УДК 681.513.4;519.8

НЕДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫЕ ОВРАЖНЫЕ ДВУМЕРНЫЕ ТЕСТ-ФУНКЦИИ[1]

А.С. Рыков, М.Ю. Матвиенко

Государственный технологический университет «Московский институт стали и сплавов»

Приведено построение двумерных овражных тест-функций для испытания методов оптимизации, представляющих собой новый вид недифференцируемых тест-функций; к их особенностям относится наличие дна оврага с острым кусочно-линейным дном и кусочно-линейными склонами. Описан алгоритм конструирования овражных тест-функций с требуемыми свойствами.

ВВЕДЕНИЕ

Эффективность оптимизационных методов может изучаться как теоретически, так и экспериментально. Первый подход может применяться только для ограниченного числа задач, в то же время весьма удобно сравнивать методы с помощью тест-функций. Цель вычислительного эксперимента заключается в исследовании работоспособности метода, в испытании различных оптимизационных методов в одинаковых условиях и получении их сравнительных характеристик.

Отметим, что один метод может иметь несколько разных алгоритмических реализаций. Рассматривая алгоритмы, мы будем подразумевать их конкретные реализации.

Важен выбор критериев для сравнения алгоритмов. Обычно, когда в литературе представляется новый метод, некоторые из его свойств (например, число вычислений целевой функции, время вычислений, точность определения минимума) приводятся для анализа. Сравнение оптимизационных методов представляет собой многокритериальную проблему. Например, для сравнения алгоритмов и программ можно применять следующие критерии: 1) процессорное время; 2) точность решения; 3) число итераций; 4) робастность; 5) число вычислений целевой функции; 6) удобство применения; 7) требования к памяти; 8) число основных операций.

Критерии 1, 3, 5 и 8 взаимосвязаны и могут применяться для оценки эффективности алгоритма.

В работах, представляющих новые алгоритмы, обычно подчеркивается их превосходство над известными методами. Иногда предпринимаются попытки сравнить алгоритмы одного или разных классов. Сравнение алгоритмов на основе вычислительного эксперимента при минимизации тест-функций может носить объективный характер. В этом случае важен выбор тест-функций, их свойства.

Существует множество различных тест-функций, которые широко используются для оценки вычислительных свойств градиентных алгоритмов оптимизации и методов прямого поиска [1—7].

Функция Розенброка $f(x) = 100(x_2 - x_1^2)^2 + (1 - x_1)^2$ одна из самых известных и часто применяемых. Она имеет крутой параболический овраг вдоль кривой $x_2 = x_1^2$.

По нашему мнению, вытекающему из опыта решения оптимизационных задач, наибольшие вычислительные трудности вызывают овраги и хребты на поверхности минимизируемых функций. Среди овражных функций функции с недифференцируемым дном оврага, вероятно, наиболее трудные для минимизации, поскольку возникают дополнительные сложности в точках, где функция недифференцируема. На скорость сходимости методов влияет также крутизна склонов оврага.

Для минимизации недифференцируемых функций можно применять методы прямого поиска, поскольку они не используют производные [8]. Для исследования свойств методов прямого поиска важно иметь различные недифференцируемые овражные функции [8, 9].

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (гранты 07-07-00151 и 08-07-00055) и доложена на VII международной конференции «Идентификация систем и задачи управления» SICPRO'08, Москва, Институт проблем управления РАН, 28—31 января 2008 г.

В статье приведено построение овражных двумерных кусочно-линейных тест-функций для испытания методов оптимизации, представляющих собой новый вид недифференцируемых тест-функций. К особенностям этих тест-функций относится наличие дна оврага с острым кусочно-линейным дном и кусочно-линейными склонами. Описывается алгоритм конструирования тест функций с требуемыми свойствами. При конструировании можно задавать угол изгиба (излома) дна оврага и крутизну склонов. Функции могут применяться для тестирования поисковых методов оптимизации.

