

СТИМУЛИРОВАНИЕ ПО РЕЗУЛЬТАТАМ КОЛЛЕКТИВНОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ В ОРГАНИЗАЦИОННЫХ СИСТЕМАХ С МАНИПУЛИРОВАНИЕМ ИНФОРМАЦИЕЙ

Р. А. Выборнов

Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова РАН, г. Москва

Отмечено, что в существующих механизмах стимулирования не предусмотрена возможность нарушения элементом организационной системы правил ее функционирования. Предложена модель взаимодействия элементов организационной системы, предполагающая возможность манипулирования информацией. С целью повышения эффективности организационной системы в целом решена задача предотвращения такой возможности.

ВВЕДЕНИЕ

Важным классом механизмов организационного управления являются механизмы стимулирования, служащие целям согласования интересов элементов социально-экономической системы и побуждения одних элементов к совершению определенных действий в интересах других элементов или системы в целом. Однако в известных механизмах стимулирования не рассматривалась возможность нарушения активным элементом порядка и правил функционирования организационной системы в том случае, если это приносит элементу прибыль сверх той, что он получает, действуя в рамках установленного порядка функционирования организационной системы. Исследование механизмов стимулирования с учетом такой возможности представляется актуальной задачей.

На практике распространена следующая ситуация: владельцы фирм, не имея возможности непосредствен-

но наблюдать результаты деятельности фирмы, полагаются на отчетность об этих результатах, предоставляемую управляющими или менеджерами высшего звена. В результате управляющие имеют возможность занижать результаты деятельности фирмы, присваивая разницу себе. Согласно неофициальной статистике, только 30 % прибыли получают владельцы фирм, остальные 70 % распределяются среди менеджеров различного уровня. Математический аппарат теории управления организационными системами позволяет формализовать такую ситуацию, объяснить причины ее возникновения и разработать методы устранения этой негативной для владельцев фирм ситуации. Цель данной статьи состоит в исследовании возможности устранения манипулирования информацией о результатах коллективной деятельности.

Сначала рассмотрим функционирование организационной системы без возможности манипулирования информацией (см. § 1). При формализации этого явления будем пользоваться терминологией активных систем, в соответствии с которой будем рассматривать организационную систему, состоящую из метацентра (владельцы фирмы), центра (управляющий) и агентов (сотрудники фирмы). Схематически такая система представлена на рисунке. Данная модель была рассмотрена в работе¹, где задача стимулирования по результату коллективной деятельности (метацентр не наблюдает результата действий агентов, а опирается на сообщения центра) была решена в предположении добросовестного поведения всех элементов системы. В § 1 данное реше-

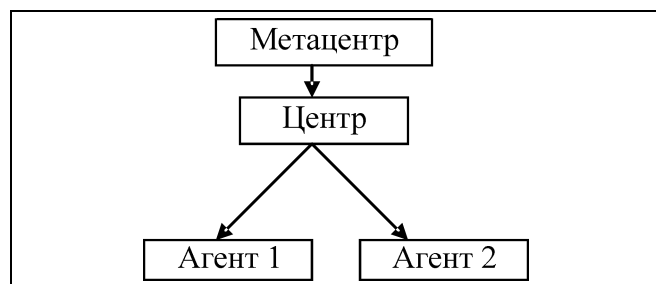


Схема организационной системы

¹ Новиков Д. А. Стимулирование в организационных системах. — М.: СИНТЕГ, 2003. — 312 с.



ние будет изложено, так как оно необходимо для дальнейшего исследования различных случаев недобросовестного поведения участников организационной системы.

Математическая модель исследуемой организационной системы имеет следующий вид: организационная система состоит из агентов i , $i = 1, 2$, центра и метацентра. Результат работы i -го агента $x_i \in \{0; 1\}$. Действие i -го агента $a_i \in [0; 1]$ определяет вероятность достижения i -м агентом положительного результата $x_i(a_i) = 1$. Обозначим $c_i(a_i)$ — затраты агента на выполнение действия a_i , $\sigma_i(x_i)$ — стимулирование агента со стороны центра по результату x_i .

1. СТИМУЛИРОВАНИЕ КОЛЛЕКТИВНОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ ПО ЕЕ РЕЗУЛЬТАТАМ БЕЗ МАНИПУЛИРОВАНИЯ ИНФОРМАЦИЕЙ

Будем считать, что метацентр платит вознаграждение центру за суммарный результат деятельности агентов, из которого центр выплачивает вознаграждение агентам.

