УДК 51-7;519.6;519.8

ДИСКРЕТНАЯ МОДЕЛЬ СТРУКТУРНОГО РАЗРУШЕНИЯ СЛОЖНЫХ СИСТЕМ[1]

А.А. Кочкаров[(1)], М.Б. Салпагаров[(2)], Л.М. Эльканова[(2)]

[(1)]*Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, г. Москва;*

[(2)]*Карачаево-Черкесская государственная технологическая академия, г. Черкесск*

Исследовано явление разрушения информационных, электроэнергетических, транспортных и коммуникационных систем со сложной структурой. Предложена теоретико-графовая (дискретная) модель структурного разрушения. Предложены различные критерии (критерий полного разрушения, компонентный критерий, критерий связности, диаметральный критерий) выхода системы из строя при структурном разрушении. Рассмотрены сценарии структурного разрушения систем при различных эпицентрах.

ВВЕДЕНИЕ

Эффективность функционирования большинства отраслей экономики государства зависит от пространственной распределенности и разветвленности ее коммуникационных сетей (электроэнергетических, информационных, водо- и теплоснабжающих и т. п.). Чем шире зона покрытия коммуникационных сетей, тем выше конкурентоспособность соответствующей отрасли экономики как на внутреннем рынке государства, так и за его пределами.

Сети с большой зоной покрытия требуют, с одной стороны, больших затрат на обеспечение штатного функционирования. С другой стороны, такие коммуникационные сети имеют сложную многоэлементную структуру с нетривиальным набором связей, что существенно повышает риск возникновения в них чрезвычайных и внештатных ситуаций. Кроме того, сбои в функционировании коммуникационных сетей имеют значительные последствия, выходящие за пределы самих сетевых систем, в которых произошли сбои.

Ряд аварий в электроэнергетических системах в крупных городах России (Москва, 2005 г.), Европы (Лондон, 2003 и 2006 гг.; Париж, 2006 г.) США и Канады (Детройт, Нью-Йорк, Кливленд, Оттава, Торонто, 2003 г.), показал, что развитие чрезвычайных ситуаций в коммуникационных системах с сетевой структурой происходит по «принципу домино» (в случае электроэнергетических систем — это веерные отключения). Один вышедший из строя объект (элемент системы) сильно повышает вероятность аварии на остальных, что приводит к возникновению лавины аварий. О последствиях таких аварий красноречиво свидетельствует следующий факт.

14 августа 2003 г. в ряде крупнейших городов восточного побережья США и Канады — Детройте, Нью-Йорке, Кливленде, Оттаве, Торонто и др. — произошло девятисекундное отключение электроснабжения, приведшее к веерным отключениям электроэнергии на площади более 24 тыс. кв. км и получившее название «Блэкаут-2003». Причина — перегрузка на энергетическом каскаде Ниагара — Мохок (на границе США и Канады). Авария затронула более 50 млн чел. в восьми штатах США и провинции Онтарио Канады, привела к остановке более 100 электростанций, в том числе 22-х атомных реакторов. Ликвидация последствий аварии заняла более 30-ти часов. Сумма нанесенного США финансового ущерба составила не менее 6 млрд. долл. США.

Нередки чрезвычайные ситуации и в России, в сетях тепло-, водо- и газопроводного транспорта. Во многих случаях причиной аварий служит изношенность самих сетей и узлового оборудования. Предотвращение, прогнозирование и профилак-

[1] Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 07-01-00618) и РГНФ (проект № 05-03-03188).

тика чрезвычайных ситуаций [1, 2] с далеко идущими последствия в сетевых системах со сложной структурой требуют новых исследовательских подходов в моделировании с учетом всех структурных особенностей моделируемой системы.

Описанная в настоящей работе *математическая модель структурного разрушения сложной системы* представляет собой дополнение к модели распространения внешних воздействий по структуре системы [3]. Эти модели в схеме развития чрезвычайных ситуаций (инициирование ЧС $\to$ развитие ЧС $\to$ выход ЧС за пределы системы) описывают первый и второй этапы.

1. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ СТРУКТУРНОГО РАЗРУШЕНИЯ

Изменения, происходящие в структуре сложной системы, могут быть описаны простейшими теоретико-графовыми операциями [4]: стягиванием ребра, удалением (добавлением) ребра, удалением (добавлением) вершины. Изменения структуры системы могут быть разовыми, а могут быть постоянными (периодическими, регулярными). Для последнего случая разумно ввести понятие *структурной динамики* — изменение структуры системы с течением времени. Несомненно, для описания структурной динамики лучше всего подходит аппарат теории графов [4].

Структурные изменения в сложных системах могут иметь как позитивный характер, когда в системе появляются новые элементы, улучшающие ее функционирование, так и негативный, когда из строя по различным причинам выходят элементы системы, что существенно ухудшает или останавливает работу всей системы.

Существует ряд моделей и задач, для описания которых используются потоки в сетях и на графах [5]. Потоками в сетях моделируют автотранспортное движение, перевозку товаров по железным дорогам, перекачку жидкости и газа по сети трубопроводов от источника до пункта потребления и т. д. Но все эти модели и задачи не учитывают возможности внезапного прекращения функционирования узловых элементов сетей (развязки автомобильных и железных дорог, станций высокого давления, трансформаторов и т. п.), а это часто приводит к внештатным ситуациям, не описываемым этими моделями. Нередко отказ одного узлового элемента системы приводит к череде отказов в системе (каскадному отключению), вследствие чего из строя выходит вся система.

Обозначим через $G = (V, E)$ граф, соответствующий структуре исследуемой системы, V — множество вершин, соответствующее элементам системы, а E — множество ребер, соответствующее связям между элементами системы. Каждой вершине $v \in V$ припишем веса $w(v)$ и $\bar{w}(v)$, отражающие *текущую загрузку и предельную загрузку* элемента системы. В случае, когда текущая загрузка $w(v)$ элемента системы достигает предельного значения $\bar{w}(v)$, то элементы системы выходят из строя. А проходящие через него потоки перераспределяются по «соседним» элементам системы. Выход из строя элемента системы в теоретико-графовой терминологии соответствует удалению из графа системы вершины с инцидентными ей ребрами. А перераспределение весов в тривиальном случае соответствует равному разделению веса $\bar{w}(v)$ удаленной вершины по вершинам, смежным с удаляемой.

При выходе из строя одного или нескольких элементов системы возможны несколько сценариев дальнейшего развития событий. Один из них, если система функционирует в *предельном состоянии*, т. е. загрузка элементов близка к предельному значению, то возможен «быстрый» переход системы в критическое состояние. Структурное разрушение, вообще говоря, процесс динамический. Не нарушая общности, будем считать, что $w_t(v)$ — текущая загрузка вершины $v \in V$ в момент времени $t = 0, 1, 2,..., T, ...$ Если через $\tilde{V}_t = \{\tilde{v}_j^t\} \subseteq V$, $j = 1\ 2, ..., |\tilde{V}_t|$, обозначить множество вершин, вышедших из строя в момент времени t, т. е. те, у которых $w_t(v_j) \geqslant \bar{w}(v_j)$, а через $\xi(\tilde{v}_j^t) = \{v_{i_j}^j\}$ — *окружение вершины* $\tilde{v}_j^t$ (или множество вершин, смежных с вершиной $\tilde{v}_j^t$), $|\xi(\tilde{v}_j^t)| = \deg \tilde{v}_j^t$, $i_j = 1, 2, ..., |\xi(\tilde{v}_j^t)|$, то процесс структурного разрушения формально описывается следующим образом.

