УДК 519.615.7

МЕТОД ЭВОЛЮЦИИ ПАРАМЕТРОВ В НЕЛИНЕЙНЫХ СЕТЕВЫХ ЗАДАЧАХ НА ПРИМЕРЕ ОПТИМИЗАЦИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВХОДЯЩИХ ПОТОКОВ НАГРУЗКИ

В.А. Жевнеров

Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, г. Москва

Метод эволюции параметров предложено применять для решения нелинейных задач оптимизации сетей. Особенности применения метода показаны на примере оптимального распределения входящих потоков нагрузки в сети передачи данных. Показано, что метод обеспечивает существенное сокращение времени решения задач по сравнению с известными алгоритмами при сравнимых затратах на реализацию.

ВВЕДЕНИЕ

Оптимальное распределение входящих потоков нагрузки представляет собой один из важных этапов проектирования сетевых систем различного назначения, например, таких как производственные предприятия, системы передачи данных и др. Особенность такой задачи заключается в большом числе переменных, описывающих возможные маршруты движения потоков, и ограничениях на допустимые значения интенсивностей потоков. Известные методы оптимизации [1—3] обеспечивают возможность численного решения задачи при числе узлов системы до нескольких десятков. Однако для многих крупных производственных объединений, а тем более систем связи, общее число узлов (филиалов или узлов коммутации) выше на порядок. Это определяет актуальность разработки более эффективных численных методов решения практических задач высокой размерности. Такие методы предлагается строить на основе метода эволюции параметров (ЭП) [4].

Предлагаемый метод ЭП может быть распространен для решения аналогичных классов сетевых задач, например, для транспортных задач [5], в которых, кроме нелинейной функции затрат, в зависимости от объема перевозок требуется определить транзитные маршруты и распределение нагрузки между ними. Задача о максимальном потоке [6] может ставиться в виде требования определения максимальной интенсивности потока, обеспечивающего заданное значение целевой функции.

Основные особенности применения метода ЭП достаточно хорошо демонстрируются на примере решения задачи оптимального распределения входящих потоков нагрузки для систем передачи данных. Суть задачи состоит в оптимальном распределении интенсивностей входящих потоков сообщений на множестве допустимых маршрутов передачи по критерию минимизации среднего времени доставки. В отличие от рассмотренной в работе [4] аналогичной задачи, здесь учитываются дополнительные нелинейные ограничения на максимально допустимое значение среднего времени передачи сообщений по отдельным ветвям сети.

1. МЕТОД ЭВОЛЮЦИИ ПАРАМЕТРОВ

Существо метода поясняется для задачи общего вида

$$\max_{\bar{x} \in \Omega_x} W(\bar{x}), \qquad (1)$$

где Ω_x — область допустимых значений параметров $\bar{x} = \{x_i\}$, $i = \overline{1, n}$, определяемая системой M ограничений:

$$\varphi_j(\bar{x}) \leqslant c_j^0, \quad j = \overline{1, M}. \qquad (2)$$

Для простоты изложения рассматривается одноэкстремальная задача вогнутого программирования: функции $\varphi_j(\bar{x})$ полагаются гладкими и выпуклыми, а функция $W(\bar{x})$ — гладкой и вогнутой, $W(\bar{x}) \geqslant 0$. Образуемая системой ограничений (2) область Ω_x полагается односвязной.

Традиционный подход к численному решению задачи (1), (2) состоит во введение штрафных функций [1, 7—9] различного вида, учитывающих влияние ограничений. Наиболее распространено применение штрафных функций в соответствии с методом неопределенных множителей Лагранжа. Однако применение этого метода для исследования задач оптимизации структур сетевых систем весьма проблематично из-за большого числа ограничений и переменных. Например, частная задача распределения нагрузки по маршрутам полносвязной сети, состоящей из N узлов, требует $\sim N!$ переменных и ограничений по числу возможных маршрутов. Применимый для решения подобных задач численный метод, очевидно, должен обеспечивать возможность значительного снижения числа одновременно анализируемых переменных и ограничений при уточнении решения на каждой итерации.

