УДК 62-83:681.325.2

ОЦЕНИВАНИЕ КОМПОНЕНТ ВЕКТОРА СОСТОЯНИЯ СИНГУЛЯРНОЙ НЕЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ[1]

С.Е. Рывкин

Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, г. Москва

Для класса нелинейных динамических систем с линейным вхождением вектора оцениваемых компонент полного вектора состояния сформулировано и доказано достаточное условие наблюдаемости. Предложены методы нелинейного оценивания компонент переменных состояния на скользящих режимах. Дан пример синтеза алгоритма оценивания выходных механических переменных синхронного двигателя.

ВВЕДЕНИЕ

Одна из центральных задач при синтезе высококачественных динамических систем заключается в получение информации о состоянии управляемого процесса и, в частности, о компонентах вектора состояния.

Применение классического подхода, основанного на прямом измерении всех необходимых координат, в настоящее время практически сходит на нет, что обусловлено как сложностью прямого получения информации о некоторых компонентах вектора состояния, так и общим усложнением объектов управления в целом, что неизбежно приводит к ухудшению их эксплуатационных и стоимостных показателей. Возможный путь преодоления этих недостатков состоит в исключении датчиков тех координат, прямое измерение которых является нежелательным, и использование при синтезе управления их оценок, полученных с помощью наблюдателя вектора состояния [1, 2].

Однако большинство объектов управления являются нелинейными, и получение по измерениям входных и выходных переменных необходимых оценок компонент вектора состояния представляет собой сложную задачу и требует разработки новых методов нелинейного оценивания вектора состояния. Для решения рассматриваемой задачи перспективно применение методов теории систем со скользящими режимами [3, 4], предполагающих использование для оценивания адаптивных свойств динамической модели с разрывными управлениями. Это позволяет осуществить эффективную декомпозицию задачи наблюдения благодаря организации многомерного скользящего движения, в котором по значениям компонент эквивалентного управления динамической модели можно получить оценку неизвестных компонент вектора состояния. Данный подход приводит к существенному упрощению схемной реализации, что весьма существенно, особенно с учётом нелинейностей объекта управления и его высокого порядка.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим нелинейную динамическую систему следующего вида:

$$dx_1/dt = f_1(x_1, t) + D(x_1, t)x_2(t) + B(x_1, t)u(t), \quad (1)$$

$$dx_2(t) = f_2(x, u, t), \quad (2)$$

$$y(t) = x_1(t), \quad (3)$$

где $x^T = (x_1^T, x_2^T)$ — вектор состояния, $x(t) \in R^n$, $x_1(t) \in R^q$; $f_1(x_1, t)$, $f_2(x_2, t)$ — векторы-столбцы, $f_1(x_1, t) \in R^q$, $f_2(x, u, t) \in R^{n-q}$; $u(t)$ — вектор управления, $u(t) \in R^m$; $B(x_1, t)$ — матрица размерности

[1] Работа рекомендована к публикации Программным комитетом Третьей международной конференции по проблемам управления (Москва, 20 — 22 июня 2006 г.).

$q \times m$; $D(x_1, t)$ — матрица размерности $q \times (n - q)$; $y(t)$ — вектор выходных переменных.

В уравнение (1) вектор x_2, компоненты которого надо определить, входит линейно и может рассматриваться как некоторый параметр. Для получения оценок его компонент можно воспользоваться подходом, основанном на методе «быстрой» идентификации на скользящих режимах [5].

1. ДОСТАТОЧНОЕ УСЛОВИЕ НАБЛЮДАЕМОСТИ

Утверждение 1. *Оценка вектора состояния x_2 нелинейной динамической системы вида (1)—(3) может быть получена, если размерность вектора выходных переменных $y(t)$, т. е. измеряемого вектора состояния $x_1(t)$, больше или равна размерности оцениваемого вектора состояния x_2, $q \geqslant (n - q)$, и в матрице $D(x_1, t)$ может быть выделена невырожденная квадратная матрица полной размерности $\hat{D}(x_1, t) \in R^{(n-q)\times(n-q)}$, $\operatorname{rank} \hat{D}(x_1, t) = (n - q)$ при всех $x_1(t)$.* ♦

Доказательство см. в Приложении.

