

# МЕТОД ВЛОЖЕННЫХ КООРДИНАТ

В.А. Жевнеров

*Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, г. Москва*

Представлен метод, разработанный для описания систем массового обслуживания с полумарковскими процессами функционирования и пригодный для всех видов систем, описываемых с помощью иных методов, а также для некоторых новых видов систем. Отмечено, что его применение, как правило, требует наименьших трудозатрат.

В настоящее время для описания систем массового обслуживания (СМО) с полумарковскими процессами наиболее часто применяются метод катастроф [1] и метод «красных и синих» [2].

Метод катастроф представляет собой скорее мнемоническое правило составления уравнений. Суть его заключается в трактовке преобразования Лапласа плотности распределения вероятностей (п. р. в.) длительности интервалов времени между элементами вложенной марковской цепи в виде взаимно независимых вероятностей перехода и применении для описания полученной таким образом стохастической сети обычных методов теории вероятностей.

Метод «красных и синих» применяется для описания СМО, на марковский или полумарковский процесс функционирования которых налагаются дополнительные ограничения или факторы. Например, могут вводиться ограничения на длину очереди, время пребывания заявки в очереди или в системе. Для описания влияния таких факторов вводятся дополнительные переменные в виде вероятностей «подкрашивания» заявок в различные цвета. При этом число таких цветов, как правило, соответствует числу дополнительных учитываемых факторов. Уравнения связи составляются для некоторых созданных искусственным образом состояний, например, описывается вероятность пребывания в приборе, очереди или системе заявок только определенного цвета. Недостаток метода «красных и синих» заключается в отсутствии четкой методологии составления уравнений для учета факторов различного вида и их сочетаний. Здесь важное значение имеет опыт исследователя.

Традиционные методы теории массового обслуживания основаны на описании процесса функционирования СМО относительно «неподвижных» приборов обслуживания. Существование метода вложенных координат (МВК) заключается в описании процесса обслуживания произвольно выделенной заявки. Этот метод разработан для описания однофазовых СМО с пуассоновскими входящими потоками и полумарковскими процессами обслуживания. Для таких систем процесс поступления заявок является марковским, а марковская цепь образуется множеством  $T = \{t_i\}$ ,  $i = 1, 2, \dots$  моментов времени окончания или начала немарковских процессов обслуживания заявок в приборах. Каждой точке  $t_i$  марковской цепи соответствует множество  $U = \{u_n\}$  возможных состояний СМО. При этом состояние системы описывается только подмножеством параметров, оказывавших влияние на процесс обслуживания выделенной заявки. Обычно состояние  $u_n$  определяется количеством заявок  $n$ , находящихся в системе и влияющих на очередность обслуживания выделенной заявки.

Процесс обслуживания заявки условно разделяется на три этапа:

этап 1 — от момента поступления заявки в систему до наступления первого момента времени  $t_1 \in T$ ;

этап 2 соответствует процессу ожидания заявки в очереди на обслуживание с момента времени  $t_i$  до момента  $t_i \in T$  поступления заявки на прибор;

этап 3 — собственно обслуживание заявки в приборе.

