



ПСЕВДОСПЕКТРЫ И УСТОЙЧИВОСТЬ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

А.С. Девятисильный, Д.Е. Кислов

Институт автоматики и процессов управления ДВО РАН, г. Владивосток

Предложена технология численного анализа корректности математической постановки ряда задач, в основе которой лежит сформулированная и доказанная теорема о локализации спектральных портретов двух близких по норме линейных операторов. На примере задачи определения околостационарных орбит показана эффективность применения изложенного метода в спутниковой навигации.

ВВЕДЕНИЕ

Анализ и решение многих прикладных задач связаны с проблемой локализации собственных чисел линейных операторов внутри определенной области в условиях возмущений этих операторов в вычислительной среде. В зависимости от конкретной решаемой задачи в качестве интересующей области локализации могут выступать различные подмножества поля комплексных чисел.

В современных вычислительных средах, обладающих динамической точностью выполнения математических операций, решение такой задачи для конкретного оператора (невысокой размерности) не представляет существенных затруднений. Однако в случаях, когда этот оператор известен лишь приближенно, возникает вопрос о локализации спектра неизвестного оператора на основе известного его приближения, который и является объектом внимания настоящей работы.

В предлагаемой работе решается задача гарантированной локализации в заданной области спектрального портрета [1] линейного конечномерного оператора, известного с некоторой априорно определенной точностью. Конкретными примерами ситуаций, в которых требуется решение такого рода задачи, могут служить проблема численного исследования устойчивости непрерывных и дискретных линейных динамических систем (или анализ устойчивости нелинейных по первому приближению), численная проверка достаточных условий локального максимума (минимума) для экстремальных точек функций многих переменных, анализ разрешимости систем линейных алгебраических уравнений и др.

Далее в изложении будем придерживаться следующих обозначений. Под оператором F будем по-

нимать невозмущенный (неизвестный) оператор, в отношении псевдоспектра [2] (или спектрального портрета [1]) которого предстоит строить гарантирующие заключения; \tilde{F} — доступное для анализа приближение оператора F ; Ω — область локализации псевдоспектра, для которой требуется установить, содержится ли в ней данный спектральный портрет оператора F или указать условия, при которых это возможно.

1. МОДЕЛЬНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ

Общим подходом к исследованию поведения спектров линейных операторов при наличии возмущений является анализ их псевдоспектров [2], или, как предложил называть их С.К. Годунов, спектральных портретов операторов.

Напомним [1], что под спектральным портретом произвольного линейного оператора F понимается объединение всех множеств собственных значений оператора $F + \Delta F$ при $\|\Delta F\| \leq \varepsilon \|F\|$, где норма $\|\cdot\|$ ниже полагается спектральной операторной нормой (в связи с этим распространенным является также термин ε -спектр оператора).

В этом случае необходимым и достаточным условием того, что комплексное значение λ принадлежит ε -спектру ($\lambda \in \Lambda_\varepsilon(F)$), является выполнение условия [1]:

$$\|(\lambda I - F)^{-1}\| \geq \frac{1}{\varepsilon \|F\|}, \quad \varepsilon > 0. \quad (1)$$

Уточним, что в случае, когда λ является собственным числом оператора F , согласно работе [1] принимается $\|(\lambda I - F)^{-1}\| = \infty$, что влечет включение λ в спектральный портрет оператора F при любом $\varepsilon \geq 0$.

Наряду с условием (1) рассмотрим следующую модель возмущений, описывающую соотношение операторов F и \tilde{F} :

$$\|F - \tilde{F}\| \leq \gamma \|F\| \leq \frac{\gamma}{1-\gamma} \|\tilde{F}\|, \quad 0 \leq \gamma < 1, \quad (2)$$

из которой получим вспомогательное неравенство:

$$\frac{1}{1+\gamma} \|\tilde{F}\| \leq \|F\| \leq \frac{1}{1-\gamma} \|\tilde{F}\|. \quad (3)$$

Дальнейшая интерпретация модели (2) приводит к теореме о вложенности псевдоспектров точного и возмущенного операторов, которая с достаточностью замыкает решение обсуждаемой проблемы в рамках изложенных формальных представлений.