Поскольку рассматриваемая система содержит двух агентов, целевая функция центра описывается выражением $F = b(x_1 + x_2) - \sigma_1(x_1) - \sigma_2(x_2)$. Если предположить, что агенты характеризуются одинаковыми затратами на совершение одного и того же действия $c(a_i) = a_i^2/2$, то целевую функцию i -го агента можно представить в следующем виде: $f_i(a_i) = \sigma_i(x_i) - c(a_i)$. Целевая функция метацентра описывается выражением: $F_M = x_1 + x_2 - b(x_1 + x_2)$.

Поскольку результат деятельности агента x_i принадлежит множеству $\{0, 1\}$, то суммарный результат деятельности двух агентов $x_1 + x_2$ принадлежит множеству $\{0, 1, 2\}$, соответственно, вознаграждение, выплачиваемое центру, описывается вектором: $\{b_0, b_1, b_2\}$, т. е. $b_0 = b(x_1 + x_2 = 0)$, $b_1 = b(x_1 + x_2 = 1)$, $b_2 = b(x_1 + x_2 = 2)$. Для целевой функции агента справедливо выражение

$$M[f_i] = a_i \sigma_i^1 + (1 - a_i) \sigma_i^0 - c(a_i). \quad (1)$$

Воспользовавшись принципом предельных затрат, отсюда легко получить оптимальное действие i -го агента: $\sigma_i^1 - \sigma_i^0 = c'(a_i) = a_i^*$, $a_i^* = (\sigma_i^1 - \sigma_i^0)$. Более точно, $a_i^* = \min[1; (\sigma_i^1 - \sigma_i^0)]$.

Будем считать также, что стимулирование агентов симметрично, т. е.: $\sigma_1^1 = \sigma_2^1 = \sigma_1$, $\sigma_1^0 = \sigma_2^0 = \sigma_0$, тогда оптимальное действие каждого агента можно записать как

$$a^* = \min[1; (\sigma_1 - \sigma_0)]. \quad (2)$$

Из соображений, аналогичных тем, что были использованы при получении выражения (1), относительно целевой функции центра справедливо следующее:

$$M[F(\sigma_0, \sigma_1)] = (a^*)^2 b_2 + 2a^*(1 - a^*)b_1 + (1 - a^*)^2 b_0 - (a^*)^2(2\sigma_1) - 2a^*(1 - a^*)(\sigma_1 + \sigma_0) - (1 - a^*)^2(2\sigma_0), \quad (3)$$

где a^* определяется выражением (2).

Далее будем полагать следующее: параметры модели таковы, что $\sigma_1 - \sigma_0 \leq 1$, т. е. $a^* = \min[1; (\sigma_1 - \sigma_0)] = \sigma_1 - \sigma_0$. Легко видеть, что оптимальное стимулирование агента по нулевому результату равно нулю: $\sigma_0 = 0$. Действительно, из условия индивидуальной рациональности (ИР) метацентра $\forall x_1, \forall x_2 \rightarrow F_M(x_1, x_2) \geq 0$ следует, что при $x_1 = x_2 = 0 \Rightarrow F_M = -b_0 \Rightarrow b_0 = 0$. Целевая функция центра при этом имеет вид: $F = -\sigma_1(0) - \sigma_2(0)$. Аналогично, из условия ИР центра следует, что $\sigma_1(0) = \sigma_2(0) = \sigma_0 = 0$. Таким образом, из формулы (2) получаем с учетом введенных предположений $a^* = \sigma_1$. Тогда выражение (3) приобретает вид:

$$M[F(\sigma_1)] = \sigma_1^2 b_2 + 2\sigma_1(1 - \sigma_1)b_1 + (1 - \sigma_1)^2 b_0 - 2\sigma_1^3 - 2\sigma_1^2(1 - \sigma_1).$$

Отсюда легко получить выражение для оптимального стимулирования агента по положительному результату:

$$\sigma_1^* = \frac{b_0 - b_1}{b_2 - 2b_1 + b_0 - 2}. \quad (4)$$

Из условия ИР метацентра следует, что $b_0 = 0$ (поскольку при нулевом суммарном результате агентов целевая функция метацентра принимает следующий вид: $F_M = -b_0$, а условие ИР требует, чтобы целевая функция активного элемента была неотрицательной), поэтому выражение (4) можно переписать в следующем виде:

$$\sigma_1^* = \frac{b_1}{2b_1 - b_2 + 2}. \quad (5)$$

Таким образом, мы определили оптимальное действие a^* , выбираемое агентом, оптимальное стимулирование σ_1^* , выбираемое центром для агентов. Необходимо найти оптимальное вознаграждение, выплачиваемое метацентром центру.

