УДК 330.101.542 + 330.47

УПРАВЛЕНИЕ ВЫБОРОМ ПРОИЗВОДИТЕЛЯ С УЧЕТОМ ВЛИЯНИЯ КОНЪЮНКТУРНОЙ ИНФОРМАЦИИ

А.А. Байкин, Е.Ю. Иванов, О.В. Исаева

Алтайский государственный университет, г. Барнаул

Приведены результаты исследования модифицированной с учетом цены информации модели выбора производителя, проведенные для некоторых видов производственных функций (линейной, Леонтьева, мультипликативной, постоянной эластичности замены, Филиппова). Изложены оценки характера и степени влияния дополнительной конъюнктурной информации на изменение структуры и объемов используемых фирмой ресурсов.

ВВЕДЕНИЕ

Большинство экономико-математических моделей, описывающих взаимодействие экономических субъектов как на макро-, так и на микроуровне, абстрагированы от учета информационных воздействий. Так, из восемнадцати аксиоматических предположений, на которых строится классическая *economics*, пять гипотез (H1, H3, H13, H14, H17) [1] непосредственно связаны с информацией. Обобщив предположения этих гипотез о совершенстве информации о существующих товарах, а также о возможностях выбора и ценах, выделим информацию:

- о технологических характеристиках ресурса;
- о цене ресурса;
- о текущем собственнике ресурса и его месторасположении.

Такая информация появляется с возникновением любого производственного ресурса и может иметь собственную сферу обращения.

Допуская, что производителю хорошо известно качество представленных на рынке ресурсов и возможности их вовлечения в производство (т. е. принимая гипотезы H13, H14), будем называть информацию о цене ресурса и его месторасположении конъюнктурной информацией о рынке факторов производства или просто *конъюнктурной информацией*.

Влияние различных экономических воплощений информации на рыночное равновесие отмечалось многими исследователями, указывающими, в частности, на необходимость коррекции «закона единой цены» с учетом стоимости конъюнктурной информации [2, 3, с. 351—354]. Наиболее заметно упущение информационных аспектов стало проявляться при исследовании случаев «фиаско рынка», одним из которых является рынок с асимметричным распределением информации между потребителями и продавцами [4]. На подобных рынках для достижения большей эффективности необходимо понести дополнительные издержки на приобретение более качественных ресурсов, фактически — это издержки на приобретение конъюнктурной информации. Таким образом, формализация влияния информационных факторов для традиционных микроэкономических моделей становится актуальной проблемой современной экономической теории.

1. КЛАССИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА ВЫБОРА ПРОИЗВОДИТЕЛЯ И ЕЕ МОДИФИКАЦИЯ С УЧЕТОМ КОНЪЮНКТУРНОЙ ИНФОРМАЦИИ

Производство обычно представляется как процесс вовлечения некоторого набора благ-факторов производства и преобразование их в благо-продукт. Число используемых в производстве факторов всегда ограничено сверху, исходя из свойства редкости всех существующих благ [5].

Теория фирмы предполагает, что производственный процесс можно формализовать с помощью производственной функции (ПФ), описывающей технологию, т. е. правило преобразования используемых факторов производства в конечный продукт. Поскольку трудно привести детальное описание всех технологических процессов, происходящих на каждом предприятии, имеющееся многообразие технологий может быть представлено множеством X, содержащим набор векторов x, соответствующих технологически возможным преобразованиям затрачиваемых ресурсов в выпускаемую продукцию, иными словами, технологические ограничения формализуются как $x \in X$. Допуская существование функции, которая дает максимальный физический объем выпуска продукции при всех технически возможных комбинациях физических ресурсов и при данном уровне свободно распространяемого технического знания о связи между ресурсами и выпуском, можно записать ПФ:

$$f(x_1, ..., x_n) = 0, \quad (1)$$

где f — некоторая действительная функция, определенная на множестве возможных выпусков чистой продукции, состоящем из векторов чистой продукции, которую производитель в состоянии выпускать, а $x = (x_1, ..., x_n)$ — эффективный вектор существующих на рынке благ, общее число которых n.

Необходимо отметить, что ПФ фирмы определяется на том же самом множестве товаров и услуг, что и функция полезности потребителя. Тем самым любые производимые фирмой блага являются теми же самыми благами, которые покупаются конечными потребителями. Кроме того, подобная формализация деятельности фирмы одинаково подходит как для строгой дополняемости производственных ресурсов (фиксированные технологические коэффициенты, задающие строгие пропорции использования ресурсов), так и для процессов с широкими возможностями замещения (один из ресурсов произвольно замещается каким-либо дополнительным количеством других).

В дальнейшем для упрощения рассуждений перейдем от общей формы ПФ (1) к ее частному представлению, для которого предполагается, что каждый производитель одновременно выступает и продавцом своей продукции, выпуская при этом только одно благо (подробнее см. работу [3, с. 54—55]). Такая частная ПФ имеет форму:

$$x_n = y(x_1, ..., x_{n-1}), \quad (2)$$

где y — функция, описывающая технологические ограничения эффективного производства, n — порядковый номер блага, выпускаемого данной фирмой. Тогда технологические ограничения записываются как $x_n \leqslant y(x_1, ..., x_{n-1})$.

Из выражения (2) получаем еще одну широко распространенную трактовку термина «производственная функция», которая характеризует функцию y как зависимость объема выпуска фирмы от затрат первичных ресурсов. Основные свойства ПФ вида (2) описаны, в частности, в работе [6].

Оптимальный производственный выбор для фирмы в терминах *economics* определяется только тогда, когда производитель определил цели или критерий оптимальности. Наиболее известное, но не единственное предположение о целях деятельности предприятий заключается в *максимизации фирмой прибыли* — в этом случае фирма стремится получить максимально возможную разницу между доходами и расходами. Вместе с тем существует ряд других интересных гипотез о целях деятельности фирмы (см., например, работу [7]).

Задача оптимизации, соответствующая выбранной цели деятельности фирмы, может рассматриваться на различных временных интервалах, что вызывает необходимость поиска принципиально различных решений для каждой из этих задач в зависимости от выбранного периода времени. Основой различий между кратковременным и долговременным периодами деятельности фирмы будем традиционно считать возможность изменения объемов использования всех производственных ресурсов. Тогда *краткосрочный период времени* — период производства, в течение которого все ресурсы, за исключением одного, неизменные, и, следовательно, весь прирост объема производства связан с приростом использования именно данного фактора, *долгосрочный период времени* — период, в течение которого производитель может изменить все факторы производства выпускаемой продукции. Долгосрочный период обычно рассматривают как последовательно сменяющие друг друга краткосрочные периоды.

