current admission mechanism are revealed.

Keywords: matchings, college admission problem, entrants, Unified State Exam.

CONTROL OF THE QUEUE LENGTH FOR QUEUEING SYSTEMS WITH A GENEROUS AMOUNT OF SERVICE CHANNELS 41

Zhilyak A.V., Kascheev V.A., Kryanev A.V.

The paper provides the analytical terms for estimation of average time of service waiting $\bar{T}_{line}$ in queueing systems (QS) that are derived as a result of some asymptotic task solution. Moreover, the simple expression which allows to evaluate the amount of QS service channels which are required to limit the average waiting time by define value $\bar{T}_{line}$ are presented. The obtained re-

sults could be used for work optimization of large-size call-centers and other queueing systems with a generous amount of service channels.

Keywords: queueing system, call center, time of service waiting, Kendall's classification.

GROUP CONTROL OF DISCRETE-EVENT SYSTEMS 46

Ambartsumyan A.A., Potekhin A.I.

Group control, as defined in this paper, refers to the control method for a set of autonomous components such that given technological function will be performed. The idea is to create a two-tier control system using models of component behavior on the lower level. Group control is implemented by a model of control component interacting with the lower level models. The paper discusses two types of group control. Sequences of joint operations and constraints on combinations of technological operations for autonomous components are defined respectively for the first and the second case.

Keywords: group control, discrete event models, Petri nets, self-contained components, complex systems.

PROPERTIES OF ADMISSIBLE AND OPTIMUM SEQUENCES OF PERFORMANCE OF WORKS ON A SINGLE MACHINE 54

Zak Ju.A.

Properties of admissible and optimum sequences of performance of tasks by one machine under restrictions on terms of the beginning and completion of works are considered. Methods of the formulated problem solution by consecutive algorithms of optimization are offered. The schedules supposing ruptures in performance of works are transformed to optimum sequence in which such ruptures are not supposed. The offered algorithms are illustrated by numerical examples and can successfully be applied to solution of these problems under no restrictions.

Keywords: admissible and optimum sequences of task performance, restrictions on times of performance of works, ruptures in time of performance of works, consecutive algorithms of optimization.

SYNERGY IN THE SYSTEM OF NATURAL TECHNOLOGIES OF HUMAN ORGANISM 62

Makarenko A.V., Novoseltsev V.N.

The paper describes a modified mathematical model of the natural technology of human organism. At a qualitative level the process occurrence of synergy in lesions of the main system components of the organism are investigated. An integrated measure of human organism degradation is introduced. Some quantitative estimates of synergy are obtained on this basis.

Keywords: mathematical model, natural technology, synergy, health, macrobiosis.

DEVELOPMENT OF INFORMATIVE-DIAGNOSTIC TECHNOLOGY FOR PULSE WAVE MONITORS 69

Kychkin A.V.

One approach to developing the informative-diagnostic technology for blood vessel's pulse wave monitors is proposed. The algorithm of choosing vessel state between one of possible pathology class based on fuzzy classification is proposed and investigated.

Keywords: pulse wave, monitoring, informative-diagnostic technology, expert system, fuzzy classification, simulation.

DYNAMICS OF GYRO-FORCE STABILIZATION OF LARGE-SCALE SPACECRAFTS WITH USE OF ADJUSTED PD-ALGORITHM OF CONTROL 74

Krutova I.N., Sukhanov V.M.

Some problems of computer synthesis of adjusted proportional-differential algorithm parameters for gyro-force control of elastic large-scale spacecraft are considered. It is shown that such algorithm ensures optimum on time control of orientation at infralow frequencies of construction elastic oscillations. The technique of definition of area of such values of partial frequencies in which it is possible to use the simplified algorithm with constant coefficients without a drop of control quality is proposed.

Keywords: flexible spacecraft, mathematical model, gyroline, gyro-force attitude control.

DIGITAL CONTROL SYSTEM OF THE FUEL CONSUMPTION .. 81

Andrienko A.Ya., Belskiy L.N., Zaplatin M.I., et al.

Principles of developing of the digital control system of the launching vehicles «Sojuz-2» and «Sojuz-ST» fuel consumption, providing the operating characteristics increase are stated.