В момент времени $t = 0$ необходимо произвести проверку по всем вершинам $v \in V$, и сформировать множество $\tilde{V}_1$ из вершин, для которых справедливо $w_0(\tilde{v}_j) \geqslant \bar{w}(\tilde{v}_j)$. Во все последующие моменты времени $t = 1, 2,..., T, ...$ следует воспользоваться правилом

$$w_{t+1}(v_{i_j}^j) = w_t(v_{i_j}^j) + \varepsilon_j \bar{w}(\tilde{v}_j),$$
$$i_j = 1, 2,..., |\xi(\tilde{v}_j^t)|, \quad j = 1, 2,..., |\tilde{V}_t|.$$

Если $w_{t+1}(v_{i_j}^j) \geqslant \bar{w}(v_{i_j}^j)$, то вершина $v_{i_j}^j$ удаляется из графа G и добавляется в множество $\tilde{V}_{t+1}$.

Коэффициент ε_j — *параметр распределения загрузки*. Он может зависеть от различных факторов, в простейшем случае он равномерно распределяет предельную загрузку удаляемой вершины по соседним, т. е. для каждой вершины $\tilde{v}_j$ он вычисляется как $\varepsilon_j = 1/\deg\tilde{v}_j^t$. Структурное разрушение при таком значении параметра распределения загрузки будем называть *равномерным*.

Процесс структурного разрушения может продолжаться до тех пор, пока система не перейдет в *критическое состояние* $\mathfrak{I}$, т. е., когда перестанет выполнять возложенные на нее функции. Критическое состояние $\mathfrak{I}$ определяется, исходя из особенностей моделируемой системы. Например, система может считаться пребывающей в критическом состоянии, если из ее структуры удален хотя бы один элемент (вершина), или система может считаться функционирующей, если ее структура после удаления элементов все еще остается связной. Далее будут рассмотрены различные *критерии отказа* системы (перехода в состояние выхода системы из строя) или, иначе, *критерии разрушения*.

2. ХАРАКТЕРИСТИКИ И ОСОБЕННОСТИ СТРУКТУРНОГО РАЗРУШЕНИЯ СЛОЖНОЙ СИСТЕМЫ

Основная задача моделирования структурного разрушения системы — выяснить, при каких условиях система может перейти в критическое состояние (начальные причины повреждения системы могут быт как внутренними, так и внешними). Переход системы в критическое состояние означает, что в системе начался процесс структурного разрушения, но это не значит, что система окончательно прекратила функционировать. Систему можно считать вышедшей из строя только в том случае, когда изменения, произошедшие в структуре системы, будут соответствовать критериям отказа. Поэтому одной из основных характеристик в модели структурного разрушения будет служить *время T_{cr} структурного разрушения*, отражающее длительность самого процесса структурного разрушения. Время T_{cr} соответствует продолжительности процесса структурного разрушения от момента первого удаления (выхода из строя) элемента системы до момента остановки процесса разрушения или отказа самой системы.

Поскольку построенная модель структурного разрушения системы непосредственно связана с типом структуры самой системы, важно исследовать системы с различными типами структур, найти связь между типом структуры системы и временем структурного разрушения при переходе системы в критическое состояние.

Нельзя подменять друг другом два представления о *сложности систем*. Сложность системы может заключаться и в сложности ее динамического поведения (самоорганизация, динамический хаос, бифуркации, случайное поведение и т. п.), и в сложности структуры связей между ее элементами. Часто системы совмещают в себе эти оба представления о сложности, хотя не всегда исследователям удается жестко определить понятия о сложности системы в поведении и в структуре. Нетривиален этот вопрос и для исследуемого в настоящей работе процесса структурного разрушения системы.

Для исследования процесса структурного разрушения систем предлагается использовать следующие критерии отказа.

Критерий полного разрушения $\sigma_0(k)$. Система считается вышедшей из строя, если в системе выйдут из строя все элементы (будут удалены все вершины графа — структуры системы). Критерий полного разрушения $\sigma_0(k)$ зависит от одного параметра k — числа удаленных вершин в начальный момент времени структурного разрушения.

Критерий связности $\sigma_1(k)$. Система считается вышедшей из строя, если нарушена связность ее структуры при удалении вершин. Критерий связности $\sigma_1(k)$ зависит от одного параметра k — числа удаленных вершин в начальный момент времени структурного разрушения.