Принимая в качестве цели деятельности производителя классическую гипотезу максимизации прибыли, рассмотрим три случая задачи оптимизации производственного выбора (выбора фирмы):

1) максимизация чистой прибыли (разницы между доходами и расходами фирмы) при заданной ПФ;

2) максимизация выпуска продукта при заданном уровне затрат;

3) минимизация затрат при заданном уровне выпуска продукта.

Переходя к интерпретации производственной функции как зависимости объема выпуска от затрат первичных ресурсов, сформулируем следующую модель для долгосрочного периода. Пусть $n - 1$ — число факторов производства, $x = (x_1, ..., x_{n-1})$ — некоторая технология производства, определяющая объемы вовлекаемых в производство ресурсов, евклидово пространство с неотрицательными координатами X — рынок факторов производства: $X = \{x: x \geqslant 0\}$. Тогда формализация первого случая задачи оптимизации приводит к следующей классической задаче на условный экстремум:

$$\begin{cases} \max \sum_{i=1}^{n} p_i x_i = \max\left(p_n x_n - \sum_{i=1}^{n-1} p_i x_i\right) \\ x_n = y(x_1, ..., x_{n-1}), \quad x_i \geq 0, \end{cases} \tag{3}$$

где $p = (p_1, ..., p_n)$ — вектор цен всех существующих благ, n — порядковый номер блага, выпускаемого рассматриваемой фирмой. В дальнейшем задача (3) будет рассматриваться при нахождении выбора фирмы в долгосрочном периоде, а ее решение будем обозначать $x^* = (x_1^*, ..., x_{n-1}^*)$.

Теперь формализуем задачу производителя для краткосрочного периода в условиях заранее заданного объема оборотных средств, которые фирма может потратить на приобретение переменного фактора. Пусть C — объем оборотных средств, доступных предприятию, множество факторов производства, которые может приобрести производитель на рынке ресурсов, понеся в данный временной период полные затраты C, назовем множеством *финансово доступных* комбинаций производственных факторов[1] B: $B = \{x: px \leqslant C\}$, где $p = (p_1, ..., p_{n-1})$ — вектор цен на ресурсы. Имеем:

$$\begin{cases} \max\limits_{x \in X} y(x), \\ px \leq C, x \geq 0. \end{cases} \tag{4}$$

Задача (4) в дальнейшем будет рассматриваться при нахождении выбора фирмы в краткосрочном периоде.

Формализация третьего случая задачи оптимизации производственного выбора фирмы приводит к двойственной задаче по отношению ко второму случаю, поэтому отдельно рассматриваться не будет.

Аналитическое решение задач (3) и (4) может быть получено методом неопределенных множителей Лагранжа для соответствующей дифференцируемой функции и позволяет определить функции спроса на ресурсы $x^* = x^*(p, C)$. Полученные таким образом решения, как уже отмечалось, основаны на равномерном распределении информации среди всех участников рынка и на действии закона единой цены. Реальный рынок зачастую демонстрирует различную конъюнктурную осведомленность производителей (что особенно характерно для малых и средних предприятий) и существование ценовых интервалов, внутри которых содержатся цены реальных транзакций производственных ресурсов. С учетом цены конъюнктурной информации, модифицированная модель выбора фирмы в краткосрочном периоде может быть формализована в следующем виде:

$$\begin{cases} \max\limits_{x \in X} y(x), \\ p^* x \leq C, x \geq 0, \end{cases} \tag{5}$$

где $p^* = (p_1 - \Delta p_1, ..., p_{n-1} - \Delta p_{n-1})$.

В этом случае цена фактора производства складывается из собственно цены этого фактора и цены конъюнктурной информации об этом факторе. Таким образом, информированный производитель фактически уменьшает цену производственного фактора, например, путем повышения эффективности его использования либо путем экономии транзакционных издержек на его приобретение. Подобное снижение цены одного из ресурсов можно интерпретировать как увеличение оборотных средств фирмы благодаря расширению множества доступных комбинаций производственных факторов, что, в свою очередь, влияет на выбор производителя в краткосрочном периоде времени. Иными словами, решения задач (3) и (4) представляют собой выбор «неинформированного»[2] производителя, решение же задачи (5) — это новый выбор фирмы с учетом полученной производителем информации.

Попытаемся определить, как изменится решение задач (3) и (4) при изменении исходного вектора цен ресурсов p в некоторый вектор p^*, где $p_n = p_n^*$ — цена выпускаемого продукта. Решая задачу (5) методом множителей Лагранжа, получаем оптимальный набор ресурсов $x^{**} = x^{**}(p^*, C)$ для модифицированной задачи.

Заметим, что в точке локального рыночного равновесия предельная норма технической замены одного ресурса другим равна отношению их рыночных цен

$$\frac{\left.\dfrac{\partial y}{\partial x_i}\right|_{x_i = x^{**}}}{\left.\dfrac{\partial y}{\partial x_j}\right|_{x_j = x^{**}}} = \frac{p_i - \Delta p_i}{p_j - \Delta p_j}, \quad \forall i = \overline{1, n-1}, \quad j = \overline{1, n-1}, \quad i \neq j. \tag{6}$$

Рассматривая задачу (3) и полагая преобразование вектора цен всех благ p в вектор $p^* = (p_1 - \Delta p_1, ..., p_{n-1} - \Delta p_{n-1}, p_n)$, получаем задачу для инфор-

---

[1] Количественной оценкой доступности ресурсов служит понятие изокосты.

[2] Точнее, производителя, обладающего одинаковой конъюнктурной информацией со всеми прочими производителями.

мированного производителя в долгосрочном периоде:

$$\begin{cases} \max\left(p_n x_n - \sum\limits_{i=1}^{n-1} p_i^* x_i\right), \\ x_n = y(x_1, ..., x_{n-1}), x_i \geq 0. \end{cases} \quad (7)$$

Дальнейшие общие рассуждения относительно выбора информированного производителя затруднительны, так как абсолютная величина выражения (6) не позволяет качественно интерпретировать полученное соотношение. Однако можно явным образом рассмотреть различные типы производственных функций, наиболее адекватно описывающих частные случаи на конкретном предприятии. Поэтому далее проанализируем некоторые наиболее популярные виды производственных функций [8, с. 1—3] для моделирования поведения фирмы в условиях изменившейся информированности.

