УДК 62-501.52

О ГРУБОСТИ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

В.П. Жуков

Исследованы условия, при которых характер устойчивости состояния равновесия нелинейной динамической системы произвольного порядка ляпуновского типа не изменяется при любых достаточно малых линейных и нелинейных возмущениях ее правой части (грубость в смысле сохранения характера устойчивости). Нелинейные составляющие правых частей уравнений исходной (невозмущенной) системы и нелинейные возмущения этих правых частей считаются принадлежащими весьма широкому классу нелинейных функций, включающему в себя как класс аналитических, так и различного типа классы неаналитических функций. Получены достаточные и необходимые условия указанной грубости.

Ключевые слова: нелинейная динамическая система, грубость в смысле сохранения характера устойчивости.

ВВЕДЕНИЕ

Понятие и строгое определение грубости (в смысле структурной устойчивости) динамических систем

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathbf{R}^n, \tag{1}$$

впервые было дано в статье А.А. Андронова и Л.С. Понтрягина [1]. Необходимые и достаточные условия такой грубости для систем (1) второго порядка при аналитичности компонент векторной функции $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ и аналитичности возмущающих функций приведены в работах [1—3]. Вопросы структурной устойчивости подробно рассматриваются в работе В.И. Арнольда [4]. Иной смысл, отличный от понятия структурной устойчивости, заключается в определении грубости свойств систем (1), данное Н.Н. Красовским [5].

Для определений структурной устойчивости [1, 4, 6, 7] характерно требование существования гомеоморфизма (взаимно непрерывного и взаимно однозначного преобразования), обеспечивающего топологическую эквивалентность [8] фазовых портретов невозмущенной и возмущенной систем. Такое требование значительно осложняет нахождение и применение условий структурной устойчивости непосредственно для систем вида (1). Так, условия, полученные в работе [1] для систем (1) лишь второго порядка, являются трудно проверяемыми.

Если точка равновесия $\mathbf{x} = 0$ невозмущенной нелинейной системы (1) произвольного порядка имеет один из возможных характеров устойчивости (асимптотическая устойчивость, неасимптотическая устойчивость, неустойчивость) и нас интересуют лишь условия, при которых точка равновесия $\mathbf{x} = 0$ возмущенной системы будет иметь такой же характер устойчивости при достаточно малых (в C-метрике) в некоторой окрестности этой точки возмущениях определенного класса, то для нелинейных систем (1) возникает понятие грубости в смысле сохранения характера устойчивости. Нахождение условий такой грубости непосредственно для систем вида (1), в правой части которых не выделены линейная и нелинейная составляющие, связано с большими трудностями. Если известны условия структурной устойчивости невозмущенной системы (1), то они вследствие обеспечения ими топологической эквивалентности фазовых портретов возмущенной и невозмущенной систем являются также условиями грубости в смысле сохранения характера устойчивости. Но, к сожалению, на этом пути имеются трудности: сложность условий структурной устойчивости резко возрастает для систем (1) выше второго порядка [4, 7]; выполнение известных условий структурной устойчивости для систем (1) второго порядка [1—3] трудно проверить для конкретных систем; грубой в смысле сохранения характера устойчивости системе (1) не всегда соответствует ее структурная устойчивость, вследствие чего не все грубые в смысле сохранения характера устойчивости системы могут быть выявлены с помощью условий структурной устойчивости.

Вопрос об определении и условиях грубости характера устойчивости рассматривается в данной статье (§ 1) применительно к большому и важному классу нелинейных систем (1) ляпуновского типа (системы (2) в § 1), в правой части которых выделены линейная и нелинейная составляющие. При данном определении грубости характера устойчивости систем (2) для доказательства и формулировки приведенной в § 1 теоремы, дающей необходимые и достаточные условия грубости, не возникает необходимости в гомеоморфизме фазовых портретов возмущенной и невозмущенной систем.

Заметим, что условия структурной устойчивости систем ляпуновского типа (2) проще таких же условий для систем (1): необходимым и достаточным условием структурной устойчивости линеаризуемых систем (2) является расположение собственных значений матрицы линеаризованной системы вне мнимой оси [6]. Отсюда следует, что если собственные значения этой матрицы находятся на мнимой оси, то система (2) структурно неустойчива. Например, неустойчивая система (2), которой соответствуют собственные значения, расположенные частично на мнимой оси и частично правее этой оси, не является структурно устойчивой, но груба в смысле сохранения характера устойчивости, что следует из приведенной далее теоремы. Следовательно, условия структурной устойчивости систем (2) не могут выявить все случаи грубости этих систем в смысле сохранения характера устойчивости. В то же время условия теоремы, сформулированной в данной статье, охватывают все случаи такой грубости систем (2), и не требуется выполнение условий структурной устойчивости.

Цель данной работы состоит в получении для класса нелинейных систем ляпуновского типа необходимых и достаточных условий грубости (в смысле сохранения характера устойчивости) по отношению к широкому классу возмущений.