2. КОНСТРУИРОВАНИЕ ДВУМЕРНЫХ НЕГЛАДКИХ ТЕСТ-ФУНКЦИЙ

Рассмотрим конструирование тест-функций для двумерного случая ($n = 2$). Пусть дно оврага конструируемой функции представляют собой некоторую кривую, симметричную относительно оси x_2 и проходящую через точку $(0, 0)^T$ (как в функции Розенброка). Кривая $x_2 = a_1|x_1|$ удовлетворяет этим требованиям, более того, она недифференцируема в точке $(0, 0)^T$. Параметр a_1 позволяет управлять углом изгиба дна, т. е. углом между осью x_2 и прямой $x_2 = a_1x_1$. Функция с таким дном оврага может быть аналитически записана в следующем виде: $f(x) = |x_2 - a_1|x_1||$, $x \in R^2$, $a_1 > 0$.

Легко заметить, что полученная запись соответствует члену $100(x_2 - x_1^2)^2$ функции Розенброка.

Построенная функция не пригодна для тестирования методов оптимизации, так как она не обладает единственным минимумом. Все дно оврага составляет множество точек минимума. В функции Розенброка единственность минимума достигается добавлением члена $(1 - x_1)^2$. Для нашей функции добавим член $a_2|1 - x_1|$.

Получили кусочно-линейную функцию, недифференцируемую вдоль дна оврага:

$$f(x) = |x_2 - a_1|x_1|| + a_2|1 - x_1|,$$
$$x \in R^2, \quad a_1 > 0, \quad a_2 > 0, \qquad (1)$$
$$x^* = \operatorname{argmin} f(x) = (1, a_1)^T, \quad f(x^*) = 0.$$

Данную функцию назовем розенброкоподобной функцией или негладкой овражной функцией Рыкова [8, 9].

Продемонстрируем свойства полученной функции. Функция данного класса имеет шесть линейных областей. Дно оврага описывается уравнением $x_2 = a_1|x_1|$. Каждая функция содержит два параметра: угол излома (изгиба) дна оврага α (т. е. угол между прямыми $x_2 = a_1x_1$ и $x_2 = -a_1x_1$) и угол между линиями уровня на противоположных склонах оврага β. Изучим зависимость между углами α, β и параметрами a_1, a_2. Параметр a_1 является тангенсом угла между прямой $x_2 = a_1x_1$ и осью x_1. Этот угол равен $\pi/2 - \alpha/2$, где α — угол излома дна оврага. Отсюда

$$a_1 = \mathrm{tg}(\pi/2 - \alpha/2) = \mathrm{ctg}(\alpha/2). \qquad (2)$$

Найдем градиенты во всех шести линейных областях, обозначая градиент функции $f(x)$ i-й области через $\nabla_i f(x)$, $i = 1, ..., 6$. Область 1 описывается следующей системой неравенств:

$$\begin{cases} x_1 < 0, \\ x_2 < -a_1x_1. \end{cases}$$

Теперь легко получить вектор-градиент и квадрат его нормы:

$$\nabla_1 f(x) = (-a_1 - a_2, -1)^T, \ \|\nabla_1 f(x)\|^2 = (a_1 + a_2)^2 + 1.$$

Для области 2:

$$\begin{cases} x_1 < 0, \\ x_2 > -a_1x_1, \end{cases}$$

$$\nabla_2 f(x) = (a_1 - a_2, 1)^T, \ \|\nabla_2 f(x)\|^2 = (a_1 - a_2)^2 + 1.$$

Для области 3:

$$\begin{cases} 0 < x_1 < 1, \\ x_2 > a_1x_1, \end{cases}$$

$$\nabla_3 f(x) = (-a_1 - a_2, 1)^T,$$
$$\|\nabla_3 f(x)\|^2 = (a_1 + a_2)^2 + 1 = \|\nabla_1 f(x)\|^2.$$

Для области 4:

$$\begin{cases} x_1 > 1, \\ x_2 > a_1x_1, \end{cases}$$

$$\nabla_4 f(x) = (-a_1 + a_2, 1)^T,$$
$$\|\nabla_4 f(x)\|^2 = (-a_1 + a_2)^2 + 1 = \|\nabla_2 f(x)\|^2.$$

Для области 5:

$$\begin{cases} x_1 > 1, \\ x_2 < a_1x_1, \end{cases}$$

$$\nabla_5 f(x) = (a_1 + a_2, -1)^T,$$
$$\|\nabla_5 f(x)\|^2 = (a_1 + a_2)^2 + 1 = \|\nabla_1 f(x)\|^2 = \|\nabla_3 f(x)\|^2.$$

