УДК 681.3.057.51-7.311.17

ВНУТРЕННЯЯ МОДЕЛЬ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ПРАКТИКИ ДЛЯ СИСТЕМ АВТОМАТИЗИРОВАННОГО КОНСТРУИРОВАНИЯ ДОКАЗАТЕЛЬСТВ ТЕОРЕМ. Ч. 2. Модель математического диалекта[1]

Т. Л. Гаврилова, А. С. Клещев

Институт автоматики и процессов управления ДВО РАН, г. Владивосток

Описан язык ММД — формальная модель математического диалекта, используемого в математической практике при доказательстве математических утверждений. Определены синтаксис, семантика и прагматика моделей определений математических терминов и пропозициональных, математических и метаматематических утверждений.

ВВЕДЕНИЕ

Принципиальная особенность математического диалекта, используемого в математической практике для представления математических утверждений и доказательств, состоит в его расширяемости — возможности определения новых терминов, способов выражения, формальных способов записи и правил рассуждения. Эта особенность позволяет сделать формулировки утверждений и их доказательства более компактными, обозримыми и понятными для математиков. Однако она не представлена в моделях, используемых в системах автоматического и интерактивного доказательства теорем, что делает формулировки и доказательства, представленные в этих моделях, громоздкими и мало понятными. Цель настоящей работы заключается в определении языка ММД — расширяемой модели математического диалекта. В ней конкретизируются механизмы расширяемости, описанные в первой части настоящей работы[2].

[1] Работа выполнена при финансовом содействии программы № 16 Президиума РАН, проект «Теоретические основы интеллектуальных систем, основанных на онтологиях, для интеллектуальной поддержки научных исследований» и программы № 16 ОЭММПУ РАН, проект «Синтез интеллектуальных систем управления базами знаний и базами данных».

[2] *Гаврилова Т. Л., Клещев А. С.* Внутренняя модель математической практики для систем автоматизированного конструирования доказательств теорем. Ч. 1. Общее описание модели // Проблемы управления. — 2006. — № 4. — С. 32—35.

1. ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ТЕРМЫ

Определения позволяют вводить новые термины для обозначения определяемых понятий и новые способы записи, а также задавать значения этих терминов и смысл этих способов записи. В настоящем разделе описываются средства языка ММД, предназначенные для этих целей. Далее буквой t (возможно, с индексами) будет обозначаться терм языка ММД, а буквой f (также, возможно, с индексами) — формула языка ММД.

Определение математического термина n в языке ММД имеет вил $n \equiv t$. Совокупность определений математических терминов в модели математических знаний должна удовлетворять двум контекстным условиям: у любых двух определений терминов левые части должны быть различны; каждое определение математического термина должно быть корректным, т. е. должно быть справедливо (может быть доказано) утверждение $t \in O$ (терм t имеет значение, которое является математическим объектом). Определение математического термина моделирует оборот математического диалекта: «назовем термином n значение терма t». Конкретизацией определения математического термина $n \equiv t$ является предложение $n = t$.

Определение нового способа записи s имеет вид $(v_1 : t_1)...(v_m : t_m)\ s \equiv t$, где $m \geqslant 1$, $(v_1: t_1)...(v_m: t_m)$ — множество описаний переменных, s — строка символов, состоящая из знаков терминального алфавита языка и переменных $v_1, ..., v_m$. Определение нового способа записи $(v_1: t_1)...(v_m: t_m)\ s \equiv t$ является областью действия всех описаний переменных из множества описаний переменных $(v_1: t_1)...(v_m: t_m)$. Совокупность определений новых способов записи в модели математических знаний должна удовлетворять следующим контекстным условиям: у любых двух определений новых способов записи левые части должны быть различны; множество описаний переменных $(v_1: t_1)...(v_m: t_m)$ должно быть корректным (см. далее); определение нового способа записи должно быть корректным, т. е. должно быть справедливо предложение $(\forall(v_1: t_1)...(v_m: t_m)\ t \in O)$ (при любых допустимых значениях переменных терм t имеет значение). Определение нового способа записи моделирует оборот математического диалекта: «для любых значений v_1 из t_1, ..., v_m из t_m способ записи s означает t». Конкретизацией определения нового способа записи $(v_1: t_1)...(v_m: t_m)\ s \equiv t$ будем называть конкретизацию математического утверждения $(v_1: t_1)...(v_m: t_m)\ s = t$.