Основная идея метода эволюции параметров состоит в отслеживании оптимального решения при изменяющихся условиях задачи. Изменения оптимального решения определяются математическим оператором, составленным на основе требования соблюдения необходимых и достаточных условий оптимальности. Начальный поиск экстремума производится для измененных условий задачи, при которых решение находится достаточно просто. Например, нагрузки принимаются близкими к нулевым, общие затраты на систему полагаются практически неограниченными и т. п. Затем условия задачи восстанавливаются (эволюционируют) до начального уровня при одновременном отслеживании изменений оптимального решения.

Применение метода ЭП для решения задачи распределения однородных потоков нагрузки с нелинейной целевой функцией $W(\bar{x})$ и взаимно независимыми линейными ограничениями показано в работе [4]. Далее рассматриваются особенности применения метода ЭП для решения задачи (1), (2) более общего вида.

2. ОПЕРАТОР ЭВОЛЮЦИИ ДЛЯ ОДНОЭКСТРЕМАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ

Для задачи (1) в качестве параметров эволюции наиболее естественно выбрать значения правых частей ограничений (2), изменяющихся от начальных значений $c_j = c_j^{\text{н}}$ до c_j^0 с дискретным шагом Δc_j в общем случае переменной длины.

Оператор эволюции, определяющий взаимосвязь между решениями на каждом шаге эволюции, строится на основе соотношений, которым должно удовлетворять оптимальное решение. Такие уравнения, приводимые ниже, по виду совпадают с необходимыми условиями оптимальности, сформулированными в теореме Куна—Таккера [2].

Пусть $\bar{x}^0$ — решение задачи (1). Тогда для достаточно малой вариации $\delta\bar{x}$ должно выполняться

$$\delta W(\bar{x}) = \sum_i \frac{\partial W(\bar{x}^0)}{\partial x_i}\delta x_i \leqslant 0 \qquad (3)$$

при соблюдении условий

$$\sum_i \frac{\partial \varphi_j(\bar{x}^0)}{\partial x_i}\delta x_i = \delta c_j \leqslant 0, \quad j = \overline{1, M}. \qquad (4)$$

Условия (4) составляются только для активных ограничений, т. е. для которых $\varphi_j^{\text{а}}(\bar{x}^0) = \varphi_j(\bar{x}^0) = 0$. Для неактивных ограничений знак δc_j не имеет значения. Рассмотрим случай, когда $M^{\text{а}}(\bar{x}^0)$ — число активных ограничений меньше n, т. е. $M^{\text{а}}(\bar{x}^0) < n$. Выражение (4), определяющее допустимые значения $\delta\bar{x}$ при $\delta c_j = 0$, принимает вид

$$\sum_i \frac{\partial \varphi_j^{\text{а}}(\bar{x}^0)}{\partial x_i}\delta x_i = 0, \quad j = \overline{1, M^{\text{а}}}, \qquad (5)$$

и при этом должно выполняться условие (3). Так как в соответствии с выражением (5) для любой допустимой вариации $\delta\bar{x}$ вариация $-\delta\bar{x}$ также допустима, из формулы (3) следует

$$\sum_i \frac{\partial W(\bar{x}^0)}{\partial x_i}\delta x_i = 0. \qquad (6)$$

Очевидно, соотношение (6) выполняется тогда и только тогда, когда оно является линейно зависимым относительно левых частей выражения (5). Иначе говоря, существуют коэффициенты μ_j, для которых

$$\frac{\partial W(\bar{x}^0)}{\partial x_i}\delta x_i = \sum_j \mu_j \frac{\partial \varphi_j^{\text{а}}(\bar{x}^0)}{\partial x_i}\delta x_i, \quad i = \overline{1, n}. \qquad (7)$$

Пусть $\delta\bar{c} = \{\delta c_j\}$ — вариация значений c_j активных ограничений. Тогда вариация δW с учетом выражений (4) и (7) принимает следующий вид:

$$\delta W = \sum_i \sum_j \mu_j \frac{\partial \varphi_j^{\text{а}}(\bar{x}^0)}{\partial x_i}\delta x_i = \sum_j \mu_j \delta c_j. \qquad (8)$$

Выражение (8) означает, что для обеспечения $\max W$ в точке $\bar{x}^0$ обязательно должно выполняться условие $\mu_j \geqslant 0$, $\forall j$, так как в противном случае для $\mu_j < 0$ допустимая вариация $\delta c_j < 0$ приведет в соответствии с соотношением (6) к увеличению значения $W(\bar{x}^0)$. Появление отрицательных значений