Предварительно отметим, что без потери общности задачи (5) и (7) можно рассматривать как выбор фирмы в условиях двухресурсного производства. Пусть тогда ресурс x_1 будет переменным, а остальные ресурсы, информированность о которых не изменяется, будут представлены агрегированным фактором x_2. Подобная двухпродуктовая модель позволит не только упростить математические выкладки, но и наглядно продемонстрировать полученные результаты. Геометрически решение $x^* = (x_1^*, x_2^*)$ можно интерпретировать как точку касания изокванты производственной функции с одной из изокост, являющейся линией уровня функции издержек.

2. МОДИФИЦИРОВАННАЯ ЗАДАЧА ВЫБОРА ПРОИЗВОДИТЕЛЯ ДЛЯ ЛИНЕЙНОЙ ПРОИЗВОДСТВЕННОЙ ФУНКЦИИ

В случае использования фирмой в качестве ресурсов совершенных субститутов производственный процесс можно описать линейной производственной функцией вида $y(x_1, ..., x_{n-1}) = \sum\limits_{i=1}^{n-1} \alpha_i x_i$, где α_i — некоторые положительные числа. В долгосрочном периоде для двух факторов производства имеем:

$$\begin{cases} \max(p_3 x_3 - p_1 x_1 - p_2 x_2), \\ x_3 = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0. \end{cases}$$

Поскольку ни одна из частных производных целевой функции не обращается в ноль, то чем больше будет вовлечено в производственный процесс ресурсов, тем больше будет прибыль.

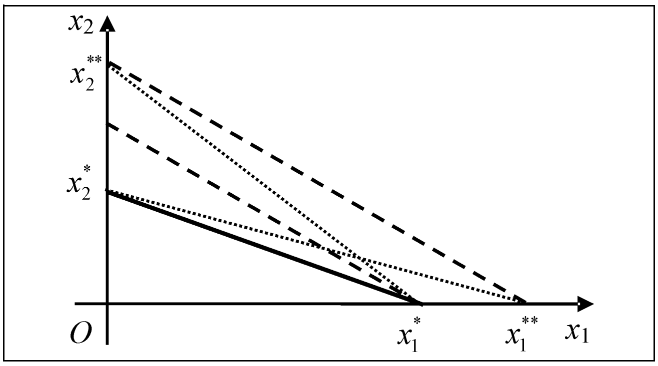

Рис. 1. Выбор производителя для линейной производственной функции

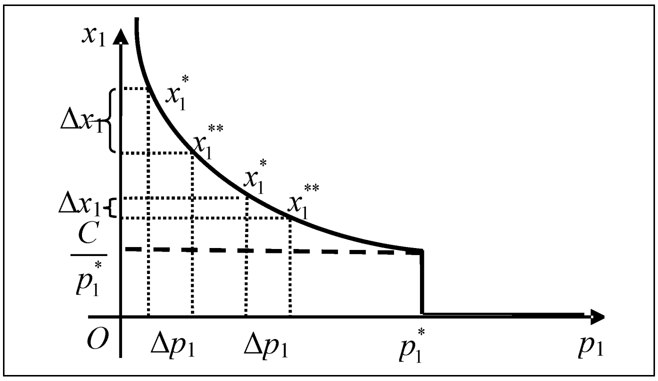

Рис. 2. Кривая спроса на ресурс для линейной производственной функции

В краткосрочном периоде задача (4) для линейной ПФ принимает вид

$$\begin{cases} \max(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2), \\ p_1 x_1 + p_2 x_2 \leq C, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \end{cases}$$

а ее решение представлено на рис. 1. Изокванты (штриховые линии) представляют собой семейство параллельных прямых с угловым коэффициентом $-\alpha_1/\alpha_2$. Очевидно, что при разных наклонах изокосты (сплошная линия) и изокванты выбор производителя получается в одной из двух угловых точек (x_1^* или x_2^* на рис. 1), а функция спроса (рис. 2) на первый фактор производства принимает вид:

$$x_1^* = \begin{cases} C/p_1, \quad p_2\alpha_1 > p_1\alpha_2, \\ Ct/p_1, \quad p_2\alpha_1 = p_1\alpha_2, \quad t \in [0;\ 1], \\ 0, \quad p_2\alpha_1 < p_1\alpha_2. \end{cases}$$

Таким образом, для линейных производственных функций при увеличении информированности производителя о выбранном факторе производства (его цена при этом уменьшается) расширяет исходное множество $x_2^* O x_1^*$ финансово доступных комбинаций производственных факторов до $x_2^* O x_1^{**}$. Соответственно, новая информация о ранее выбранном факторе влияет только на объем использования этого фактора (точка x_1^{**} на рис. 1), но не влияет на то, какой именно фактор производства будет применяться. Вместе с тем, повышение информированности производителя о ценах на другие ресурсы может изменить структуру его выбора, если конъюнктурная информация изменит исходное множество $x_2^* O x_1^*$ до состояния $x_2^{**} O x_1^*$ (см. рис. 1).

3. МОДИФИЦИРОВАННАЯ ЗАДАЧА ВЫБОРА ПРОИЗВОДИТЕЛЯ ДЛЯ ПРОИЗВОДСТВЕННОЙ ФУНКЦИИ ЛЕОНТЬЕВА

В случае использования фирмой ресурсов с постоянными пропорциями (совершенных дополнителей) производственный процесс можно описать функцией Леонтьева: $y(x_1, ..., x_{n-1}) = \min\{\alpha_1 x_1, ..., \alpha_n x_{n-1}\}$, где α_i — некоторые положительные числа.

Заметим, что задача (3) с ПФ Леонтьева принимает вид

$$\begin{cases} \max(p_3 x_3 - p_1 x_1 - p_2 x_2) \\ x_3 = \min\{\alpha_1 x_1;\ \alpha_2 x_2\}, x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0 \end{cases}$$

и не имеет глобального экстремума. Следовательно, чем больше будет вовлечено в производственный процесс ресурсов, тем больше будет прибыль.