В этих условиях математическое ожидание выигрыша метацентра равно:

$$M[F_M(b_1, b_2)] = (\sigma_1^*)^2(2 - b_2) + 2\sigma_1^*(1 - \sigma_1^*)(1 - b_1), \quad (6)$$

где σ_1^* определяется из выражения (5). Из условия ИР центра $\forall x_1, \forall x_2 \rightarrow F = b(x_1 + x_2) - \sigma_1(x_1) - \sigma_2(x_2) \geq 0$ следует, что $b_1 \geq \sigma_1^*$, $b_2 \geq 2\sigma_1^*$. Следовательно, возможны три варианта, представим их в табл. 1. Вариант $b_1 > \sigma_1^*$, $b_2 > 2\sigma_1^*$ не рассматривается, поскольку он заведомо не оптимален.

1. Покажем, что существование первого варианта невозможно. Из условия $b_1 = \sigma_1^*$ следует, что $b_1 = \frac{b_1}{2b_1 - b_2 + 2}$, откуда $b_2 = 2b_1 + 1$. С другой стороны, из условий $b_1 = \sigma_1^*$ и $b_2 = 2\sigma_1^*$ следует, что $b_2 = 2b_1$. Очевидно противоречие.

Таблица 1

Возможные варианты соотношения вознаграждений и стимулирования

Условие ИР центра при $x_1 + x_2 = 1$	Условие ИР центра при $x_1 + x_2 = 2$	Возможность существования	Оптимальность решения	Ожидаемый выигрыш центра
1. $b_1 = \sigma_1^*$	1. $b_2 = \sigma_1^*$	Не возможен	—	—
2. $b_1 = \sigma_1^*$	2. $b_2 \geq \sigma_1^*$	Возможен	Оптимально	1/3
3. $b_1 \geq \sigma_1^*$	3. $b_2 = \sigma_1^*$		Не оптимально	144/675

2. Из условия $b_1 = \sigma_1^*$ следует, что $b_2 = 2b_1 + 1$. Тогда выражение (6) можно переписать в следующем виде: $M[F_M(b_1, b_2)] = -3b_1^2 + 2b_1$, откуда можно получить оптимальное вознаграждение центра: $b_1^* = 1/3$, $b_2^* = 5/3$, $\sigma_1^* = a^* = 1/3$. Заметим, что полученное решение удовлетворяет условиям $b_2 \geq 2\sigma_1^*$, $a^* < 1$. Ожидаемый выигрыш центра при этом равен 1/3.

3. Из условия $b_2 = 2\sigma_1^*$ следует, что $b_2 = \frac{b_1}{2b_1 - b_2 + 2}$, откуда $b_1 = (2b_2 - b_2^2)/(2(1 - b_2))$. Так как вознаграждение не может быть отрицательной величиной, то из последнего условия следует, что $b_2 < 1$. Подставив полученное значение b_1 и $b_2/2 = \sigma_1^*$ в выражение (6), получим выражение для математического ожидания выигрыша метacentра:

$$M[F_M(b_2)] = b_2^2/2 - b_2^3/2 - b_2^4/(4 - 4b_2) + 3b_2^3/(2 - 2b_2) - 5b_2^2/(2 - 2b_2) + b_2/(1 - b_2).$$

Максимум этой функции при условии $b_2 < 1$ достигается при $b_2 = 0,4$. Соответственно, оптимальное вознаграждение центра в этом случае $b_1^* = 8/15$, $b_2^* = 2/5$. Заметим, что полученное решение удовлетворяет условию $b_1 \geq \sigma_1^*$. Ожидаемый выигрыш центра при этом равен $144/675 \approx 0,21$. Следовательно, оптимальным с точки зрения метacentра будет второй вариант: $b_1^* = 1/3$, $b_2^* = 5/3$.

При таком взаимодействии значение математического ожидания целевой функции центра равно 1/9, а значение математического ожидания целевой функции метacentра равно 1/3. (Заметим, что если бы метacentр имел возможность наблюдать действия агентов, то он мог бы сам выбирать оптимальное стимулирование агентов без участия центра; при этом оптимальное стимулирование агентов равнялось бы $\sigma_1^* = 1/2$, а выигрыш метacentра составил бы 1/2. Так как такой возможности у метacentра нет, то ему приходится платить центру 1/9, получая при этом выигрыш 1/3. Эффективность системы в целом т. е. сумма целевых функций участников при этом снижается.)

