УДК 519.283

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ДЛИТЕЛЬНОГО ВООРУЖЕННОГО КОНФЛИКТА

Б.Б. Буянов, Н.В. Лубков, Г.Л. Поляк

Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, г. Москва

Рассмотрена динамика изменения численности войск двух сторон конфликта, продолжающегося длительное время. На основании среднестатистических потерь сторон за некоторый предшествующий период построена модель, позволяющая прогнозировать численность войск сторон с учетом потерь и ввода резервов.

ВВЕДЕНИЕ

В современную эпоху войны происходят между странами, несоизмеримыми по военной мощи. Поэтому войсковая операция заканчивается достаточно быстро победой сильнейшей из сторон. Но вслед за этим может начаться война сопротивления, которая иногда длится довольно долго. В этом случае процесс военных действий между оккупационной группой войск и силами сопротивления принимает стационарный характер с установившимися статистически средними потерями в течение определенного времени (например, календарного года). Может оказаться, что одна из сторон или обе, вводят в действие дополнительные силы. В этом случае каждая из сторон должна прогнозировать последствия таких шагов, определяя возможные потери как противника, так и собственные потери. Кроме того, представляет интерес динамика изменения численности сил сторон во времени, которая зависит от быстроты замещения потерь и ввода новых резервов.

Ответы на эти вопросы можно получить, применив метод математического моделирования, использующий в качестве исходных данных статистически средние показатели потерь сторон.

1. ИМИТАЦИОННАЯ МОДЕЛЬ ПРОТИВОБОРСТВА СТОРОН

Положим, что в среднем численность войск в момент времени t оккупирующей стороны X составляет $x(t)$, а оккупированной стороны Y соответственно $y(t)$.

Можно принять, что при данных численностях войск x и y сторон математические ожидания удельных потерь одной стороны в расчете на единицу личного состава противоборствующей стороны составляют a [1/мес] — для стороны Y и, соответственно, b [1/мес] — для стороны X.

Вообще говоря, удельные потери a и b могут изменяться во времени (например, сезонные изменения в течение календарного года) или зависеть от значений $x(t)$ и $y(t)$. Однако при небольших изменениях $x(t)$ и $y(t)$ можно считать a и b независимыми от $x(t)$ и $y(t)$. В дальнейшем значения a и b принимаются постоянными и равными статистически средним значениям, установившимся при данной численности $x(t)$ и $y(t)$.

Тогда математические ожидания потерь сторон за некоторый промежуток времени

$$S_x = \int_0^t by(t)dt \qquad (1)$$

для стороны X и

$$S_y = \int_0^t ay(t)dt. \qquad (2)$$

для стороны Y:

Математическая модель изменения средних значений $x(t)$ и $y(t)$ может быть построена на основе уравнений динамики средних [1], частными видами которых, в зависимости от условий информированности сторон, являются уравнения Ланчестера, Вольтерра, Брэкни и др. [2]. Для нашего случая подходят уравнения Ланчестера, полученные в условиях полной информированности противников о результатах боевых действий:

$$\frac{dx(t)}{dt} = -by(t) + u(t), \qquad (3)$$

$$\frac{dy(t)}{dt} = -ax(t) + v(t), \qquad (4)$$

где $u(t)$ и $v(t)$ — размеры вводимых резервов в момент времени t стороны X и стороны Y соответственно.

Ввод резервов необходим для компенсации потерь, а также для изменения состава сил. Поскольку потери должны компенсироваться в течение всего времени боевых действий, а ввод и вывод сил также распределен во времени, то эти процессы можно моделировать по закону непрерывной обратной связи, пропорционально разности между желаемым и фактическим значениями x и y, т. е. будем считать

$$u(t) = K_x(x_T - x(t)),$$

$$v(t) = K_y(y_T - y(t)),$$

где x_T и y_T — заданные желаемые значения численности группировок сторон X и Y, K_x и K_y — коэффициенты усиления, определяющие скорость замены или ввода-вывода войск соответствующих сторон конфликта.

При этих предположениях уравнения (3) и (4) можно записать в следующем виде:

$$\frac{dx(t)}{dt} = -by(t) + K_x(x_T - x(t)), \qquad (5)$$

$$\frac{dy(t)}{dt} = -sx(t) + K_y(y_T - y(t)). \qquad (6)$$

Коэффициенты K_x и K_y в уравнениях (5) и (6) обратно пропорциональны постоянным времени, а, следовательно, времени установления переходных процессов. Из теории регулирования [3] известно, что время установления нового значения процесса равно примерно 3÷4 постоянным времени.