1. УСЛОВИЯ ГРУБОСТИ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ В СМЫСЛЕ СОХРАНЕНИЯ ХАРАКТЕРА УСТОЙЧИВОСТИ

Условия грубости будем исследовать для большого класса нелинейных систем ляпуновского типа, т. е. для нелинейных систем (1) вида

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \varphi(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathbf{R}^n, \tag{2}$$

или

$$\dot{x}_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + \varphi_i(x_1, x_2, ..., x_n), \quad i = 1, 2, ..., n.$$

Здесь a_{ij}, $i, j = 1, 2, ..., n$ — постоянные коэффициенты квадратной матрицы $\mathbf{A}$; $\varphi_i(\mathbf{x})$, $\varphi_i(0) = 0$, $i = 1, 2, ..., n$ — нелинейные скалярные функции, являющиеся компонентами векторной функции $\varphi(\mathbf{x})$ и обеспечивающие единственность решения системы (2) в некоторой окрестности точки равновесия $\mathbf{x} = 0$ этой системы.

Пусть функции $\varphi_i(\mathbf{x})$, $i = 1, 2, ..., n$ удовлетворяют условиям

$$\lim_{\mathbf{x}\to 0} \frac{\varphi_i(\mathbf{x})}{\|\mathbf{x}\|} = 0, \quad i = 1, 2, ..., n. \tag{3}$$

Так как $\|\varphi(\mathbf{x})\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \varphi_1^2(\mathbf{x})}$, то, очевидно, из этих условий следует

$$\lim_{\mathbf{x}\to 0} \frac{\|\varphi(\mathbf{x})\|}{\|\mathbf{x}\|} = 0. \tag{4}$$

И, наоборот, из условия (4) следуют условия (3). Соотношения (3) и (4) означают, что каждая функция $\varphi_i(\mathbf{x})$, $i = 1, 2, ..., n$, нелинейна, а ее линейная часть равна нулю, ибо в случае, когда функция $\varphi_i(\mathbf{x})$ содержит какую-либо линейную составляющую, правая часть соответствующего соотношения (3) будет отлична от нуля.

Каждому соотношению (3) удовлетворяет широкий класс нелинейных функций $\varphi_i(\mathbf{x})$, включающий в себя как аналитические, так и различного типа неаналитические функции: непрерывно дифференцируемые конечное число раз, непрерывные, разрывные. Очевидно, что аналитическая функция $\varphi_i(\mathbf{x})$, удовлетворяющая соотношению (3), может содержать в своих разложениях в степенные ряды лишь члены не ниже второй степени. Примером непрерывных и разрывных функций, удовлетворяющих этому соотношению, служат непрерывные и разрывные функции, модуль которых в некоторой окрестности точки $\mathbf{x} = 0$ ограничен сверху положительно определенной квадратичной формой $w(\mathbf{x})$, $w(0) = 0$, $w(\mathbf{x}) > 0$ при $\mathbf{x} \neq 0$.

Возмущение правой части исходной системы (2) будем рассматривать при исследовании грубости в виде суммы линейного $\mathbf{A}'\mathbf{x}$ и нелинейного $\varphi_1(\mathbf{x})$ возмущений. Соответственно возмущенная система имеет следующий вид:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \varphi(\mathbf{x}) + \mathbf{A}'\mathbf{x} + \varphi_1(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathbf{R}^n. \tag{5}$$

Здесь в квадратной матрице $\mathbf{A}'$ постоянные элементы a'_{ij}, $i, j = 1, 2, ..., n$, которые считаются достаточно малыми при рассмотрении условий грубости. Компоненты $\varphi_{1i}(\mathbf{x})$, $\varphi_{1i}(0) = 0$, $i = 1, 2, ..., n$ векторной функции $\varphi_1(\mathbf{x})$ пусть являются функциями, которые удовлетворяют условиям, аналогичным условиям (3):

$$\lim_{\mathbf{x}\to 0} \frac{\varphi_{1i}(\mathbf{x})}{\|\mathbf{x}\|} = 0, \quad i = 1, 2, ..., n. \tag{6}$$

Поэтому рассматривается широкий класс нелинейных возмущений $\varphi_{1i}(\mathbf{x})$, линейная часть которых равна нулю. Всякое понятие грубости исходной системы по отношению к рассматриваемому классу возмущений ее правой части предполагает достаточную малость этих возмущений в заданной метрике; в настоящей статье малость возмущений рассматривается в *C*-метрике (этого достаточно для доказательства приведенной далее теоремы).

Заметим, что условия $\varphi_i(0) = 0$, $\varphi_{1i}(0) = 0$, $i = 1, 2, ..., n$, обеспечивающие наличие у систем (2) и (5) точки равновесия $\mathbf{x} = 0$, следуют соответственно из условий (3) и (6).

При исследовании условий грубости систем (2) в смысле сохранения характера устойчивости будем исходить из следующего определения.

Определение. Нелинейная динамическая система (2) является грубой (в смысле сохранения характера устойчивости ее точки равновесия $\mathbf{x} = 0$) по отношению к классу возмущений $\mathbf{A}'\mathbf{x} + \varphi_1(\mathbf{x})$, характеризующихся тем, что нелинейное возмущение $\varphi_1(\mathbf{x})$ удовлетворяет условию (6), а линейное возмущение $\mathbf{A}'\mathbf{x}$ имеет достаточно малые коэффициенты матрицы $\mathbf{A}'$, если при любых указанных возмущениях характер устойчивости точки равновесия $\mathbf{x} = 0$ возмущенной системы (5) остается таким же, как у точки равновесия $\mathbf{x} = 0$ невозмущенной системы (2).♦

Очевидно, возможны следующие три варианта сочетания возмущений $\mathbf{A}'\mathbf{x}$ и $\varphi_1(\mathbf{x})$ при рассмотрении условий определенной выше грубости: $\mathbf{A}'\mathbf{x} \neq 0$, $\varphi_1(\mathbf{x}) \neq 0$; $\mathbf{A}'\mathbf{x} \neq 0$, $\varphi_1(\mathbf{x}) = 0$; $\mathbf{A}'\mathbf{x} = 0$, $\varphi_1(\mathbf{x}) \neq 0$. Вариант $\mathbf{A}'\mathbf{x} = 0$, $\varphi_1(\mathbf{x}) = 0$ соответствует отсутствию возмущений и поэтому не представляет интереса. Для всех трех вариантов приведенная далее теорема дает достаточные и необходимые условия грубости.