Множество описаний переменных имеет вид $(v_1: t_1)...$ $...(v_m: t_m)$, где v_1, ..., v_m — переменные, $(v_i: t_i)$ — описание переменной v_i для $i = 1, ..., m$. Любое множество описаний переменных должно удовлетворять следующим контекстным условиям: в нем любые два описания переменных должны описывать разные переменные; множество описаний переменных корректно, если справедливы предложения: $t_1 \in S$, ..., $t_m \in S$, $(\times t_1, ..., t_m) \neq \varnothing$ (значения термов t_1, ..., t_m являются множествами, а их декартово произведение непусто). Множество описаний переменных моделирует оборот математического диалекта: «для любых значений v_1 из t_1, ..., v_m из t_m». Множество описаний переменных определяет множество допустимых семантических подстановок вида $\theta =$ $= (v_1/c_1, ..., v_m/c_m)$, где $c_1 \in J_\theta(t_1)$, ..., $c_m \in J_\theta(t_m)$, а $J_\theta(t)$ обозначает значение терма t при подстановке θ.

Корректный терм — это любая конструкция языка, имеющая нелогическое значение.

Каждое *вхождение математического термина n* в терм, формулу или метаутверждение, кроме его вхождения в левую часть определения этого термина, является термом. Вхождение математического термина является корректным термом, если модель математических знаний содержит определение этого термина. Значение этого терма совпадает со значением терма t в определении термина n.

Каждое *вхождение переменной v* в терм, формулу или метаутверждение, кроме ее вхождения в описание переменной перед двоеточием, является термом. Переменная является корректным термом, если ее вхождение находится в области действия описания этой переменной. Если терм — вхождение переменной v — находится в области действия множества описаний переменных $(v_1: t_1)...(v: t)...(v_m: t_m)$, то значение этого терма $J_\theta(v)$ при допустимой подстановке $\theta = (v_1/c_1, ..., v/c, ..., v_m/c_m)$ есть c.

Если математические знания содержат определение нового способа записи $(v_1: t_1)...(v_m: t_m)\ s \equiv t$, то термом является любая конструкция, получаемая из строки s как результат синтаксической подстановки вида $\sigma =$ $= (v_1/tt_1, ..., v_m/tt_m)$, где tt_1, ..., tt_m — термы. Этот терм корректен, если справедливы предложения $tt_1 \in t_1$, ..., $tt_m \in t_m$ (значения термов tt_1, ..., tt_m принадлежат значениям термов t_1, ..., t_m, соответственно). Значение этого терма совпадает со значением терма t при подстановке σ.

Условный терм имеет вид $/(f_1 \Rightarrow t_1)...(f_m \Rightarrow t_m)/$, где $m \geqslant 2$. Условный терм корректен, если справедливы предложения $(\&(i: I[1, m])\ t_i \in O)$ и $(\vee(i: I[1, m]\ f_i)\ \&$ $(\&(j: I[1, m]\backslash\{i\})\ \neg f_j))$ (все термы t_1, ..., t_m имеют значения, а среди формул f_1, ..., f_m только одна является истинной). Условный терм моделирует оборот математического диалекта: «если f_1, то t_1, ... если f_m, то t_m». Если $J_\theta(f_i)$ есть истина, где $J_\theta(f)$ есть значение формулы f при допустимой подстановке θ, то $J_\theta(/(f_1 \Rightarrow t_1)...(f_m \Rightarrow t_m)/ =$ $= J_\theta(t_i)$.

Все *кванторные конструкции* имеют или вид $A(v_1: t_1)...$ $...(v_m: t_m)\ t\Omega$, или вид $A(v_1: t_1)...(v_m: t_m)\ f\Omega$, где A — открывающая кванторная скобка, Ω — закрывающая кванторная скобка, $(v_1: t_1)...(v_m: t_m)$ — множество описаний переменных. Кванторная конструкция является корректной, если множество описаний переменных $(v_1: t_1)...(v_m: t_m)$ корректно, и терм t (формула f) имеет значение при всех допустимых подстановках, определяемых множеством описаний переменных $(v_1: t_1)...(v_m: t_m)$; кроме того, любая кванторная конструкция должна удовлетворять контекстному условию $m \geqslant 1$. Внутренности кванторных скобок $(v_1: t_1)...(v_m: t_m)\ t$ и $(v_1: t_1)...(v_m: t_m)\ f$ являются областями действия всех описаний переменных из множества описаний переменных $(v_1: t_1)...(v_m: t_m)$. Приведем примеры термов-кванторных конструкций.