Поэтому можно записать

$$t_{\text{уст}.x} = (3\div4)\frac{1}{K_x}, \quad t_{\text{уст}.y} = (3\div4)\frac{1}{K_y}.$$

Из системы уравнений (5) и (6) получим характеристическое уравнение

$$\alpha^2 + (K_x + K_y)\alpha + (K_xK_y - ab) = 0,$$

корнями которого являются

$$\alpha_{1,2} = \frac{-(K_x + K_y) \pm \sqrt{(K_x + K_y)^2 - 4(K_xK_y - ab)}}{2}.$$

При $(K_x + K_y)^2 - 4(K_xK_y - ab) = (K_x + K_y)^2 + + 4ab > 0$ оба корня уравнения действительны.

При

$$K_xK_y - ab > 0 \qquad (7)$$

оба корня отрицательны.

При условии $K_xK_y - ab \leqslant 0$ один корень неотрицателен, а другой отрицателен.

В первом случае наблюдается длительное противостояние, когда при заданных x_T и y_T численность обоих сторон устанавливается на некоторых значениях. Во втором случае одна из сторон не может восполнить свои потери и конфликт заканчивается ее поражением.

Решение уравнений (5) и (6) при заданных начальных условиях x_0 и y_0 может быть найдено численными методами. В случае, если a и b постоянные, не зависящие от времени, то решение может быть найдено в квадратурах.

Введем обозначения

$$m_1 = K_yx_0 - by_0 + K_xx_T,$$

$$m_2 = K_xy_0 - ax_0 + K_yy_T,$$

$$n_1 = K_xK_yx_T - bK_yy_T,$$

$$n_2 = K_xK_yy_T - aK_xx_T.$$

Тогда

$$x(t) = \frac{1}{\alpha_1 - \alpha_2}\left[\left(\alpha_1x_0 + m_1 + \frac{n_1}{\alpha_1}\right)e^{\alpha_1 t} - \right.$$
$$\left. - \left(\alpha_2x_0 + m_1 + \frac{n_1}{\alpha_2}\right)e^{\alpha_2 t}\right] + \frac{n_1}{\alpha_1\alpha_2},$$

$$y(t) = \frac{1}{\alpha_1 - \alpha_2}\left[\left(\alpha_1y_0 + m_2 + \frac{n_2}{\alpha_1}\right)e^{\alpha_1 t} - \right.$$
$$\left. - \left(\alpha_2y_0 + m_2 + \frac{n_2}{\alpha_2}\right)e^{\alpha_2 t}\right] + \frac{n_2}{\alpha_1\alpha_2}. \qquad (8)$$

При условии (7) из этих уравнений после некоторых преобразований нетрудно получить установившиеся средние численности сторон

$$x_{\text{уст}} = \left(x_T - \frac{b}{K_x}y_T\right)\Big/\left(1 - \frac{ab}{K_xK_y}\right),$$

$$y_{\text{уст}} = \left(y_T - \frac{a}{K_y}x_T\right)\Big/\left(1 - \frac{ab}{K_xK_y}\right).$$

Отсюда следует, что каждая из сторон может свести сопротивление противника к нулю, добившись, соответственно, чтобы значение $x_{уст}$ или для другой стороны $y_{уст}$ равнялось бы нулю. Это условие означает, что резервы противника уничтожались бы до введения их в боевые действия.

Для стороны X сопротивление стороны Y равно нулю, если $x_T = \frac{K_y}{a} y_T$, а для стороны Y соответственно $y_T = \frac{K_x}{b} x_T$.

Значения потерь за время t можно получить в квадратурах по формулам (1) и (2)

$$S_x = \frac{b}{\alpha_1 - \alpha_2}\left[\left(y_0 + \frac{m_2}{\alpha_1} + \frac{n_2}{\alpha_1^2}\right) e^{\alpha_1 t} - \right.$$

$$\left. - \left(y_0 + \frac{m_2}{\alpha_2} + \frac{n_2}{\alpha_2^2}\right) e^{\alpha_2 t}\right] + \frac{n_2}{\alpha_1\alpha_2} t - \frac{m_2}{\alpha_1\alpha_2} -$$