Теорема. Пусть F и \tilde{F} соответственно точный и возмущенный операторы, удовлетворяющие неравенству (2). Тогда ε -спектр невозмущенного оператора F целиком содержится в ε -спектре оператора \tilde{F} , причем

$$\tilde{\varepsilon} = \frac{\gamma + \varepsilon}{1 - \gamma}. \quad (4)$$

Доказательство. Рассмотрим неравенство, являющееся следствием теоремы об устойчивости сингулярных чисел к возмущениям [1]:

$$\begin{aligned} \sigma_j(\lambda I - \tilde{F}) - \frac{\gamma}{1-\gamma} \|\tilde{F}\| &\leq \sigma_j(\lambda I - F) \leq \\ &\leq \sigma_j(\lambda I - \tilde{F}) + \frac{\gamma}{1-\gamma} \|\tilde{F}\|, \quad j = \overline{1, n}, \end{aligned}$$

где $\sigma_j(\cdot)$ — j -е сингулярное число линейного оператора в скобках. С учетом неравенств (1) и (3) получим следующее расширенное неравенство:

$$\begin{aligned} \frac{1-\gamma}{(1-\gamma)\sigma_{\min}(\lambda I - \tilde{F}) - \gamma\|\tilde{F}\|} &\geq \frac{1}{\sigma_{\min}(\lambda I - F)} \geq \\ &\geq \frac{1}{\varepsilon\|F\|} \geq \frac{1-\gamma}{\varepsilon\|\tilde{F}\|}, \end{aligned}$$

откуда после элементарных преобразований

$$\frac{1}{\sigma_{\min}(\lambda I - F)} \geq \frac{1-\gamma}{(\varepsilon + \gamma)\|\tilde{F}\|},$$

из чего и следует выражение (4). Теорема доказана. ♦

Сформулированная теорема позволяет решать задачи локализации спектральных портретов операторов, известных лишь с некоторой точностью, предопределяемой моделями рассматриваемого здесь типа (2).

Пусть для невозмущенного оператора F исследуется вопрос о локализации его спектра в заданной области Ω . Тогда, в свете изложенного, может быть предложена следующая процедура решения

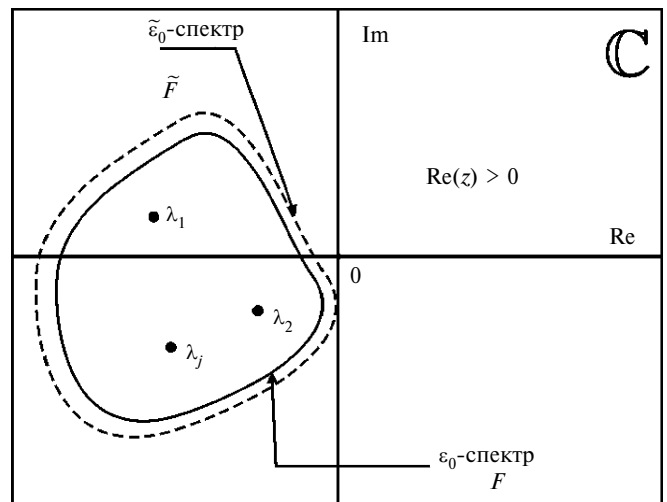


Рис. 1. Вложение псевдоспектров операторов F и \tilde{F}

такой задачи. Обозначим $\tilde{\varepsilon}_0$ — максимально допустимое значение относительных возмущений оператора \tilde{F} , при которых начинается выход его псевдоспектра из области Ω . Если при текущих значениях γ и $\tilde{\varepsilon}_0$ существует положительное значение ε_0 , удовлетворяющее соотношению (4), то это означает вложенность ε_0 -спектра оператора F в $\tilde{\varepsilon}_0$ -спектр возмущенного оператора \tilde{F} , что в свою очередь влечет $\Lambda_{\varepsilon_0}(F) \subseteq \Omega$ (рис. 1).