- *Лямбда-функция,* имеющая вид $(\lambda(v_1: t_1)...(v_m: t_m)\ t)$. Здесь «$(\lambda$» — открывающая кванторная скобка, а «$)$» — закрывающая. Лямбда-функция является корректным термом, если справедливо предложение $(\forall(v_1: t_1)...$ $...(v_m: t_m)\ t \in O)$. Лямбда-функция моделирует оборот математического диалекта: «функция от переменных v_1, ..., v_m с областями возможных значений t_1, ..., t_m, способ вычисления значения которой задан термом t». Значением терма является функция от переменных v_1, ..., v_m с областями возможных значений t_1, ..., t_m, способ вычисления значения которой задан термом t.
- *Лямбда-предикат,* имеющий вид $(\lambda(v_1: t_1)...(v_m: t_m)\ f)$. Здесь «$(\lambda$» — открывающая кванторная скобка, а «$)$» — закрывающая. Лямбда-предикат является корректным термом, если справедливо предложение $(\forall(v_1: t_1)...$ $...(v_m: t_m)\ f \vee \neg f)$. Лямбда-предикат моделирует оборот математического диалекта «предикат от переменных v_1, ..., v_m с областями возможных значений t_1, ..., t_m, способ вычисления значения которого задан формулой f». Значением терма является предикат от переменных v_1, ..., v_m с областями возможных значений t_1, ..., t_m, способ вычисления значения которого задан формулой f.
- *Квантор интенсиональности,* имеющий вид $\{(v_1: t_1)...$ $...(v_m: t_m)\ f\}$. Здесь «$\{$» — открывающая кванторная скобка, а «$\}$» — закрывающая. Квантор интенсиональности является корректным термом, если справедливо предло-

жение $(\forall(v_1\colon t_1)...(v_m\colon t_m)\, f \vee \neg f)$. Квантор интенсиональности моделирует оборот математического диалекта: «множество всех таких наборов значений переменных $v_1, ..., v_m$ из множества допустимых подстановок, при которых формула f истинна». Значением терма является множество всех таких наборов значений переменных $v_1, ..., v_m$ из множества допустимых подстановок, при которых формула f истинна.

- *Квантор суммирования,* имеющий вид $(\Sigma(v_1\colon t_1)...(v_m\colon t_m)\, t)$. Здесь «$(\Sigma$» — открывающая кванторная скобка, а «)» — закрывающая. Квантор суммирования является корректным термом, если справедливо предложение $(\forall(v_1\colon t_1)...(v_m\colon t_m)\, t \in R)$. Квантор суммирования моделирует оборот математического диалекта: «сумма значений терма t при всех допустимых подстановках». Значением терма является сумма значений терма t при всех допустимых подстановках.

Арифметические термы моделируют способы записи арифметических выражений в математическом диалекте.

- *Вещественные константы* записываются принятым в математике способом и имеют значения, определяемые этим способом.
- *Сумма* чисел имеет вид $t_1 + t_2$. Сумма чисел является корректным термом, если справедливы предложения $t_1 \in R$ и $t_2 \in R$. Имеет место равенство: $J_\theta(t_1 + t_2) = J_\theta(t_1) + J_\theta(t_2)$. Аналогично определяются *произведение* чисел $(t_1 * t_2)$ и *разность* чисел $(t_1 - t_2)$.
- *Частное* от деления чисел (t_1/t_2) является корректным термом, если, кроме указанных выше предложений для суммы, справедливо предложение $t_2 \neq 0$.

Термы, связанные с множествами, моделируют способы записи выражений над множествами, принятые в математическом диалекте.