$\mu_j(\bar{x})$ в процессе эволюции означает необходимость перевода ограничений φ_j^{a} в разряд неактивных. При заданных значениях $\delta\bar{c}$ величины $\delta\bar{x} = \{\delta x_j\}$ и μ_j определяются из совместного решения систем уравнений (4) и (7). Случай $M^{\mathrm{a}}(\bar{x}^0) < n$ означает, что в точке $\bar{x}^0$ $(n - M^{\mathrm{a}}(\bar{x}^0))$ значений $\dfrac{\partial W(\bar{x}^0)}{\partial x_i}$ тождественно равны нулю, что является необходимым условием существования безусловного экстремума по x_i и приводит, соответственно, к $\delta x_i = 0$. В этом случае размерность систем уравнений (4) и (7) фактически понижается на $(n - M^{\mathrm{a}}(\bar{x}^0))$.

Сказанное очевидным образом распространяется для случая $n = M^{\mathrm{a}}(\bar{x}^0)$. При $n < M^{\mathrm{a}}(\bar{x}^0)$ система ограничений либо вырожденная, либо противоречивая, не допускающая решения.

Эволюция значений c_j удобна тем, что для этого случая вариации δc_j для активных ограничений взаимно независимые, в то время как изменения $\delta\bar{x} = \{\delta x_j\}$ должны удовлетворять определенным взаимосвязям вида (4). Представление (8), кроме удобства реализации процесса эволюции значений c_j, дополнительно обеспечивает возможность проведения оценки на чувствительность решения к налагаемым ограничениям, что бывает часто необходимо при исследовании практических задач.

Активные ограничения на каждой итерации выявляются путем проверки нарушения строгого неравенства $\varphi_j(\bar{x}) < c_j^0$, а из списка активных ограничений они исключаются по отрицательному знаку μ_j.

Для задач распределения нагрузки в сетях наибольшее число ограничений имеет вид

$$\pm x_{i*} \leqslant c_{i*}^0, \tag{9}$$

определяющий границы допустимых значений x_{i*}. Например, это требования положительных значений нагрузок системы, объемов вкладываемых ресурсов и т. п. Фактически все активные ограничения вида (9) должны быть включены в системы уравнений (4) и (7), но от этого весьма желательно избавиться, иначе размерность этих систем уравнений будет очень велика. Формально это достигается следующим образом;

— для активного ограничения (9) соответствующее уравнение системы (4) принимает вид $\delta x_{i*} = 0$;

— с учетом, что $\delta x_{i*} = 0$, значение x_{i*} полагается равным константе на текущей итерации и величина δx_{i*} исключается из числа неизвестных в системах (4) и (7);

— уравнение вида $\dfrac{\partial W(\bar{x}^0)}{\partial x_{i*}} = \sum\limits_{j \neq i*} \mu_j \dfrac{\partial \varphi_j^{\mathrm{a}}(\bar{x}^0)}{\partial x_{i*}} + \mu_{i*}$ также исключается из системы (7) и служит только для определения знака μ_{i*} (принадлежности ограничения к активному) на каждой итерации. Условие $\mu_{i*} \geqslant 0$ активности ограничения в этом случае записывается в виде

$$\sum_{j \neq i*} \left(\mu_j \frac{\partial \varphi_j^{\mathrm{a}}(\bar{x}^0)}{\partial x_{i*}} \right) - \frac{\partial W}{\partial x_{i*}} \leqslant 0. \tag{10}$$

Проверка условия (10) для переменных x_{i*} производится специализированными методами. Достаточно эффективны здесь методы динамического программирования [5, 6].

Таким образом, в соответствии с выражениями (4) и (7) решение задачи (1), (2) в процессе эволюции значений $\bar{c} = \{c_j\}$ должно удовлетворять следующей системе уравнений, составляемой для активных ограничений:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial W}{\partial x_i} - \sum\limits_j \left(\mu_j \dfrac{\partial \varphi_j^{\mathrm{a}}(\bar{x}^0)}{\partial x_i} \right) = 0, \quad i = \overline{1, n}, \\ \varphi_j^{\mathrm{a}}(\bar{x}^0) - c_j = 0, \quad j = \overline{1, M^{\mathrm{a}}}. \end{cases} \tag{11}$$