В определении имеется в виду лишь факт сохранения характера устойчивости (например, если точка равновесия $\mathbf{x} = 0$ невозмущенной системы (2) асимптотически устойчива или неустойчива, то и точка равновесия $\mathbf{x} = 0$ возмущенной системы (5) соответственно асимптотически устойчива или неустойчива); при этом в некоторых случаях фазовые портреты систем (2) и (5) могут быть топологически неэквивалентными в любой окрестности точки $\mathbf{x} = 0$.

Имеют место следующие достаточные и необходимые условия грубости систем (2) в смысле данного выше определения.

Теорема. *Нелинейная система* (2) *является по отношению к рассматриваемому классу возмущений* $\mathbf{A}'\mathbf{x} + \varphi_1(\mathbf{x})$ *грубой в смысле сохранения характера устойчивости ее точки равновесия* $\mathbf{x} = 0$ *тогда и только тогда, если корни, соответствующие матрице* $\mathbf{A}$, *либо все расположены левее мнимой оси комплексной плоскости, либо если хотя бы один корень расположен правее этой оси при любом расположении остальных корней. В первом случае грубой является асимптотически устойчивая нелинейная система* (2), *во втором случае груба неустойчивая нелинейная система* (2).

Доказательство теоремы дано в Приложении.

Из теоремы следует, что асимптотически устойчивая нелинейная система (2) груба тогда и только тогда, если ее линеаризованная система

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}, \quad \mathbf{x} \in \mathbf{R}^n, \tag{7}$$

асимптотически устойчива, а неустойчивая система (2) груба тогда и только тогда, если ее линеаризованная система (7) неустойчива вследствие наличия у нее корней справа от мнимой оси. Из теоремы также следует, что нелинейная система (2) является по отношению к рассматриваемому классу возмущений негрубой тогда и только тогда, если среди соответствующих матрице $\mathbf{A}$ корней есть корни на мнимой оси, но при этом нет корней правее этой оси (корни левее оси могут быть). Расположение корней, соответствующих матрице $\mathbf{A}$, вне мнимой оси является, очевидно, достаточным условием грубости нелинейной системы (2).

Теоремы первого метода Ляпунова, как известно, позволяют судить о характере устойчивости точки равновесия $\mathbf{x} = 0$ нелинейной системы

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \psi(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathbf{R}^n \tag{8}$$

по корням, соответствующим матрице $\mathbf{A}$ (соответственно, по характеру устойчивости точки равновесия $\mathbf{x} = 0$ линеаризованной системы (7)); при этом компоненты $\psi_i(\mathbf{x})$, $i = 1, 2, ..., n$ функции $\psi(\mathbf{x})$ считаются принадлежащими классу аналитических функций, удовлетворяющих условию

$$\lim_{\mathbf{x} \to 0} \frac{\psi_i(\mathbf{x})}{\|\mathbf{x}\|} = 0, \quad i = 1, 2, ..., n, \tag{9}$$

ибо по условию этих теорем являются аналитическими функциями, разложение которых в степенные ряды содержит члены не ниже второй степени. Заметим, что условия указанных теорем можно рассматривать не только как редукционные условия, сводящие исследование нелинейных систем (8) на устойчивость к исследованию линейных систем (7), но и как условия грубости (в смысле сохранения характера устойчивости) линейных систем (7) по отношению к классу нелинейных аналитических возмущений $\psi_i(\mathbf{x})$, удовлетворяющих условию (9). При доказательстве приведенной выше теоремы используется следующая лемма, обобщающая теоремы первого метода Ляпунова на случай, когда рассматривается класс всех функций $\psi_i(\mathbf{x})$, удовлетворяющих условию (9), который значительно шире класса аналитических функций $\psi_i(\mathbf{x})$, рассматриваемых в первом методе.

Лемма. *Пусть скалярные нелинейные функции* $\psi_i(\mathbf{x})$, $i = 1, 2, ..., n$, *являющиеся компонентами векторной функции* $\psi(\mathbf{x})$, *входящей в правую часть нелинейной системы* (8), *удовлетворяют соотношению* (9). *Тогда достаточным и необходимым условием асимптотической устойчивости точки равновесия* $\mathbf{x} = 0$ *нелинейной системы* (8) *при любых функциях* $\psi_i(\mathbf{x})$ *рассматриваемого класса является отрицательность вещественных частей всех корней, соответствующих матрице* **A**, *а достаточным и необходимым условием неустойчивости точки равновесия* $\mathbf{x} = 0$ *при любых функциях* $\psi_i(\mathbf{x})$ *того же класса является положительность вещественной части хотя бы одного корня, соответствующего матрице* **A**.