- *Фиксированные множества*, обозначения которых введены в языке ММД: множество всех математических объектов — O; множество всех множеств, не являющихся собственным элементом, — S; пустое множество — $\varnothing$; множество вещественных чисел — R; множество целых чисел — I.
- *Экстенсионально заданное множество* имеет вид $\{t_1, ..., t_m\}$. Оно должно удовлетворять контекстному условию $m \geqslant 1$; оно является корректным термом, если справедливо предложение $(\&\ (i\colon I[1, m])\ t_i \in O)$. Экстенсионально заданное множество моделирует оборот математического диалекта: «множество, элементами которого являются значения термов $t_1, ..., t_m$». Значение терма есть множество, элементами которого являются значения термов $t_1, ..., t_m$.
- *Объединение* множеств имеет вид $t_1 \cup t_2$. Объединение множеств является корректным термом, если справедливы предложения $t_1 \in S$ и $t_2 \in S$. Имеет место равенство $J_\theta(t_1 \cup t_2) = J_\theta(t_1) \cup J_\theta(t_2)$. *Разность* множеств $(t_1 \backslash t_2)$ и *пересечение* множеств $(t_1 \cap t_2)$ определяются аналогично.
- Декартово произведение множеств имеет вид $(\times t_1, ..., t_m)$. Оно должно удовлетворять контекстному условию $m \geqslant 1$; оно является корректным термом, если справедливы предложения $t_1 \in S, ..., t_m \in S$. Значение терма $(\times t_1, ..., t_m)$ есть декартово произведение множеств — значений термов $t_1, ..., t_m$.

Термы, связанные с отображениями, моделируют способы записи, принятые в математическом диалекте для выражений, в состав которых входят отображения.

- *Множество отображений* имеет вид $t_1 \to t_2$. Множество отображений является корректным термом, если справедливы предложения $t_1 \in S$ и $t_2 \in S$. Значение терма есть множество всех отображений множества-значения терма t_1 в множество-значение терма t_2.
- *Аппликация функции* имеет вид $\varphi(t_1, ..., t_m)$, где φ — либо математический термин n, либо переменная v. Если φ — математический термин n, то аппликация функции является корректным термом, если модель математических знаний содержит определение этого термина вида $n \equiv (\lambda(v_1\colon tt_1)...(v_m\colon tt_m)\, t)$, и справедливы предложения $t_1 \in tt_1, ..., t_m \in tt_m$. В этом случае значение терма $n(t_1, ..., t_m)$ совпадает со значением терма, получаемого из терма t в результате синтаксической подстановки $\sigma = (v_1/t_1, ..., v_m/t_m)$. Если же φ — переменная v, то аппликация функции является корректным термом, если эта переменная входит в область действия описания этой переменной вида $(v\colon (\times tt_1, ..., tt_m) \to tt)$, и справедливы предложения $t_1 \in tt_1, ..., t_m \in tt_m$. В этом случае значение терма $v(t_1, ..., t_m)$ есть значение отображения-значения переменной v для аргументов-значений термов $t_1, ..., t_m$.

2. ПРОПОЗИЦИОНАЛЬНЫЕ УТВЕРЖДЕНИЯ И ФОРМУЛЫ

Пропозициональные утверждения позволяют представлять утверждения языка исчисления высказываний, а пропозициональные тавтологии — некоторые способы логического рассуждения. Пропозициональные тавтологии не входят в математические знания, поскольку их справедливость может быть установлена непосредственно (по таблицам истинности).

Пропозициональным утверждением будем называть конструкцию вида $(v_1\colon L)...(v_m\colon L)\, f$, где f — пропозициональная формула, $v_1, ..., v_m$ — пропозициональные переменные, $(v_1\colon L)...(v_m\colon L)$ — множество описаний этих переменных, а $m \geqslant 1$. Значением пропозициональной переменной может быть одна из логических констант — *истина* или *ложь*.

Пропозициональными формулами являются: пропозициональные переменные, константы *истина* и *ложь*, а также $\neg f$, $f_1 \,\&\, f_2$, $f_1 \vee f_2$, $f_1 \Rightarrow f_2$ и $f_1 \Leftrightarrow f_2$, где f, f_1 и f_2 — пропозициональные формулы.

Пропозициональной тавтологией будем называть пропозициональное утверждение, в котором f — пропозициональная формула, истинная при всех значениях пропозициональных переменных $v_1, ..., v_m$. *Конкретизацией пропозициональной тавтологии* $(v_1\colon L)...(v_m\colon L)\, f$ является предложение, полученное из пропозициональной формулы f заменой каждого вхождения в нее каждой пропозициональной переменной некоторым предложением.

3. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ УТВЕРЖДЕНИЯ И ФОРМУЛЫ

Математические утверждения позволяют представлять аксиомы и теоремы (леммы, следствия и проблемы). Аксиомы, записанные на языке ММД в форме математических утверждений, определяют семантику конструкций языка (термов и формул), зависящую от свойств математических объектов. При описании математических утверждений используются обозначения, введенные в § 1.