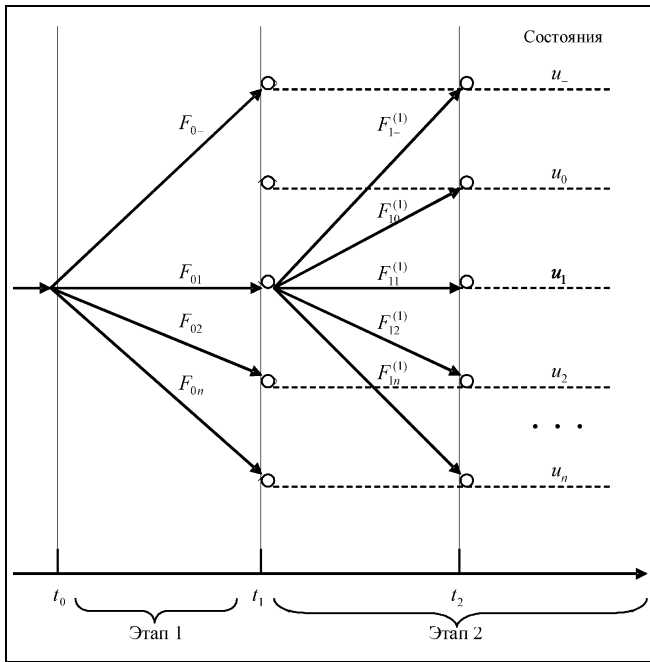


Рис. 1. Обобщенная структура графа, описывающего процесс обслуживания заявки в потоковом представлении

На вход системы в момент времени  $t_0$  (рис. 1) поступает заявка. Показатель качества обслуживания (критерий)  $f$  рассматривается в потоковом представлении [3]. Обычно для СМО в качестве критериев применяются:  $p_c$  — вероятность обслуживания заявки,  $g^*(s)$  — преобразование Лапласа п. р. в. времени обслуживания,  $\bar{t}$  и  $\bar{t}^2$  — первый и второй моменты времени обслуживания.

Поступившей заявке соответствует значение критерия  $f = f_0$ . К моменту  $t_i$  заявка будет находиться в одном из состояний системы в соответствии с операторами  $F_{0i}$ , определяющими значения  $F_{0i} = F_{0i}[\bar{X}]$  при переходе поступившей заявки в

состояние  $u_j$ , где  $\bar{X}$  — множество параметров, влияющих на процесс обслуживания выделенной заявки. В дальнейшем операторы, определяющие переходы из состояний  $u_i$  в  $u_j$  и соответствующие значения  $f_{ij}$ , обозначаются для марковской цепи операторами  $F_{ij}[\bar{X}]$ .

Состояние  $u_-$  соответствует выходу необслуженной заявки из системы (отказ в обслуживании),  $u_0$  — выходу обслуженной заявки,  $u_1$  — поступлению заявки в обслуживающий прибор,  $u_n$  — пребыванию в системе  $n$  заявок, включая рассматриваемую.

Результатом описания служит определение значений критериев  $f$  для суммарного выходящего потока.

Структура операторов  $F_{ij}$  и  $F_{0i}$  определяется видом описываемого критерия  $f$  и особенностями построения СМО — дисциплинами очереди, законами обслуживания, системами приоритетов и т. д. Примеры составления операторов для потоковых систем показаны в работе [4]. В отличие от метода «красных и синих» особенности построения СМО учитываются наиболее естественным образом, и для этого не требуется введение дополнительных искусственных переменных в виде «подкрашивания» потока заявок. Если операторы  $F_{ij}$  для марковской цепи не зависят от номера  $n$  состояния  $u_n$ , граф на рис. 1 для этапа 2 обслуживания можно представить в более компактном виде, приведенном на рис. 2, т. е. размерность графа в этом случае будет уменьшена на единицу.

Для описания выходящего потока  $f_{j0}$  и остальных потоков, циркулирующих в графах, достаточно применения прямых и обратных уравнений Колмогорова—Чэпмена [5].

В общем случае для описания критериев  $g^*(s)$  и  $\bar{t}^n$  необходимо определить сначала вероятности  $\pi_i$