В краткосрочном периоде решение задачи

$$\begin{cases} \max(\min\{\alpha_1 x_1, \alpha_2 x_2\}), \\ p_1 x_1 + p_2 x_2 \le C, x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

для ПФ Леонтьева с двумя факторами производства представлено на рис. 3. Изокванты (штриховые линии) представляют собой семейство углов, вершины которых находятся на прямой $x_2 = (\alpha_1/\alpha_2)x_1$. Поскольку производной ПФ Леонтьева в точке выбора производителя не существует, то, учитывая равенство $\alpha_1 x_1 = \alpha_2 x_2$ и ограничение на доступные комбинации производственных факторов, получаем следующие функции спроса: $x_1^* = \dfrac{\alpha_2 C}{\alpha_2 p_1 + \alpha_1 p_2}$, $x_2^* = \dfrac{\alpha_1 C}{\alpha_2 p_1 + \alpha_1 p_2}$.

Оценим изменение спроса на ресурсы вследствие возможного изменения цен. Так как эластичность спроса на определенный ресурс по цене на этот ресурс $E_{p_1}^{x_1} = \dfrac{\partial x_1^*}{\partial p_1}\dfrac{p_1}{x_1^*} = -\left(1 - \dfrac{\alpha_1 p_2}{\alpha_2 p_1 + \alpha_1 p_2}\right) < 0$,

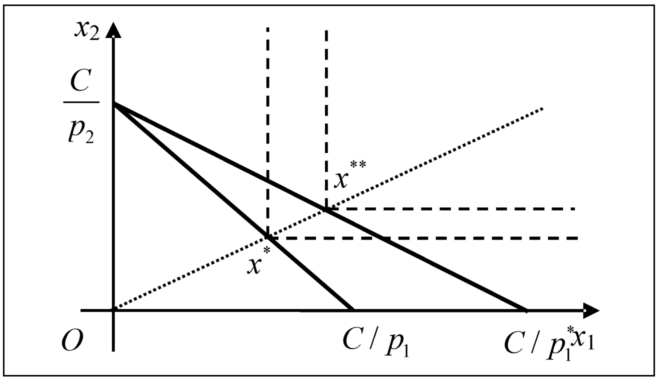

Рис. 3. Выбор производителя для производственной функции Леонтьева

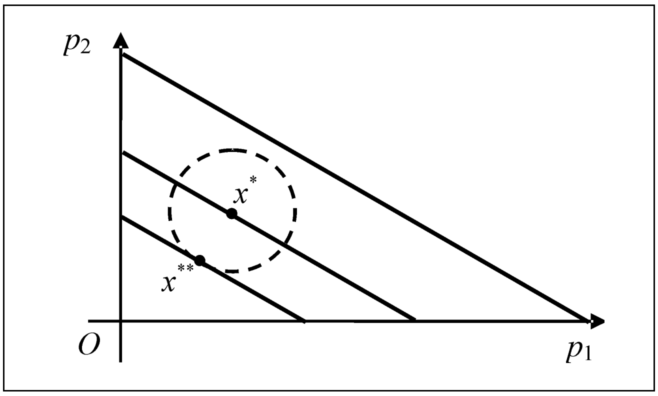

Рис. 4. Линии уровня функций спроса на ресурсы для производственной функции Леонтьева

а перекрестная эластичность спроса по цене $E_{p_2}^{x_1} = \dfrac{\partial x_1^*}{\partial p_2}\dfrac{p_2}{x_1^*} = -\left(1 - \dfrac{\alpha_2 p_1}{\alpha_2 p_1 + \alpha_1 p_2}\right) < 0$, то в общем случае имеем неэластичный спрос.

Таким образом, для ПФ Леонтьева увеличение информированности производителя о ценах не будет влиять на увеличение использования ресурсов до тех пор, пока не появится возможность приобрести еще один комплект всех взаимодополняющих факторов производства.

Наглядно изменение выбора производителя с ростом его информированности можно представить, построив линии уровня поверхности спроса на ресурсы. Линии уровня $x_i^*(p_1, p_2, C) = \text{const}$ образуют семейство параллельных прямых с угловым коэффициентом $-\alpha_2/\alpha_1$, причем по мере увеличения объемов спроса на ресурсы расстояние между ними уменьшается (рис. 4). Таким образом, с ростом объемов использования факторов производства цена информации оказывает все большее влияние на изменение выбора производителя.

4. МОДИФИЦИРОВАННАЯ ЗАДАЧА ВЫБОРА ПРОИЗВОДИТЕЛЯ ДЛЯ МУЛЬТИПЛИКАТИВНЫХ ПРОИЗВОДСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ

Среди мультипликативных ПФ одна из наиболее популярных функция Кобба—Дугласа, которая в общем случае имеет вид $y(x_1, ..., x_{n-1}) = \mu \prod_{i=1}^{n-1} x_i^{\alpha_i}$, где коэффициенты $\alpha_i > 0$ отражают эластичность выпуска по отношению к объемам использования факторов производства, μ — коэффициент, отражающий влияние иных факторов (например, макроэкономических).

Для случая двух факторов производства в долгосрочном периоде получаем задачу

$$\begin{cases} \max(p_3x_3 - p_1x_1 - p_2x_2), \\ x_3 = \mu x_1^{\alpha_1} x_1^{\alpha_2}, x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0. \end{cases}$$

Наличие максимума у функции прибыли фирмы, выпуск которой описывается ПФ Кобба—Дугласа, эквивалентно условиям:

$$\frac{\partial^2 \pi(x_1, x_2)}{\partial x_1^2} = p_3\mu\alpha_1(\alpha_1 - 1)x_1^{\alpha_1 - 2} x_2^{\alpha_2} < 0,$$

$$\Delta = \frac{\partial^2\pi}{\partial x_1^2} \cdot \frac{\partial^2\pi}{\partial x_2^2} - \left(\frac{\partial^2\pi}{\partial x_1 \partial x_2}\right)^2 =$$

$$= p_3^2\mu^2\alpha_1\alpha_2 x_1^{2(\alpha_1 - 1)} x_2^{2(\alpha_2 - 1)}(1 - \alpha_1 - \alpha_2) > 0, \quad (8)$$

где $\pi(x_1, x_2) = p_3x_1^{\alpha_1} x_1^{\alpha_2} - p_1x_1 - p_2x_2$ — прибыль фирмы.

Поскольку знак выражения (8) определяется знаком множителя $(1 - \alpha_1 - \alpha_2)$, то при эластичности производства (определяемой выражением $\sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i$) меньше единицы локальный максимум прибыли существует.