2. СТИМУЛИРОВАНИЕ ПО РЕЗУЛЬТАТАМ ОТЧЕТА ЦЕНТРА

Изменим порядок взаимодействия участников этой организационной системы следующим образом: пусть метacentр не наблюдает результат действий агентов, а при выборе размера вознаграждения центру полагается на сообщение самого центра о суммарном результате действий агентов. Такой случай распространен на практике. Владельцы фирм пользуются информацией из финансовой отчетности, предоставленной менеджерами, и считают ее достоверной, но не учитывают возможность манипулирования информацией в этой отчетности менеджерами, ее составляющими.

Пусть s — это сообщение центра о суммарном результате действий агентов. Размер вознаграждения по-прежнему может принимать три значения: $b_0 = b(s = 0)$, $b_1 = b(s = 1)$, $b_2 = b(s = 2)$. Целевая функция центра принимает вид: $F = b(s) - \sigma_1(x_1) - \sigma_2(x_2)$. При этом агенты не наблюдают действий друг друга, но знают сообщение s центра в отчете метacentру. При таком взаимодействии у центра появляется возможность манипулирования информацией: центр в сообщении метacentру может исказить суммарный результат деятельности агентов. Поскольку центр выплачивает агентам вознаграждение за результат деятельности из вознаграждения $b(s)$, полученного от метacentра (при этом по-прежнему остается в силе принцип компенсации затрат), то у центра появляется возможность *занижения* суммарного результата деятельности агентов (в целях занижения суммарных выплат им). Рассмотрим более подробно возможные варианты.

1. $x_1 + x_2 = 0$, т. е. суммарный результат деятельности агентов равен нулю. Понятно, что в таком случае возможности занижить этот результат в сообщении метacentру у центра нет.

2. $x_1 + x_2 = 1$, т. е. суммарный результат деятельности агентов равен единице. В этом случае центр также не будет занижать этот результат в сообщении метacentру, поскольку единственно возможный вариант занижения $s = 0$, но тем самым центр обнаружит свое недобросовестное поведение перед тем агентом, результат которого $x_i = 1$. Агент, обнаруживший недобросовестное поведение центра, может сообщить об этом метacentру. В результате такого поведения агента на центр может быть наложен штраф или иное взыскание со стороны метacentра. Будем считать далее, что возможное взыскание настолько велико, что центр при суммарном результате агентов, равном единице, не занижает результат в сообщении метacentру.

3. $x_1 + x_2 = 2$. Только в этом случае у центра появляется возможность «без риска» (поскольку агенты не наблюдают результат друг друга) занижить результат и сообщить $s = 1$. Соответственно и рассматривать далее будем только вариант 3. В этих условиях математическое ожидание выигрыша центра:

$$M[F(\tilde{\sigma}_1)] = (a^*)^2(b_1 + 1 - 2\tilde{\sigma}_1) + 2a^*(1 - a^*)(b_1 - \tilde{\sigma}_1). \quad (7)$$



Здесь $\tilde{\sigma}_1 \neq \sigma_1$, поскольку стимулирование агентов центром по результату $x_i = 1$ изменится, а значение b_1 остается прежним, поскольку метацентр не предполагает возможности манипулирования информацией центром. Тем не менее, принцип предельных затрат для агентов по-прежнему останется в силе, и оптимальное действие агента (а значит, и вероятность результата $x_i = 1$) $a^* = \tilde{\sigma}_1$. Таким образом, выражение (7) принимает вид:

$$M[F(\tilde{\sigma}_1)] = \tilde{\sigma}_1^2 (b_1 + 1 - 2\tilde{\sigma}_1) + 2\tilde{\sigma}_1(1 - \tilde{\sigma}_1)(b_1 - \tilde{\sigma}_1). \quad (8)$$

Центр выбором стимулирования $\tilde{\sigma}_1$ стремится максимизировать свою прибыль, следовательно, оптимальное стимулирование $\tilde{\sigma}_1^* = b_1/(1 + b_1)$. Так как метацентр не предполагает недобросовестного поведения центра, то вознаграждение, выплачиваемое центру, по-прежнему $b_1^* = 1/3$, значит $\tilde{\sigma}_1^* = 1/4$. Следовательно, (это легко проверить, подставив полученное значение $\tilde{\sigma}_1^* = 1/4$ и значение $b_1^* = 1/3$ в выражение (8)) значение математического ожидания целевой функции центра равно $1/12$.

