

# РОБАСТНОЕ УПРАВЛЕНИЕ НЕСТАЦИОНАРНЫМИ НЕЛИНЕЙНЫМИ СТРУКТУРНО НЕОПРЕДЕЛЕННЫМИ ОБЪЕКТАМИ

И.Б. Фуртат, А.М. Цыкунов

Решена задача робастного управления нестационарными нелинейными объектами по выходу в условиях априорной, функциональной и структурной неопределенности. В процессе функционирования системы порядок математической модели объекта может изменяться неизвестным образом. Решение основано на применении робастного алгоритма, позволяющего компенсировать неопределенности данного класса. Доказана работоспособность системы управления. Приведены результаты численного моделирования.

**Ключевые слова:** робастное управление, нестационарный, нелинейный объект управления, априорная, функциональная, структурная неопределенность, наблюдатель, функция Ляпунова.

## ВВЕДЕНИЕ

В классе задач адаптивного и робастного управления существует большое число методов и подходов к их решению. В основном они базируются на предположении о точном знании структуры объекта управления, т. е. когда известен порядок исследуемой системы дифференциальных уравнений [1–6]. Неизвестными считаются только параметрические и внешние воздействия. Работ, посвященных проблеме управления объектами с неизвестным порядком, довольно мало [7, 8]. Причем, в последних работах рассматриваются задачи управления линейными стационарными объектами с неизвестными, но постоянными порядками числителя и знаменателя передаточной функции. Однако, как отмечалось в работах [1, 2], существуют возмущения, способные влиять не только на изменение параметров объекта, но и на его порядок.

В статье рассматриваются нелинейные нестационарные объекты с неизвестными параметрами, подверженные воздействию внешних и параметрических неконтролируемых возмущений. Причем данные возмущения влияют на порядок объекта неизвестным образом. Решение задачи основано на применении робастного алгоритма, позволяющего компенсировать данный класс неопределенностей с заданной точностью за конечное время.

## 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим нестационарный нелинейный объект управления, динамические процессы в котором описываются дифференциальным уравнением

$$Q(p, t)y(t) = R(p, t)\sigma(y, t)u(t) + K(p, t)\Psi(y, t)\zeta(t) + F(p, t)f(t), \quad p^i y(0) = y_i, \quad i = \overline{1, n}, \quad (1)$$

где  $y(t)$  — регулируемый параметр,  $u(t)$  — управляющее воздействие,  $f(t)$  — неконтролируемое возмущение. Например, в системе управления котлом:  $y(t)$  может быть температура или давление, или расход пара на выходе котла;  $u(t)$  — расход газа, обеспечивающий изменение температуры в котле;  $f(t)$  — колебания газа, подаваемого на подогрев котла; в системе регулирования адсорбером:  $y(t)$  — концентрация влаги в газе на выходе адсорбера,  $u(t)$  — расход влажного газа на входе в адсорбер;  $f(t)$  — колебания концентрации влаги, расхода, давления в газе на входе в адсорбер; в системе управления движением корабля:  $y(t)$  — угол рыскания корабля,  $u(t)$  — угол поворота рулевого пера,  $f(t)$  — момент ветрового воздействия, волновые возмущения, действующее на корабль течение и т. п. Далее  $Q(p, t) = q_n(t)p^n + q_{n-1}(t)p^{n-1} + \dots + q_0(t)$ ,  $R(p, t) = r_m(t)p^m + r_{m-1}(t)p^{m-1} + r_0(t)$ ,  $K(p, t) = k_n(t)p^n + k_{n-1}(t)p^{n-1} + \dots + k_0(t)$ ,  $F(p, t) = f_n(t)p^n +$



$+ f_{n-1}(t)p^{n-1} + \dots + f_0(t)$  — линейные нестационарные дифференциальные операторы с неизвестными параметрами,  $\sigma(y, t)$  — скалярная функция,  $\zeta(t) \in R^n$  и  $\Psi(y, t) \in R^{1 \times n}$  — вектор-функция и матричная функция соответственно. Например,  $\Psi(y, t)$  и  $\sigma(y, t)$  в математической модели движения корабля определяют нелинейность, зависящую от угла рыскания  $y(t)$ , а  $\zeta(t)$  — неизвестные нестационарные параметры нелинейности  $\Psi(y, t)$ . Наконец,  $y_i \in R$  — неизвестные начальные условия.

Очевидно, такое уравнение может быть получено для широкого класса механических, электромеханических и других технических систем с помощью специальных методов параметризации и преобразования координат, или линеаризации [3].

Качество переходных процессов по выходу определим эталонной моделью

$$Q_m(p)y_m(t) = k_m r(t). \quad (2)$$

Здесь  $y_m(t)$  — выход эталонной модели,  $r(t)$  — задающее воздействие,  $Q_m(p)$  — известный линейный нормированный дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами,  $k_m$  — известный высокочастотный коэффициент усиления.