Компонентный критерий $\sigma_2(k, m)$. Система считается вышедшей из строя, если число компонентов в структуре системы при ее разрушении станет равным (или больше) заданного числа m. Компонентный критерий $\sigma_2(k, m)$ выхода системы из строя зависит от двух параметров: k — числа удаленных вершин в начальный момент времени структурного разрушения и $(m - 1)$ — максимально допустимого числа компонентов структуры при ее разрушении.

Диаметральный критерий $\sigma_3(k, D)$. Система считается вышедшей из строя, если диаметр хотя бы одного из компонентов структуры системы в процессе разрушения окажется меньше заданного значения D. Диаметральный критерий $\sigma_3(k, D)$ выхода системы из строя зависит от двух параметров: k — числа удаленных вершин в начальный момент времени структурного разрушения и D — минимально допустимого диаметра компонентов структуры при ее разрушении.

Множество $\Phi(G)$ элементов, вышедших из строя (удаленных из структуры) в момент времени $t = 1$, будем называть *множеством эпицентров структурного разрушения*. В критериях $\sigma_0(k)$, $\sigma_1(k)$, $\sigma_2(k, m)$ и $\sigma_3(k, D)$ число k соответствует числу эпицентров структурного разрушения системы.

В настоящей работе раскрыты некоторые аспекты равномерного структурного разрушению ациклических графов (цепей и деревьев) *с равными значениями начальных загрузок* $w_0(v)$ *и равными значениями предельных загрузок* $\bar{w}(v)$ *для всех их вершин.*

3. СТРУКТУРНОЕ РАЗРУШЕНИЕ ГРАФОВ-ЦЕПЕЙ

3.1. Структурное разрушение графов-цепей по критерию связности

Всякий связный ациклический граф называется *деревом*. Частным случаем дерева G является граф-цепь $C = (V_C, E_C)$. Множество вершин V_C графа-цепи C состоит из двух висячих вершин — концов цепи со степенями, равными единице, и внутренних вершин со степенями, равными двум.

Рассмотрим граф-цепь $C = (V_C, E_C)$, $|V_C| = n$, с равными для всех его вершин $v \in V_C$ весами $w_0(v)$, $\bar{w}(v)$.

Ввиду того, что всякий граф-цепь утратит связность при удалении хотя бы одной невисячей (внутренней) вершины, справедлива

Лемма 1. *Всякий граф-цепь* $C = (V_C, E_C)$, $|V_C| = n$, *будет разрушен по критерию* $\sigma_1(k)$, *где* $1 \leqslant k \leqslant n - 2$, *при удалении хотя бы одной невисячей вершины.*♦

3.2. Структурное разрушение графов-цепей по компонентному критерию

Лемма 2. *Всякий граф-цепь* $C = (V_C, E_C)$, $|V_C| = n$, $n \geqslant 3$, *будет разрушен по критерию* $\sigma_2(k, m)$, *где* $2 \leqslant m \leqslant (n + 1)/2$ *при нечетном n и* $2 \leqslant m \leqslant n/2$ *при четном n, если число попарно несмежных внутренних вершин-эпицентров равно* $k = m - 1$.♦

Доказательство. Удаление одной невисячей вершины графа-цепи $C = (V_C, E_C)$ непременно приведет к распадению его на два компонента $C' = (V_{C'}, E_{C'})$ и $C'' = (V_{C''}, E_{C''})$. «Простейшим» компонентом в таком случае может быть граф-вершина. Всякий граф-цепь $C = (V_C, E_C)$, $|V_C| = n$, $n \geqslant 3$, имеет $(n - 1)/2$ попарно несмежных внутренних вершин, если n — нечетное, и $n/2 - 1$, если n — четное. Удаление из графа-цепи $C = (V_C, E_C)$ всех попарно несмежных внутренних вершин приведет к появлению $(n + 1)/2$ компонентов в первом случае и $n/2$ — во втором, причем каждый компонент будет представлять собой граф-вершину.♦

3.3. Структурное разрушение графов-цепей по диаметральному критерию

Пусть $H = (W, Q)$ есть n-вершинный связный граф [4]. Длина кратчайшей цепи, соединяющей пару вершин w, $v \in W$, называется расстоянием между вершинами w и v [4] и обозначается через $\rho(w, v)$. Заметим, что введенное таким образом расстояние удовлетворяет известным аксиомам евклидовой метрики.