Таким образом, в рассмотренном случае манипулирование информацией невыгодно для центра. Действительно, значение математического ожидания ($1/12$) в этом случае меньше значения математического ожидания ($1/9$) в случае честной работы центра. Поэтому при выбранных параметрах модели центр будет честно сообщать метацентру результат деятельности агентов. Однако на практике часто происходит так, что центр занижает результат деятельности агентов. Для того чтобы получить ответ на вопрос, почему это происходит, откажемся от предположения, что при суммарном результате деятельности агентов, равном единице, центр не имеет возможности манипулировать информацией из-за крупного штрафа, накладываемого на него в случае обнаружения этого метацентром и результативным агентом.

3. МАНИПУЛИРОВАНИЕ ИНФОРМАЦИЕЙ ЦЕНТРОМ

Будем предполагать следующее: если суммарный результат деятельности агентов равен единице, то центр также имеет возможность понизить результат. А для того, чтобы результативный агент не сообщал о подлоге метацентру, центр делится частью $\lambda \in (0, 1)$ своей прибыли (прибыль в данном случае равна единице за вычетом компенсации расходов агента по реализации действия), полученной в результате подлога. Таким образом: $b_0 = 0$; $b_1 = 1/3$; $b_2 = 5/3$ — метацентр не подозревает о подлоге, поэтому оптимальная система стимулирования остается в силе.

Возможны девять вариантов (стратегий) поведения центра, представленные в табл. 2. Рассмотрим эти варианты подробно.

1. $\Sigma x_i = 0, s = 0$. Центр честно сообщает о нерезультативной деятельности агентов и не имеет прибыли. Нет необходимости какого-либо сговора с агентами.

2. $\Sigma x_i = 0, s = 1$. Суммарный результат деятельности агентов равен нулю, но центр в сообщении метацентру

заявляет о суммарном результате, равном 1, получая от метацентра b_1 , но отдавая единицу согласно своему сообщению. Целевая функция центра принимает при этом значение, равное $-2/3$. Поскольку агенты не знают результат деятельности друг друга, то в этом случае у центра нет необходимости вступать в сговор с агентами.

3. $\Sigma x_i = 0, s = 2$. Суммарный результат деятельности агентов равен нулю, но центр в сообщении метацентру заявляет о суммарном результате, равном 2, получая от метацентра b_2 , но отдавая две единицы согласно своему сообщению. Целевая функция центра принимает при этом значение, равное $-1/3$. Кроме того, поскольку агенты не наблюдают результат друг друга, но знают сообщение центра, каждый из них узнает, таким образом, о подлоге и «предложит поделиться» центру частью λ . При этом целевая функция центра принимает значение $F = -2 + b_2 - 2\lambda = -1/3 - 2\lambda$.

В вариантах 2 и 3 целевая функция центра принимает отрицательные значения, тогда как в случае 1 она равна нулю. Таким образом, если суммарный результат деятельности агентов равен 0, то оптимальной стратегией центра будет честное сообщение метацентру.

4. $\Sigma x_i = 1, s = 0$. Суммарный результат деятельности агентов равен единице, однако центр в сообщении метацентру заявляет о нулевом суммарном результате, ничего не получая от него в качестве вознаграждения, при этом присваивая единицу (суммарный результат агентов). Кроме того, он должен выплачивать стимулирование σ^* результативному агенту (поскольку меняется целевая функция центра, то меняется и оптимальное стимулирование агентов со стороны центра, поэтому $\sigma^* \neq \sigma_1$). Однако результативный агент, видя сообщение s , может уличить центр в подлоге. Поэтому центр вынужден вступить в сговор с агентом, предложив тому оговоренное стимулирование на совершение действия и сверх того часть λ оставшейся прибыли. Таким образом, целевая функция центра принимает вид: $F = (1 - \lambda)(1 - \sigma^*)$.