**Предположения.** 1. Полиномы  $Q(p, t)$ ,  $R(p, t)$ ,  $K(p, t)$ ,  $F(p, t)$ , их порядки  $\deg Q(p, t) \leq n$ ,  $\deg R(p, t) \leq m$ ,  $\deg K(p, t) \leq n$ ,  $\deg F(p, t) \leq n$  и относительная степень  $\gamma = n - m \geq 1$  — неизвестны. Коэффициенты операторов  $Q(p, t)$ ,  $R(p, t)$ ,  $K(p, t)$  и  $F(p, t)$  — ограниченные функции, причем ненулевые коэффициенты при старших степенях операторов  $Q(p, t)$  и  $R(p, t)$  — положительные функции. 2. Коэффициенты операторов  $Q(p, t)$ ,  $R(p, t)$ ,  $K(p, t)$ ,  $F(p, t)$  и вектор функции  $\zeta(t)$  зависят от вектора неизвестных параметров  $\vartheta \in \Xi$ , где  $\Xi$  — известное ограниченное множество. 3. Известна  $\gamma_u \geq \gamma$  — верхняя граница относительной степени  $\gamma$ . Порядок оператора  $Q_m(p) - \gamma_u$ ,  $k_m > 0$ . 4. Оператор  $R(p, t)$  — устойчив и для любого фиксированного момента времени  $t$  полином  $R(\lambda, t)$  — гурвицев, где  $\lambda$  — комплексная переменная в преобразовании Лапласа. Полином  $Q_m(\lambda)$  — гурвицев. 5. Элементы  $\Psi_i(y, t)$ ,  $i = \overline{1, n}$  матричной функции  $\Psi(y, t)$  неизвестны и удовлетворяют глобальному условию Липшица по  $y(t)$ , ограниченными по  $t$  и являются гладкими функциями;  $\zeta(t)$  — неизвестный вектор, компонентами которого являются гладкие ограниченные функции. Нелинейность  $\sigma(y, t)$  известна, и  $\sigma(y, t) > 0$  для любых  $y(t) \in R$  и  $t$ . 6. Задающее  $r(t)$  и возмущающее  $f(t)$  воздействия — ограниченные функции. 7. В системе управления не доступны измерению производные сигналов  $y(t)$ ,  $u(t)$  и  $r(t)$ .

Из предположения 1 следует, что динамический порядок объекта (1) неизвестен и подвержен изменению в результате действия на него параметрических возмущений. Например, если  $q_n(t) = 0$  и  $q_{n-1} \neq 0$ , то  $\deg Q(p, t) = n - 1$ , если  $q_n(t) = q_{n-1}(t) = 0$  и  $q_{n-2}(t) \neq 0$ , то  $\deg Q(p, t) = n - 2$  и т. д. Аналогично и для оператора  $R(p, t)$ : если  $r_m(t) = 0$  и  $r_{m-1}(t) \neq 0$ , то  $\deg R(p, t) = m - 1$ , если  $r_m(t) = r_{m-1}(t) = 0$  и  $r_{m-2}(t) \neq 0$ , то  $\deg R(p, t) = m - 2$  и т. д. Требование к знанию знаков ненулевых коэффициентов при старших степенях операторов  $Q(p, t)$ ,  $R(p, t)$  (предположение 1) и функции  $\sigma(y, t)$  (предположение 5) связано со знанием знака высокочастотного коэффициента усиления объекта (1). Это позволяет обеспечить отрицательную обратную связь в системе управления.

Цель управления — найти непрерывный закон регулирования, обеспечивающий ограниченность всех сигналов в замкнутой системе и выполнение целевого условия

$$|e(t)| = |y(t) - y_m(t)| < \delta \quad (3)$$

за конечное время  $T$  для всех  $\vartheta \in \Xi$ , где  $\delta > 0$  — достаточно малое число.

## 2. МЕТОД РЕШЕНИЯ

Разложим операторы  $R(p, t)$  и  $Q(p, t)$  на составляющие:

$$\begin{aligned} R(p, t) &= R_0(p) + \Delta R(p, t), \\ Q(p, t) &= Q_0(p) + \Delta Q(p, t). \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь  $\Delta R(p, t) = c_{01}^T(t)[1, p, \dots, p^{\bar{n}-2}]^T$ ,  $c_{01}(t)$  — вектор, составленный из коэффициентов оператора  $R(p, t) - R_0(p)$  и такой, что всегда выполнено первое из разложений (4),  $R_0(p)$  — произвольный стационарный линейный дифференциальный оператор степени  $\bar{n} - \gamma_u$ , и полином  $R_0(\lambda)$  — гурвицев;  $\bar{n}$  — верхняя граница порядка оператора  $Q(p, t)$ . Значение  $\bar{n}$  понадобится только для вывода и обоснования структуры замкнутой системы управления, а не для ее реализации. Относительно структуры  $\Delta R(p, t)$  можно сказать, что если  $m < \bar{n} - \gamma_u$ , то  $\deg \Delta R(p, t) = \bar{n} - \gamma_u$ ; если  $m = \bar{n} - \gamma_u$ , то  $\deg \Delta R(p, t) \leq \bar{n} - \gamma_u$ ; если  $m > \bar{n} - \gamma_u$ , то  $\deg \Delta R(p, t) = m$ ; т. е. всегда существует вектор  $c_{01}$ , обеспечивающий справедливость разложения оператора  $R(p, t)$ . В одном случае он имеет все ненулевые компоненты, в другом соответствующее