Обозначим систему (11) для удобства оператором $F(\bar{x}, \bar{c}) = 0$. При изменении значений $\bar{c}$ с дискретным шагом $\Delta\bar{c} = \{\Delta c_j\}$ соответствующее решение задачи в точке $\bar{x} + \Delta\bar{x}$ должно также удовлетворять условию

$$F(\bar{x} + \Delta\bar{x}, \bar{c} + \Delta\bar{c}) = 0. \tag{12}$$

Точное решение уравнений (12) обеспечивает определение изменения $\Delta\bar{x}$ оптимального решения задач. Однако даже для достаточно простого вида функции $W(\bar{x})$, например, в виде среднего времени или вероятности передачи потоков, уравнения (12) точно решить весьма затруднительно. Поэтому предлагается линеаризация уравнений (12) по малым параметрам Δx_i и $\Delta\mu_j$ — изменениям x_i и μ_j. Очевидно, что в этом случае значения $\partial W/\partial x_i$ и μ_j будут определяться с точностью $O((\Delta c)^4)$, как показано, например, в работе [4]. Ошибка вычисления $W(\bar{x})$ не будет накапливаться в процессе эволюции при достаточно малых $\Delta\bar{c}$, т. е. сохранится свойство релаксации ошибок, отмеченное ранее в работах [4, 10].

В процессе эволюции, в силу неточности выполнения условия (12) из-за линеаризации, получаемое значение $\varphi_j(\bar{x} + \Delta\bar{x}) = c_j(\bar{x} + \Delta\bar{x})$ может изменяться не точно на задаваемую величину Δc_j.

При эволюции значения c_j, находящегося достаточно далеко от конечного значения c_j^0, это может не иметь принципиального значения. Когда требуется обеспечить значение c_j с достаточной точностью, например, для активного не эволюционирующего ограничения, необходимо вводить в линеаризованную систему реальную невязку δc_j значения c_j. Тогда ошибка определения значения c_j будет иметь также порядок $O((\Delta c)^2)$, а в процессе коррекции решения для $\Delta\bar{c} = 0$ будет убывать квадратично. Верхние оценки ошибки вычисления W и $\bar{c}$ получаются достаточно просто через коэффициенты линеаризованной системы (12) по аналогичным приведенным в работе [4] соотношениям.

Линеаризованная система (12) с учетом ограничений (11) принимает следующий вид:

$$\begin{cases} \sum\limits_k \left[\dfrac{\partial^2 W(\bar{x})}{\partial x_i \partial x_k} - \sum\limits_j \left(\mu(\bar{x}) \dfrac{\partial^2 \varphi_j^{\mathrm{a}}(\bar{x})}{\partial x_i \partial x_k}\right)\right] \Delta x_k - \\ \quad - \sum\limits_j \left(\Delta\mu_j \dfrac{\partial \varphi_j^{\mathrm{a}}(\bar{x})}{\partial x_i}\right) = \delta_i, \quad i = \overline{1, n}, \\ \sum\limits_i \dfrac{\partial \varphi_j^{\mathrm{a}}(\bar{x})}{\partial x_i} \Delta x_i = c_j + \delta c_j, \quad j = \overline{1, M^{\mathrm{a}}}, \end{cases} \qquad (13)$$

где $\delta_i = \sum\limits_j \left(\mu_j \dfrac{\partial \varphi_j^{\mathrm{a}}}{\partial x_i}\right) - \dfrac{\partial W}{\partial x_i}$ — невязка соблюдения необходимых условий оптимальности; $\delta c_j = c_j - \varphi_j^{\mathrm{a}}(\bar{x}^0)$ — ошибка обеспечения требуемого значения c_j на предыдущей итерации. Величины δ_i всегда должны входить в систему (13) как обеспечивающие релаксацию ошибок в процессе эволюции, а δc_j — при необходимости достаточно точного достижения требуемых значений c_j.

Если система (13) оказывается вырожденной, тогда для нахождения решения необходимо прибегать к разложениям по $\Delta\bar{x}$ более высокого порядка. При этом возможны бифуркация решения по параметру эволюции или вообще исчезновение решения в классе действительных чисел [11]. При неудачной параметризации задачи появление точек бифуркации может носить искусственный характер. Поэтому при построении алгоритмов решения конкретных классов задач необходимо исследовать возможность их появления в процессе эволюции. В то же время, наличие бифуркаций может быть определено многоэкстремальностью задачи. В этом случае построение оператора эволюции в точках бифуркации составляет самостоятельную проблему, общего решения которой не существует, так как в нелинейных задачах может существовать бесконечное число бифуркаций разных видов. Это определяет необходимость изучения особенностей поведения решений конкретных задач и построения на этой основе конкретного оператора эволюции с бифуркациями.