Таблица 2

Возможные стратегии центра

Σx_i	Сообщение центра, s	Целевая функция центра без сговора с агентом	Целевая функция центра при сговоре с агентом
0	$s = 0$	$F = 0$	—
	$s = 1$	$F = -1 + b_1 = -2/3$	Отсутствие необходимости сговора
	$s = 2$	$F = -2 + b_2 = -1/3$	$F = -2 + b_2 - 2\lambda = -1/3 - 2\lambda$
1	$s = 0$	$F = 1 - \sigma_1 = 2/3$ (крупный штраф)	$F = (1 - \lambda)(1 - \sigma^*)$
	$s = 1$	$F = b_1 - \sigma_1 = 0$	—
	$s = 2$	$F = -1 + b_2 = 2/3$ (крупный штраф)	$F = (1 - \lambda)(-1 + b_2 - \sigma^*)$
2	$s = 0$	$F = 2$ (крупный штраф)	$F = 2 - 2\sigma^* - 2(1 - 2\sigma^*)\lambda$
	$s = 1$	$F = 1 + b_1 - 2\sigma_1 = 2/3$	Отсутствие необходимости сговора
	$s = 2$	$F = b_2 - 2\sigma_1 = 1$	—

5. $\sum x_i = 1, s = 1$. Центр честно сообщает о результате деятельности агентов и не имеет прибыли, так как метацентр компенсирует затраты центра на стимулирование. Нет необходимости какого-либо сговора с агентами.

6. $\sum x_i = 1, s = 2$. Суммарный результат деятельности агентов равен единице, но центр в сообщении метацентру заявляет о суммарном результате, равном двум, получая от метацентра b_2 , но отдавая единицу согласно своему сообщению. В данном случае уже нерезультативный агент может обнаружить недобросовестное поведение центра, и под угрозой крупного штрафа центр вынужден будет вступить в сговор с этим агентом, предложив тому часть λ от разницы между полученной прибылью и затратами на стимулирование σ^* результативного агента. Таким образом, целевая функция центра принимает вид: $F = (1 - \lambda)(-1 + b_2 - \sigma^*)$.

Следовательно, при суммарном результате агентов, равном 1, у центра есть три альтернативы: $s = 0$; $s = 1$ и $s = 2$. Целевая функция центра при этом принимает значения $F = (1 - \lambda)(1 - \sigma^*)$ при $s = 0$; $F = 0$ при $s = 1$; $F = (1 - \lambda)(-1 + b_2 - \sigma^*)$ при $s = 2$.

Поскольку вознаграждение b_2 , выплачиваемое центру, не зависит от манипуляции информацией и по-прежнему равно $5/3$, то целевая функция центра принимает большее значение при занижении суммарного результата агентов.

Таким образом, при суммарном результате агентов, равном единице, оптимальной стратегией центра будет занижение суммарного результата в сообщении метацентру и раздел скрытой прибыли с результативным агентом.

7. $\sum x_i = 2, s = 0$. Суммарный результат деятельности агентов равен двум, но центр сообщает метацентру о нерезультативной деятельности агентов, суммарный результат присваивая себе. Оба агента могут уличить в подлоге центр и последний под угрозой крупного штрафа вынужден вступить в сговор с обоими агентами, предложив им оговоренное стимулирование σ^* на совершение действия и сверх того отдать часть λ оставшейся прибыли. Целевая функция центра, таким образом, может быть представлена в следующем виде: $F = 2 - 2\sigma^* - 2\lambda(1 - \sigma^*)$. Вообще говоря, у центра в данной ситуации две стратегии, первая из которых заключается в следующем: при сговоре объявить агентам, что оба они оказались результативны, поэтому прибыль, которую им надо делить, можно описать следующим образом: $2 - 2\sigma^* - 1$. Здесь 2 — скрытый от метацентра суммарный результат, $2\sigma^*$ — выплата оговоренного стимулирования, 1 — заработок центра при честной игре. (Действительно, центру разумно делиться с агентами только той частью, которая получена именно в результате манипуляций.) При такой стратегии целевую функцию центра можно записать в указанном виде: $F = 2 - 2\sigma^* - 2\lambda(1 - \sigma^*)$. Вторая стратегия центра заключается в следующем: при сговоре объявлять каждому агенту, что именно он оказался результативным и общий результат деятельности агентов равен 1, тогда прибыль, которую им надо делить, записывается в следующем виде: $2 - \sigma^* - 1$. В таком случае целевая функция центра имеет следующий вид: $F = 2 - 2\sigma^* - 2\lambda(1 - \sigma^*)$.