число составляющих нулевые. Далее,  $Q_0(p)$  — произвольный линейный стационарный дифференциальный оператор такой, что полином  $Q_0(\lambda)$  — гурвицев и  $\deg Q_0(p) = \bar{n}$ . Тогда оператор  $\Delta Q(p, t)$  представляет собой разность  $Q(p, t) - Q_0(p)$ , и  $\deg \Delta Q(p, t) \leq \bar{n}$ ; т. е. если  $\deg Q(p, t) < \deg Q_0(p)$ , то  $\deg \Delta Q(p, t) = \deg Q_0(p)$ , если  $\deg Q(p, t) = \deg Q_0(p)$ , то  $\deg \Delta Q(p, t) \leq \bar{n} - 1$ . Именно это разложение, позволяющее решить сформулированную задачу, отличается от известных способов параметризации уравнений объекта управления [1—4, 6]. Поскольку операторы  $R_0(p)$  и  $Q_0(p)$  — произвольные, то выберем их так, чтобы  $Q_0(p)R_0^{-1}(p) = Q_m(p)$ . Тогда, с учетом выражений (1), (2) и (4), сформируем ошибку слежения  $e(t) = y(t) - y_m(t)$

$$Q_m(p)e(t) = \sigma(y, t)u(t) + \varphi(t), \quad (5)$$

где  $\varphi(t) = RR_0^{-1}(p)[\Delta R(p, t)\sigma(y, t)u(t) - \Delta Q(p, t)y(t) + K(p, t)\Psi(y, t)\zeta(t) + F(p, t)f(t) - k_m r(t)]$ . Для регулирования объектом (1) зададим закон управления

$$u(t) = \sigma^{-1}(y, t)h(t), \quad h(t) = \alpha T(p)\bar{v}(t). \quad (6)$$

Преобразуем уравнение ошибки (5):

$$\begin{aligned} Q_m(p)e(t) &= T(p)(\alpha v(t) + j_1(t) + \alpha \bar{\Delta}(t)), \\ \varphi_1(t) &= T^{-1}(p)\varphi(t). \end{aligned} \quad (7)$$

Здесь  $\alpha > 0$ ,  $T(p)$  — линейный дифференциальный оператор степени  $\gamma_u$ , такой, что полином  $T(\lambda)$  — гурвицев, причем корни полинома  $T(\lambda)$  являются нулями передаточной функции замкнутой системы;  $\bar{v}(t)$  — оценка сигнала  $v(t)$ ,  $v(t)$  — вспомогательное управляющее воздействие (формирование функций  $v(t)$  и  $\bar{v}(t)$  будет описано далее);  $\bar{\Delta}(t) = \bar{v}(t) - v(t)$  — ошибка оценки сигнала  $v(t)$ .

Следуя работе [6], введем вспомогательный контур

$$Q_m(p)\bar{e}(t) = \beta T(p)v(t), \quad \beta > 0. \quad (8)$$

Учитывая уравнения (7) и (8), составим уравнение рассогласования  $\zeta(t) = e(t) - \bar{e}(t)$

$$Q_m(p)\zeta(t) = T(p)(\alpha \bar{\Delta}(t) + \varphi_1(t)), \quad (9)$$

где  $\varphi_1(t) = (\alpha - \beta)v(t) + T^{-1}(p)\varphi(t)$  — новая функция возмущения, включающая в себя априорную, функциональную и параметрическую неопределенность,  $\bar{\Delta}(t) = \bar{v}(t) - v(t)$  — ошибка оценки сигнала

$v(t)$ . Зададим закон вспомогательного управляющего воздействия  $v(t)$  в виде

$$v(t) = -\beta^{-1}Q_m(p)T^{-1}(p)\zeta(t) = -\beta^{-1}\varphi_1(t). \quad (10)$$

Разрешив уравнение  $v(t) = -\beta^{-1}\varphi_1(t)$  относительно переменной  $v(t)$ , получим  $v(t) = -\alpha^{-1}T^{-1}(p)\varphi(t)$ . Подставим последний результат в выражение (7). Тогда уравнение замкнутой системы относительно ошибки слежения можно записать в виде

$$Q_m(p)e(t) = \alpha T(p)\bar{\Delta}(t). \quad (11)$$

Для оценки  $\gamma_u$  производных сигнала  $v(t)$  воспользуемся схемой, предложенной в работе [4]:

$$\begin{aligned} \dot{\xi}(t) &= G_0\xi(t) + D_0(\bar{v}(t) - v(t)), \\ \bar{v}(t) &= L\xi(t). \end{aligned} \quad (12)$$

В уравнениях (12):  $\xi(t) \in R^{\gamma_u}$ ,  $G_0 = \begin{bmatrix} 0 & I_{\gamma_u-1} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ,  $I_{\gamma_u-1}$  — единичная матрица порядка  $\gamma_u - 1$ ,  $D_0 = -[d_1\mu^{-1}, d_2\mu^{-2}, \dots, d_{\gamma_u}\mu^{-\gamma_u}]$ , причем  $d_1, d_2, \dots, d_{\gamma_u}$  выбираются из условия гурвицевости матрицы  $G = G_0 - DL$ ,  $D = [d_1, d_2, \dots, d_{\gamma_u}]^T$ ,  $\mu$  — достаточно малая величина,  $L = [1, 0, \dots, 0]$ . Использование фильтра (12) позволяет оценить  $\gamma_u$  производных сигнала  $v(t)$  и тем самым реализовать управление (6).