Если эластичность производства равна единице, то безубыточность деятельности фирмы, определяемая соотношением $p_3\mu = \left(\frac{p_1}{\alpha_1}\right)^{\alpha_1} \left(\frac{p_2}{\alpha_2}\right)^{\alpha_2}$ непосредственно зависит от конъюнктуры рынка. В случае строгого выполнения равенства получаем ситуацию с нулевой прибылью, описываемую в большинстве учебников *economics*. Если правая часть выражения будет больше левой, можно путем выбора оптимальной структуры используемых ресурсов постоянно увеличивать размер прибыли, иначе же фирма обречена на банкротство.

Если эластичность производства больше единицы, то технология производства и конъюнктура рынка позволяют получить неограниченный рост прибыли с увеличением объема вовлекаемых ресурсов только после прохождения некоторой критической точки вовлечения ресурсов.

Таким образом, имеет смысл определять эффективную комбинацию производственных факторов только для случая $\sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i < 1$. Получающиеся при этом функции спроса на ресурсы имеют вид:

$$x_1^* =$$

$$= (p_3\mu)^{\frac{1}{1-(\alpha_1+\alpha_2)}} (\alpha_1/p_1)^{\frac{1-\alpha_2}{1-(\alpha_1+\alpha_2)}} (\alpha_2/p_2)^{\frac{\alpha_2}{1-(\alpha_1+\alpha_2)}},$$

$$x_2^* =$$

$$= (p_3\mu)^{\frac{1}{1-(\alpha_1+\alpha_2)}} (\alpha_2/p_2)^{\frac{1-\alpha_1}{1-(\alpha_1+\alpha_2)}} (\alpha_1/p_1)^{\frac{\alpha_1}{1-(\alpha_1+\alpha_2)}}.$$

В случае использования оптимальной комбинации факторов производства прибыль фирмы выражается в виде $\pi(x_1^*, x_2^*) = \frac{p_2}{\alpha_2}(1 - \alpha_1 - \alpha_2) \times$ $\times (p_3\mu\alpha_1/p_1)^{\frac{1}{1-(\alpha_1+\alpha_2)}} (\alpha_2p_1/\alpha_1p_2)^{\frac{\alpha_2}{1-(\alpha_1+\alpha_2)}}$, откуда следует, что эффективная комбинация производственных факторов определяет строго положительное значение прибыли.

Прямая эластичность спроса по цене $E_{p_1}^{x_1} = \frac{\partial x_1}{\partial p_1} \cdot \frac{p_1}{x_1} = \frac{\alpha_2 - 1}{1-(\alpha_1+\alpha_2)}$, а поскольку справедлива оценка $0 > E_{p_1}^{x_1} = -1 - \frac{\alpha_1}{1-(\alpha_1+\alpha_2)} > -1$, то спрос эластичен. Перекрестная эластичность спроса по цене равна $E_{p_2}^{x_1} = \frac{\partial x_1}{\partial p_2} \cdot \frac{p_2}{x_1} = \frac{-\alpha_2}{1-(\alpha_1+\alpha_2)}$, а поскольку $E_{p_1}^{x_1} < 0$, то спрос может быть как эластичным, так и нет.

Решение задачи

$$\begin{cases} \max \mu x_1^{\alpha_1} x_1^{\alpha_2}, \\ p_1x_1 + p_2x_2 \le C, \quad x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0 \end{cases}$$

в краткосрочном периоде определяет функции спроса на ресурсы в виде $x_i^* = \frac{\alpha_i C}{p_i(\alpha_1+\alpha_2)}$. При этом величина $\sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i$, в отличие от долгосрочного случая, не оказывает влияния на полученный результат.

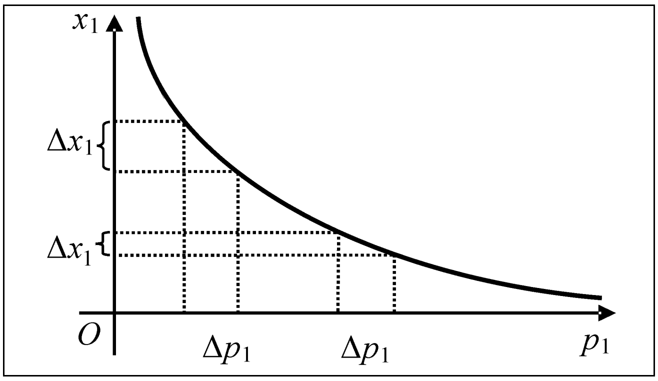

Рис. 5. Функция спроса на ресурс для мультипликативной производственной функции

Далее, очевидно, что повышение информированности только об одном факторе производства не изменит уровень использования других факторов производства, поскольку $x_i^{**} = \dfrac{\alpha_i C}{(p_1 - \Delta p_i)(\alpha_1 + \alpha_2)}$.

Иными словами, если деятельность фирмы описывается ПФ Кобба—Дугласа, то увеличение информированности производителя приводит к изменению спроса только на этот ресурс (рис. 5), не изменяя при этом объемы вовлечения в производство других факторов.

Одним из обобщений функции Кобба—Дугласа является функция Стоуна $y(x_1, ..., x_{n-1}) = \mu \prod_{i=1}^{n-1} (x_i - x_i^0)^{\alpha_i}$, где α_i — все также эластичность выпуска по ресурсам, а x_i^0 — минимально необходимый уровень вовлечения ресурса i в производственный процесс.