Таким образом, условие, гарантирующее существование вложенного псевдоспектра невозмущенного оператора, это наличие при заданных γ и $\tilde{\varepsilon}_0$ положительного ε , удовлетворяющего соотношению (4).

Итогом сказанного является

Следствие 1. Если $\tilde{\varepsilon}_0$ -спектр возмущенного оператора \tilde{F} целиком содержится в области Ω , причем $\exists P: P \in \partial\Lambda_{\tilde{\varepsilon}_0}(\tilde{F})$ и $P \in \partial\Omega$ ($\partial(\cdot)$ — символ границы области), то при

$$\gamma < \gamma^* = \frac{\tilde{\varepsilon}_0}{1 + \tilde{\varepsilon}_0}$$

существует ненулевой ε -спектр оператора F , целиком содержащийся в $\tilde{\varepsilon}_0$ -спектре оператора \tilde{F} .

Заметим, что случай $\gamma \geq \gamma^*$ исключает (в рамках изложенного) возможность гарантирующих заключений о принадлежности спектра оператора F заданной области Ω и требует, вообще говоря, проведения дополнительного исследования.

Рассмотрим случаи конкретных областей Ω , возникающих в реальных прикладных задачах.



Исследование устойчивости. При исследовании устойчивости линейных стационарных систем в качестве области Ω выступает левая комплексная полуплоскость $\Omega = \{z: \operatorname{Re}(z) \leq 0\}$. В этом случае следствие 1 может быть переформулировано следующим образом:

Следствие 1.1. Для того, чтобы невозмущенный оператор F был устойчив, при условии, что спектр оператора \tilde{F} находится в области устойчивости, достаточно выполнения соотношения

$$\gamma < \gamma^* = \frac{\tilde{\varepsilon}_0}{1 + \tilde{\varepsilon}_0},$$

где $\tilde{\varepsilon}_0 > 0$ такое, что $\exists P \in \mathbb{C}: P \in \partial \Lambda_{\tilde{\varepsilon}_0}$ и $\operatorname{Re}(P) = 0$.

Определение типа экстремума вещественной функции многих переменных. При численном исследовании типа экстремальной точки функций многих переменных требуется установить знакоопределенность формы, задаваемой ее гессианом (обозначим его F). При этом доступным для анализа является его — гессиана — вычисленный образ \tilde{F} . Такая ситуация, например, возможна, когда элементы матрицы F представляют собой сложные, требующие численной аппроксимации выражения. Для данной ситуации областью Ω будет множество вида $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{z: \operatorname{Re}(z) = 0\}$. Сохраняя смысл величины $\tilde{\varepsilon}_0$, приходим к следствию:

Следствие 1.2. Если при выполнении неравенства

$$\gamma < \gamma^* = \frac{\tilde{\varepsilon}_0}{1 + \tilde{\varepsilon}_0}$$

имеет место $\Lambda_{\tilde{\varepsilon}_0} \subseteq \{z: \operatorname{Re}(z) \geq 0\}$ ($\Lambda_{\tilde{\varepsilon}_0} \subseteq \{z: \operatorname{Re}(z) \leq 0\}$), то в исследуемой экстремальной точке функция имеет локальный минимум (максимум).