Математическое утверждение имеет вид $(v_1: t_1)...$ $...(v_m: t_m)\ f$, где $(v_1: t_1)...(v_m: t_m)$ — множество описаний переменных, а f — формула. Оно является областью действия всех описаний переменных из множества описаний переменных $(v_1: t_1)...(v_m: t_m)$ и должно удовлетворять контекстному условию $m \geqslant 0$. Кроме того, математическое утверждение корректно, если формула f имеет значение при всех допустимых подстановках, определяемых множеством описаний переменных $(v_1: t_1)...$ $...(v_m: t_m)$. Математическое утверждение моделирует оборот математического диалекта: «для любых значений v_1 из t_1, ..., v_m из t_m справедлива формула f».

Предположением о свойствах произвольного объекта будем называть предложение $a \in t$, где a — обозначение произвольного математического объекта, а t — терм, имеющий значением множество, и такой, что $t \neq \varnothing$. *Допустимой синтаксической подстановкой для математического утверждения* $(v_1: t_1)...(v_m: t_m)\ f$ является подстановка $\sigma = (v_1/d_1, ..., v_m/d_m)$, где d_i — либо терм tt_i такой, что справедливо предложение $tt_i \in t_i$, либо обозначение произвольного объекта a_i в предположении, что $a_i \in t_i$, для всех $i = 1, ..., m$.

Конкретизацией математического утверждения $(v_1: t_1)...(v_m: t_m)\ f$ при допустимой для него синтаксической подстановке σ является предложение, полученное из f заменой каждого вхождения каждой переменной из σ ее значением из этой подстановки; при этом если в это предложение входит терм t, являющийся выражением над константами, то вхождение этого терма заменяется на значение этого выражения. Будем говорить, что предложения вида $tt_i \in t_i$ (утверждения о допустимости синтаксической подстановки) и предположения вида $a_i \in t_i$ из определения допустимой синтаксической подстановки σ связаны с этой конкретизацией. Будем говорить, что конкретизация сделана без предположений, если в подстановке σ все переменные заменяются термами; если же все переменные заменяются обозначениями произвольных объектов в предположениях о свойствах этих произвольных объектов, то будем говорить, что конкретизация сделана при полном наборе предположений.

Корректная формула — это любая конструкция языка, имеющая логическое значение.

Формулы с пропозициональными связками моделируют логические утверждения.

- *Отрицание* имеет вид $\neg f$. Отрицание является корректной формулой, если формула f имеет значение. Имеет место $J_\theta(\neg f) \Leftrightarrow \neg J_\theta(f)$.
- *Конъюнкция* имеет вид $f_1\ \&\ f_2$. Конъюнкция является корректной формулой, если формулы f_1 и f_2 имеют значения. Имеет место: $J_\theta(f_1\ \&\ f_2) \Leftrightarrow J_\theta(f_1)\ \&\ J_\theta(f_2))$. *Дизъюнкция* $(f_1 \vee f_2)$, *импликация* $(f_1 \Rightarrow f_2)$ и *равносильность* $(f_1 \Leftrightarrow f_2)$ определяются аналогично.

Формулы-кванторные конструкции моделируют квантифицированные формулы с конечными и бесконечными областями определения переменных.

