УДК 517.977.1

УПРАВЛЯЕМЫЕ СИСТЕМЫ, РОБАСТНЫЕ ПО НАЧАЛЬНЫМ ДАННЫМ[1]

Г.Н. Яковенко

Московский физико-технический институт (государственный университет), г. Долгопрудный

Введено понятие робастности по начальным данным: несколько управлений переводят фиксированное начальное состояние в одно и то же конечное, те же управления переводят любое другое начальное состояние в одно и то же конечное. Доказана теорема: управляемая система является робастной по начальным данным тогда и только тогда, когда она допускает максимальную группу симметрий по состоянию. Приведены примеры исследования конкретных управляемых систем на робастность по начальным данным.

ВВЕДЕНИЕ

Возможности систем с управлением зависят не только от внутренней структуры системы, в частности, от уравнений, определяющих функционирование системы, но и от ограничений, наложенных на управление. Наиболее распространено ограничение на значения допустимых управлений. Рассматриваются также ограничения интегрального типа, ограничения на управления как на элементы различных функциональных пространств. В настоящей работе под множеством допустимых управлений понимается такая совокупность управлений, что каждое управление из этой совокупности переводит за конечное время систему из одного фиксированного состояния в другое. Если применить допустимые управления к начальному состоянию, отличному от фиксированного, то возможны два варианта: разным допустимым управлениям будет соответствовать одно и то же конечное состояние (робастность по начальным данным); разные допустимые управления будут приводить в разные конечные состояния (отсутствие робастности по начальным данным). Основной результат работы — теорема, которая утверждает, что система является робастной по начальным данным тогда и только тогда, когда она допускает максимальную группу симметрий по состоянию. Рассмотрение в работе проводится локально — в некоторой области пространства состояний. Функции, участвующие в построениях, достаточно гладкие.

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты 05-01-00940, 07-01-00217) и доложена на VII международной конференции «Идентификация систем и задачи управления» SICPRO'08, Москва, Институт проблем управления РАН, 28—31 января 2008 г.

1. РОБАСТНОСТЬ ПО НАЧАЛЬНЫМ ДАННЫМ

Рассматривается система с управлением

$$\dot{x} = \varphi(x, u), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in U \subset \mathbb{R}^m, \\ x(0) = x_0. \qquad (1)$$

Вводится обозначение

$$x = f(t, x_0, u(\cdot)) \qquad (2)$$

для общего решения системы (1), соответствующего некоторому управлению $u(\cdot)$. Систему (1) будем считать вполне управляемой в общепринятом смысле: $\forall x_0, \forall x_1, \exists T, \exists \tilde{u}(\cdot), x_1 = f(T, x_0, \tilde{u}(\cdot))$.

Выделим из множества допустимых управлений подмножество $M(x_0 \to x_1)$, каждый элемент которого переводит за конечное время систему из фиксированного начального состояния x_0 в фиксированное конечное x_1:

$$\{\tilde{u}(\cdot) \in M(x_0 \to x_1)\} \leftrightarrow \{\exists T, x_1 = f(T, x_0, \tilde{u}(\cdot))\}.$$

Как показывают приведенные далее примеры, управления, принадлежащие некоторому классу $M(x_0 \to x_1)$, примененные к начальному состоянию x_0^*, отличному от x_0, необязательно приведут в одно и то же конечное состояние.

Определение 1. Система (1) называется *робастной по начальным данным*, если совокупность управлений, принадлежащих произвольному классу

$M(x_0 \to x_1)$, примененная к произвольному состоянию x_0^*, приведет к одному и тому же конечному состоянию x_1^*:

$$\{f(T, x_0, u(\cdot)) = f(\tilde{T}, x_0, \tilde{u}(\cdot))\} \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow \{f(T, x_0^*, u(\cdot)) = f(\tilde{T}, x_0^*, \tilde{u}(\cdot))\}. \blacklozenge \qquad (3)$$

Если система (1) не удовлетворяет условию (3), то назовем ее *неробастной по начальным данным*.