Для фиксированной вершины $w \in W$ величина $\varepsilon w = \max\limits_{v \in W} \rho(w, v)$ называется *эксцентриситетом* вершины $w \in W$. Максимальный среди всех эксцентриситетов вершин графа $H = (W, Q)$ называется *диаметром* графа H и обозначается через $d(H)$, т. е. $d(H) = \max\limits_{v \in W} \varepsilon(w)$. Если пара вершин u, $w \in W$ соединяется кратчайшей цепью длины $\rho(u, w) = d(H)$, то эта цепь называется *диаметральной*. Вершина w называется *периферийной*, если $\varepsilon(w) = d(H)$. *Радиус* графа H обозначается через $r(H)$ и вычисляется по формуле $r(H) = \min\limits_{w \in W} \varepsilon(w)$. Вершина w называется *центральной*, если $\varepsilon(w) = r(H)$. *Центром* графа H называется множество центральных вершин.

Лемма 3. *Всякий граф-цепь* $C = (V_C, E_C)$, $|V_C| = n$, $n \geqslant 3$, *будет разрушен по критерию* $\sigma_3(1, r(C))$ *при удалении центральной вершины (т. е. когда эпицентром является центральная вершина). Причем диаметры появившихся в результате структурного разрушения компонентов будут равны* $r(C) - 1$ *и* $d(C) - r(C) - 1$.♦

Доказательство. Для графа-цепи $C = (V_C, E_C)$, $|V_C| = n$, расстояние между двумя его висячими вершинами v_1 и v_2 совпадает с диаметром и длиной графа-цепи $\rho(v_1, v_2) = d(C) = n - 1$, а сами вершины v_1 и v_2 являются периферийными.

Всякий граф-цепь $C = (V_C, E_C)$, $|V_C| = n$, имеет центр, состоящий из двух вершин, если число вершин цепи $|V_C| = n$ — четное, и состоящий из одной вершины, если число вершин $|V_C| = n$ — нечетное. В первом случае $r(C) = n/2$, во втором $r(C) = (n - 1)/2$. Удаление центральной вершины графа-цепи $C = (V_C, E_C)$ приведет к распадению его на две цепи $C_1 = (V_{C_1}, E_{C_1})$ и $C_2 = (V_{C_2}, E_{C_2})$ с соответствующими диаметрами $d(C_1) = r(C) - 1$ и $d(C_1) = d(C) - r(C) - 1$. Очевидно, что при нечетном n диаметры компонентов $C_1 = (V_{C_1}, E_{C_1})$ и $C_2 = (V_{C_2}, E_{C_2})$ будут равны: $d(C_1) = d(C_2)$, а при n четном $d(C_1) > d(C_2)$.♦

Для эксцентриситета всякой внутренней вершины $v \in V_C$ графа-цепи $C = (V_C, E_C)$ справедливо неравенство $r(C) \leqslant \varepsilon(v) < d(C)$. Так же, как и в случае с удалением из графа-цепи центральной вершины, удаление любой внутренней вершины приведет к распадению графа-цепи $C = (V_C, E_C)$ на два компонента $C_1 = (V_{C_1}, E_{C_1})$ и $C_2 = (V_{C_2}, E_{C_2})$, с соответствующими диаметрами $d(C_1) = \varepsilon(v) - 1$ и $d(C_2) = d(C) - \varepsilon(v) - 1$. Поэтому из леммы 3 очевидным образом вытекает

Лемма 4. *Всякий граф-цепь* $C = (V_C, E_C)$, $|V_C| = n$, $n \geqslant 3$, *будет разрушен по критерию* $\sigma_3(1, \varepsilon(v))$ *при удалении внутренней вершины* $v \in V_C$ *(т. е. когда эпицентром является внутренняя вершина* $v \in V_C$*). Причем диаметры появившихся в результате структурного разрушения компонентов будут равны* $\varepsilon(v) - 1$ и $d(C) - \varepsilon(v) - 1$.♦

3.4. Структурное разрушение графов-цепей по критерию полного разрушения

Рассмотрим вопрос о разности начальной (текущей) $w_0(v)$ и предельной загрузки $\bar{w}(v)$ элементов графа-цепи $C = (V_C, E_C)$.