Для оценки точности наблюдения введем в рассмотрение вектор отклонений  $\bar{\eta}(t) = \Gamma^{-1}(\xi(t) - \theta(t))$ , где  $\Gamma = \text{diag}\{\mu^{\gamma_u-1}, \mu^{\gamma_u-2}, \dots, \mu, 1\}$ ,  $\theta(t) = [v(t), \dot{v}(t), \dots, v^{(\gamma_u)}(t)]^T$ . Продифференцировав  $\bar{\eta}(t)$  по времени с учетом уравнения (12), получим:  $\dot{\bar{\eta}}(t) = \mu^{-1}G\bar{\eta}(t) + \bar{b}v^{(\gamma_u+1)}(t)$ ,  $\bar{\Delta}(t) = \mu^{\gamma_u-1}L\bar{\eta}(t)$ ,  $\bar{b} = [0, \dots, 0, 1]^T$ . Преобразуем предпоследние уравнения в эквивалентные относительно выхода  $\bar{\Delta}(t)$ :

$$\dot{\eta}(t) = \mu^{-1}G\eta(t) + b\dot{v}(t), \quad \bar{\Delta}(t) = \mu^{\gamma_u-1}L\eta(t). \quad (13)$$

Здесь  $\eta_i(t) = \bar{\eta}_i(t) - \mu^{1+i-\gamma_u}v^{(i-1)}(t)$ ,  $i = \overline{2, \gamma_u}$ ,  $\eta_1(t) = \bar{\eta}_1(t)$ ,  $b = [\mu^{2-\gamma_u}, 0, \dots, 0]^T$ . Последние два уравнения эквивалентны относительно переменных  $\eta_1(t) = \bar{\eta}_1(t)$  в виду того, что являются различными векторно-матричными формами записи одного уравнения  $(p^{\gamma_u} + d_1\mu^{-1}p^{\gamma_u-1} + \dots + d_{\gamma_u}\mu^{-\gamma_u})\bar{\eta}_1(t) =$



$= p^{\gamma_u} v(t)$ . Принимая во внимание уравнения (12) и (13), уравнение ошибки слежения (11) преобразуем к виду

$$\dot{e}(t) = A_m e(t) + \alpha \mu^{\gamma_u - 1} \bar{b} g \Delta(t), \quad e(t) = L e(t), \quad (14)$$

где  $e(t) \in R^{\gamma_u}$ ,  $A_m \in R^{\gamma_u \times \gamma_u}$  — матрица в форме Фробениуса с характеристическим многочленом  $Q_m(\lambda)$ ,  $\Delta(t) = [\eta_1(t), \dot{\eta}_1(t), \dots, \eta_1^{(\gamma_u)}(t)]^T$ ,  $g$  — вектор, составленный из коэффициентов полинома  $T(\lambda)$ .

**Утверждение.** Пусть выполнены предположения 1–7. Тогда существуют числа  $T > 0$  и  $\mu_0 > 0$  такие, что при  $\mu \leq \mu_0$  система (6), (8), (10), (12)–(14) диссипативна, и выполнено целевое условие (3) при  $t \geq T$ . ♦

Доказательство утверждения приведено в Приложении.

### 3. ПРИМЕРЫ

Рассмотрим нелинейный нестационарный объект управления вида (1):

$$\begin{aligned} & [q_4(t)p^4 + q_3(t)p^3 + q_2(t)p^2 + q_1(t)p + q_0(t)]y(t) = \\ & = [r_1(t)p + r_0(t)]\sigma(y, t)u(t) + [\bar{k}_4(t)p^4 + \bar{k}_3(t)p^3 + \\ & + \bar{k}_2(t)p^2 + \bar{k}_1(t)p + \bar{k}_0(t)]\Psi(y, t)\zeta(t) + \\ & + [f_4(t)p^4 + f_3(t)p^3 + f_2(t)p^2 + f_1(t)p + f_0(t)]f(t). \quad (15) \end{aligned}$$

Класс неопределенности  $\Xi$  задан неравенствами:  $0 \leq q_4(t) \leq 5$ ,  $0 \leq q_3(t) \leq 15$ ,  $0,5 \leq q_2(t) \leq 20$ ,  $-10 \leq q_1(t) \leq 10$ ,  $-10 \leq q_0(t) \leq 10$ ,  $0 \leq r_1(t) \leq 3$ ,  $0,5 \leq r_0(t) \leq 3$ ,  $-4 \leq \bar{k}_i(t) \leq 4$ ,  $-5 \leq f_i(t) \leq 5$ ,  $-2 \leq \zeta_i(t) \leq 2$ ,  $i = \overline{1, n}$ ,  $|f(t)| \leq 10$ . Предполагается, что полином  $r_1(t) + r_0(t)$  — устойчив и полином  $L\{r_1(t)p + r_0(t)\}$  — гурвицев для любого фиксированного момента времени  $t$ ,  $L\{\cdot\}$  — оператор преобразования Лапласа;  $\sigma(y, t) = 1 + |y(t)| + |y(t)|^2 \sin^2 2t$ ; верхняя оценка относительной степени  $\gamma$  объекта (15)  $\bar{\gamma}_u = 4$ . Остальные параметры в уравнении (15) неизвестны. Анализируя класс неопределенности  $\Xi$ , можно сказать, что в процессе функционирования (15) порядок характеристического многочлена  $Q(p, t)$  может принимать значения, равные 2, 3 и 4, а многочлена  $R(p, t) — 0$  и 1.