Итак, алгоритм решения задачи (1), (2) в общем виде будет состоять из следующих основных этапов:

1) определение параметров эволюции и начальной задачи оптимизации;

2) задание шага эволюции;

3) определение множества активных ограничений;

4) составление и решение уравнений эволюции;

5) оценка точности полученного решения;

6) контроль окончания процесса эволюции (очередная итерация начинается со второго этапа).

Далее перечисляются основные особенности каждого из этапов.

В качестве параметров эволюции удобнее выбирать значения c_j для ограничений (2) задачи (1). В задачах распределения потоков в сетевых системах часто удобно искать начальное решение для нулевой нагрузки. Для такой начальной задачи определяются не только наилучшие характеристики процесса функционирования» но и проводится дополнительная проверка совместимости остальных ограничений. В ряде случаев удобно вводить фиктивные дополнительные ограничения, при которых начальное решение находится достаточно просто и значения правых частей которых изменяются до $+\infty$, что формально означает устранение дополнительных ограничений из исследуемой задачи.

Шаг эволюции $\Delta\bar{c} = \{\Delta c_j\}$ выбирается по оценкам точности линеаризации уравнений (12), откуда следует, что точность решения $\delta W \sim O(|\Delta\bar{c}|^4)$. Если требуется обеспечить заданную точность решения только для конечного значения $\bar{c} = \{c_j^0\}$, шаг эволюции выгодно взять большим, а дополнительную ошибку в конечной точке эволюции устранить на дополнительных итерациях при нулевом шаге эволюции (коррекция решения). Такой подход в большинстве случаев позволяет значительно уменьшить общее число итераций. В этом случае максимальный шаг $\Delta\bar{c}$ оценивается из условия сохранения свойства релаксации ошибок линеаризованным оператором $F(\bar{x}, \bar{c})$. Для задачи оптимизации распределения входящих потоков нагрузки (см. п. 3) свойство релаксации ошибок сохраняется при относительной ошибке определения W не более 10—15 %, а эволюция одновременно всех изменяемых параметров c_j требует меньшего числа итераций. Поэтому рекомендуется вводить единый параметр эволюции α, изменяемый от 0 до 1, представляя эволюцию параметров c_j, например, в виде $c_j = c_j^{\text{н}} + \alpha(c_j^0 - c_j^{\text{н}})$.

Множество активных ограничений формируется на каждой итерации по следующим принципам:

— ограничение $\varphi_j^a(\bar{x})$ исключается из числа активных при $\mu_j(\bar{x}) < 0$;

— ограничение заносится в список активных при нарушении условия $\varphi_j(\bar{x}) < c_j^0$ на очередной итерации.

Для определения значений $\mu_j(\bar{x}) \geqslant 0$ дополнительно привлекаются специализированные методы поиска. Например, если производная функции $W(\bar{x})$ аддитивная, для поиска ограничений в соответствии с условием (10) рекомендуются методы динамического программирования. Эффективность применения метода ЭП в целом в большинстве случаев определяется эффективностью алгоритмов формирования множества активных ограничений.

Линеаризованные уравнения эволюции составляются в соответствии с выражениями (13), а для их решения применяется один из известных методов, выбираемый с учетом конкретных особенностей рассматриваемой задачи. Для таких методов в наихудшем случае объем вычислений будет пропорционален кубу числа уравнений [1].

Точность полученного решения оценивается так же, как и при выборе шага $\Delta\bar{c}$. Если ошибка неприемлема, то принимается решение о проведении итерации заново при меньшем шаге эволюции или коррекции полученного решения для $\Delta\bar{c} = 0$.

Процесс решения заканчивается при достижении всеми c_j значений c_j^0, когда эволюционируемые условия задачи совпадут с исходными и будет достигнута требуемая точность решения. Если ограничения окажутся несовместимыми, в процессе эволюции возникнет ситуация невозможности формирования множества активных ограничений, удовлетворяющих условию $\mu_j(\bar{x}) \geqslant 0$.