Для области 6:

$$\begin{cases} 0 < x_1 < 1, \\ x_2 < a_1x_1, \end{cases}$$

$$\nabla_6 f(x) = (a_1 - a_2, -1)^T,$$
$$\|\nabla_6 f(x)\|^2 = (a_1 - a_2)^2 + 1 = \|\nabla_2 f(x)\|^2 = \|\nabla_4 f(x)\|^2.$$

Сумма угла β между линиями уровня на противоположных склонах оврага и угла между векторами-градиентами на этих склонах равна π. Вычис-

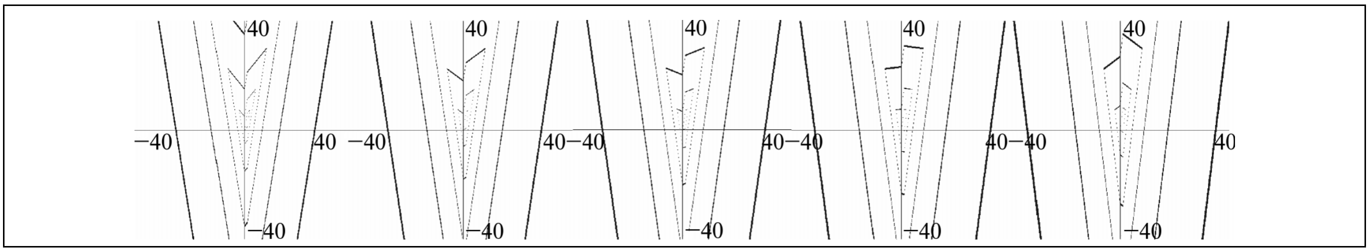

Рис. 1. Линии уровня тест-функции Рыкова для $\alpha = 30°$ при $\beta = 30°, 45°, 60°, 90°, 120°$, координаты точки минимума (1; 3,732)

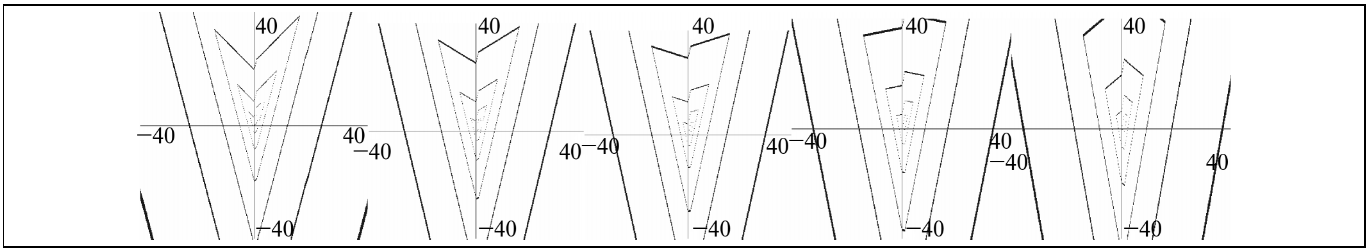

Рис. 2. Линии уровня тест-функции Рыкова для $\alpha = 45°$ при $\beta = 30°, 45°, 60°, 90°, 120°$, координаты точки минимума (1; 2,414)

лим скалярное произведение градиентов в областях 1 и 2, 3 и 6, 4 и 5:

$$(\nabla_1 f(x), \nabla_2 f(x)) = (\nabla_3 f(x), \nabla_6 f(x)) =$$
$$= (\nabla_4 f(x), \nabla_5 f(x)) = a_2^2 - a_1^2 - 1.$$

Учитывая, что $(x, y) = \|x\|\|y\|\cos\overleftrightarrow{xy}$, $x, y \in R^n$, где $\overleftrightarrow{xy}$ обозначает угол между векторами x и y, получим следующее уравнение:

$$\frac{a_2^2 - a_1^2 - 1}{\sqrt{(a_1 + a_2)^2 + 1}\sqrt{(a_1 - a_2)^2 + 1}} = \cos(\pi - \beta). \quad (3)$$

После упрощений получим следующее биквадратное уравнение с неизвестным a_2:

$$c_2 a_2^4 + c_1 a_2^2 + c_0 = 0, \quad (4)$$

где $c_0 = (a_1^2 + 1)^2(1 - t^2)$, $c_1 = (2a_1^2 - 2)t^2 - (2a_1^2 + 2)$, $c_2 = 1 - t^2$, $t = \cos(\pi - \beta)$.