Доказательство леммы дано в Приложении.

Условия леммы можно рассматривать как достаточные и необходимые условия грубости (в смысле сохранения характера устойчивости точки равновесия $\mathbf{x} = 0$) линейной системы (7) по отношению к широкому классу нелинейных возмущений $\psi(\mathbf{x})$, компоненты которых удовлетворяют условию (9), ибо, как следует из леммы, при любых возмущениях $\psi(\mathbf{x})$ из этого класса характеры устойчивости систем (7) и (8) являются одинаковыми. Очевидно, что достаточным и необходимым условием негрубости линейной системы (7) по отношению к нелинейным возмущениям указанного класса является расположение некоторых корней, соответствующих матрице **A**, на мнимой оси при отсутствии корней правее этой оси.

Приведем примеры на применение теоремы. Сначала рассмотрим семейство нелинейных систем

$$\dot{x}_1 = x_2 + \varphi_1(x_1, x_2, x_3), \quad \dot{x}_2 = -x_1 + \varphi_2(x_1, x_2, x_3),$$
$$\dot{x}_3 = x_3 + \varphi_3(x_1, x_2, x_3), ..., \tag{10}$$

где φ_1, φ_2 и φ_3 — любые скалярные нелинейные функции, удовлетворяющие условиям (3). Точкой равновесия любой системы семейства является точка $\mathbf{x} = 0$. Так как линеаризованной системе $\dot{x}_1 = x_2$, $\dot{x}_2 = -x_1$, $\dot{x}_3 = x_3$ соответствует корень справа от мнимой оси (при двух других сопряженных корнях на этой оси), то согласно теореме любая система семейства (10) будет грубой в смысле сохранения характера устойчивости ее точки равновесия $\mathbf{x} = 0$ по отношению к рассматриваемым возмущениям.

Исследуем теперь нелинейную систему

$$\dot{x}_1 = -x_2 + x_3^2, \quad \dot{x}_2 = x_1 + x_3^3, \quad \dot{x}_3 = -x_3 + x_1x_2.$$

Точка $\mathbf{x} = 0$ является точкой равновесия этой системы. Нелинейные функции x_3^2, x_3^3 и x_1x_2 аналитические, и степень каждой из них не ниже второй. Поэтому эти функции удовлетворяют условию (3). Линеаризованной системе $\dot{x}_1 = -x_2$, $\dot{x}_2 = -x_1$, $\dot{x}_3 = -x_3$ соответствуют два сопряженных корня на мнимой оси и один корень слева от нее. При таком расположении корней согласно теореме рассматриваемая нелинейная система является негрубой.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Введено понятие грубости в смысле сохранения характера устойчивости для нелинейных динамических систем произвольного порядка ляпуновского типа. Для автономных систем такого типа получены достаточные и необходимые условия грубости при весьма широком классе возмущений правой части системы.

Актуальная задача дальнейших исследований состоит в получении аналогичных условий грубости для неавтономных нелинейных динамических систем произвольного порядка.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство леммы. *Достаточность.* Сначала покажем, что отрицательность вещественных частей всех корней, соответствующих матрице **A**, является достаточным условием асимптотической устойчивости точки равновесия $\mathbf{x} = 0$ нелинейной системы (8) при любых функциях $\psi_i(\mathbf{x})$, удовлетворяющих условию (9). Как известно [9], если все корни, соответствующие матрице **A**, имеют отрицательные вещественные части, то решением уравнения в частных производных

$$\sum_{i=1}^{n} (a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + ... + a_{in}x_n)\frac{\partial V}{\partial x_i} = \|\mathbf{x}\|^2, \quad \|\mathbf{x}\|^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2, \tag{11}$$

является отрицательно определенная квадратичная форма V переменных $x_1, x_2, ..., x_n$. Левая часть уравнения (11) является производной от неизвестной функции $V(\mathbf{x})$ в силу линейной системы (7). Очевидно, что производная в силу нелинейной системы (8) от отрицательно определенной формы V имеет вид

$$\frac{\partial V}{\partial t} = \|\mathbf{x}\|^2 + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_i}\psi_i(\mathbf{x}).$$

Преобразуем это соотношение, чтобы доказательство достаточности оказалось возможным при любых функциях $\psi_i(\mathbf{x})$, удовлетворяющих условиям (9):

$$\frac{\partial V}{\partial t} = \|\mathbf{x}\|^2\left[1 + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_i}\frac{1}{\|\mathbf{x}\|}\frac{\psi_i(\mathbf{x})}{\|\mathbf{x}\|}\right]. \tag{12}$$

Покажем, что в каждой точке некоторой достаточно малой окрестности точки $\mathbf{x} = 0$ значение модуля второго члена в квадратной скобке меньше единицы (это означает определенную положительность производной dV/dt). Действительно, так как V — квадратичная форма, то каждая из производных $\partial V/\partial x_i$, $i = 1, 2, ..., n$, представляет собой 1-форму (однородный многочлен первой степени), и поэтому модуль значения каждого из выражений $(\partial V/\partial x_i)(1/\|x\|)$, $i = 1, 2, ..., n$, ограничен в любой окрестности точки $\mathbf{x} = 0$. Но в силу условия (9) окрестность точки $\mathbf{x} = 0$ можно выбрать так, чтобы значения функций $\psi_i(\mathbf{x})/\|\mathbf{x}\|$, $i = 1, 2, ..., n$, были в этой окрестности столь малы, что при этом значение модуля второго члена в квадратной скобке соотношения (12) меньше единицы. Тогда при любом значении этого второго члена выражение в квадратной скобке будет в указанной окрестности положительной функцией, а производная dV/dt будет, очевидно, определенно положительной функцией. Но так как при этом функция V определенно отрицательна, то согласно второму методу Ляпунова точка равновесия $\mathbf{x} = 0$ нелинейной системы (8) будет асимптотически устойчива (при любой функции $\psi(\mathbf{x})$, удовлетворяющей условию (9)).