Помимо *робастности по начальным данным* используется и другая терминология: переносимость, мобильность, однократность управляемости [1].

Проиллюстрируем определение 1 на примере системы

$$\dot{x} = u + \tilde{u}x, x \in \mathbb{R}^1, \quad (u, \tilde{u}) \in U \subset \mathbb{R}^2 \qquad (4)$$

при различных ограничениях U на значения допустимых управлений.

Пример 1. При $U = \{u = \tilde{u}\}$ система (4) примет вид

$$\dot{x} = u(1 + x), \qquad (5)$$

и общее решение (2) можно записать в явном виде

$$x = -1 + (1 + x_0)\exp\int_0^t u(\tau)d\tau. \qquad (6)$$

Возьмем в качестве начальной точки $x_0 = 0$, а в качестве конечной $x_1 = 1$, и из решения (6) найдем условие того, что $u(\cdot) \in M(0 \to 1)$:

$$\exp\int_0^T u(\tau)d\tau = 2. \qquad (7)$$

Если в качестве начальной взять другую точку x_0^*, то для любых управлений $u(\cdot)$ и моментов времени T, удовлетворяющих условию (7), конечная точка соответствующих траекторий будет одна и та же: $x_1^* = 1 + 2x_0^*$, т. е. система (5) — робастная по начальным данным.

Пример 2. При $U = \{\tilde{u} \equiv 1\}$ система (4) примет вид

$$\dot{x} = u + x, \qquad (8)$$

и общее решение (2) запишется следующим образом

$$x = \left[x_0 + \int_0^t u(\tau)e^{-\tau}d\tau\right]e^t. \qquad (9)$$

Приняв, как и в примере 1, в качестве начальной точки $x_0 = 0$, а в качестве конечной $x_1 = 1$, из решения (9) найдем условие того, что $u(\cdot) \in M(0 \to 1)$:

$$\left[\int_0^T u(\tau)e^{-\tau}d\tau\right]e^T = 1. \qquad (10)$$

При другой начальной точке $x_0^* \ne 0$ управлениям, удовлетворяющим условию (10), соответствуют, вообще говоря, разные конечные точки $x_1^* = 1 + x_0^* e^T$. Расположение конечной точки x_1^* зависит от времени T перехода из состояния $x_0 = 0$ в состояние $x_1 = 1$. Если ограничиться только теми управлениями из множества $M(0 \to 1)$, которые переводят систему (8) из состояния $x_0 = 0$ в состояние $x_1 = 1$ за одно и тоже время T^*, то при другой начальной точке $x_0^* \ne 0$ будет обеспечено совпадение точек $x_1^* = 1 + x_0^* e^{T^*}$. Таким образом, у системы (8) робастность по начальным данным носит условный характер.

Пример 3. При отсутствии ограничений на управление система

$$\dot{x} = u + \tilde{u}x \qquad (11)$$

не является робастной по начальным данным. Для того чтобы в этом убедиться, ограничимся рассмотрением постоянных управлений и на фиксированном отрезке времени $t \in [0, 1]$. При постоянных управлениях:

$$x(t) = x_0 e^{\tilde{u}t} + u\frac{e^{\tilde{u}t} - 1}{\tilde{u}}. \qquad (12)$$

Для того чтобы удовлетворить граничным условиям $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, между постоянными управлениями u и $\tilde{u}$ должна быть связь

$$u = \frac{\tilde{u}}{e^{\tilde{u}t} - 1}, \qquad (13)$$

которая находится из общего решения (12). Взяв другое начальное состояние, например, $x_0^* = 1$, из решения (12) с учетом связи (13) к моменту времени $t = 1$ получим множество $x_1^* = e^{\tilde{u}} + 1$, не совпадающих конечных точек, что и обосновывает то, что система (11) неробастная по начальным данным.

3. КРИТЕРИЙ РОБАСТНОСТИ ПО НАЧАЛЬНЫМ ДАННЫМ

Робастность по начальным данным тесно связана с групповыми свойствами систем с управлением и присуща только L-системам.