Keywords: digital system, terminal control, algorithmic protection, flight tests.

ALEXANDER ARTEMOVICH AMBARTSUMYAN 84

softline®

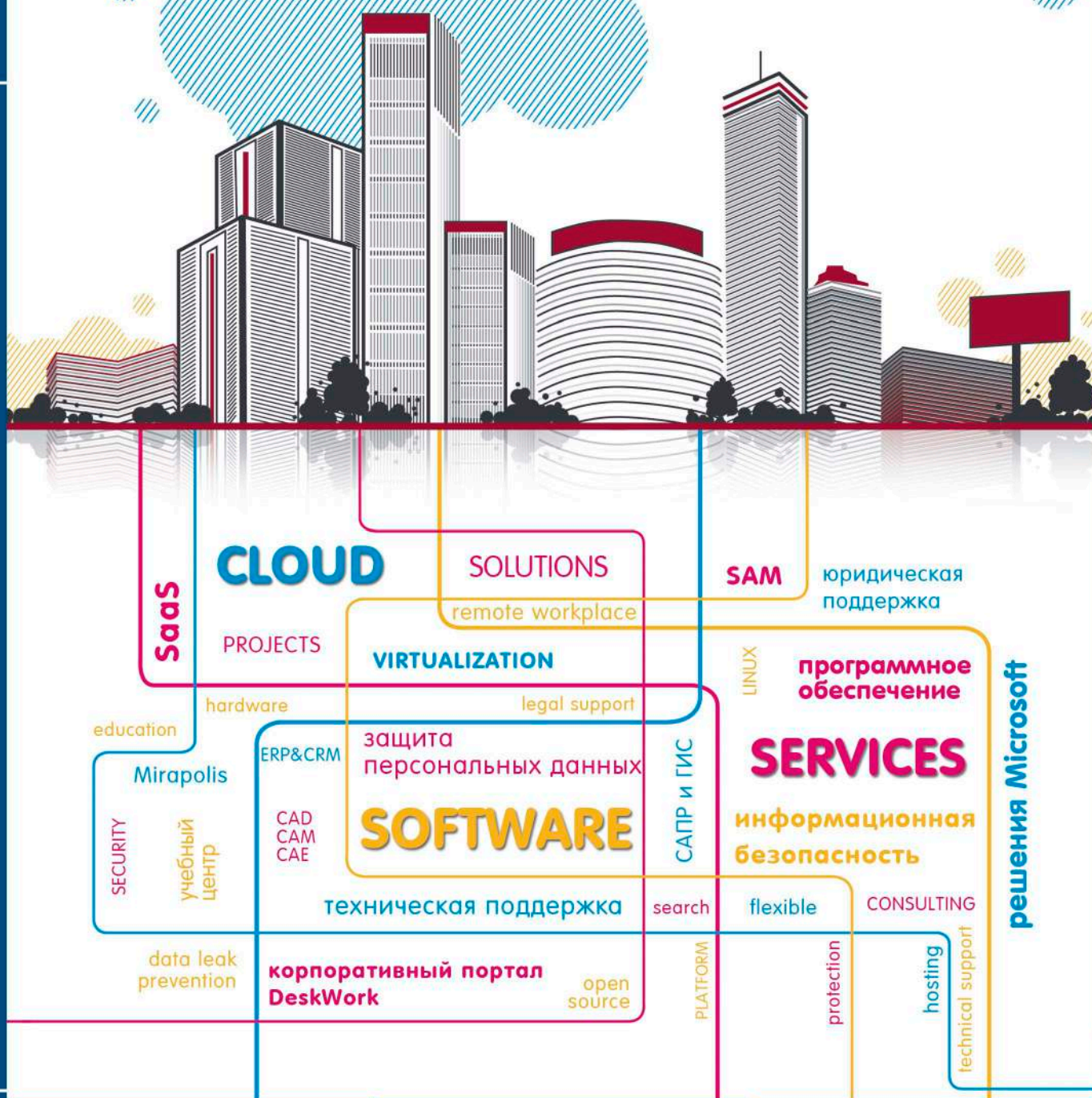


Services

Software

Cloud

ИТ-архитектура вашего бизнеса



+7 (495) 232-00-23

www.softline.ru

info@softline.ru