Исследование разрешимости систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ). Известно, что исследование корректности математической постановки многих прикладных задач сводится к анализу разрешимости СЛАУ. Например, при анализе наблюдаемости (управляемости) линейных динамических систем требуется установить существование и единственность решения специально сформированной СЛАУ [3]. С другой стороны, вопрос об исследовании разрешимости систем линейных уравнений имеет и самостоятельный интерес. Напомним [1], что однозначное решение системы с квадратной матрицей существует тогда и только тогда, когда спектр этой матрицы не содержит нулевых значений. Откуда следует, что область Ω должна включать в себя все точки множества \mathbb{C} за исключением начала координат. Соответствующая интерпретация исходного следствия 1 в этом случае примет вид:

Следствие 1.3. Для невырожденности исходной и возмущенной систем, заданных операторами F и \tilde{F} соответственно, достаточно выполнения соотношения

$$\gamma < \gamma^* = \frac{1}{1 + \mu(\tilde{F})},$$

где $\mu(\tilde{F})$ — спектральное число обусловленности оператора \tilde{F} .

Для обоснования следствия 1.3 достаточно показать, что $\tilde{\varepsilon}_0(\tilde{F}) = \mu^{-1}(\tilde{F})$. Действительно, норма минимального возмущения оператора \tilde{F} , превращающего его в необратимый, есть $\sigma_{\min}(\tilde{F})$ [1]. При таком возмущении, обозначим его $\Delta \tilde{F}$, $\tilde{\varepsilon}_0$ -спектр касается начала координат. Следовательно, $\|\Delta \tilde{F}\| = \tilde{\varepsilon}_0 \|\tilde{F}\| = \sigma_{\min}(\tilde{F})$, откуда $\tilde{\varepsilon}_0(\tilde{F}) = \mu^{-1}(\tilde{F})$.

Отметим, что последнее следствие эквивалентно ранее сформулированным авторами условиям разрешимости задачи определения параметров спутниковых орбит [4] в соответствующих обозначениях цитируемой работы.

В заключение теоретического изложения рассмотрим более подробно вопрос об исследовании устойчивости стационарной линейной системы, динамика которой определяется оператором F .

В рамках модельных представлений (2) имеют место две задачи.

Первая: при известном операторе \tilde{F} сформулировать требования к параметру γ , гарантирующие устойчивость невозмущенного оператора F .

Вторая: по априорно известному значению γ оценить степень устойчивости невозмущенного оператора F , т. е. найти значение ε_0 . Решение первой задачи с достаточностью раскрывает следствие 1.1.

Решение второй следует из соотношения (4): $\varepsilon_0 = (1 - \gamma)\tilde{\varepsilon}_0 - \gamma$. Величина ε_0 — максимально допустимый порог относительных возмущений оператора F , с достаточностью при $\varepsilon_0 > 0$ не выводящих его спектр из области устойчивости.

Далее рассматривается пример применения изложенной технологии анализа устойчивости для решения задачи определения спутниковых орбит.

2. ЧИСЛЕННЫЙ ПРИМЕР

Рассмотрим задачу определения параметров орбиты квазистационарного искусственного спутника Земли по дальномерным измерениям с наземных пунктов наблюдения (НПН). Классическим подходом к решению таких нелинейных обратных

задач является метод, основанный на их сведении к линейным, для которых алгоритмы решения более просты в реализации. Одна из существенных особенностей задачи определения околостационарной орбиты состоит в возможности выбора в качестве опорной стационарной орбиты, что, в свою очередь, приводит к необходимости оценки параметров стационарной линейной системы типа «состояние—измерение». Реализация последней задачи (задачи оценки параметров соответствующей стационарной линейной системы) осуществляется с помощью алгоритма винеровской фильтрации [3].