- *Квантор всеобщности* имеет вид $(\forall(v_1: t_1)...(v_m: t_m)\ f)$. Здесь «$(\forall$» — открывающая кванторная скобка, а «)» — закрывающая. Квантор всеобщности является корректной формулой, если справедливо предложение $(\forall(v_1: t_1)...(v_m: t_m)\ f \vee \neg f)$. Квантор всеобщности моделирует оборот математического диалекта: «при всех допустимых подстановках, определяемых множеством описаний переменных $(v_1: t_1)...(v_m: t_m)$, формула f истинна». Квантор всеобщности истинен тогда и только тогда, когда формула f истинна при всех допустимых подстановках, определяемых множеством описаний переменных $(v_1: t_1)...(v_m: t_m)$.
- *Квантор существования* имеет вид $(\exists(v_1: t_1)...(v_m: t_m)\ f)$. Здесь «$(\exists$» — открывающая кванторная скобка, а «)» — закрывающая. Квантор существования является корректной формулой, если справедливо предложение: $(\forall(v_1: t_1)...(v_m: t_m)\ f \vee \neg f)$. Квантор существования моделирует оборот математического диалекта: «существует допустимая подстановка, определяемая множеством описаний переменных $(v_1: t_1)...(v_m: t_m)$, при которой формула f истинна». Квантор существования истинен тогда и только тогда, когда формула f истинна хотя бы при одной допустимой подстановке, определяемой множеством описаний переменных $(v_1: t_1)...(v_m: t_m)$.
- *Квантор конъюнкции* имеет вид $(\&(v_1: t_1)...(v_m: t_m)\ f)$. Здесь «$(\&$» — открывающая кванторная скобка, а «)» — закрывающая. Квантор конъюнкции является корректной формулой, если справедливо предложение $(\&(v_1: t_1)...(v_m: t_m)\ f \vee \neg f)$. Квантор конъюнкции моделирует оборот математического диалекта: «при всех допустимых подстановках, определяемых множеством описаний переменных $(v_1: t_1)...(v_m: t_m)$, формула f истинна». Этот квантор используется вместо квантора всеобщности, когда множество допустимых подстановок, определяемое множеством описаний переменных $(v_1: t_1)...(v_m: t_m)$, конечно. Квантор конъюнкции истинен тогда и только тогда, когда формула f истинна при всех допустимых подстановках, определяемых множеством описаний переменных $(v_1: t_1)...(v_m: t_m)$.
- *Квантор дизъюнкции* имеет вид $(\vee(v_1: t_1)...(v_m: t_m)\ f)$. Здесь «$(\vee$» — открывающая кванторная скобка, а «)» — закрывающая. Квантор дизъюнкции является корректной формулой, если справедливо предложение

$(\vee(v_1: t_1)...(v_m: t_m)\, f \vee \neg f)$. Квантор дизъюнкции моделирует оборот математического диалекта: «существует хотя бы одна допустимая подстановка, определяемая множеством описаний переменных $(v_1: t_1)...(v_m: t_m)$, при которой формула f истинна». Этот квантор используется вместо квантора существования, когда множество допустимых подстановок, определяемое множеством описаний переменных $(v_1: t_1)...(v_m: t_m)$, конечно. Квантор дизъюнкции истинен тогда и только тогда, когда формула f истинна хотя бы при одной допустимой подстановке, определяемой множеством описаний переменных $(v_1: t_1)...(v_m: t_m)$.

Аппликация предиката имеет вид $\rho(t_1, ..., t_m)$, где ρ — либо математический термин n, либо переменная v. Если ρ — математический термин n, то аппликация предиката является корректной формулой, если модель математических знаний содержит определение этого термина вида $n \equiv (\lambda(v_1: tt_1)...(v_m: tt_m)\, f)$, и справедливы утверждения $t_1 \in tt_1, ..., t_m \in tt_m$. В этом случае значение формулы $n(t_1, ..., t_m)$ совпадает со значением предложения, получаемого из формулы f в результате синтаксической подстановки $\sigma = (v_1/t_1, ..., v_m/t_m)$. Если же ρ — переменная v, то аппликация предиката является корректной формулой, если эта переменная входит в область действия описания этой переменной вида $(v: (\times tt_1, ..., tt_m) \to L)$, и справедливы предложения $t_1 \in tt_1, ..., t_m \in tt_m$. В этом случае значение формулы $v(t_1, ..., t_m)$ есть значение предиката, являющегося значением переменной v, для аргументов, которые суть значения термов $(t_1, ..., t_m)$.

Отношение *больше* имеет вид $t_1 > t_2$. Оно является корректной формулой, если справедливы предложения $t_1 \in R$ и $t_2 \in R$. Имеет место $J_\theta(t_1 > t_2) \Leftrightarrow J_\theta(t_1) > J_\theta(t_2))$. Отношения *больше или равно* $(t_1 \geqslant t_2)$, *меньше* $(t_1 < t_2)$ и *меньше или равно* $(t_1 \leqslant t_2)$ определяются аналогично.

Равенство имеет вид $t_1 = t_2$. Оно является корректной формулой, если справедливы предложения $t_1 \in O$ и $t_2 \in O$. Имеет место $J_\theta(t_1 = t_2) \Leftrightarrow J_\theta(t_1) = J_\theta(t_2)$. *Неравенство* $(t_1 \neq t_2)$ определяется аналогично.

Отношение принадлежности имеет вид $t_1 \in t_2$. Оно является корректной формулой, если справедливы утверждения $t_1 \in O$ и $t_2 \in S$. Имеет место $J_\theta(t_1 \in t_2) \Leftrightarrow J_\theta(t_1) \in J_\theta(t_2)$. Отношение *непринадлежности* $(t_1 \notin t_2)$ определяется аналогично.