Предположим, что эпицентром на графе-цепи $C = (V_C, E_C)$ является одна из его внутренних вершин $v^* \in V_C$. Пусть также $\bar{w}(v^*) - w_0(v^*) > \bar{w}(v^*)/2$, тогда после удаления эпицентра $v^* \in V_C$ текущая загрузка смежных ему вершин $v', v'' \in V_C$ станет равной

$$\bar{w}_1(v') = \bar{w}_1(v'') = w_0(v') + \bar{w}(v^*)/2 =$$
$$= w_0(v^*) + \bar{w}(v^*)/2 < \bar{w}(v^*).$$

Поэтому процесс структурного разрушения прекратится, а его длительность будет $T_{cr} = 1$.

В другом случае, когда $\bar{w}(v^*) - w_0(v^*) \leqslant \bar{w}(v^*)/2$, длительность процесса структурного разрушения $T_{cr} > 1$, если система не выйдет из строя при достижении установленного критерия разрушения.

Иная ситуация складывается, когда эпицентром является одна из висячих вершин $v_1, v_2 \in V_C$ графа-цепи $C = (V_C, E_C)$. В таком случае $\bar{w}(v_1) - w_0(v_1) < \bar{w}(v_1)$, поэтому для смежной эпицентру вершине $v''' \in V_C$ будет справедливо выражение $w_1(v''') = w_0(v''') + \bar{w}(v_1) > \bar{w}(v'')$. А это значит, что вершина $v''' \in V_C$ выйдет из строя (будет удалена) в следующий момент времени $t = 2$. Причем вершина v''' окажется висячей для цепи C/v_1, что приведет к удалению смежной ей вершине в момент времени $t = 3$. Этот процесс будет продолжаться до тех пор, пока не будут удалены все вершины графа-цепи $C = (V_C, E_C)$, т. е. будет достигнут критерий разрушения $\sigma_0(1)$. Из проделанных рассуждений вытекает

Лемма 5. *Всякий граф-цепь* $C = (V_C, E_C)$, $|V_C| = n$, $n \geqslant 3$, *будет разрушен по критерию* $\sigma_0(1)$ *при удалении одной из висячих вершин за время* $T_{cr} = n$.♦

4. СТРУКТУРНОЕ РАЗРУШЕНИЕ ДЕРЕВЬЕВ

4.1. Структурное разрушение деревьев по критерию связности

У деревьев $T = (V_T, E_T)$, как и у графов-цепей $C = (V_C, E_C)$, центр может состоять либо из одной, либо из двух вершин. Если диаметральная цепь дерева $T = (V_T, E_T)$ имеет четную длину, т. е. диаметр $d(T)$ четный, то центр дерева состоит из одной вершины и из двух в противном случае, т. е. когда диаметр $d(T)$ нечетный. У всякого дерева $T = (V_T, E_T)$ не менее чем две висячие вершины. Все остальные, как в случае с графами-цепями, будем называть внутренними.

Поскольку всякое дерево утратит связность при удалении хотя бы одной невисячей (внутренней) вершины, то справедлива

Лемма 6. *Всякое дерево* $T = (V_T, E_T)$, $|V_T| = n$, *будет разрушено по критерию* $\sigma_1(k)$, *где* $1 \leqslant k \leqslant n - n_T$, n_T *— число висячих вершин, при удалении хотя бы одной внутренней вершины за время* $T_{cr} = 1$.♦