$$- \frac{n_2}{\alpha_1\alpha_2}(\alpha_1 - \alpha_2),$$

$$S_y = \frac{a}{\alpha_1 - \alpha_2}\left[\left(x_0 + \frac{m_1}{\alpha_1} + \frac{n_1}{\alpha_1^2}\right) e^{\alpha_1 t} - \right.$$

$$\left. - \left(x_0 + \frac{m_1}{\alpha_2} + \frac{n_1}{\alpha_2^2}\right) e^{\alpha_2 t}\right] + \frac{n_1}{\alpha_1\alpha_2} t - \frac{m_1}{\alpha_1\alpha_2} -$$

$$- \frac{n_1}{\alpha_1\alpha_2}(\alpha_1 - \alpha_2).$$

2. ПРИНЯТИЕ РЕШЕНИЯ ПРИ ВЫБОРЕ СТРАТЕГИИ

Предложенная модель развития боевых действий была применена для прогнозирования развития боевых действий с целью выявления численности группировки x_T и интенсивности ввода резервов K_x, обеспечивающего наибольшее преимущество стороне X по наиболее важным критериям.

Будем исходить из того, что численность армии стороны X составляет $x = 134{,}5$ тыс. чел., а численность сил сопротивления стороны Y соответственно $y = 50$ тыс. чел.

Среднестатистические потери сторон определим из следующих соображений.

Пусть силы сопротивления стороны Y в среднем наносят армии стороны X потери 100 чел./мес. Тогда коэффициент в уравнении (3)

$$b = \Delta x/y = 100/50\,000 = 0{,}002 \text{ [1/мес]}.$$

Предположим, урон, наносимый армией стороны X силам сопротивления стороны Y в расчете на единицу личного состава стороны X, в 2,5 раз больше. Тогда, коэффициент в уравнении (4)

$$a = \Delta y/x = 2{,}5 \cdot 0{,}002 = 0{,}005 \text{ [1/мес]}.$$

Для моделирования приняты значения коэффициентов $K_x = 0{,}5 \ldots 1$ [1/мес], $t_{уст.x} \cong 6 \ldots 3$ мес и $K_y = 1$ [1/мес], $t_{уст.y} \cong 3$ мес. Исходя из этого, интервал моделирования принят 12 мес.

Наилучший сценарий выбирается по результатам моделирования вариантов w, представленных в таблице. Каждый вариант представлен набором параметров модели $\{(x_T, K_x), (y_T, K_y)\}$. Изменение параметров (y_T, K_y) призвано обеспечить учет неопределенности относительно сил стороны Y.

Наиболее предпочтительный вариант следует рассматривать как решение на операцию, или, если боевые действия уже ведутся, как управление.

Для характеристики результата моделирования каждого сценария разработаны восемь показателей. Принимая во внимание важное общественное и политическое значение фактора потерь личного состава, все показатели связаны с этим фактором и образуют четыре пары:

— абсолютные потери личного состава Δx, Δy;

— относительные потери личного состава $\Delta x/x$, $\Delta y/y$;

— несоответствие численности состава плановому $x_T - x$, $y_T - y$, что характеризует недостаточную интенсивность восполнения потерь;

— относительное несоответствие $(x_T - x)/x$, $(y_T - y)/y$.

Показателям присваивались значения, получившиеся в результате моделирования на конец интервала в 12 мес. Всего было рассчитано 10 вариантов сценариев. На рис. 1 приведены графики переходного процесса для варианта w_7.

Варианты сценария сравнивались по векторному критерию согласно методологии, изложенной в работе [4]. Элементами векторного критерия приняты абсолютные потери личного состава Δx и Δy,

Значения исходных данных для моделирования

y_T, $K_y = 1$	x_T, K_x				
	$x_T = 100$, $K_x = 0{,}5$	$x_T = 134{,}5$, $K_x = 0{,}5$	$x_T = 155$, $K_x = 0{,}5$	$x_T = 200$, $K_x = 0{,}5$	$x_T = 134{,}5$, $K_x = 1$
$y_T = 50$	w_1	w_2	w_3	w_4	w_9
$y_T = 75$	w_5	w_6	w_7	w_8	w_{10}