2. ПРИМЕР ЗАДАЧИ ОПТИМИЗАЦИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВХОДЯЩИХ ПОТОКОВ

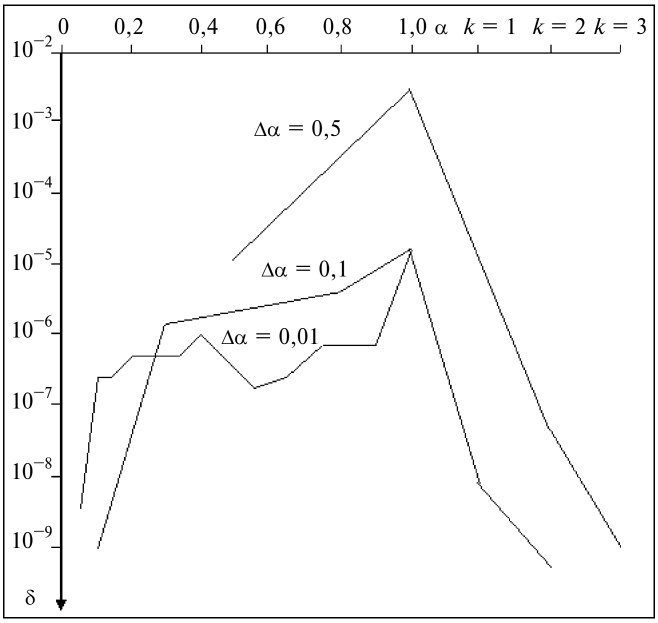
В качестве примера рассматривается наиболее часто встречающаяся на практике задача оптимального распределения потоков сообщений в пуассоновской сети передачи данных по критерию минимума W — среднего времени передачи. Решение такой задачи подробно описано в работе [4] для случая взаимно независимых линейных ограничений, отражающих требование передачи всех потоков заданной интенсивности $\bar{\lambda}^0$, распределяемых одновременно по различным маршрутам. В качестве параметров эволюции выбирались значения $\bar{\lambda} = \alpha^*\bar{\lambda}^0$, изменяемые от $\bar{\lambda} = 0$ до $\bar{\lambda} = \bar{\lambda}^0$. Указанная задача обобщена введением дополнительных ограничений на максимально допустимые значения среднего времени передачи сообщений по каждой ветви сети. Поскольку для пуассоновской сети функция W является дробно-линейной по параметрам $\bar{\lambda} = 0$ [3], такие дополнительные ограничения носят нелинейный характер. На каждый узел сети назначалось по одному входящему потоку для передачи на другой узел, назначаемому случайным образом.

Зависимости относительной ошибки $\delta = |\Delta W|/W$ от единого параметра эволюции $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$ при различных шагах разбиения $\Delta\alpha$ и при проведении коррекции решения при $\Delta\alpha = 0$ практически не отличается от приведенных в работе [4]. Здесь также соблюдается зависимость $\delta \sim (\Delta\alpha)^4$. Рост трудоемкости вычислений в основном определяется увеличением размерности линеаризованных уравнений эволюции из-за появления дополнительных активных ограничений. В решаемой задаче для полносвязной сети из 100 узлов, на каждый из которых поступает по одному внешнему потоку для передачи на определенный узел, введение дополнительных нелинейных 100 ограничений на максимально допустимое значение среднего времени передачи отдельных потоков по сети приводит к увеличению требуемого объема оперативной памяти примерно на 70 %, а времени решения — на 20—30 %. Такая постановка задачи имеет место при решении актуальной практической задачи управления приоритетными потоками с заданными нормативами на среднее время передачи данных. Меньший рост увеличения времени решения объясняется тем, что основные затраты времени приходятся на этап поиска оптимальных маршрутов, на котором влияние дополнительных ограничений незначительно. Полное время решения на ЭВМ «Pentium-IV» составляет около 2 мин. Среднее число маршрутов передачи ~3 при средней длине маршрутов 3—4 ветви.

Экспериментально установлено, что наименьшее число итераций, требуемых для получения окончательного решения, достигается при организации процесса одновременной эволюции значений интенсивности входящих потоков нагрузки в виде $\Delta\bar{c} = \{\Delta c_j\}$, $\Delta c_j = \Delta\alpha\, c_j^0$, где α изменяется с шагом $\Delta\alpha$ от 0 до 1. В этом случае эволюция производится фактически по одному параметру.

Типичные зависимости относительной ошибки δ при росте параметра эволюции α от 0 до 1 для различных шагов $\Delta\alpha$ показаны на рисунке.