Определение 2 [1—5]. Система

$$\dot{x}^k = \sum_{l=1}^{n} \varphi_l^k(x)u^l(t), \quad k = \overline{1, n}, \quad u \in U \subset \mathbb{R}^n \qquad (14)$$

называется *L-системой*, если для функций $\varphi_l^k(x)$ выполнены условия $\det\|\varphi_l^k(x)\| \ne 0$, $[X_i, X_j] = \sum_{i=1}^{n} C_{ij}^k X_k$,

$C_{ij}^k = \text{const}$, $i, j, k = \overline{1, n}$, где $X_l = \sum\limits_{k=1}^{n} \varphi_l^k(x)\dfrac{\partial}{\partial x^k}$, $l = \overline{1, n}$, $[X_i, X_j] = \sum\limits_{k=1}^{n} \{X_i\varphi_j^k(x) - X_j\varphi_i^k(x)\}\dfrac{\partial}{\partial x^k}$ — коммутаторы операторов X_l.

С L-системой (14) связаны две n-параметрические группы преобразований пространства состояний $\mathbb{R}^n$ [1—4]: группа движений вдоль траекторий системы (14) при различных управлениях

$$x = g(x_0^1, ..., x_0^n, v^1, ..., v^n) \tag{15}$$

и группа симметрий по состоянию

$$\hat{x} = \hat{x}(x, \tau), \quad x, \tau \in \mathbb{R}^n. \tag{16}$$

Группа движений (15) заключает в себе все преобразования сдвига по траекториям (2) системы (14) при произвольных управлениях $u(\cdot)$ за произвольное время T. Группа симметрий (16) обладает следующим характеристическим свойством: подстановка любого решения $x(t)$ системы (14), соответствующего некоторому управлению $u(\cdot)$, в уравнения группы (16) $\hat{x}(t) = \hat{x}(x(t), \tau)$, $\tau \in \mathbb{R}^n$ при любом наборе параметров $\tau^1, ..., \tau^n$ приводит к решению $\hat{x}(t)$ системы (14), соответствующему тому же управлению. Указанные две группы (15), (16) и определяют робастность по начальным данным L-систем.

Теорема. *Вполне управляемая система* (1) — *является робастной по начальным данным в смысле определения 1 в том и только в том случае, если система является L-системой* (14). ♦

Доказательство см. в Приложении.

Вернемся к рассмотренным ранее примерам. Система (5) является L-системой с группой движений (15) $x = -1 + (1 + x_0)e^v$ и такой же группой симметрий (16) $\hat{x} = -1 + (1 + x_0)e^{\tau}$. Установленная в примере 1 робастность по начальным данным системы (5) — следствие ее принадлежности к L-системам. Системы (8) и (11) не являются L-системами, вследствие чего не обладают робастностью по начальным данным. Для погружения в класс L-систем добавим к системе (11) уравнение $\dot{y} = \tilde{u}$. Новая система — L-система

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ \tilde{u} \end{pmatrix} \tag{17}$$

по теореме обладает робастностью по начальным данным. Исходя из этого, можно найти дополнительные условия на управления $(u, \tilde{u}) \in M(x_0 \to x_1)$, чтобы системы (8) и (11) стали робастностными по начальным данным. Принадлежность $(u(\cdot), \tilde{u}(\cdot)) \in M(x_0 \to x_1)$ приводит в силу системы (17) к соотношению

$$\int_9^T \tilde{u}(\tau)d\tau = y_1 - y_0 = \text{const}, \tag{18}$$

которое и будет указанным дополнительным соотношением. В случае примера 2 ($\tilde{u} \equiv 1$), соотношение (18) принимает вид $T = \text{const}$, что, как было проверено вычислением, действительно приводит к робастностности по начальным данным.

Приведем еще примеры L-систем — систем, обладающих робастностностью по начальным данным.

Пример 4. Линейная стационарная система

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Ax + Bu \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Ax & E \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ Bu \end{pmatrix},$$

где $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^1$, $u \in \mathbb{R}^m$, E — единичная матрица, A и B — числовые матрицы нужных размеров. Если убрать последнее уравнение, то оставшаяся система не будет обладать свойством робастностности по начальным данным.