4. МЕТАЯЗЫК

Для того чтобы определять семантику конструкций языка (термов и формул), не зависящую от свойств математических объектов, семантику кванторных конструкций, а также формулировать утверждения о синтаксических преобразованиях (например, правила дифференцирования или интегрирования) и математические принципы, вводятся метаматематические утверждения. Метаматематическое утверждение можно рассматривать как описание множества математических утверждений, получаемых из него конкретизацией при всех допустимых для него синтаксических подстановках.

Далее средства метаязыка, предназначенные для этих целей, описываются с помощью обозначений, введенных в § 3.

Метаматематическое утверждение имеет вид $(v_1: MT_1)...(v_m: MT_m)\ MF$, где $v_1, ..., v_m$ — переменные, $MT_1, ..., MT_m$ — метатермы, а MF — метаформула, $m \geqslant 0$. Если в метаматематическое утверждение входят модифицированные синтаксические переменные, то оно корректно при выполнении следующих условий:

- каждая модифицированная синтаксическая переменная входит в это метаматематическое утверждение, по меньшей мере, два раза;
- если хотя бы одно вхождение синтаксической переменной в это метаматематическое утверждение является модифицированным, то и все вхождения этой переменной в это утверждение являются модифицированными;
- число метаконструкций в модификаторах синтаксических переменных одинаково;
- если на i-м месте одного модификатора находится метатерм (метаформула), то в других модификаторах на i-м месте также находятся метатермы (метаформулы).

Метаматематическое утверждение, входящее в математические знания, имеет следующую прагматику: справедливо каждое математическое утверждение, полученное из него конкретизацией с помощью любой допустимой синтаксической подстановки.

Синтаксические переменные характеризуются типами. В метаязыке имеются следующие типы синтаксических переменных (указаны обозначение типа и допустимые значения): $\boldsymbol{r}$ — вещественные нумералы (изображения вещественных чисел); $\boldsymbol{r}^+$ — положительные вещественные нумералы; $\boldsymbol{i}$ — целые нумералы (изображения целых чисел); $\boldsymbol{v}$ — переменные; $\boldsymbol{t}$ — произвольные термы (удовлетворяющие условиям корректности тех конструкций, в которые входят синтаксические переменные этого типа); $\boldsymbol{f}$ — произвольные формулы (удовлетворяющие условиям корректности тех конструкций, в которые входят синтаксические переменные этого типа).

Допустимой синтаксической подстановкой для метатерма (метаформулы) называется подстановка допустимых значений вместо всех синтаксических переменных, входящих в метатерм (метаформулу). *Допустимой синтаксической подстановкой для метаматематического утверждения* является синтаксическая подстановка, допустимая для всех метатермов и метаформул, входящих в это утверждение. Результатом применения синтаксической подстановки к метатерму (метаформуле) является терм (формула), полученный(ая) заменой каждого вхождения синтаксической переменной ее значением из синтаксической подстановки.

Конкретизацией метаматематического утверждения при допустимой для него синтаксической подстановке является математическое утверждение, полученное заменой всех входящих в него метатермов и метаформул на результаты применения к ним этой подстановки.

Метатермы. Синтаксические переменные типов $\boldsymbol{r}$, $\boldsymbol{r}^+$, $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{v}$ и $\boldsymbol{t}$ являются метатермами. Значение такого метатерма — любое допустимое значение синтаксической переменной, являющейся этим метатермом. Метатермом является также любой терм либо любая конструкция, полученная из любого терма языка заменой в нем вхождения хотя бы одного терма синтаксической переменной одного из типов $\boldsymbol{r}$, $\boldsymbol{r}^+$, $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{t}$ и (или) хотя бы одной формулы-синтаксической переменной типа $\boldsymbol{f}$. Значением метатерма при фиксированной допустимой синтаксической подстановке является терм, полученный из этого метатерма как результат применения к нему этой синтаксической подстановки.

Метаформулы. Синтаксическая переменная типа $\boldsymbol{f}$ является метаформулой. Значение такой метаформулы — любое допустимое значение синтаксической переменной, являющейся этой метаформулой. Метаформулой является также любая формула либо любая конструкция, полученная из любой формулы языка заменой в ней вхождения хотя бы одного терма синтаксической переменной одного из типов $\boldsymbol{r}$, $\boldsymbol{r}^+$, $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{v}$ и $\boldsymbol{t}$ и (или) хотя бы одной формулы — синтаксической переменной типа $\boldsymbol{f}$. Значением метаформулы при фиксированной допустимой синтаксической подстановке является формула, полученная из этой метаформулы как результат применения к ней этой синтаксической подстановки.