Так как  $\bar{\gamma}_u = 4$ , то  $\deg Q_m(p) = 4$ . Уравнение эталонной модели зададим в виде  $(p + 1)^4 y_m(t) = r(t)$ ,  $k_m = 1$ ,  $r(t) = 2 + \sin 0,5t + 2 \sin t + P_1$ ,  $P_1$  — прямо-

угольные импульсы, с амплитудой 2, периодом 4 с и длительностью 2 с.

Выберем  $\beta = 50$ . Распределение нулей передаточной функции замкнутой системы (11) определим оператором  $T(p) = 0,01p^4 + 2p^3 + 200p^2 + 200p + 100$ . Тогда, в соответствии с выражениями (8) и (10), уравнения вспомогательного управляющего воздействия и вспомогательного контура запишутся в виде

$$\begin{aligned} v(t) &= - \frac{(p + 1)^4}{0,01p^4 + 2p^3 + 200p^2 + 200p + 100} \zeta(t), \\ \bar{e}(t) &= \frac{0,01p^4 + 2p^3 + 200p^2 + 200p + 100}{(p + 1)^4} v(t). \end{aligned}$$

Здесь  $\zeta(t) = e(t) - \bar{e}(t)$ ,  $e(t) = y(t) - y_m(t)$  — ошибки рассогласования и слежения соответственно.

Для оценки  $v^{(i)}(t)$ ,  $i = \overline{0, 4}$  воспользуемся уравнением наблюдателя (12):  $\dot{\xi}_1(t) = -\xi_2(t) - d_1 \mu^{-1} \times (\xi_1(t) - v(t))$ ,  $\dot{\xi}_2(t) = -\xi_3(t) - d_2 \mu^{-1} (\xi_2(t) - v(t))$ ,  $\dot{\xi}_3(t) = -\xi_4(t) - d_3 \mu^{-1} (\xi_3(t) - v(t))$ ,  $\dot{\xi}_4(t) = -d_4 \mu^{-2} \times (\xi_4(t) - v(t))$ , где  $D = [d_1, d_2, d_3, d_4]^T = [20, 150, 500, 625]^T$ ,  $\mu = 10^{-2}$ . Задав  $\alpha = 50$ , уравнение (6) сформируем в виде  $u(t) = (1 + |y(t)| + |y(t)|^2 \sin^2 2t)^{-1} h(t)$ ,  $h(t) = 50[0,01 \dot{\xi}_4(t) + 2 \xi_4(t) + 200 \xi_3(t) + 200 \xi_2(t) + 100 \xi_1(t)]$ .

Пусть начальные условия в системе управления нулевые. Причем в уравнении (15) нелинейности  $\Psi(y, t) = [\ln^4(1 + |y|), \ln^4(1 + |y|), \cos 3y + 2 \sin y, \ln^2(1 + |y|) + y^2]$ ,  $\zeta(t) = [0,5 \sin t, \cos 2t, 1 + \sin t, 2]^T$  и внешнее возмущение  $f(t) = 1,5 + 1,5 \sin 1,5t + \cos(0,8t + \pi/3) + P_1(t - 0,5)$ .

На рис. 1 приведен график изменения ошибки слежения  $e(t)$  при следующих параметрах в уравнении (15):  $q_4(t) = \bar{P}_1(t)(1,5 + \cos t)$ ,  $q_3(t) = 4 \bar{P}_2(t) \times (1,5 + \cos t/3)$ ,  $q_2(t) = 4(3 + \sin 2t)$ ,  $q_1(t) = -3 \sin 2t + 4 \text{sign}(\sin 2t)$ ,  $q_0(t) = -5 \sin 2t + 4 \text{sign}(\sin 0,5t)$ ,  $r_1(t) = \bar{P}_3(t)(1,5 + \cos t/6)$ ,  $r_0(t) = 2 + \sin 3t$ ,  $\bar{k}_4(t) = 0,5 \bar{P}_1(t)(1 + \sin t)$ ,  $\bar{k}_3(t) = 0,2 \bar{P}_2(t)(1 + \cos t)$ ,  $\bar{k}_2(t) = 0,5(2 + 0,5 \sin t)$ ,  $\bar{k}_1(t) = 0,5 \sin 2t$ ,  $\bar{k}_0(t) = -\sin 2t$ ,  $f_4(t) = \bar{P}_1(t)$ ,  $f_3(t) = \bar{P}_2(t) \cos t$ ,  $f_2(t) = \sin t$ ,  $f_1(t) = 0,5 \sin 2t$ ,  $f_0(t) = \sin 1,2t$ , где  $\bar{P}_1(t)$ ,  $\bar{P}_2(t)$  и  $\bar{P}_3(t)$  — прямоугольные импульсы с амплитудой 1, периодом 15 с, длительностью 5, 8 и 12 с соответственно.