Первая стратегия более выгодна центру, так как в этом случае его целевая функция принимает большее значение (поскольку при выборе первой стратегии делиться придется меньшей частью); т. е. в данной ситуации центр объявляет агентам о том, что оба они оказались результативны и целевая функция центра принимает следующий вид: $F = 2 - 2\sigma^* - 2\lambda(1 - \sigma^*) = 1 + (1 - 2\sigma^*)(1 - 2\lambda)$.

8. $\sum x_i = 2, s = 1$. Суммарный результат деятельности агентов равен двум, но центр сообщает метацентру о результате деятельности агентов, равном единице, оставок присваивая себе. Поскольку агенты не наблюдают результат деятельности друг друга, то у центра в данном случае нет необходимости вступать в сговор с каким-либо из агентов. Целевая функция центра в этом случае может быть представлена в следующем виде: $F = 1 + b_1 - 2\sigma_1 = 2/3$.

9. $\sum x_i = 2, s = 2$. Центр честно сообщает о результате деятельности агентов, получая от метацентра вознаграждение b_2 и назначая стимулирование обоим агентам по σ_1 . В таком случае целевая функция центра принимает значение, равное 1. Нет необходимости какого-либо сговора с агентами. Следовательно, при суммарном результате агентов, равном 2, у центра есть три альтернативы: $s = 0, s = 1$ и $s = 2$. Целевая функция центра при этом принимает значения: $F = 1 + (1 - 2\sigma^*)(1 - 2\lambda)$ при $s = 0$; $F = 1 + b_1 - 2\sigma_1 = 2/3$ при $s = 1$; $F = 1$ при $s = 2$.

Стратегия занижения суммарного результата агентов, равного двум, на единицу (т. е. сообщение $s = 1$) не является оптимальной стратегией. Однако отметим, что при сговоре оптимальное действие агента и оптимальное стимулирование изменяются, поскольку изменяются выражения математического ожидания для агента и центра. При выборе оптимального действия агент должен теперь (зная о возможности сговора с центром) учитывать и действие второго агента. В этих условиях математическое ожидание целевой функции первого агента имеет следующий вид:

$$M[f(a_1)] = -c(a_1) + a_1 a_2 (\sigma + \lambda(1 - 2\sigma)) + a_1 (1 - a_2) (\sigma + \lambda(1 - \sigma)).$$

Аналогичным образом для второго агента:

$$M[f(a_2)] = -c(a_2) + a_2 a_1 (\sigma + \lambda(1 - 2\sigma)) + a_2 (1 - a_1) (\sigma + \lambda(1 - \sigma)).$$

В равновесии $\partial M[f]/\partial a_i = 0$, с учетом $c(a_i) = a_i^2/2$ получаем:

$$0 = -a_1 + a_2 (\sigma + \lambda(1 - 2\sigma)) + (1 - a_2) (\sigma + \lambda(1 - \sigma)), \quad (9)$$

$$0 = -a_2 + a_1 (\sigma + \lambda(1 - 2\sigma)) + (1 - a_1) (\sigma + \lambda(1 - \sigma)). \quad (10)$$

Поскольку агенты симметричны, то справедливо считать $a_1 = a_2 = a$, тогда из любого из уравнений (9) и (10) получаем оптимальное действие агента:

$$a^* = (\sigma + \lambda(1 - \sigma)) / (1 + \sigma\lambda). \quad (11)$$

Аналогично, математическое ожидание центра в условиях сговора с агентами имеет следующий вид:

$$M[F(\sigma)] = (a^*)^2 (2 - 2\sigma - 2(1 - 2\sigma)\lambda) + 2a^* (1 - a^*) (1 - \lambda) (1 - \sigma), \quad (12)$$



где a^* определяется формулой (11). Выражение (12) преобразуем к виду: $M[F(\sigma)] = 2(a^*)^2\sigma\lambda + 2a^*(1-\lambda)(1-\sigma)$.

Таким же образом получаем оптимальное стимулирование σ^* , назначаемое центром агентам при сговоре:

$$\sigma^* = (1 - 2\lambda)/(2 - 3\lambda). \quad (13)$$

Далее необходимо найти те значения λ , при которых сговор с агентом (агентами) будет предпочтительнее с точки зрения центра, чем честное поведение. Для этого подставим полученное значение оптимального стимулирования (13) в целевые функции центра в тех случаях, когда центр вступает в сговор с агентом, т. е. в вариантах 4 и 7.