Образ оператора фильтра $F = A - KH$ (A — матрица динамической части системы; H — матрица наблюдения, а K — матрица передачи фильтра) в виртуальной среде аккумулирует в себе ошибки, накапливаемые в процессе его вычисления. Например, при нахождении матрицы передачи K требуется решение непрерывного алгебраического уравнения Риккати [3], которое для большинства прикладных задач может быть найдено лишь приближенно; кроме того, неточности, связанные с выполнением матричных операций на ЭВМ, также привносят свой вклад в суммарную вычислительную ошибку. Таким образом, точное уравнение, описывающее динамику фильтра при реализации алгоритма в вычислительной среде, заменяется возмущенным с оператором $\tilde{F} = \tilde{A} - \tilde{K}\tilde{H}$, где \tilde{K} — матрица передачи фильтра вычисленная на ЭВМ; \tilde{A} и \tilde{H} — образы матриц A и H в вычислительной среде.

Итак, в соответствии с представленной в § 1 теоремой необходимо найти значения $\tilde{\varepsilon}_0$, γ , ε_0 и γ^* и проверить гарантирующее условие $\gamma < \gamma^*$.

Значение $\tilde{\varepsilon}_0$ вычисляется в соответствии с определением псевдоспектра матрицы \tilde{F} ; для вычисления ε_0 предварительно требуется найти значение γ . С этой целью обратимся к концепции построения численно-аналитических оценок накапливаемых погрешностей [4], преимущество которых заключается в том, что вывод результирующей оценки не требует априорного знания норм точных (невозмущенных) матриц — все необходимые числовые значения вычисляются в процессе решения конкретной прикладной задачи. Учитывая структуру матрицы F , ее возмущения будут аккумулировать возмущения матриц D , A , H и R (R и D — ковариационные матрицы ошибок измерений и фильтрации, соответственно).

Запишем модели возмущений этих матриц:

$$\|H - \tilde{H}\|_F \leq \varepsilon_H \|H\|_F, \quad \|D - \tilde{D}\|_F \leq \varepsilon_D \|D\|_F,$$

$$\|A - \tilde{A}\|_F \leq \varepsilon_A \|A\|_F, \quad \|R^{-1} - \tilde{R}^{-1}\|_F \leq \varepsilon_R \|R^{-1}\|_F,$$

где возмущенные операторы отмечены «тильдой»; $\|\cdot\|_F$ — фробениусова норма матрицы [1].

В соответствии с изложенным, представим матрицы \tilde{F} и \tilde{K} в следующем виде:

$$\tilde{F} = (\tilde{A} - (\tilde{K}\tilde{H})_c)_c,$$

$$\tilde{K} = ((\tilde{D}\tilde{H}^T)_c \tilde{R}^{-1})_c,$$

где $(\cdot)_c$ — результат выполнения вычислений на компьютере.

Тогда, следуя представлениям, изложенным в работе [1], получаем оценки норм погрешностей соответствующих операторов:

$$\begin{aligned} \|F - \tilde{F}\|_F &\leq \|F - \tilde{F}\|_F \leq J_F, \\ J_F &= \frac{\varepsilon_H + m\varepsilon_1}{(1 - \varepsilon_H)\left(1 - \frac{m-1}{2}\varepsilon_1\right)} \|\tilde{K}\|_F \|\tilde{H}\|_F + J_K \|\tilde{H}\|_F + \\ &+ \frac{\varepsilon_A}{1 - \varepsilon_A} \|\tilde{A}\|_F + \frac{\varepsilon_1}{1 - \varepsilon_1} \|\tilde{F}\|_F, \quad (5) \\ \|K - \tilde{K}\|_F &\leq J_K, \\ J_K &= \\ &= \frac{\varepsilon_D + (n+m)\varepsilon_1 + \varepsilon_R + \varepsilon_H}{(1 - \varepsilon_H)(1 - \varepsilon_R)(1 - \varepsilon_D)\left(1 - \frac{n-1}{2}\varepsilon_1\right)\left(1 - \frac{m-1}{2}\varepsilon_1\right)} \times \\ &\times \|\tilde{D}\|_F \|\tilde{H}\|_F \|\tilde{R}^{-1}\|_F, \end{aligned}$$

где ε_1 — относительная точность представления чисел в ЭВМ (например, при вычислениях с удвоенной точностью $\varepsilon_1 = 2^{52} \approx 2,2 \cdot 10^{-16}$, а m и n — размерности пространства параметров состояния системы и вектора измерений, соответственно).