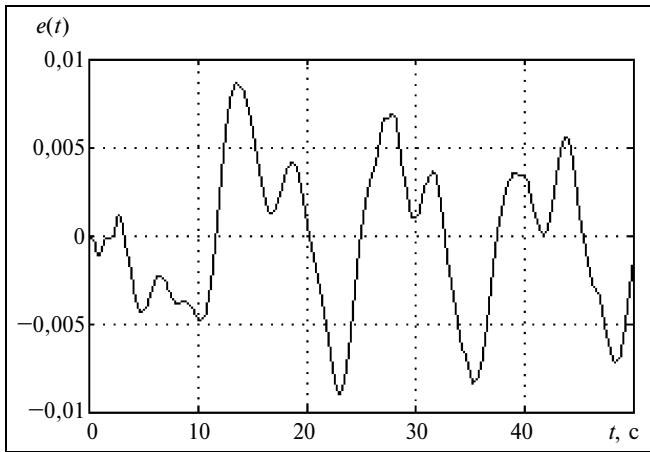


Рис. 1. График изменения ошибки слежения

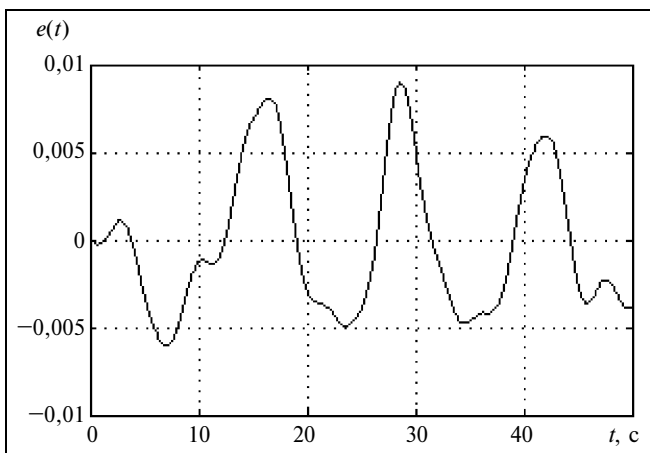


Рис. 2. Переходный процесс по ошибке слежения

На рис. 2 приведен результат моделирования, иллюстрирующий работоспособность системы при следующих данных в уравнении (15):  $q_4(t) = 2\bar{P}_1(t)$ ,  $q_3(t) = 2,5\bar{P}_2(t - 0,5)$ ,  $q_2(t) = 3 + \bar{P}_2(t - 1)$ ,  $q_1(t) = 1,5 + 2\bar{P}_1(t - 1,2)$ ,  $q_0(t) = 2\bar{P}_4(t - 1,5)$ ,  $r_1(t) = \bar{P}_3(t)[2 + \bar{P}_4(t - 0,1)]$ ,  $r_0(t) = 2 + \bar{P}_2(t - 0,6)$ . Остальные параметры объекта те же, что и в случае, приведенном на рис. 1.

Для объекта (15) на полуинтервалах времени:  $t \in [0, 5) \cup [15, 20) \cup [30, 35) \cup [45, 50)$  с  $q_4(t) > 0$  и  $r_1(t) > 0$ , т. е.  $\deg Q(p, t) = 4$ ,  $\deg R(p, t) = 1$ , относительная степень  $\gamma = 3$ ;  $t \in [5, 8) \cup [20, 23) \cup [35, 38)$  с  $q_4(t) = 0$ ,  $q_3(t) > 0$  и  $r_1(t) > 0$ , т. е.  $\deg Q(p, t) = 3$ ,  $\deg R(p, t) = 1$ , относительная степень  $\gamma = 2$ ;  $t \in [8, 12) \cup [23, 27) \cup [38, 42)$  с  $q_4(t) = q_3(t) = 0$ ,  $q_2(t) > 0$  и  $r_1(t) > 0$ , т. е.  $\deg Q(p, t) = 2$ ,  $\deg R(p, t) = 1$ ,

относительная степень  $\gamma = 1$ ;  $t \in [12, 15) \cup [27, 30) \cup [42, 45)$  с  $q_4(t) = q_3(t) = r_1(t) = 0$ ,  $q_2(t) > 0$ ,  $r_0(t) > 0$ ,  $\deg Q(p, t) = 2$ ,  $\deg R(p, t) = 0$ , относительная степень  $\gamma = 2$ .

Из рис. 1 и 2 видно, что возмущения, влияющие на структуру объекта (15), существенно не сказываются на результатах переходных процессов. Результаты, прежде всего, зависят от начальных условий самого объекта, чисел  $\mu$  в выражении (12),  $\alpha$  и  $\beta$  в формулах (6), (8) и (10) и матрицы  $D$  в выражении (12).

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассмотрен способ построения робастной системы управления, позволяющей скомпенсировать неконтролируемые внешние воздействия и параметрическую неопределенность, при условии, что порядки операторов  $Q(p, t)$  и  $R(p, t)$  в уравнении (1) неизвестны и могут изменяться в процессе функционирования произвольным образом. При решении задачи необходимо знание только оценки верхней границы разности порядков операторов  $Q(p, t)$  и  $R(p, t)$ .