Нами получен метод для конструирования недифференцируемых тест-функций (1), чьи свойства описываются углами α и β. Для заданных α и β коэффициент a_1 определяется по формуле (2), а коэффициент a_2 — из множества решений биквадратного уравнения.

Для получения коэффициента a_2 надо из множества решений биквадратного уравнения (4) выбрать положительный корень. Отрицательные корни биквадратного уравнения не позволяют конструировать функцию с минимумом, а второй дополнительный положительный корень возникает после возведения в квадрат уравнения (3).

Формализуем полученный метод конструирования овражных тест-функций в виде алгоритма.

3. АЛГОРИТМ КОНСТРУИРОВАНИЯ ДВУМЕРНЫХ ОВРАЖНЫХ ТЕСТ-ФУНКЦИЙ РЫКОВА

1. Задать α — угол излома дна оврага, угол между прямыми $x_2 = a_1x_1$ и $x_2 = -a_1x_1$.

2. Задать β — угол между градиентами противоположных склонов оврага.

3. Вычислить a_1 по формуле $a_1 = \mathrm{tg}(\pi/2 - \alpha/2)$.

4. Вычислить a_2 как положительный действительный корень биквадратного уравнения: $c_2 a_2^4 + c_1 a_2^2 + c_0 = 0$, где $c_0 = (a_1^2 + 1)^2(1 - t^2)$, $c_1 = (2a_1^2 - 2)t^2 - (2a_1^2 + 2)$, $c_2 = 1 - t^2$, $t = \cos(\pi - \beta)$.

Связь между углами α и β (в градусах) и коэффициентами a_1 и a_2

α	β	a_1	a_2	α	β	a_1	a_2	α	β	a_1	a_2	α	β	a_1	a_2
30	30	3,732	0,400	60	30	1,732	1,094	90	30	1,000	1,984	120	30	0,577	2,860
	45		0,334		45		0,809		45		1,366		45		1,896
	60		0,300		60		0,665		60		1,052		60		1,401
	90		0,259		90		0,500		90		0,707		90		0,866
	120		0,223		120		0,376		120		0,475		120		0,535

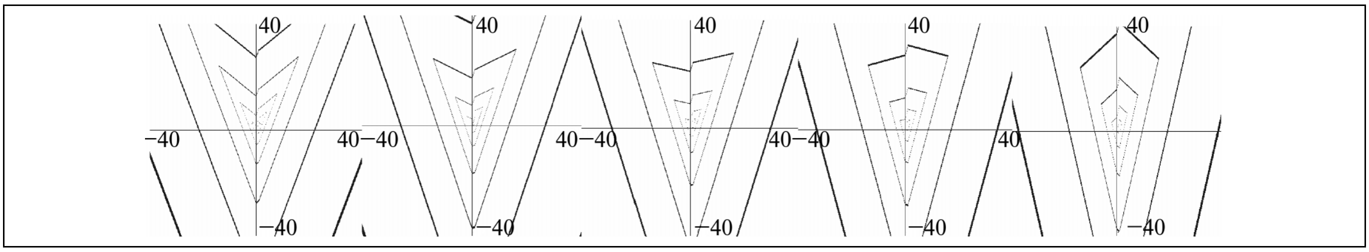

Рис. 3. Линии уровня тест-функции Рыкова для $\alpha = 60°$ при $\beta = 30°, 45°, 60°, 90°, 120°$, координаты точки минимума (1; 1,732)

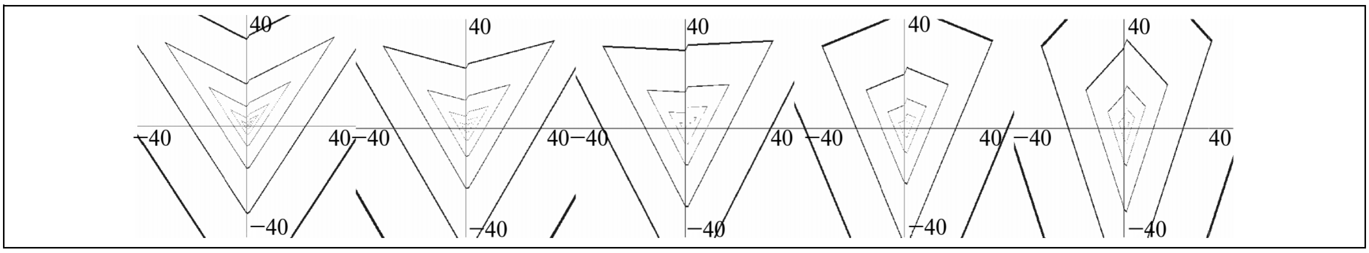

Рис. 4. Линии уровня тест-функции Рыкова для $\alpha = 90°$ при $\beta = 30°, 45°, 60°, 90°, 120°$, координаты точки минимума (1; 1)