2. НЕПОСРЕДСТВЕННАЯ ОЦЕНКА ПО ВЕКТОРУ ЭКВИВАЛЕНТНОГО УПРАВЛЕНИЯ

Получение информации о векторе состояния x_2 на основе используемой в доказательстве утверждения 1 нелинейной динамической модели (П. 2) — см. Приложение — с единичной матрицей $\hat{D}^*(t)$, являющейся нелинейным наблюдателем вектора состояния x_2, требует дополнения модели блоком линейного преобразования полученных значений компонент вектора эквивалентного управления v_{eq} согласно выражению (П. 11).

Во избежание этого желательно путем выбора соответствующего вида матрицы $\hat{D}^*(t)$ и функций переключения обеспечить непосредственное равенство векторов эквивалентного управления v_{eq} и состояния x_2.

Утверждение 2. *В качестве оценки вектора состояния x_2 нелинейной динамической системы вида (1)—(3) может непосредственно использоваться вектор эквивалентного управления, если выполнено достаточное условие наблюдаемости и матрица $\hat{D}^*(t)$ динамической модели (П. 2) выбрана в виде $\hat{D}(x_1, t)$.* ♦

Доказательство см. в Приложении.

4. НЕПОСРЕДСТВЕННАЯ ОЦЕНКА БЕЗ КООРДИНАТНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

С позиций применения приведенного ранее подхода для построения нелинейного наблюдателя вектора состояния x_2 существенный недостаток заключается в необходимости координатного преобразования функций рассогласования (П. 14), связанного с переходом к новому вектору функций рассогласования S^*. Этого можно избежать, если формировать этот вектор также с использованием разрывного управления.

Утверждение 3. *В качестве оценки вектора состояния x_2 нелинейной динамической системы вида (1)—(3) может непосредственно использоваться вектор эквивалентного управления v_{eq}, а в качестве функций рассогласования — рассогласования модельных и фактических переменных (П. 4), если выполнены условия утверждения 1, матрица $\hat{D}^*(t)$ выбрана в виде $\hat{D}(x_1, t)$, а новый вектор функций рассогласования $S^{*T} = (S_1^*, ..., S_{n-q}^*)$ формируется дополнительной динамической системой вид*

$$dS^*/dt = -S^* + R_S u(t), \tag{4}$$

где $u(t) = (u_1, ..., u_{n-q})$, $u_i = \operatorname{sgn}(\varepsilon_i)$, $i = \overline{1, (n-q)}$. ♦

Доказательство см. в Приложении.

5. ФИЗИЧЕСКИЙ СМЫСЛ ЭКВИВАЛЕНТНОГО УПРАВЛЕНИЯ И СИНГУЛЯРНОСТЬ

Эквивалентное управление u_{eq} определяется через среднее значение $u_{\text{ср}}$ разрывного управления $v(t)$, полученное при движении системы в реальном скользящем режиме в Δ-окрестности пересечения поверхностей разрывов $S = 0$ с помощью фильтра

$$\tau(du_{\text{ср}}/dt) + u_{\text{ср}} = v(t),$$

где τ — постоянная времени [3].

Оно представляет собой среднее значение разрывного управления, полученное при предельном переходе от реального скользящего режима к идеальному скольжению:

$$\lim_{\substack{\tau \to 0 \\ \Delta/\tau \to 0}} u_{\text{ср}} = u_{eq}.$$

При построении наблюдателя необходимо учитывать эту особенность, т. е. наличие фильтра с собственной динамикой. При анализе требований, накладываемых на наблюдаемую нелинейную систему, необходимо учитывать, что оценка компонент вектора состояния x_2 возможна в том случае, если фильтр является сингулярно возмущенным по отношению к подсистеме (2), т. е. темпы фильтрации должны быть существенно выше (на порядок) темпов изменения оцениваемых компонент вектора состояния.

6. СИНТЕЗ НАБЛЮДАТЕЛЯ МЕХАНИЧЕСКИХ КООРДИНАТ СИНХРОННОГО ДВИГАТЕЛЯ

Приведенные ранее достаточные условия оценивания компонент вектора состояния служат основой для синтеза нелинейных наблюдателей, построенных на принципах систем с преднамеренно введенным скользящим режимом. Основная идея синтеза состоит в следующем: по имеющейся информации о векторе выходных переменных строится динамическая модель, наиболее полно описывающая исходную систему, а затем модельное управление выбирается таким образом, чтобы скользящее движение по пересечению поверхностей разрыва было устойчиво, а полученное эквивалентное управление содержало информацию об оцениваемом векторе состояния.