Пример 5. Движение летательного аппарата в горизонтальной плоскости при управлении креном

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ \cos x \\ \sin y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos x & -\sin y \\ 0 & \sin y & \cos x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Если убрать последнее уравнение, то оставшаяся система не будет обладать свойством робастностности по начальным данным.

Пример 6. Уравнение Риккати, погруженное в L-систему:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2x & (x)^2 \\ 0 & 2 & 2x \\ 0 & 0 & e^y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \\ u^3 \end{pmatrix}. \tag{19}$$

Если ограничиться первым уравнением — уравнением Риккати, то оно не будет обладать свойством робастности по начальным данным.

Пример 7. Уравнение Ньютона

$$m\ddot{s} = u(t) - \beta(\dot{s})^2,$$

определяющее одномерное движение управляемой точки при наличии аэродинамического сопротивления, пропорционального квадрату скорости, погружается в L-систему (19) при следующей специализации переменных:

$$x = m\dot{s}, \; y = -\frac{2s\beta}{m}, \; u^1 = u(t), \; u^2 = 0, \; u^3 = -\frac{\beta}{(m)^2}.$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Введенные определением 2 L-системы (14), кроме робастности по начальным данным, обладают и другими свойствами, присущими исключительно L-системам [5]. Например: с точностью до замен переменных вся информация о системе содержится во введенных в определении 2 постоянных C_{ij}^k; дифференциальную L-систему (14) можно эквивалентно заменить конечной (без производных) системой (15); дифференциальные уравнения для сопряженных переменных в принципе максимума Л.С. Понтрягина можно заменить конечными уравнениями.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство теоремы

Необходимость. Пусть система (1) робастная по начальным данным. Фиксируем начальное состояние системы. Не нарушая общности, будем считать его началом координат: $x_0 = 0$. Каждому управлению $\tilde u(\cdot)$ и каждому интервалу времени $[0, \tilde T]$ соответствует состояние системы v — конечная точка траектории, начальная точка которой $x_0 = 0$:

$$v = f(\tilde T, 0, \tilde u(\cdot)). \qquad (\text{П}1)$$

Применение того же управления и того же интервала времени к другим начальным состояниям x_0 системы определит преобразование $x_0 \leftrightarrow x$ пространства состояний $\mathbb{R}^n$: $x = f(\tilde T, x_0, \tilde u(\cdot))$. В силу робастности по начальным данным каждое такое преобразование определяется не конкретным выбором управления $\tilde u(\cdot)$ и времени $\tilde T$, а только набором чисел $v = (v^1, ..., v^n)$ — состоянием, в которое переводит пара $\{\tilde u(\cdot), \tilde T\}$ начало координат $x_0 = 0$. Действительно, если другой паре $\{\breve u(\cdot), \breve T\}$ соответствует в силу соотношения (П1) тот же набор чисел $v = (v^1, ..., v^n)$, то по свойству (3) робастности по начальным данным каждое состояние x_0 перейдет в то же состояние, что и в случае пары $\{\tilde u(\cdot), \tilde T\}$. Таким образом, каждое преобразование пространства состояний $\mathbb{R}^n$, определяемое как сдвиг по траекториям системы для некоторой пары $\{\tilde u(\cdot), \tilde T\}$, принадлежит n-параметрической совокупности преобразований

$$x = \Phi(x_0, v), \qquad (\text{П}2)$$

где v — набор чисел $v = (v_1, ..., v^n)$, задаваемый соотношением (П1). Покажем, что совокупность преобразований (П2) удовлетворяет всем групповым аксиомам.