Вариант 4. Подставив полученное значение σ^* в соответствующее выражение целевой функции центра, получим $F = (1 - \lambda)^2/(2 - 3\lambda)$. При $\lambda < 2/3$ значение целевой функции центра будет положительным. Оптимальной стратегией центра в случае, когда суммарный результат деятельности агентов равен 1, будет занижение результата до нуля в сообщении метacentру и раздел скрытой прибыли с результативным агентом при том условии, что часть скрытой прибыли, отдаваемой при этом агенту, меньше $2/3$.

Вариант 7. Подставив полученное значение σ^* в соответствующее выражение целевой функции центра, получим: $F = 2(1 - \lambda - \lambda^2)/(2 - 3\lambda)$. При $\lambda \in (0; 1/2)$ целевая функция центра принимает значения, большие 1. Кроме того, оптимальным для центра будет значение $\lambda = 1/3$, так как при этом значении целевая функция центра принимает максимальное значение. Следовательно, при суммарном результате агентов, равном двум, оптимальной стратегией центра будет занижение суммарного результата в сообщении метacentру до нуля и раздел скрытой прибыли с результативными агентами.

Подставим полученное значение оптимального стимулирования (13) в математическое ожидание целевой функции центра и продифференцируем полученное выражение по λ : $(M[F(\sigma^*)])'_\lambda = 0$, другими словами при выбранном оптимальном стимулировании математическое ожидание целевой функции центра не зависит от λ . Аналогично, математическое ожидание целевой функции агентов не зависит от λ : $(M[f(a^*, \sigma^*)])'_\lambda = 0$. Это означает, что центр и агенты, участвуя в сговоре против интересов метacentра, выбирают платежи оптимальным образом, превращая, таким образом, трехуровневую модель в двухуровневую модель с оптимальными платежами.

Таблица 3

Выигрыши участников организационной системы при различных стратегиях центра

Стратегия центра	Агент	Центр	Метacentр	Суммарный
Честное функционирование	1/18	1/9	1/3	5/9
Оппортунистическое поведение	1/32	1/12	7/24	7/16
Сговор центра с агентами	1/8	1/4	0	1/2

Рассмотренная ранее модель взаимодействия элементов организационной системы, предполагающая возможность сговора центра и агентов, не оптимальна и с точки зрения метacentра, поскольку элементы в сговоре стремятся исключить метacentр из игры, оставив его с нулевой прибылью. Она не оптимальна и с точки зрения функционирования системы в целом, поскольку сумма целевых функций участников в сговоре меньше суммы целевых функций участников организационной системы при честном функционировании. В табл. 3 приведены значения математических ожиданий целевых функций участников организационной системы для различных вариантов их поведения.

Эффективность системы в целом максимальна при честном функционировании элементов. При оппортунистическом поведении одного элемента (центра) или сговоре элементов эффективность системы падает. Ранее показано, что при заданном функционировании организационной системы элементы этой системы вступают в сговор, поскольку при этом математическое ожидание их целевых функций принимает большее значение, чем при честном функционировании (табл. 3 иллюстрирует этот случай). Метacentр может повлиять на выбор элементами функционирования (честного или оппортунистического) с помощью штрафов или премий. В представленной модели не рассматривались штрафы за оппортунистическое поведение элементов, однако из табл. 3 можно сделать вывод, что и с помощью одних только премий метacentр может повлиять на выбор функционирования элементов. Действительно, сумма значений математического ожидания целевых функций агентов и центра при честном функционировании равна $2/9$. Эта же сумма равна $1/2$ при оппортунистическом поведении элементов в сговоре. Разница — $5/18$ — сумма премий элементам, необходимым для того, чтобы побудить их выбирать честное функционирование. Как видим, эта сумма премий не превышает значения математического ожидания целевой функции метacentра при честном функционировании организационной системы. Таким образом, данная трехуровневая организационная система может функционировать с максимальной эффективностью без введения штрафов. Метacentр может без введения штрафов побудить элементы выбирать честное функционирование.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Представленная модель организационной модели отображает вполне реальную ситуацию — занижение менеджерами результатов работы в отчете перед владельцами фирм. В модели найдены оптимальные стратегии центра при различных суммарных результатах деятельности агентов. Показано, что эффективность системы в целом при оппортунистическом поведении участников организационной системы снижается. Также показано, что с помощью одних только премий в силах метacentра создать такие условия функционирования системы, что оппортунистическое поведение участников будет им невыгодно.

☎ (495) 334-90-51

e-mail: vybornov_roman@mail.ru