Далее предложенный подход к синтезу нелинейных наблюдателей будет конкретизирован применительно к задаче информационного обеспечения управления автоматизированным синхронным электроприводом с неявнополюсным синхронным двигателем (СД).

Традиционно применяемый подход к синтезу системы управления, основанный на прямом измерении всех необходимых координат, приводит к значительному усложнению конструкции электропривода, ухудшению его эксплуатационных и стоимостных показателей. Для преодоления этих недостатков следует исключить из конструкции системы датчики механических координат и использовать при синтезе управления их оценки, полученные с помощью наблюдателя [6, 7].

Как уже указывалось, наблюдатель, обеспечивающий получение оценок неизменяемых величин, обычно представляет собой имитационную модель исследуемого объекта, степень приближения которой к данному объекту определяется имеющейся в наличии информацией. Очевидно, что его структура, а также алгоритм получения необходимых оценок механических координат, особенно в случае нелинейного объекта, каковым является СД, существенным образом зависят от типа СД.

Приведем процедуру синтеза наблюдателя неявнополюсного СД с возбуждением от постоянных магнитов в неподвижной системе координат (α, β).

Известной (исходной) информацией служит информация о векторе тока $I^T = (i_\alpha, i_\beta)$ и векторе напряжения $U^T = (u_\alpha, u_\beta)$ статорной обмотки (или, что то же самое, фактические фазные токи и напряжения), измерение которых не вызывает затруднений, и параметры электрических цепей. Необходимо оценить следующие механические координаты: угловое положение Γ ротора и частоту Ω его вращения, пропорциональные, соответственно, углу γ_R между неподвижной осью R трёхфазной системы координат и подвижной осью d и электрической частоте ω ($\gamma_R = p\Gamma$; $\omega = p\Omega$, где p — число пар полюсов двигателя). Для простоты будем полагать, что СД имеет два полюса, т. е. электрические и механические угловые координаты равны между собой.

Электромагнитные процессы в СД в неподвижной системе координат (α, β) описываются следующей системой дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} di_\alpha/dt &= (-ri_\alpha + \Omega\psi\sin\Gamma + u_\alpha)/L, \\ di_\beta/dt &= (-ri_\beta - \Omega\psi\sin\Gamma + u_\beta)/L, \end{aligned} \qquad (5)$$

где r — активное сопротивление обмотки статора; L — индуктивности обмоток статора; ψ — поток возбуждения.

Для определения углового положения ротора Γ и частоты его вращения Ω построим динамическую систему, которая по своей структуре максимально приближена к структуре исследуемого объекта (5) и в которой используется вся имеющаяся информация о СД, включая информацию о приложенном к статорной обмотке напряжении и протекающем в ней токе:

$$\begin{aligned} d\hat{i}_\alpha/dt &= (-r\hat{i}_\alpha + u_\alpha)/L + u_1, \\ d\hat{i}_\beta/dt &= (-r\hat{i}_\beta + u_\beta)/L + u_2, \end{aligned} \qquad (6)$$

где u_1 и u_2 — корректирующие модельные воздействия.

Для правильного отражения моделью (6) процессов, протекающих в СД, необходимо, чтобы совпадали движения в реальной (5) и модельной (6) электромагнитных системах, т. е. совпадали поведения соответствующих модельных $\hat{i}_\alpha$, $\hat{i}_\beta$ и реальных $\hat{i}_\alpha$, $\hat{i}_\beta$ компонент тока статора. Это можно обеспечить, организовав с использованием корректирующих воздействий u_1 и u_2 скользящее движение по пересечению поверхностей скольжения, представляющих собой нулевые рассогласования по компонентам тока:

$$S_\alpha = i_\alpha - \hat{i}_\alpha, \quad S_\beta = i_\beta - \hat{i}_\beta. \qquad (7)$$

В этом случае матрица перед вектором корректирующих воздействий в уравнении проекции движения исходных динамических систем (5) и (6) на подпространство рассогласований (7) будет единичной:

$$\frac{d}{dt}\begin{vmatrix} S_\alpha \\ S_\beta \end{vmatrix} = -\frac{r}{L}\begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}\begin{vmatrix} i_\alpha - \hat{i}_\alpha \\ i_\beta - \hat{i}_\beta \end{vmatrix} +$$

$$+ \frac{\Omega\psi}{L}\begin{vmatrix} \sin\Gamma \\ -\cos\Gamma \end{vmatrix} - \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}\begin{vmatrix} u_1 \\ u_2 \end{vmatrix}.$$