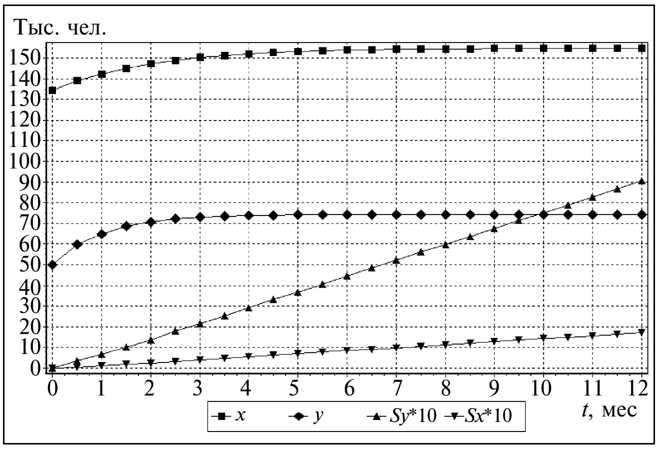

Рис. 1. Графики переходного процесса для сценария w_7

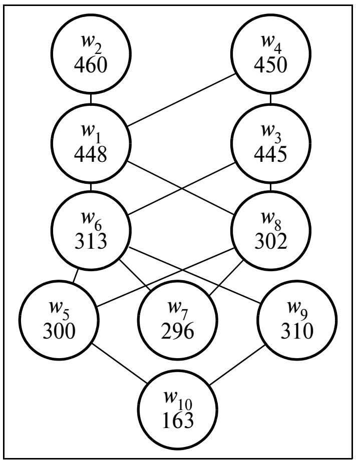

Рис. 2. Граф отношений предпочтительности на множестве сценариев

численность группировки x_T и интенсивность ввода резервов K_x.

В зависимости от того, на чьей стороне решается задача, определяются показатели, которые должны быть минимизированы, а какие, наоборот, максимизированы. Напомним, что задачу решает сторона X. Желательно минимизировать собственные потери и нанести больший ущерб противнику при минимальных затратах. Поэтому минимизируются собственные потери Δx и затрачиваемые на достижение этой цели усилия (показатели x_T и K_x). Показатель Δy максимизируется.

Варианты по векторному критерию упорядочивались в предположении, что относительная важность показателей Δx, x_T, Δy и K_x одинакова.

На рис. 2 приведен граф, отображающий отношения предпочтения на множестве стратегий. Вершины графа соответствуют сценариям, цифры в вершинах — номерам вариантов и полезности каждого из них по некоторой шкале. Анализ графа показывает, что наиболее предпочтительной стратегией для стороны X является стратегия w_2 при прогнозируемых стратегиях стороны Y. Отметим неэффективность увеличения интенсивности ввода резервов (показатель K_x, стратегии w_9 и w_{10}). Таким образом, при высказанных предпочтениях, рекомендуется сохранять существующее равновесие сил. Если же не придавать большого значения затратам на увеличение численности своих войск (например, понизить важность показателя x_T), то результат изменится в пользу стратегий w_3 или w_4.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Концепция прогнозирования развития военных действий по статистической информации реализована в математической модели динамики длительного вооруженного конфликта. В основу модели положены уравнения динамики боя Ланчестера. Предложено описывать введение резервов противоборствующими сторонами на основе принципа обратной связи. В этом случае на динамику конфликта оказывает влияние скорость введения резервов. Динамика процесса изменения численности войск будет всегда носить монотонный характер (не будет колебательного процесса), что согласуется с реальной динамикой боевых действий.

Модель может быть полезна при прогнозировании развития боевых действий в конфликтной ситуации для обоснования и выбора решения по управлению войсками. На примере, построенном по опубликованным данным о войне в Ираке, может быть показано, что принятие решения о введении дополнительного контингента войск (20 тыс. чел.) будет оправданным, если затраты на содержание войска, связанные с этой операцией, будут менее важны, чем другие показатели.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Абчук В.А., Матвейчук Ф.А., Томашевский Л.П.* Справочник по исследованию операций. — М.: Воениздат,1979.
2. *Трухаев Р.Н., Хоменюк В.Б.* Методы оптимизации информационных систем поиска и обнаружения. — Л.: Военно-морская академия, 1973.
3. *Айзерман М.А.* Лекции по теории автоматического регулирования. — М.: Гостехиздат, 1956.
4. *Буянов Б.Б., Лубков Н.В., Поляк Г.Л.* Система поддержки принятия управленческих решений с применением имитационного моделирования // Проблемы управления. — 2006. — № 6. — С. 43—49.

☎ *(495) 334-78-01, e-mail: lfbuv@ipu.ru*

Статья представлена к публикации членом редколлегии Б.Г. Воликом. ❑