Как видно, значение δ пропорционально не 4-й, а 2-й степени $\Delta\alpha$. Это объясняется неточностью выполнения неравенства $\varphi(\bar{x} + \Delta\bar{x}) = c - \Delta c$ на каждой итерации. Здесь же приведены результаты для $k = \overline{1, 3}$ циклов коррекции окончательного решения при $\alpha = 1$ и $\Delta\alpha = 0$. Здесь ошибка



Зависимость относительной ошибки δ при росте параметра эволюции α

убывает наиболее быстро — пропорционально квадрату от начального значения.

Сравнение реализованного алгоритма с другим алгоритмом, реализующим метод девиации потоков [3], показывает, что затраты вычислительных ресурсов на выполнение одной итерации для обоих алгоритмов будут примерно одинаковыми. Типичные результаты сравнения алгоритмов по числу итераций при требуемой относительной точности 10^{-1} приведены в таблице, где показаны результаты численного решения двух примеров, взятых из работы [3]. В первом примере сеть имеет четыре узла, во втором — девять узлов.

В обоих примерах сети полагаются пуассоновскими, и в качестве критерия эффективности выбирается среднее время доставки сообщений.

Как следует из таблицы, алгоритмы, основанные на методе ЭП, не менее чем на порядок более эффективные. Кроме того, к существенному достоинству метода ЭП относится очевидная возможность учета нелинейных ограничений произвольного вида, определяющих, например, требования к качеству передачи отдельных потоков.

Результаты сравнения алгоритмов

Пример	Число итераций	
	Метод девиации потоков	Метод эволюции параметров
1	300	12
2	110	8

Фактически это приводит к увеличению размерности оператора эволюции на число новых активных ограничений. В то же время, учет нелинейных ограничений в методе девиации потоков напрямую невозможен и требует существенной доработки алгоритмов решения задачи.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Применение метода эволюции параметров обеспечивает возможность составления эффективного алгоритма решения нелинейных задач оптимизации распределения потоков нагрузки в больших системах.

Предложенный вид линеаризации оператора эволюции позволяет производить текущую оценку точности определения оптимального решения, что приводит к существенному сокращению общего объема вычислений благодаря выбору максимально допустимого шага эволюции и обеспечивает возможность коррекции точности получаемых решений.

По сравнению с известными алгоритмами применение метода эволюции для нелинейных задач оптимальной маршрутизации потоков позволяет сократить общее время вычислений на 1—2 порядка при сравнимых затратах на реализацию.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Банди Б.* Методы оптимизации. Вводный курс. — М.: Радио и связь, 1988.
2. *Гилл Ф., Мюррей У., Райт М.* Практическая оптимизация. — М.: Мир, 1985.
3. *Клейнрок Л.* Вычислительные системы с очередями. — М.: Мир, 1979.
4. *Жевнеров В., Родионов И.* Оптимальное проектирование информационных систем методом эволюции параметра // Журнал выч. матем. и матем. физики. — 1986. — Т. 26, № 3. — С. 64—67.
5. *Филлипс Д., Гарсиа-Диас А.* Методы анализа сетей. — М.: Мир, 1984.
6. *Форд Л., Фалкерсон Д.* Потоки в сетях. — М.: Мир, 1966.
7. *Данилин Ю.* Метод градиентного типа для минимизации гладких штрафных функций // Кибернетика — 1988. — № 4. — С. 25—29.
8. *Ортега Дж., Рейнболдт В.* Итерационные методы решения нелинейных уравнений со многими неизвестными. — М.: Мир, 1975.
9. *Емец О.А., Барболина Т.Н., Черненко О.А.* Решение задач оптимизации с дробно-линейными целевыми функциями и дополнительными ограничениями на размещениях // Кибернетика и системный анализ — 2006. — Т. 42, № 5. — С. 42—47.
10. *Кузьмина Л., Родионов И.* Решение систем уравнений Хартри методом эволюции параметра // Там же. — 1985. — 25, № 8. — С. 57—82.
11. *Литвинцева С., Родионов И.* Бифуркация спектра несамосопряженных краевых спектральных задач / Препринт ИПМ АН СССР. — М., 1988. — № 40.

e-mail: jewn@mail.ru

Статья представлена к публикации членом редколлегии С.А. Редкозубовым. ❑