Исходная задача синтеза скользящего движения по пересечению поверхностей разрывов $S_\alpha = 0$ и $S_\beta = 0$ распадается на две независимые одномерные задачи. Каждая из них решается с учетом условия существования одномерного скользящего движения [3]. Для обеспечения скользящего движения по пересечению указанных поверхностей скольжения корректирующие воздействия u_1 и u_2 должны носить разрывной характер:

$$u_1 = U_1 \mathrm{sgn} S_\alpha, \quad u_2 = U_2 \mathrm{sgn} S_\beta,$$
$$U_1 \geqslant |-r(i_\alpha - \hat{i}_\alpha) + \Omega\psi\sin\Gamma|/L,$$
$$U_2 \geqslant |-r(i_\beta - \hat{i}_\beta) + \Omega\psi\cos\Gamma|/L.$$

В скользящем режиме рассогласования S_α и S_β равны нулю, а эквивалентные значения корректирующих воздействий u_1 и u_2

$$u_{1eq} = -\Omega\psi\sin\Gamma, \quad u_{1eq} = \Omega\psi\cos\Gamma \qquad (8)$$

несут информацию о частоте вращения и угловом положении ротора.

К сожалению, в данном случае эквивалентные значения каждого из корректирующих воздействий (8) несут информацию и об угловом положении, и о частоте вращения ротора. Поэтому необходимы дополнительные вычислительные операции для получения требуемой информации об угловом положении и частоте вращения ротора:

$$\Gamma = -\mathrm{arctg}(u_{1eq}/u_{1eq}), \qquad (9)$$

$$\Omega = \sqrt{u_{1eq}^2 + u_{2eq}^2}/\psi. \qquad (10)$$

Полученные оценки механических переменных требуют выделения эквивалентных значений корректирующих воздействий u_1 и u_2 (например, фильтром низких частот) и дальнейшей их обработки согласно выражениям (9) и (10).

Отметим, что требование сингулярной возмущенности системы в данном случае всегда выполнимо.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Выделен класс нелинейных динамических систем, для которых сформулировано достаточное условие оценивания неизмеряемых компонент вектора состояния по измеряемым компонентам. Это условие носит конструктивный характер, что открывает возможности для разработки методов синтеза алгоритмов оценивания на скользящих режимах. Предложенные методы оценивания переменных состояния базируются на адаптивных свойствах скользящих режимов и отличаются объемом вычислительных операций, необходимых для получения оценок. Развиваемый подход к решению задачи информационного обеспечения управления особенно эффективен при построении трехфазного электропривода без датчиков механических величин.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство утверждения 1. Если сформулированные в утверждении условия выполняются, то в исходной динамической системе (1) всегда можно выделить подсистему вида:

$$dx_m/dt = f_m(x_1, t) + \hat{D}(x_1, t)x_2(t) + B_m(x_1, t)u(t) \qquad (\text{П. } 1)$$

где $x_m(t)$ — вектор состояния подсистемы, $x_m(t) \in R^{n-q}$, $x_1^T(t) = (x_m, x_m^*)$; $f_m(x_1, t)$ — вектор-столбец объекта управления, $f_1^T(x_1, t) = (f_m(x_1, t), f_m^*(x_1, t))$, $f_m(x_1, t) \in R^{n-q}$; $B_m(x_1, t)$ — матрица размерности $(n - q)\times m$, $B^T(x1, t) = (B_m(x_1, t), B_m^*(x_1, t))$.