Метаконструкция — это либо метатерм, либо метаформула.

Конструкцию $\vdash \boldsymbol{M}_1, \ldots, \boldsymbol{M}_m \dashv$, где $\boldsymbol{M}_1, \ldots, \boldsymbol{M}_m$ — метаконструкции, будем называть *модификатором.* Конструкцию вида $\boldsymbol{T} \vdash \boldsymbol{M}_1, \ldots, \boldsymbol{M}_m \dashv$, где $\boldsymbol{T}$ — синтаксическая переменная типа $\boldsymbol{t}$, будем называть *модифицированной синтаксической переменной типа* $\boldsymbol{t}$. Эта конструкция является метатермом. Конструкцию вида $\boldsymbol{F} \vdash \boldsymbol{M}_1, \ldots, \boldsymbol{M}_m \dashv$, где $\boldsymbol{F}$ — синтаксическая переменная типа $\boldsymbol{f}$, будем называть *модифицированной синтаксической переменной типа* $\boldsymbol{f}$. Эта конструкция является метаформулой.

Модифицированная синтаксическая переменная типа $\boldsymbol{t}$ (типа $\boldsymbol{f}$) имеет метазначение — метатерм (метаформулу), удовлетворяющий(ую) следующим условиям:

- в метазначение входят синтаксические переменные только типов $\boldsymbol{t}$ и $\boldsymbol{f}$, снабженные верхними индексами из диапазона от 1 до m, которые указывают на их порядковые номера в модификаторе;
- если в метазначение входит синтаксическая переменная $\boldsymbol{t}^i$($\boldsymbol{f}^i$), то в модификаторе на i-м месте должен находиться метатерм (метаформула);
- если в метаматематическое утверждение входит одна и та же модифицированная синтаксическая переменная с разными модификаторами, то метазначения этих вхождений одинаковы.

Значение модифицированной синтаксической переменной типа $\boldsymbol{t}$ (типа $\boldsymbol{f}$) при фиксированной синтаксической подстановке получается из ее метазначения заменой каждого вхождения синтаксической переменной $\boldsymbol{t}^i$($\boldsymbol{f}^i$) в метазначение на значение, определяемое синтаксической подстановкой, той метаконструкции, которая находится в модификаторе на i-м месте.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

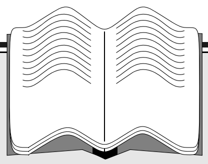
В работе приведено описание внутренней модели математического диалекта, в том числе таких его конструкций, как определения и пропозициональные, математические и метаматематические утверждения. В известных вариантах исчисления предикатов первого порядка метаязык вводится для записи конечного (и очень небольшого) множества правил вывода. Легко видеть, что часть этих правил есть запись на метаязыке некоторых пропозициональных тавтологий (свойств пропозициональных связок), другая же — свойств логических кванторов. Наличие в ММД языка пропозициональной логики позволяет представить все известные правила логических рассуждений (все пропозициональные тавтологии). Метаязык ММД позволяет представлять свойства как логических, так и нелогических кванторов, используемых математиками и определяемых в модели ММД. Кроме того, этот метаязык позволяет задавать логические и нелогические принципы, являющиеся основой многих математических доказательств, что необходимо для выполнения рассуждений в исчислении, имеющем порядок выше первого.

☎ *(4232) 31-40-01, 31-04-24*

e-mail: gavrilov@iacp.dvo.ru

kleschev@iacp.dvo.ru

❑



Уважаемые читатели!

С экстратекстом журнала "Проблемы управления" вы можете ознакомиться в Интернете, посетив сайт **http://www.extratext-2005.narod.ru/.**

Экстратекст – это новый инструмент информационной поддержки инноваций.

Экстратекстом научной статьи мы называем информационный объект, элементами которого являются: Библиографическое описание, Аннотация, Введение, Заключение (выводы) и Список литературы.

Экстратекст дает сжатое представление о перечне и сути рассматриваемых вопросов, полученных результатах, позиции и эрудиции автора.

Об экстратексте читайте статью В.Л. Эпштейна в следующем номере журнала.

Редакция