Предложенная робастная система управления позволяет скомпенсировать неизвестные возмущения с точностью  $\delta$  за время  $T$ . При этом величины  $\delta$  и  $T$  можно сделать достаточно малыми путем соответствующего выбора параметров замкнутой системы.

Численные моделирования на ЭВМ показали, что качество переходных процессов не зависит от возмущений, влияющих как на характер поведения решения дифференциального уравнения объекта, так и на его структуру. Переходные процессы, прежде всего, зависят от начальных условий объекта и параметров системы управления.

## ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство утверждения. Перепишем уравнения (13) и (14) в виде

$$\mu_1 \dot{\varepsilon}(t) = G\varepsilon(t) + \mu_2 b \dot{v}(t), \quad \dot{\varepsilon}(t) = A_m \varepsilon(t) + \alpha \mu_2^{\gamma_u - 1} \bar{b} g \Delta(t), \quad (16)$$

где  $\mu_1 = \mu_2 = \mu$ . Воспользуемся второй леммой в работе [5]. Для этого выберем функцию Ляпунова для уравнений (16) в виде

$$V(t) = \varepsilon^T(t) P \varepsilon(t) + \eta^T(t) H \eta(t), \quad (17)$$

где матрицы  $P = P^T > 0$ ,  $H = H^T > 0$  определяются из решений уравнений  $A_m^T P + P A_m = -Q_1$ ,  $G^T H + H G = -Q_2$ ,  $Q_1 = Q_1^T > 0$ ,  $Q_2 = Q_2^T > 0$ . Согласно второй лемме [5], рассмотрим вначале случай при  $\mu_2 = 0$ . Это равносильно тому, что закон управления (10) обеспечивает точную компенсацию  $\varphi_1(t)$ , т. е.  $\bar{v}(t) = v(t)$ .



Возьмем от функции  $V(t)$  производную по времени вдоль траекторий (16) при  $\mu_2 = 0$ :

$$\dot{V}(t) = -\varepsilon^T(t)Q_1\varepsilon(t) - \mu_1^{-1}\eta^T(t)Q_2\eta(t). \quad (18)$$

Следовательно,  $\lim_{t \rightarrow \infty} |\varepsilon(t)| = 0$  и  $\lim_{t \rightarrow \infty} |\eta(t)| = 0$ . Тогда из уравнений (16) и условий второй леммы [5]  $\Delta t$  и  $\dot{v}(t)$  — ограниченные функции, т. е.  $\sup_t |\Delta t| < k_1$ ,  $\sup_t |\dot{v}(t)| < k_2$ , где  $k_1$  и  $k_2$  — некоторые положительные числа. Ограниченность сигналов  $p^{n-i}y(t)$ ,  $i = \overline{1, n}$  и  $\xi(t)$  следует из вышесказанного, уравнений (2), (12) и предположения 4.

Рассмотрим уравнение  $\varphi_1(t) = (\alpha - \beta)v(t) + T^{-1}(p)\varphi(t)$ . С учетом закона (10) и структуры функции  $\varphi(t)$ , разрешим его относительно переменной  $v(t)$ :

$$-\alpha v(t) = \frac{1}{T(p)} \frac{1}{R(p, t)} [\Delta Q(p, t)y(t) + K(p, t)\Psi(y, t)\zeta(t) + F(p, t)f(t)]. \quad (19)$$

Так как функции  $p^{n-i}y(t)$ ,  $i = \overline{1, n}$ , и  $r(t)$  — ограниченные, то из предположений 4, 6 и гурвицевости полинома  $T(\lambda)$  все слагаемые в выражении (19) ограничены, за исключением, пока что, функций  $\Psi(y, t)$  и  $v(t)$ . Рассмотрим слагаемое  $\frac{1}{T(p)} \frac{K(p, t)}{R(p, t)} \Psi(y, t)\zeta(t)$ . В силу ограниченности  $y(t)$ , липшицевости  $\Psi_i(y, t)$ ,  $i = \overline{1, n}$  по  $y(t)$  и ограниченности по  $t$  (предположение 5) следует ограниченность  $\Psi_i(y, t)$ . С учетом того, что  $\deg[T(p)R(p, t)] - \deg K(p, t) = \gamma_u - \gamma \geq 0$  и вектор  $\zeta(t)$  ограниченный (предположение 5), функция  $\frac{1}{T(p)} \frac{K(p, t)}{R(p, t)} \Psi(y, t)\zeta(t)$  также ограниченная. А значит, сигнал  $v(t)$  ограничен, так как правая часть в выражении (19) ограничена; т. е. в системе управления все сигналы ограничены. Однако сохранение области диссипативности не гарантирует асимптотическую устойчивость сингулярно возмущенной системе (16). Пусть в этой системе  $\mu_1 = \mu_2 = \mu_0$ . Возьмем снова функцию Ляпунова (17). С учетом результата (18) вычислим производную от функции Ляпунова (17) вдоль траекторий (16):

$$\dot{V}(t) = -\varepsilon^T(t)Q_1\varepsilon(t) + 2\alpha\mu_0^{\gamma_u-1}\varepsilon^T(t)P\bar{b}g\Delta(t) - \mu_0^{-1}\eta^T(t)Q_2\eta(t) + 2\mu_0\eta(t)^T Hb\dot{v}(t). \quad (20)$$