В качестве оценки γ , с учетом оценки (5), можно принять следующее

$$\gamma = \frac{J_F}{\|\tilde{F}\|} \leq \frac{J_F}{\|\tilde{F}\| - J_F}.$$

Числовое значение параметра J_F находят в процессе решения конкретной задачи, вычисляя необходимые величины $\|\tilde{D}\|_F$, $\|\tilde{H}\|_F$, $\|\tilde{R}^{-1}\|_F$, $\|\tilde{A}\|_F$ на ЭВМ.

Будем рассматривать задачу определения параметров околостационарной орбиты по дальномерным измерениям от трех неподвижных наземных пунктов наблюдения. Расположение пунктов наблюдения характеризуется значениями долготы (λ), широты (φ) и радиуса ($\rho \approx 6371$ км); координаты стационарной точки, около которой рассматривается орбитальное движение, взяты равными $\lambda = \varphi = 0$, $\rho = 42216$ км, а основные параметры имитируемой орбиты — эксцентриситет $e = 10^{-4}$ и



Характеристики устойчивости задачи определения орбит

№	Координаты НПН, град.						$\tilde{\varepsilon}_0$	ε_0	$\gamma \cdot 10^{-8}$	γ^*
	λ_1	φ_1	λ_2	φ_2	λ_3	φ_3				
1	0,1	0	-0,1	0	0	0,1	$8,379 \cdot 10^{-6}$	$8,323 \cdot 10^{-6}$	5,6	$8,379 \cdot 10^{-6}$
2	0,5	0	-0,5	0	0	0,5	$4,339 \cdot 10^{-5}$	$4,334 \cdot 10^{-5}$	5,3	$4,339 \cdot 10^{-5}$
3	1	0	-1	0	0	1	$8,686 \cdot 10^{-5}$	$8,681 \cdot 10^{-5}$	5,4	$8,687 \cdot 10^{-5}$
4	5	0	-5	0	0	5	$4,333 \cdot 10^{-4}$	$4,332 \cdot 10^{-4}$	5,4	$4,334 \cdot 10^{-4}$
5	20	0	-20	0	0	20	$1,676 \cdot 10^{-3}$	$1,675 \cdot 10^{-3}$	5,4	$1,678 \cdot 10^{-3}$
6	10	10	-10	10	0	10	$2,282 \cdot 10^{-6}$	$2,222 \cdot 10^{-6}$	5,9	$2,282 \cdot 10^{-6}$
7	10	0	10	-10	10	10	$1,480 \cdot 10^{-5}$	$1,475 \cdot 10^{-5}$	5,5	$1,480 \cdot 10^{-5}$

наклонение $i = 0,5^\circ$; матрицы интенсивностей ошибок измерений и возмущений в динамической части системы полагались равными $R = \text{diag}(10^4, 10^4, 10^4) \text{ м}^2$ и $Q = \text{diag}(10^{-4} \text{ м}^2, 10^{-4} \text{ м}^2, 10^{-4} \text{ м}^2, 10^{-7} \text{ м/с}^2, 10^{-7} \text{ м/с}^2, 10^{-7} \text{ м/с}^2)$, соответственно; кроме того, принималось, что возмущения имеют только вычислительную природу, так что $\varepsilon_A = \varepsilon_H = \varepsilon_R = \varepsilon_1 \approx 2,2 \cdot 10^{-16}$; причем ε_D оценивалось по ширине полосы колебаний численного (с удвоенной точностью) решения дифференциального уравнения Риккати при больших значениях времени.

Результаты численного эксперимента представлены в виде фрагмента псевдоспектра оператора \tilde{F} (рис. 2), соответствующего конфигурации № 1 наземных пунктов в таблице, и таблицы значений $\tilde{\varepsilon}_0, \varepsilon_0, \gamma$ и γ^* при различных положениях НПН.