Построим динамическую модель вида

$$d\hat{x}_m(t)/dt = f_m(x_1, t) + \hat{D}^*(t)v(t) + B_m(x_1, t)u(t), \qquad (\text{П. } 2)$$

где $\hat{x}_m(t)$ — вектор состояния модели, $\hat{x}_m(t) \in R^{n-q}$; $\hat{D}^*(t)$ — квадратная матрица, $\mathrm{rank}\,\hat{D}^*(t) = (n - q)$, $v(t)$ — вектор разрывных управлений модели, $v(t) \in R^{n-q}$, каждая компонента которого $v_i(t)$, $i = \overline{1, (n-q)}$, претерпевает разрыв на своей поверхности разрыва $S_i(x_m, \hat{x}_m)$ в расширенном пространстве состояний системы и модели и принимает в зависимости от знака функции $S_i(x_m, \hat{x}_m)$ значения $v_i^+(x, t)$ и $v_i^-(x, t)$:

$$v_i(x, t) = \begin{cases} v_i^+(x, t), \text{если } S_i(x_m, \hat{x}_m) > 0, \\ v_i^-(x, t), \text{если } S_i(x_m, \hat{x}_m) < 0, \end{cases} \qquad (\text{П. } 3)$$

Потребуем, чтобы поведение модели (П. 2) соответствовало поведению подсистемы (П. 1), т. е. совпадали изменения поведения модельного $\hat{x}_m(t)$ и системного $x_m(t)$ векторов состояния. Это можно обеспечить путем организации с помощью вектора разрывных управлений (П. 3) многомерного скользящего движения по пересечению поверхностей скольжения, представляющих собой нулевое рассогласование по компонентам модельного и системного векторов состояния:

$$S(x_m, \hat{x}_m) = \hat{x}_m - x_m = \varepsilon = 0. \qquad (П. 4)$$

Для доказательства попадания изображающей точки на пересечения (П. 4) из произвольных начальных условий и устойчивого движения по этому пересечению воспользуемся доказанной в работе [3] возможностью применения второго метода А. М. Ляпунова. Если производная непрерывно дифференцируемой положительной функции будет отрицательна всюду, кроме поверхности разрыва, где она не определена, то изображающая точка из любых начальных условий попадает на пересечение поверхностей разрывов и будет существовать скользящее движение по этому пересечению.

Выберем положительно определенную функцию Ляпунова в виде

$$W = \varepsilon^T\varepsilon/2, \qquad (П. 5)$$

производная которой

$$dW/dt = \sum_{i=1}^{n-q} \varepsilon_i(d\varepsilon_i/dt). \qquad (П. 6)$$

Условие существования многомерного скользящего движения будет выполнено, если сумма (П. 6), будет отрицательна везде, кроме пересечения поверхностей разрывов. Производная вектора рассогласования ε в силу уравнения движения исходной системы (П.1) и динамической модели (П.2) рассчитывается следующим образом:

$$d\varepsilon/dt = -\hat{D}(x_1, t)x_2(t) + \hat{D}^* v(t). \qquad (П. 7)$$

Так как согласно постановке задачи, матрица $\hat{D}^*(t)$ полного ранга, то для упрощения доказательства выберем ее единичной. В этом случае знак произведения i-й компоненты вектора рассогласования ε_i на ее производную будет всегда отрицательным, если алгоритм изменения разрывного управления

$$v_i = -V_i \mathrm{sgn} S_i, \qquad (П. 8)$$

а модуль разрывного управления V_i выбирается в соответствии с условием

$$V_i = \left|\sum_{j=1}^{n-q} d_{ij}(t)x_2(t)\right|, \qquad (П. 9)$$

где $d_{ij}(t)$ — элемент матрицы $\hat{D}(x_1, t)$.

Таким образом, при выполнении условий (П. 8) и (П. 9) для всех компонент вектора модельных управлений $v(t)$ будет существовать многомерное скользящее движение по пересечению поверхностей разрыва $S(x_m, \hat{x}_m) = \hat{x}_m - x_m = \varepsilon = 0$. Само скользящее движение описывается с помощью эквивалентного управления v_{eq} [3]. Оно вычисляется в силу уравнения $dS/dt = 0$ и представляет собой непрерывный аналог разрывного управления $v(t)$, т. е. его усреднение в скользящем режиме. В данном случае уравнения $dS/dt = 0$ имеет вид:

$$-\hat{D}(x_1, t)x_2(t) + v_{eq} = 0. \qquad (П. 10)$$

Векторно-матричное уравнение (П. 10) представляет собой систему $(n - q)$ линейных уравнений с $(n - q)$ неизвестными. Так как по постановке задачи матрица $\hat{D}(x_1, t)$ невырожденная при всех $x_1(t)$, то система имеет единственное решение относительно вектора x_2:

$$x_2(t) = [\hat{D}(x_1, t)]^{-1}v_{eq}. \qquad (П. 11)$$

Таким образом, утверждение доказано, так как по известному значению эквивалентного управления v_{eq} и известным элементам квадратной матрицы $\hat{D}(x_1, t)$, определяемым с использованием измеренных значений компонент вектора состояния x_1, согласно выражению (П. 11) может быть вычислено значение вектора состояния x_2. ♦