Воспользуемся оценками:

$$2\alpha\mu_0^{\gamma_u-1}\varepsilon^T P\bar{b}g\Delta \leq \mu_0^{\gamma_u-1}\alpha\varepsilon^T P\bar{b}gg^T\bar{b}^T P\varepsilon + \alpha\mu_0^{\gamma_u-1}|\Delta|^2 \leq \mu_0^{\gamma_u-1}\alpha\varepsilon^T P\bar{b}gg^T\bar{b}^T P\varepsilon + \alpha\mu_0^{\gamma_u-1}k_1^2,$$

$$2\mu_0\eta^T Hb\dot{v} \leq \mu_0\eta^T Hbb^T H\eta + \mu_0\dot{v}^2 \leq \mu_0\eta^T Hbb^T H\eta + \mu_0k_2^2.$$

Принимая во внимание данные неравенства, правую часть в выражении (20) можно оценить:  $\dot{V} \leq -\varepsilon^T Q_3\varepsilon - \eta^T Q_4\eta + \bar{\varphi}$ , где  $Q_3 = Q_1 - \mu_0^{\gamma_u-1}\alpha P\bar{b}gg^T\bar{b}^T P$ ,  $Q_4 = Q_2 - \mu_0^2 Hbb^T H$ ,  $\bar{\varphi} = \alpha\mu_0^{\gamma_u-1}k_1^2 + \mu_0k_2^2$ . Легко видеть, что всегда существует число  $\mu_0 > 0$ , обеспечивающее выполнение матричных нера-

венств:  $Q_1 - \alpha\mu_0^{\gamma_u-1}P\bar{b}gg^T\bar{b}^T P > 0$  и  $Q_2 - \mu_0^2 Hbb^T H > 0$ . В этом случае оценка производной функции Ляпунова может быть записана как  $\dot{V} \leq -\chi V + \bar{\varphi}$ , где  $\chi = \min\left\{\frac{\lambda_{\min}(Q_3)}{\lambda_{\max}(P)}, \frac{\lambda_{\min}(Q_4)}{\lambda_{\max}(H)}\right\}$ .

Решив последнее неравенство, получим

$$V(t) \leq e^{-\chi t}V(0) + \chi^{-1}(1 - e^{-\chi t})\bar{\varphi}. \quad (21)$$

Отсюда следует, что  $\lim_{t \rightarrow \infty} V(t) \leq \chi^{-1}\bar{\varphi}$ . Очевидно, что всегда существует число  $\mu_0 > 0$ , обеспечивающее требуемую величину  $\delta$  в целевом условии (3). Приравняем правую часть неравенства (21) к  $\delta$ , тогда  $\delta \leq e^{-\chi t}V(0) + (1 - e^{-\chi t})\chi^{-1}\bar{\varphi}$ . Рассмотрим верхнюю границу последнего неравенства, заменив его равенством в момент времени  $t = T$ . Тогда  $T = \chi^{-1} \ln \frac{\chi V(0) - \bar{\varphi}}{\chi\delta - \bar{\varphi}}$ ; т. е. по истечении времени  $t = T$  будет выполнено целевое условие (3), и все функции в замкнутой системе управления ограничены.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Поляк Б.Т., Щербаков П.С. Робастная устойчивость и управление. — М.: Наука, 2002. — 303 с.
2. Буков В.Н. Вложение систем. Аналитический подход к анализу и синтезу матричных систем. — Калуга: Изд-во науч. лит-ры Н.Ф. Бочкаревой, 2006. — 720 с.
3. Мирошник И.В., Никифоров В.О., Фрадков А.Л. Нелинейное и адаптивное управление сложными динамическими системами. — СПб.: Наука, 2000. — 549 с.
4. Atassi A.N., Khalil H.K. A separation principle for the stabilization of class of nonlinear systems // IEEE Trans. Automat. Control. — 1999. — Vol. 44, N 9. — P. 1672–1687.
5. Брусин В.А. Об одном классе сингулярно возмущенных адаптивных систем. 1 // Автоматика и телемеханика. — 1995. — № 4. — С. 119–127.
6. Цыкунов А.М. Алгоритмы робастного управления с компенсацией ограниченных возмущений // Автоматика и телемеханика. — 2007. — № 7. — С. 103–115.
7. Tao G., Ioannou P.A. Model reference adaptive control for plants with unknown relative degree // IEEE Trans. Automat. Control. — 1993. — Vol. 38. — N 6. — P. 976–982.
8. Hoagg J.B., Demstein D.S. Direct adaptive command following and disturbance rejection for minimum phase systems with unknown relative degree // Int. J. of Adaptive Control and Signal Processing. — 2007. — Vol. 21 (1). — P. 49–75.

Статья представлена к публикации членом редколлегии С.Д. Земляковым.

**Фуртат Игорь Борисович** — канд. техн. наук, ст. преподаватель, Астраханский государственный технический университет, ☎ (512) 33-38-42, e-mail: cainenash@mail.ru, furtat\_i@mail.ru,

**Цыкунов Александр Михайлович** — д-р техн. наук, зав. кафедрой, Астраханский государственный технический университет, ☎ (512) 61-42-48, e-mail: tsygunov\_al@mail.ru