Покажем теперь, что положительность вещественных частей некоторых корней, соответствующих матрице $\mathbf{A}$, является достаточным условием неустойчивости точки равновесия $\mathbf{x} = 0$ нелинейной системы (8). Как известно [9, 10], в случае наличия таких корней для уравнения в частных производных

$$\sum_{i=1}^{n}(a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n)\frac{\partial V}{\partial x_i} = \|\mathbf{x}\|^2 + \lambda V$$

обязательно найдутся квадратичная форма $V(\mathbf{x})$ и положительное число λ, которые удовлетворяют этому уравнению, и при этом форма $V(\mathbf{x})$ в сколь угодно малой окрестности точки $\mathbf{x} = 0$ принимает положительные значения. Беря производную от этой формы по времени в силу нелинейной системы (8), получаем

$$\frac{dV}{dt} = \lambda V + W(\mathbf{x}), \qquad (13)$$

где

$$W(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x}\|^2 + \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial V}{\partial x_i}\psi_i(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x}\|^2\left[1 + \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial V}{\partial x_i}\frac{1}{\|\mathbf{x}\|}\frac{\psi_i(\mathbf{x})}{\|\mathbf{x}\|}\right].$$

Ранее, при рассмотрении случая, когда вещественные части всех корней, соответствующих матрице $\mathbf{A}$, отрицательны, было показано, что функция $W(\mathbf{x})$ определенно положительна при любых функциях $\psi_i(\mathbf{x})$, удовлетворяющих условию (9). Но тогда форма $V(\mathbf{x})$, производная которой в силу системы (8) приводится к виду (13), будет удовлетворять условиям второй теоремы о неустойчивости прямого метода Ляпунова [9]. Следовательно, точка равновесия $\mathbf{x} = 0$ нелинейной системы (8) будет неустойчивой при любых функциях $\psi_i(\mathbf{x})$, удовлетворяющих условию (9).

Необходимость. Итак, достаточное условие того, что при любых функциях $\psi_i(\mathbf{x})$, удовлетворяющих условию (9), о характере устойчивости точки равновесия $\mathbf{x} = 0$ нелинейной системы (8) можно судить по характеру устойчивости точки равновесия $\mathbf{x} = 0$ линейной системы (7), заключается в том, что корни, соответствующие матрице $\mathbf{A}$, либо все расположены левее мнимой оси, либо некоторые из них расположены правее этой оси. Для доказательства, что это условие является и необходимым, надо показать, что при ином расположении корней (нет корней справа от мнимой оси и имеются корни на мнимой оси) судить о характере устойчивости нелинейной системы (8) по характеру устойчивости линейной системы (7) при любой функции $\psi_i(\mathbf{x})$, удовлетворяющей условию (9), нельзя, ибо при таком ином расположении корней функции $\psi_i(\mathbf{x})$ всегда можно подобрать так, чтобы точка равновесия $\mathbf{x} = 0$ нелинейной системы (8) была устойчивой или неустойчивой по желанию. Такое доказательство дано в работе [9, с. 344] (см. также работы [10, 11]); при этом доказательстве нужные функции подбираются из таких аналитических функций, которые входят в класс всех функций $\psi_i(\mathbf{x})$, удовлетворяющих условию (9), так как разложение этих аналитических функций в степенные ряды содержит члены не ниже второй степени. Лемма доказана.

Доказательство теоремы. *Достаточность.* Покажем, что при условии теоремы на расположение корней, соответствующих матрице $\mathbf{A}$, характер устойчивости точки равновесия $\mathbf{x} = 0$ систем (2) и (5) одинаков при любых рассматриваемых (см. определение) возмущениях $\mathbf{A}'\mathbf{x}$, $\varphi_1(\mathbf{x})$ в любых их сочетаниях: $\mathbf{A}'\mathbf{x} \neq 0$, $\varphi_1(\mathbf{x}) \neq 0$; $\mathbf{A}'\mathbf{x} \neq 0$, $\varphi_1(\mathbf{x}) = 0$; $\mathbf{A}'\mathbf{x} = 0$, $\varphi_1(\mathbf{x}) \neq 0$.