Решая задачу

$$\begin{cases} \max(p_3 x_3 - p_1 x_1 - p_2 x_2), \\ x_3 = \mu(x_1 - x_1^0)^{\alpha_1}(x_2 - x_2^0)^{\alpha_2}, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

в долгосрочном периоде при условии $\alpha_1 + \alpha_2 < 1$, получаем следующие функции спроса:

$$x_1^* = x_1^0 + (p_3\mu)^{\frac{1}{1-(\alpha_1+\alpha_2)}} (\alpha_1/p_1)^{\frac{1-\alpha_2}{1-(\alpha_1+\alpha_2)}} (\alpha_2/p_2)^{\frac{\alpha_2}{1-(\alpha_1+\alpha_2)}},$$

$$x_2^* = x_2^0 + (p_3\mu)^{\frac{1}{1-(\alpha_1+\alpha_2)}} (\alpha_2/p_2)^{\frac{1-\alpha_1}{1-(\alpha_1+\alpha_2)}} (\alpha_1/p_1)^{\frac{\alpha_1}{1-(\alpha_1+\alpha_2)}}. \quad (9)$$

Составляя и решая задачу

$$\begin{cases} \max \mu(x_1 - x_1^0)^{\alpha_1}(x_2 - x_2^0)^{\alpha_2}, \\ p_1 x_1 + p_2 x_2 \leq C, \quad x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \end{cases}$$

для краткосрочного периода получаем соответствующие функции спроса на ресурсы:

$$x_i^* = x_i^0 + \frac{\alpha_i}{(\alpha_1 + \alpha_2)} \cdot \frac{C - (p_1 x_1^0 + p_2 x_2^0)}{p_i}, \quad i = 1, 2. \quad (10)$$

Интерпретируя полученные решения (9) и (10), можно отметить, что как в краткосрочном, так и в долгосрочном периодах производитель сначала должен приобрести минимально необходимое количество каждого из ресурсов, а затем эти ресурсы вовлечь в производство пропорционально их «желательности» и обратно пропорционально цене.

Проанализируем полученные функции (10) как решение задачи (5). Прямая эластичность спроса по цене $E_{p_1}^{x_1} = \dfrac{\alpha_1(C - p_2 x_2^0)}{\alpha_1(C - p_2 x_2^0) + \alpha_2 p_1 x_1^0}$, а поскольку справедлива оценка $0 > E_{p_1}^{x_1} = -1 + \dfrac{\alpha_2 p_1 x_1^0}{\alpha_1(C - p_2 x_2^0) + \alpha_2 p_1 x_1^0} > -1$, то спрос неэластичен. Перекрестная эластичность спроса по цене $E_{p_2}^{x_1} = -\dfrac{\alpha_1 p_2 x_2^0}{\alpha_1(C - p_2 x_2^0) + \alpha_2 p_1 x_1^0} < 0$, поэтому спрос может быть как эластичным, так и нет.

Геометрически решение задачи (4) представлено на рис. 6. Расположение изоквант аналогично схеме функции Кобба—Дугласа, однако ветви кривых имеют асимптоты, не совпадающие с координатными осями.

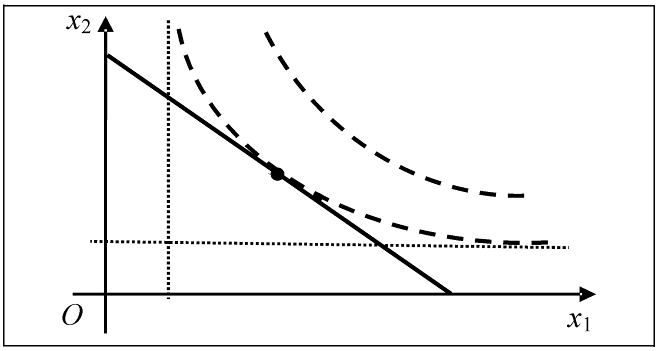

Рис. 6. Выбор производителя для мультипликативной производственной функции

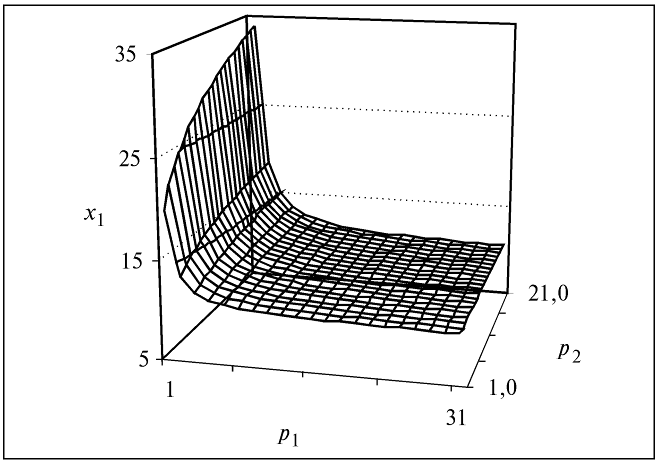

Рис. 7. Кривая спроса гипотетической фирмы на ресурс для производственной функции Стоуна

Определим границы влияния цены информации на объем вовлечения ресурса, исходя из того, что его использование изменится хотя бы на одну условную единицу. Последнее означает, что изменение в структуре потребления зависит не только от информированности производителя, но и от объема использования данного ресурса. Другими словами, при малом уровне использования фактора в производстве информация оказывается менее ценной, чем при большом, поскольку одна и та же единица конъюнктурной информации дает больший прирост его использования (рис. 7).

Таким образом, для производства, описываемого ПФ Стоуна, увеличение информированности производителя относительно одного ресурса приводит к изменению объема использования всех факторов, однако наибольшее влияние все же оказывается на объем вовлечения в производственный процесс именно данного ресурса.

5. МОДИФИЦИРОВАННАЯ ЗАДАЧА ВЫБОРА ПРОИЗВОДИТЕЛЯ ДЛЯ ПРОИЗВОДСТВЕННОЙ ФУНКЦИИ С ПОСТОЯННОЙ ЭЛАСТИЧНОСТЬЮ ЗАМЕЩЕНИЯ

Практически столь же часто, как и функция Кобба—Дугласа, для описания производственных процессов применяется функция с постоянной эластичностью замещения или CES-функция: $y(x_1, ..., x_{n-1}) = \mu\left(\sum_{i=1}^{n-1}\frac{\beta_i}{x_i^\alpha}\right)^{-1/\alpha}$, где $0 < \beta_i < 1$, $\alpha > 0$, μ — так же, как и в мультипликативных функциях, коэффициент, отражающий влияние прочих факторов.

Поскольку функция прибыли для задачи (3), имеющей в данном случае вид

$$\begin{cases}\max\{p_3x_3 - p_1x_1 - p_2x_2\}, \\ x_3 = \mu\left(\dfrac{\beta}{x_1^\alpha} + \dfrac{1-\beta}{x_2^\alpha}\right)^{-1/\alpha}, x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0,\end{cases}$$

не имеет локального максимума, то чем больше будет вовлечено в производственный процесс ресурсов, тем больше будет прибыль.