Замкнутость относительно операции суперпозиции. Пусть пара $\{\tilde u(\cdot), \tilde T\}$ задает преобразование, которому в силу соотношения (П1) соответствует набор чисел $\tilde v$, а паре $\{\breve u(\cdot), \breve T\}$ — набор чисел $\breve v$. Определим управление

$$u_*(t) = \begin{cases} \tilde u(t), \text{если } t \in [0, \tilde T], \\ \breve u(t - \tilde T), \text{если } t \in [\tilde T, \tilde T + \breve T], \end{cases}$$

интервал времени $[0, \tilde T + \breve T]$ и в силу соотношения (П1) состояние

$$v_* = f(\tilde T + \breve T, 0, u_*(\cdot)). \qquad (\text{П}3)$$

Очевидно, что если к пространству $\mathbb{R}^n$ применить преобразование (П2), которому соответствует набор чисел $\tilde v$, а затем преобразование, которому соответствует набор чисел $\breve v$, то полученное преобразование принадлежит совокупности (П3) и задается набором параметров v_*, определяемых состоянием (П3).

Наличие в совокупности (П2) *тождественного преобразования.* Тождественному преобразованию соответствует набор чисел $v^i = 0$, $i = \overline{1, n}$. Тождественное преобразование пространства $\mathbb{R}^n$ реализуется любой парой $\{\tilde u(\cdot), \tilde T\}$, удовлетворяющей условию $f(\tilde T, 0, \tilde u(t)) = 0$, например, $\tilde T = 0$ и любое управление $\tilde u(\cdot)$.

Наличие обратных преобразований. Пусть паре $\{u(\cdot), T\}$ соответствует в силу соотношения (П1) состояние $\tilde v$. Так как система (1) вполне управляема, существует пара $\{\breve u(\cdot), \breve T\}$, которая переведет систему из состояния $\tilde v$ в начало координат и будет реализовывать обратное преобразование. Набор параметров $\breve v$, соответствующих паре $\{\breve u(\cdot), \breve T\}$, находится с помощью соотношения (18).

Выполнение групповых аксиом дает возможность утверждать, что совокупность преобразований (П2) есть группа (15), а вследствие этого исходная система (1) является L-системой (14) [1—5].

Достаточность. Пусть система (1) — L-система (14) и поэтому допускает группу симметрий (16). Пусть пара $\{\tilde u(\cdot), \tilde T\}$ переводит некоторое начальное состояние x_0 в конечное x_1. В силу транзитивности группы симметрий (16) найдется такой набор параметров $\tilde\tau$, что соответствующее преобразование группы (16) переведет состояние x_0 в другое заданное состояние x_0^*. При этом состояние x_1 перейдет в конкретное состояние $x_1^* = \hat x(x_1, \tilde\tau)$. Вследствие того, что группа симметрий (16) переводит решения системы (14) в ее же решения, для любой пары $\{\tilde u(\cdot), \tilde T\}$ перевод x_0 в x_1 влечет за собой перевод x_0^* в одно и то же конечное состояние x_1^*. Так как выбор состояний x_0 и x_0^* произволен, справедливо соотношение (3), т. е. система (14) робастная по начальным данным. Теорема доказана. ♦

ЛИТЕРАТУРА

1. *Яковенко Г.Н.* Однократность управляемости у групповых систем // Кибернетика и вычислительная техника. — 1985. — Вып. 65. — С. 39—43.
2. *Яковенко Г.Н.* Симметрии по состоянию в системах с управлением // Прикладная механика и математика: Межвед. сб. науч. тр. / МФТИ. — М., 1992. — С. 155—176.
3. *Яковенко Г.Н.* Обыкновенные дифференциальные уравнения и системы с управлением — сравнительный групповой анализ // Электронный журнал «Дифференциальные уравнения и процессы управления». — 2002. — 3. — С. 40—83. ⟨http://www.neva.ru/journal⟩.
4. *Яковенко Г.Н.* Дифференциальные уравнения с фундаментальными решениями: Софус Ли и другие. — М.: Физматкнига, 2006. — 112 с.
5. *Яковенко Г.Н.* Теория управления регулярными системами. — М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2008. — 264 с.

☎ *(495) 408-78-66, e-mail: yakovenko_g@mtu-net.ru*

Статья представлена к публикации членом редколлегии С.Д. Земляковым. ❑