По условиям теоремы корни, соответствующие матрице $\mathbf{A}$, либо все лежат левее мнимой оси (тогда линейная система (7) асимптотически устойчива), либо среди этих корней имеются корни, расположенные правее этой оси (тогда система (7) неустойчива). При изменении коэффициентов матрицы $\mathbf{A}$ соответствующие ей корни изменяются непрерывно [12]. Поэтому если корни, соответствующие матрице $\mathbf{A}$, все лежат левее мнимой оси, то при любых достаточно малых элементах матрицы $\mathbf{A}'$ корни, соответствующие матрице $\mathbf{A} + \mathbf{A}'$, также все будут расположены левее мнимой оси. Следовательно, точки равновесия $\mathbf{x} = 0$ линейных систем (7) и

$$\dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{A} + \mathbf{A}')\mathbf{x}, \quad \mathbf{x} \in \mathbf{R}^n \qquad (14)$$

будут асимптотически устойчивыми. Но тогда согласно лемме асимптотически устойчивыми будут точки равновесия нелинейных систем (2) и (5), ибо соответствующие этим системам нелинейные функции $\varphi(\mathbf{x})$ и $\varphi(\mathbf{x}) + \varphi_1(\mathbf{x})$ не меняют согласно лемме характер устойчивости точки равновесия $\mathbf{x} = 0$. Заметим, что компоненты $\psi_i = \varphi_i + \varphi_{i1}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, функции $\psi = \varphi + \varphi_1$ удовлетворяют условию (9), ибо

$$\lim_{\mathbf{x}\to\infty}\frac{\psi_i(\mathbf{x})}{\|\mathbf{x}\|} = \lim_{\mathbf{x}\to\infty}\frac{\varphi_i(\mathbf{x})}{\|\mathbf{x}\|} + \lim_{\mathbf{x}\to\infty}\frac{\varphi_{1i}(\mathbf{x})}{\|\mathbf{x}\|} = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

если учитывать условия (3) и (6).

Если же среди корней, соответствующих матрице $\mathbf{A}$, имеются корни, лежащие правее мнимой оси, то при любых достаточно малых коэффициентах матрицы $\mathbf{A}'$ число правых корней, соответствующих матрице $\mathbf{A} + \mathbf{A}'$, останется прежним в силу непрерывной зависимости корней от элементов матрицы. Поэтому точки равновесия $\mathbf{x} = 0$ линейных систем (7) и (14) будут неустойчивыми. Следовательно, на основании леммы неустойчивыми будут точки равновесия $\mathbf{x} = 0$ нелинейных систем (2) и (5), ибо согласно лемме нелинейные функции $\varphi(\mathbf{x})$ и $\varphi(\mathbf{x}) + \varphi_1(\mathbf{x})$ не могут изменить характера устойчивости точки равновесия $\mathbf{x} = 0$.

Таким образом, при условиях теоремы характер устойчивости нелинейных систем (2) и (5) при любых рассматриваемых возмущениях остается одинаковым. Достаточность доказана.

Необходимость. Надо доказать, что если характер устойчивости точки равновесия $\mathbf{x} = 0$ систем (2) и (5) одинаков при любых возмущениях $\mathbf{A}'\mathbf{x}$, $\varphi_1(\mathbf{x})$ в любом их сочетании ($\mathbf{A}'\mathbf{x} \neq 0$, $\varphi_1(\mathbf{x}) \neq 0$; $\mathbf{A}'\mathbf{x} \neq 0$, $\varphi_1(\mathbf{x}) = 0$; $\mathbf{A}'\mathbf{x} = 0$, $\varphi_1(\mathbf{x}) \neq 0$), то расположение корней, соответствующих матрице $\mathbf{A}$ линеаризованной системы (7), может быть только таким, которое соответствует условиям теоремы (либо все корни расположены слева от мнимой оси, либо хотя бы один корень расположен справа от нее).

Для этого следует доказать, что при ином расположении корней (нет корней справа, обязательно есть корни на мнимой оси и при этом могут быть корни слева от нее), соответствующих матрице $\mathbf{A}$, при возмущениях $\mathbf{A}'\mathbf{x} \neq 0$ существует достаточно малое возмущение $\mathbf{A}'$ матрицы $\mathbf{A}$, а при возмущении $\mathbf{A}'\mathbf{x} = 0$ найдется нелинейное возмущение $\varphi_1(\mathbf{x})$, при которых характер устойчивости точки равновесия $\mathbf{x} = 0$ систем (2) и (5) будет различным. Доказательство приведем отдельно для случая, когда $\mathbf{A}'\mathbf{x} \neq 0$ ($\mathbf{A}'\mathbf{x} \neq 0$, $\varphi_1(\mathbf{x}) \neq 0$; $\mathbf{A}'\mathbf{x} \neq 0$, $\varphi_1(\mathbf{x}) = 0$), и для случая, когда $\mathbf{A}'\mathbf{x} = 0$, $\varphi_1(\mathbf{x}) \neq 0$. В обоих случаях исходим из того, что среди корней, соответствующих матрице $\mathbf{A}$, нет корней справа от мнимой оси, но есть корни на мнимой оси.

Начнем с доказательства для первого случая, т. е. докажем, что при указанном ином расположении корней, соответствующих матрице $\mathbf{A}$, найдется достаточно малое возмущение $\mathbf{A}'$ этой матрицы, при котором характер устойчивости систем (2) и (5) будет различаться. Преобразуем такую матрицу $\mathbf{A}$ в жорданову матрицу $\mathbf{J}$. Матрицы $\mathbf{A}$ и $\mathbf{J}$ подобны, т. е. существует неособая матрица $\mathbf{P}$ такая, что $\mathbf{A} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{J}\mathbf{P}$ [13]; поэтому корни, соответствующие матрицам $\mathbf{A}$ и $\mathbf{J}$ одинаковы [13].