4.2. Структурное разрушение деревьев по компонентному критерию

Лемма 7. *Всякое дерево* $T = (V_T, E_T)$, $|V_T| = n$, *будет разрушено по критерию* $\sigma_2(1, m)$ *при удалении одной внутренней вершины* $v \in V_T$ *за время* $T_{cr} = 1$, *причем* $m = \deg(v)$.♦

Доказательство. Удаление из дерева $T = (V_T, E_T)$ хотя бы одной внутренней вершины приведет к распадению его на компоненты, причем число компонентов будет зависеть от степени удаляемой вершины.♦

Лемма 8. *Всякое дерево* $T = (V_T, E_T)$, $|V_T| = n$, *будет разрушено по критерию* $\sigma_2(k, m)$ *при удалении* k *попарно несмежных внутренних вершин* $v_i \in V_T$ *за время* $T_{cr} = 1$, *причем* $m = \sum_{i=1}^{k} (\deg(v_i) - 1) + 1$.♦

Доказательство. Удаление из дерева $T = (V_T, E_T)$ всех k внутренних вершин $v_i \in V_T$ проведем последовательно вопреки основным правилам, определяющим процесс структурного разрушения. Это позволит подсчитать число полученных в результате структурного разрушения компонентов, и никак не повлияет на общую картину их межэлементных связей.

После удаления первой вершины $v_1 \in V_T$ дерево распадется на $\deg(v_1)$ компонентов. Поскольку эпицентры являются попарно несмежными и невисячими вершинами дерева $T = (V_T, E_T)$, то вершина $v_2 \in V_T$, принадлежащая какому-то из полученных при удалении вершины v_1 компоненту также не будет являться для своего компонента висячей вершиной. Поэтому при удалении вершины v_2 компонент, которому она принадлежит, распадется на $\deg(v_2)$ компонентов. А общее число компонентов, на которые распадется само дерево $T = (V_T, E_T)$, после удаления вершин v_1 и v_2 станет равным

$$\deg(v_1) + \deg(v_2) - 1 =$$
$$= (\deg(v_1) - 1) + (\deg(v_2) - 1) + 1.$$

И далее, каждое удаление одной из вершин $v_i \in V_T$, $i = 3, 4,..., k$, будет увеличивать число компонентов на $\deg(v_i) - 1$. А это значит, что при одновременном удалении всех эпицентров, соответствующих условиям леммы, дерево $T = (V_T, E_T)$ распадется на $m = \sum_{i=1}^{k} (\deg(v_i) - 1) + 1$ компонентов. Длительность процесса структурного разрушения составит $T_{cr} = 1$.♦

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предложена теоретико-графовая модель разрушения сложных систем с ациклической структурой. Построенная простая модель не претендует на полноту описания процесса структурного разрушения систем, но позволяет выявить ряд важных топологических свойств и характеристик этого процесса.

Построенная модель в целом расширяет спектр дискретных математических моделей и область приложений теории графов. В соответствии с идеями структурной динамики на основе предложенной модели наравне с понятием клеточного автомата [6] целесообразно использование понятия *графового автомата*, что также расширяет описательные возможности теории графов.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Управление* риском / В.А. Владимиров, В.В. Кульба, Г.Г. Малинецкий и др. — М.: Наука, 2000.
2. *Архипова Н.И., Кульба В.В.* Управление в чрезвычайных ситуациях. — М.: РГГУ, 1998.
3. *Кочкаров А.А., Малинецкий Г.Г.* Управление безопасностью и стойкостью сложных систем в условиях внешних воздействий // Проблемы управления. — 2005. — № 5. — С. 70—76.
4. *Лекции* по теории графов / В.А. Емеличев, О.И. Мельников, В.И. Сарванов, Р.И. Тышкевич. — М.: Наука, 1990.
5. *Форд Л., Фалкерсон Д.* Потоки в сетях. — М.: Мир, 1966.
6. *Тоффоли Т., Марголус Н.* Машины клеточных автоматов. — М.: Мир, 1991.

☎ *(495) 250-79-71, e-mail: Azret_Kochkarov@mail.ru*

Статья представлена к публикации членом редколлегии Г.Г. Малинецким. ❑