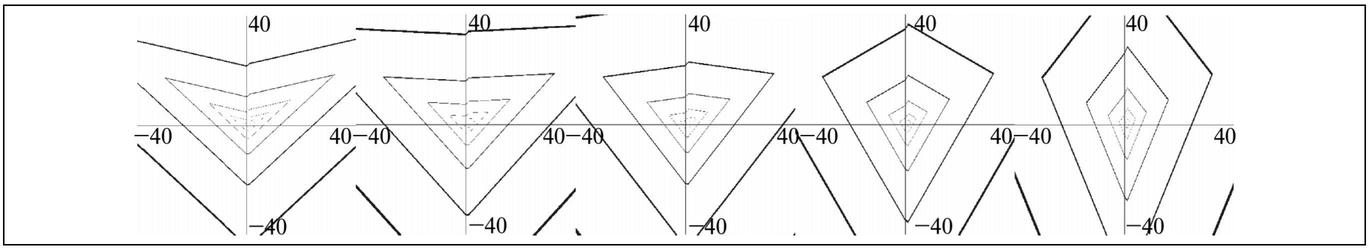

Рис. 5. Линии уровня тест-функции Рыкова для $\alpha = 120°$ при $\beta = 30°, 45°, 60°, 90°, 120°$, координаты точки минимума (1; 0,577)

5. Записать полученную тест-функцию $f(x) = |x_2 - a_1|x_1|| + a_2|1 - x_1|$, $x \in R^2$, $a_1 > 0$, $a_2 > 0$,

$$x^* = \arg\min f(x) = (1,\ a_1)^T, \quad f(x^*) = 0.$$

Коэффициенты a_1 и a_2 двумерных овражных тест-функций (1) для различных значений α и β приведены в таблице. На рис. 1—5 линии уровня сконструированных с помощью предложенного алгоритма двумерных овражных тест-функций Рыкова (1) для различных значений α и β демонстрируют геометрические свойства тестовых функций.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В статье приведено построение овражных двумерных кусочно-линейных тест-функций для испытания методов оптимизации. Описан первый шаг построения нового класса недифференцируемых тест-функций. Дальнейшее развитие данных тест-функций пойдет по пути построения многомерных вариантов овражных тестовых функций с многомерным дном оврага и наделением функций желаемыми свойствами.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гилл Ф., Мюррей У., Райт М.* Практическая оптимизация. — М.: Мир, 1985. — 509 с.
2. *Ларичев О.И., Горвиц Г.Г.* Методы поиска локального экстремума овражных функций. — М.: Наука, 1990. — 95 с.
3. *Реклейтис Г., Рейвиндран А., Рэгсдел К.* Оптимизация в технике. Т. 1, 2. — М.: Мир, 1986.
4. *Рыков А.С.* Поисковая оптимизация. Методы деформируемых конфигураций. — М.: Физматлит: Наука, 1993. — 216 с.
5. *Химмельблау Д.* Прикладное нелинейное программирование. — М.: Мир, 1975. — 515 с.
6. *Brooks S.H.* A comparison of maximum-seeking methods // Operat. Res. — 1959. — Vol. 7, N 4. — P. 430—457.
7. *Fletcher R.* Practical methods of optimization. — N.-Y.: John Wiley & Sons, 1987. — 436 p.
8. *Рыков А.С.* Методы системного анализа: оптимизация. — М.: Экономика, 1999. — 255 с.
9. *Rykov A.S., Kuznetsov A.G.* Non-differentiable test function for comparison of direct search optimization techniques // Proc. of the AMSE International Conference on Information and Systems (ICIS). — Hangzhou (China): Zhejiang University, 1991.

e-mail: alexrykov@mail.ru, misha@webgrad.ru

Статья представлена к публикации членом редколлегии С.Д. Земляковым. ❑