Анализ представленных в таблице результатов показывает, что устойчивость винеровского фильтра к возмущениям возрастает по мере увеличения угловых расстояний между НПН (наблюдается

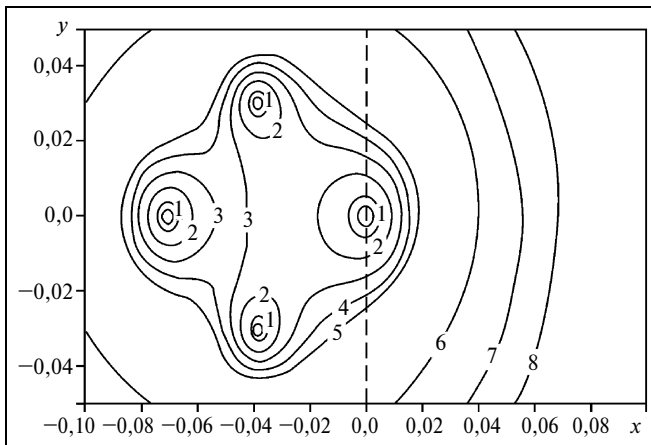


Рис. 2. Типичный фрагмент спектрального портрета оператора \tilde{F} :
 1 — $\tilde{\varepsilon} = 1,0 \cdot 10^{-5}$, 2 — $\tilde{\varepsilon} = 3,0 \cdot 10^{-5}$, 3 — $\tilde{\varepsilon} = 5,0 \cdot 10^{-5}$, 4 — $\tilde{\varepsilon} = 7,0 \cdot 10^{-5}$, 5 — $\tilde{\varepsilon} = 9,0 \cdot 10^{-5}$, 6 — $\tilde{\varepsilon} = 1,0 \cdot 10^{-4}$, 7 — $\tilde{\varepsilon} = 3,0 \cdot 10^{-4}$, 8 — $\tilde{\varepsilon} = 5,0 \cdot 10^{-4}$

увеличение отношения γ/γ^*). Наиболее благоприятными при этом в целом являются ситуации, когда текущая конфигурация НПН образует максимальный телесный угол, что в свою очередь, вообще говоря, актуализирует самостоятельную проблему поиска оптимальной конфигурации НПН при заданных ограничениях на их географическое расположение, которая требует дополнительного исследования.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Представленный вычислительный эксперимент иллюстрирует целесообразность применения сформулированной теоремы для исследования устойчивости, что может быть актуальным при проектировании условий реализации как непрерывных, так и дискретных динамических систем. Кроме того, теорема позволяет решать задачи локализации спектров и (или) спектральных портретов операторов, для которых известно лишь их некоторое приближение. Последнее дает возможность применения изложенного подхода во всех теоретических и прикладных областях, в которых требуется решение задачи оценки близости расположения спектра к заданной границе.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Мальшев А.Н.* Введение в вычислительную линейную алгебру. — Новосибирск: Наука, 1991. — 229 с.
2. *Trefethen L.N.* Approximation theory and numerical linear algebra / In J.C. Mason and M.G. Cox, eds., Algorithms for Approximation, II (Shrivenham, 1988). — London: Chapman and Hall, 1990. — P. 336—360.
3. *Калман Р., Фалб П., Арбиб М.* Очерки по математической теории систем. — М.: Мир, 1971. — 400 с.
4. *Девятисильный А.С., Кислов Д.Е.* Исследование разрешимости задач определения спутниковых орбит по измерениям // Проблемы управления. — 2006. — № 4. — С. 50—53.

☎ (4232) 31-35-49,
 e-mail: devyatits@mail.ru, kisl_di@mail.ru

Статья представлена к публикации членом редколлегии С.Д. Земляковым. □