Геометрически решение задачи $\begin{cases}\max\mu\left(\dfrac{\beta}{x_1^\alpha} + \dfrac{1-\beta}{x_2^\alpha}\right)^{-1/\alpha}, \\ p_1x_1 + p_2x_2 \le C, x_1 \ge 0, x_2 \ge 0\end{cases}$ в краткосрочном периоде представлено на рис. 8. Расположение изоквант (штриховые линии) аналогично схеме функции Стоуна, однако у каждой изокванты свои асимптоты, определяемые параметрами CES-функции: $x_1 = \dfrac{C}{\mu}\beta^{1/\alpha}$, $x_2 = \dfrac{C}{\mu}(1-\beta)^{1/\alpha}$, где $C = x_3 =$

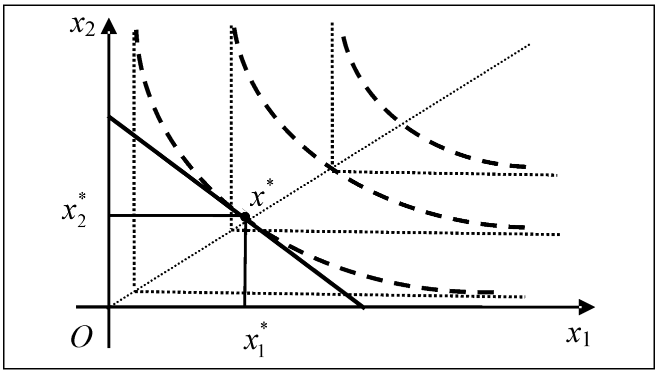

Рис. 8. Выбор производителя для CES-функции

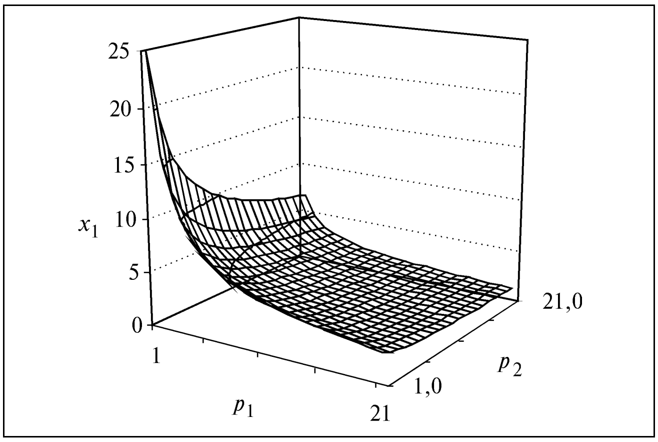

Рис. 9. Функция спроса гипотетической фирмы для CES-функции

= const. Аналитическое решение задачи (4) определяет функции спроса на факторы производства:

$$x_1^* = \frac{C\beta^\sigma}{p_1^\sigma(\beta^\sigma p_1^{1-\sigma} + (1-\beta)^\sigma p_2^{1-\sigma})};$$

$$x_2^* = \frac{C(1-\beta)^\sigma}{p_2^\sigma(\beta^\sigma p_1^{1-\sigma} + (1-\beta)^\sigma p_2^{1-\sigma})},$$

где $\sigma = (1 + \alpha)^{-1}$ — эластичность замещения факторов производства для данной ПФ [9]. График функции спроса представлен на рис. 9.

Таким образом, как и в случае ПФ Стоуна, производство, описываемое CES-функцией, реагирует на увеличение информированности производителя относительно одного ресурса изменением объема использования всех факторов.

6. МОДИФИЦИРОВАННАЯ ЗАДАЧА ВЫБОРА ПРОИЗВОДИТЕЛЯ ДЛЯ ПРОИЗВОДСТВЕННОЙ ФУНКЦИИ ФИЛИППОВА[3]

В некоторых случаях производственный процесс следует описывать с помощью s-образной производственной функции вида $y(x_1, ..., x_{n-1}) = \sum_{i=1}^{n-1}(\alpha_i \sin\beta_i x_i + \gamma_i x_i)$, $\alpha_i \geqslant 0$, $\beta_i > 0$, $\gamma_i > 0$. График объема выпуска для такой функции в случае двух факторов производства приведен на рис. 10. Допуская возможность такого описания производственного процесса, можно отказаться от принципов убывающей продуктивности факторов производства и убывающей предельной полезности [10].

Предположение ненасыщаемости позволяет определить важное соотношение для коэффициентов производственной функции данного вида: $\alpha_i\beta_i \leqslant \gamma_i$.

Для случая двух факторов производства получим следующую модель поведения фирмы в долгосрочном периоде:

$$\begin{cases} \max\{p_3x_3 - p_1x_1 - p_2x_2\}, \\ x_3 = \alpha_1\sin\beta_1x_1 + \gamma_1x_1 + \alpha_2\sin\beta_2x_2 + \gamma_2x_2, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0. \end{cases}$$

Существование локального максимума прибыли фирмы зависит от одновременного выполнения условий $|p_i - \gamma_i| \leqslant p_3\alpha_i\beta_i$, $i = 1, 2$. В противном слу-

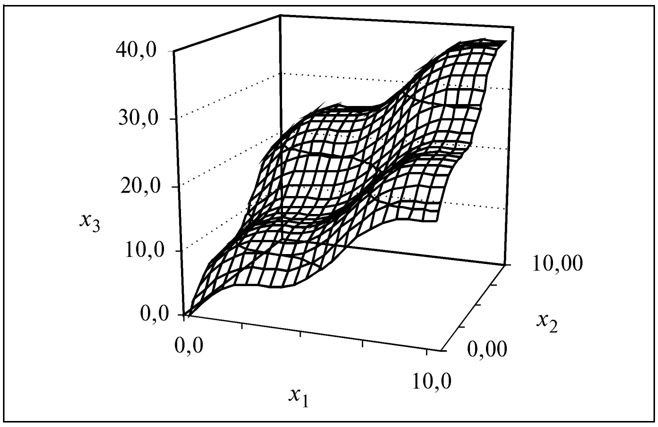

Рис. 10. Объем выпуска гипотетической фирмы для производственной функции Филиппова

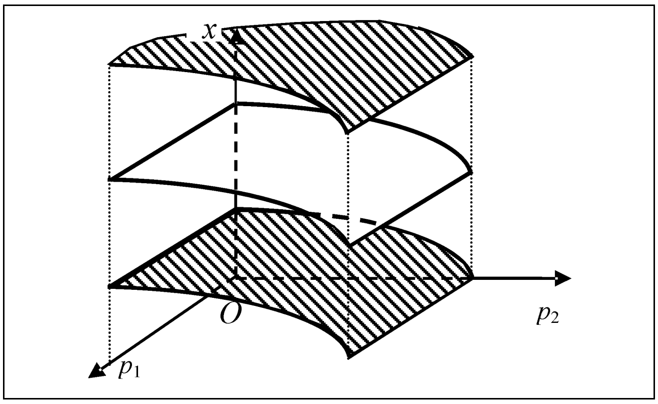

Рис. 11. Функция спроса для производственной функции Филиппова

чае имеем тривиальный случай, когда размер прибыли неограниченно увеличивается пропорционально объемам вовлекаемых ресурсов.