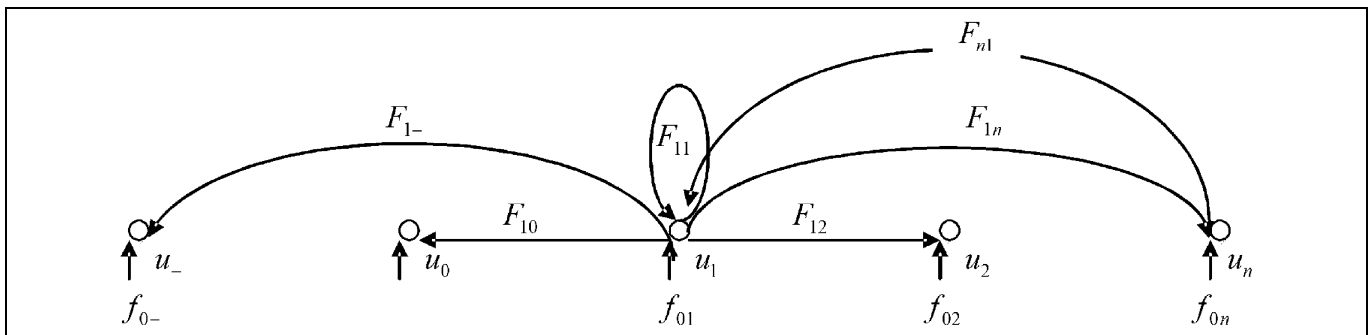


Рис. 2. Граф, описывающий процесс обслуживания заявки на этапе 2



пребывания СМО в состояниях  $u_i$  на элементах марковской цепи. Для этого следует построить соответствующий граф, определить операторы  $F_{ij}$  и составить систему уравнений относительно  $\pi_i$ . Отметим, что такие уравнения составляются в соответствии с традиционным подходом [6], т. е. с привязкой к «неподвижным» приборам обслуживания.

Таким образом, в МВК используются основные известные методы и подходы к описанию СМО:

— часть уравнений состояния формируется с привязкой к «неподвижным» приборам обслуживания;

— применяется аппарат описания марковских и полумарковских процессов прямыми и обратными уравнениями Колмогорова — Чэпмена;

— особенности вида СМО учитываются на этапе построения потоковой модели в виде графа и описания операторов (аналог — введение дополнительных переменных в методе «красных и синих»);

— метод катастроф применяется для описания наиболее распространенных критериев в виде преобразования Лапласа; кроме этого, в методе вложенных координат дополнительно применяется потоковое представление критериев, а процесс обслуживания описывается в виде потоковой модели

относительно произвольно выделенной заявки с использованием метода операторных уравнений.

Особенность потоковых моделей описания процесса функционирования СМО состоит в наличии жесткой корреляции между п. р. в. времени перехода системы в различные состояния и значениями вероятностей таких переходов.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Клейнрок Л. Вычислительные системы с очередями. — М.: Мир, 1979.
2. Климов Г. Стохастические системы обслуживания. — М.: Наука, 1970.
3. Жевнеров В.А. Потоковые системы. Моделирование и оптимизация. — М.: Наука, 2002.
4. Жевнеров В.А. Применение балансных уравнений в задачах описания стохастических сетей / Проблемы управления. — 2004. — № 2. — С. 63—65.
5. Саати Т. Элементы теории массового обслуживания и ее приложения. — М.: Сов. радио, 1971.
6. Тютюник М.Б. Использование информационного графа при распараллеливании вычислений для системы конфликтных продуктов / Информатика и системы управления. — 2006. — № 1. — С. 26—32.

☎ (495) 334-89-70, e-mail: jewn@mail.ru

Статья представлена к публикации членом редколлегии С.А. Редкозубовым. □



*Не забудьте подписаться!*

**Подписку на журнал «Проблемы управления»** можно оформить с любого месяца в любом почтовом отделении (подписные индексы 81708 и 80508 в каталоге Роспечати или 38006 в объединенном каталоге «Пресса России»), а также через редакцию. Отдельные номера редакция высылает по первому же требованию.

**Подписка через редакцию — выгодное предложение для Вас!** Подписаться через редакцию можно с любого месяца, здесь можно приобрести любой номер журнала за прошедшие годы. Позвоните в редакцию по тел. (495) 334-92-00 или обратитесь по электронной почте [ru@jri.ru](mailto:ru@jri.ru) — и подписка будет оформлена. Почтовые расходы по пересылке журнала редакция берет на себя.

Оформить подписку можно через группу компаний «Урал-Пресс» (см. <http://www.ural-press.ru/>) и агентство «Коммерсант — Курьер» (см. [www.kotcur.ru](http://www.kotcur.ru)), которые проводят подписку на наш журнал во многих городах России.