Так как характер устойчивости линейной системы (7) $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ определяется не только характеристическими корнями матрицы $\mathbf{A}$, но и видом ее матрицы Жордана $\mathbf{J}$, то характеры устойчивости системы (7) и нормальной системы уравнений $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{J}\mathbf{x}$, соответствующей матрице $\mathbf{J}$, одинаковы.

Матрица $\mathbf{J}$, как и любая жорданова матрица, имеет блочно-диагональный вид, а элементы блоков записываются через параметры корней, соответствующих матрице $\mathbf{J}$ (а, следовательно, и матрице $\mathbf{A}$). Если в блоках матрицы $\mathbf{J}$ сколь угодно мало изменить параметры этих корней, то, очевидно, новым корням будет соответствовать другая жорданова матрица $\mathbf{J}_1$, элементы которой сколь угодно близки к соответствующим элементам матрицы $\mathbf{J}$.

Существует семейство $\{\mathbf{A}_1\}$ матриц $\mathbf{A}_1$ подобных матрице $\mathbf{J}_1$, ибо каждой неособой матрице $\mathbf{T}$ из семейства $\{\mathbf{T}\}$ всех неособых матриц соответствует матрица $\mathbf{A}_1 = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{J}_1\mathbf{T}$, по определению подобная матрице $\mathbf{J}_1$. Вследствие такого подобия матрице $\mathbf{J}_1$ и всем матрицам $\mathbf{A}_1$ семейства $\{\mathbf{A}_1\}$ соответствуют одинаковые корни (они по условию выбора матрицы $\mathbf{J}_1$ сколь угодно мало отличаются от корней, соответствующих матрицам $\mathbf{J}$ и $\mathbf{A}$); очевидно, что характер устойчивости линейной системы $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{J}_1\mathbf{x}$ и всех систем $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}_1\mathbf{x}$, $\mathbf{A}_1 \in \{\mathbf{A}_1\}$ одинаков. Покажем, что среди матриц семейства $\{\mathbf{A}_1\}$ найдется такая матрица $\mathbf{A}_1$, что ее коэффициенты сколь угодно мало отличаются от коэффициентов матрицы $\mathbf{A}$, т. е. матрицу $\mathbf{A}_1$ можно представить как $\mathbf{A}_1 = \mathbf{A} + \mathbf{A}'$, где элементы матрицы $\mathbf{A}'$ сколь угодно малые. Для этого воспользуемся неособой матрицей $\mathbf{T} = \mathbf{P}$ из семейства $\{\mathbf{T}\}$, где $\mathbf{P}$ — неособая матрица, которая обеспечивала подобие матриц $\mathbf{J}$ и $\mathbf{A} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{J}\mathbf{P}$. С помощью этой матрицы $\mathbf{P}$ получим матрицу $\mathbf{A}_1 = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{J}_1\mathbf{P}$, подобную матрице $\mathbf{J}_1$; корни матриц $\mathbf{A}_1$ и $\mathbf{J}_1$, очевидно, одинаковы. Так как при получении матриц $\mathbf{A} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{J}\mathbf{P}$ и $\mathbf{A}_1 = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{J}_1\mathbf{P}$ используется одна и та же неособая матрица $\mathbf{P}$, а корни, соответствующие жордановым матрицам $\mathbf{J}$ и $\mathbf{J}_1$, отличаются сколь угодно мало, то элементы матрицы $\mathbf{A}_1$ будут сколь угодно мало отличаться от элементов матрицы $\mathbf{A}$ и, следовательно, существует такая матрица $\mathbf{A}'$ со сколь угодно малыми элементами, что $\mathbf{A}_1 = \mathbf{A} + \mathbf{A}'$.

Покажем теперь, что при любом характере устойчивости точки равновесия $\mathbf{x} = 0$ нелинейной системы (2) среди всех матриц $\mathbf{A}'$ со сколь угодно малыми элементами найдется такая матрица $\mathbf{A}'$, что характер устойчивости точки равновесия $\mathbf{x} = 0$ возмущенной системы (5) будет отличаться от характера устойчивости точки равновесия $\mathbf{x} = 0$ невозмущенной системы (2). Для этого покажем, что рассматриваемое при доказательстве необходимости расположение корней (нет корней справа от мнимой оси, обязательно есть корни на мнимой оси), соответствующих матрице $\mathbf{A}$, таково, что при любом характере устойчивости точки равновесия $\mathbf{x} = 0$ системы (2) можно указать такое сколь угодно малое изменение этих корней (с целью получения матриц $\mathbf{J}_1$ и $\mathbf{A}_1$) и, следовательно, согласно доказанному выше, указать такое сколь угодно малое возмущение $\mathbf{A}'$ матрицы $\mathbf{A}$, чтобы характер устойчивости точки равновесия $\mathbf{x} = 0$ линейной системы $\dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{A} + \mathbf{A}')\mathbf{x}$ обеспечивал различие характеров устойчивости точек равновесия систем (2) и (5).