Таким образом, получаем функции спроса на ресурсы:

$$x_i^* = \frac{1}{\beta_i}\arccos\left(\frac{p_i - \gamma_i}{p_3\alpha_i\beta_i}\right) + \frac{2\pi m}{\beta_i}, \quad i = 1, 2,$$
$$m \in \{0\} \cup N,$$

где N — множество натуральных чисел. График функции спроса в этом случае представлен на рис. 11.

Геометрическое решение задачи

$$\begin{cases} \max(\alpha_1\sin\beta_1x_1 + \gamma_1x_1 + \alpha_2\sin\beta_2x_2 + \gamma_2x_2), \\ p_1x_1 + p_2x_2 \leq C, \quad x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0 \end{cases}$$

в краткосрочном периоде представлено на рис. 12. Изокванты (штриховые линии) в нескольких точках соприкасаются с границей множества финансово доступных комбинаций производственных

[3] Данная функция названа в честь Леонида Андреевича Филиппова, известного алтайского экономиста-математика, разработавшего метод интервальных расчетов Вексицкого и предложившего один из более ранних вариантов записи s-образных функций подобного вида.

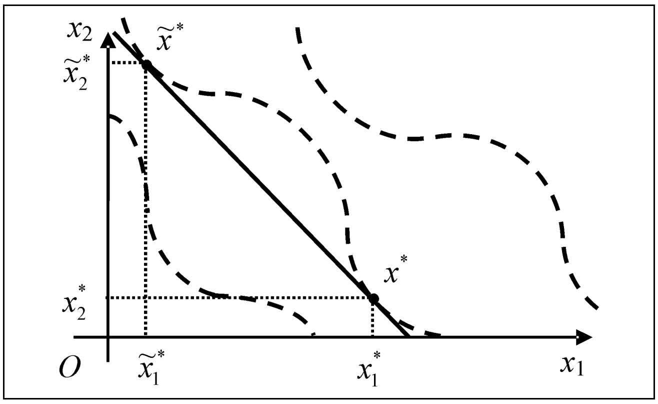

Рис. 12. Оптимальный выбор для производственной функции Филиппова

факторов, что означает наличие нескольких оптимальных решений (точки x^*, $\tilde{x}^*$), однако для каждой изокванты число точек различно. Более того, аналитически определить их расположение, а, следовательно, и функции спроса для общего случая затруднительно.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Решение модифицированной с учетом цены конъюнктурной информации задачи выбора производителя в значительной мере зависит от вида производственной функции, подходящего для данной фирмы, а также от выбранного периода анализа — краткосрочного или долгосрочного. Для случаев ресурсов совершенных заменителей или дополнителей получаем, что конъюнктурная информация не оказывает принципиального влияния на выбор фирмы, по крайней мере, до момента изменения более сильных условий (для ресурсов-субститутов — цен обоих факторов, для ресурсов-дополнителей — цены всего набора факторов). Анализ функции Кобба—Дугласа также показал незначительное влияние, поскольку в случае большей информированности увеличивается объем использования только подешевевшего ресурса.

Принципиальное влияние конъюнктурной информации характерно для функций Стоуна и CES, где с повышением информированности производитель изменяет не только объем вовлечения данного ресурса, но и всю структуру ресурсного вектора, что может привести к необходимости смены ранее выбранной технологии производства.

Еще более интересные результаты демонстрирует логистическая производственная функция Филиппова, которая допускает не только существование нескольких оптимальных точек, но и разрывов в спросе на ресурс, что может быть вызвано, например, необходимостью накопления ценности данного ресурса для производственного процесса.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Lesourne J.A.* A Theory of Individual for Economic Analysis. — Amsterdam, 1977. — P. 7—13.
2. *Stiglitz J.E.* Equilibrium in product markets with imperfect information // American Economic Review. — 1979. — Vol. 69, — N 2. — P. 339—345.
3. *Маленво Э.* Лекции по микроэкономическому анализу. — М.: Наука, 1984. — 390 с.
4. *Akerlof G.A.* The Market for «Lemons»: Qualitative Uncertainty and Market Mechanism // Quarterly Journal of Economics. — 1970. — August. — P. 488—500.
5. *Вальрас Л.* Элементы чистой политической экономии. — М.: Изограф, 2000. — С. 18.
6. *Терехов Л.Л.* Производственные функции. — М.: Статистика, 1974. — С. 10—18.
7. *Dreze J.* Some theory of labor management and participation // Econometrica. — 1976. — N 6. — Vol. 44. — P. 1125—1139.
8. *Производственные* функции в управлении проектами // Научные и учебно-методические разработки Ин-та инноватики СПбГУ. — [Электронный ресурс]. ⟨http://www.ii.spb.ru/material/methodical_m/m_4/Production_functions_management_projects.pdf⟩. — С. 1—3.
9. *Клейнер Г.Б.* Производственные функции. Теория, методы, применение. — М.: Финансы и статистика, 1986. — С. 42.
10. *Иванов Е.Ю., Филиппов Л.А.* Информация в экономике и бизнесе. — Барнаул: Изд-во АлтГУ, 2000. — С. 26—29.

☎ *(3852) 24-65-58; e-mail: baykin@rol.ru, ieu@asu.ru, isaeva@econ.asu.ru*

Статья представлена к публикации членом редколлегии Р.М. Нижегородцевым. ❑

ПОЗДРАВЛЯЕМ

главного редактора нашего журнала
Дмитрия Александровича НОВИКОВА
с избранием членом-корреспондентом Российской академии наук.
Желаем ему доброго здоровья и дальнейших творческих успехов!

Редколлегия и редакция
журнала «Проблемы управления»