Действительно, рассматриваемые нами корни, соответствующие матрице $\mathbf{A}$ линейной системы (7), таковы, что эта система либо неасимптотически устойчива (всем корням на мнимой оси соответствуют простые элементарные делители и могут быть или не быть корни слева от мнимой оси), либо неустойчива (есть кратные нулевые или мнимые корни, которым соответствуют непростые элементарные делители и могут быть или не быть корни слева от мнимой оси). Если в любом из этих двух случаев нелинейная система (2) неасимптотически устойчива, то достаточно сколь угодно мало сдвинуть вправо все или часть находящихся на мнимой оси корней, соответствующих матрицам $\mathbf{J}$ и $\mathbf{A}$, чтобы по доказанному выше нашлось такое сколь угодно малое возмущение $\mathbf{A}'$ матрицы $\mathbf{A}$, что система (14) $\dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{A} + \mathbf{A}')\mathbf{x}$ будет неустойчивой. Но тогда согласно лемме при учете нелинейных членов $\varphi(\mathbf{x})$, $\varphi_1(\mathbf{x})$ в правой части системы (5) будет неустойчивой и эта система. Другими словами при неасимптотической устойчивости системы (2) существует сколь угодно малое возмущение $\mathbf{A}'\mathbf{x}$ в правой части системы (5), которое приводит к различию характеров устойчивости систем (2) и (5). Если же в любом из двух рассматриваемых случаев нелинейная система (2) неустойчива, то достаточно все находящиеся на мнимой оси корни, соответствующие матрице $\mathbf{A}$, сколь угодно мало сдвинуть влево, чтобы нашлось сколь угодно малое возмущение $\mathbf{A}'$ матрицы $\mathbf{A}$, при котором система (14) и, следовательно, согласно лемме система (5) будут асимптотически устойчивыми, т. е. при неустойчивости системы (2) также существует сколь угодно малое возмущение $\mathbf{A}'\mathbf{x}$ в правой части системы (5), при котором различны характеры устойчивости систем (2) и (5). Наконец, если при любом из двух рассматриваемых случаев система (2) асимптотически устойчива, то достаточно сколь угодно мало сдвинуть вправо все или часть находящихся на мнимой оси корней, соответствующих матрице $\mathbf{A}$, чтобы нашлось сколь угодно малое возмущение $\mathbf{A}'$ матрицы $\mathbf{A}$, при котором системы (14) и (5) будут неустойчивыми. Следовательно, и при асимптотической устойчивости системы (2) существует сколь угодно малое возмущение $\mathbf{A}'\mathbf{x}$, при котором характеры устойчивости систем (2) и (5) различны.

Осталось доказать, что во втором случае, когда $\mathbf{A}'\mathbf{x} = 0$, $\varphi_1(\mathbf{x}) \neq 0$, при расположении корней, соответствующих матрице $\mathbf{A}$, отличном от их расположения, требуемого условиями теоремы, существует нелинейное возмущение $\varphi_1(\mathbf{x})$, при котором характер устойчивости систем (2) $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \varphi(\mathbf{x})$ и (5) $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \varphi(\mathbf{x}) + \varphi_1(\mathbf{x})$ будет различным.

Для доказательства применим теорему Ляпунова [9, с. 344], которая использовалась при доказательстве необходимости условий леммы. Согласно этой теореме функцию $\psi(\mathbf{x}) = \varphi(\mathbf{x}) + \varphi_1(\mathbf{x})$, а, следовательно, и функцию $\varphi_1(\mathbf{x}) = \psi(\mathbf{x}) - \varphi(\mathbf{x})$ в правой части системы (5) всегда можно выбрать так, чтобы точка равновесия $\mathbf{x} = 0$ этой системы была устойчивой или неустойчивой по желанию. Поэтому всегда существует функция $\varphi_1(\mathbf{x})$, которая обеспечивает отличие характеров устойчивости точек равновесия $\mathbf{x} = 0$ систем (2) и (5), учитывая, что характер устойчивости точки равновесия $\mathbf{x} = 0$ системы (2) не зависит от выбора возмущающей функции $\varphi_1(\mathbf{x})$. Необходимость доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Андронов А.А., Понтрягин Л.С.* Грубые системы // Доклады АН СССР. — 1937. — Т. 14, № 5. — С. 247.
2. *Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э.* Теория колебаний.— М.: Физматгиз, 1959. — С. 427.
3. *Андронов А.А.* Собрание трудов. — М.: Изд-во АН СССР. — 1956. — С. 183.
4. *Арнольд И.В.* Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1978. — С. 84.
5. *Красовский Н.Н.* Некоторые задачи теории устойчивости движения. — М.: Физматгиз, 1959. — С. 98.
6. *Математическая* энциклопедия. — М.: Сов. энциклопедия, 1984. — Т. 3. — С. 422.
7. *Там же.* — 1977. — Т. 1. — С. 1134.
8. *Арнольд И.В.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. — М.: Наука, 1971. — С. 129.
9. *Ляпунов А.М.* Общая задача об устойчивости движения. — М.-Л.: ОНТИ, 1935.
10. *Малкин И.Г.* Теория устойчивости движения. — М.: Наука, 1966. — С. 73.
11. *Дубошин Г.Н.* Основы теории устойчивости движения. — М.: Изд-во МГУ, 1952. — С. 166.
12. *Ланкастер П.* Теория матриц. — М.: Наука, 1978. — С. 208.
13. *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц. — М.: Наука, 1967.

Статья представлена к публикации членом редколлегии В.Ю. Рутковским.

Жуков Виктор Павлович — д-р техн. наук, зав. лабораторией, Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, г. Москва, ☎ (495) 334-89-61, e-mail: vpzhukov@ipu.ru