Д о к а з а т е л ь с т в о утверждения 2. Если матрица $\hat{D}^*(t)$ имеет вид $\hat{D}(x_1, t)$, то тогда согласно выражению (П. 7) уравнение изменения ошибки ε представляется в виде:

$$d\varepsilon/dt = \hat{D}(x_1, t)(-x_2(t) + v(t)). \qquad (П. 12)$$

В скользящем режиме, когда $de/dt = 0$

$$v_{eq} = x_2(t). \qquad (П. 13)$$

Докажем, что из произвольных начальных условий система (П. 1), (П. 2) попадет на пересечение (П. 4) и будет устойчиво двигаться по нему, а эквивалентное управление будет удовлетворять условию (П. 13). Воспользуемся новым вектором функций рассогласования $S^{*T} = (S_1^*, ..., S_{n-q}^*)$, связанным линейным преобразованием с исходным вектором S:

$$S^* = R_S S, \qquad (П. 14)$$

где $R_S = (\hat{D}(x_1, t))^T$ — матрица линейного преобразования. В силу линейности преобразования $S = S^* = 0$.

В этом случае выражение для вычисления производной (П. 6) от выбранной функции Ляпунова (П. 5) с учетом выражения (П. 14) может быть переписана в виде:

$$dW/dt = \varepsilon^T(d\varepsilon/dt) =$$
$$= (R_S^{-1} S^*)^T \hat{D}(x_1, t)(-x_2(t) + v(t)). \qquad (П.15)$$

С учетом выбранной матрицы линейного преобразования R_S производная функции Ляпунова (П. 15)

$$dW/dt = (S^*)^T(-x_2(t) + v(t)). \qquad (П. 16)$$

Если модуль разрывного управления V_i выбрать из условия

$$V_i \geqslant |v_{i\,eq}| = |S_i^* x_2^i|, \qquad (П. 17)$$

где x_2^i — i-я компонента вектора состояния $x_2(t)$, а алгоритм управления имеет вид:

$$v_i = -V_i \operatorname{sgn} S_i^*, \qquad (П. 18)$$

то условие существования многомерного скользящего движения (отрицательность производных функции Ляпунова (П. 16) везде, кроме пересечения поверхностей разрывов) будет выполнено, т. е. при любых начальных условиях скользящий режим по пересечению поверхностей разрывов $S = S^* = 0$ будет иметь место.

В этом случае эквивалентное управление v_{eq} определяется из уравнения:

$$[\hat{D}(x_1, t)]^T[\hat{D}(x_1, t)][-x_2(t) + v_{eq}(t)] = 0. \qquad (П. 19)$$

Векторное уравнение (П. 19) представляет собой систему $(n - q)$ линейных уравнений с $(n - q)$ неизвестными, причем каждое из них содержит только одно неизвестное, т. е. $v_{eq}(t) = x_2(t)$.

Утверждение доказано — значение каждой компоненты вектора эквивалентного управления v_{eq} является непосредственной оценкой значения одной из компонент вектора состояния x_2. ♦

Доказательство утверждения 3. Требуется доказать, что в системе (4), (П. 1)—(П. 4), (П. 17), (П. 18) порядка $2(n - q)$ при любых начальных условиях возникает скользящий режим по пересечению поверхностей $S = S^* = 0$.

Рассмотрим положительно определенную функцию Ляпунова

$$W = \sum_{i=1}^{n-q} |\varepsilon_i| + \sum_{j=1}^{n-q} |V_j S_j^*| + \sum_{i=1}^{n-q} |x_2^j S_j^*|. \qquad (П. 20)$$

Вне поверхностей разрыва производная функции Ляпунова (П. 20) определена и вычисляется в силу уравнений (4), (П. 12), (П. 17), (П. 18):

$$dW/dt = (d\varepsilon/dt)^T \operatorname{sgn}\varepsilon + V^T(dS^*/dt) + x_2^T(dS/dt) =$$
$$= -(V + x_2)^T S^*, \qquad (П. 21)$$

где $V^T = (V_1 \operatorname{sgn} S_1^*, ..., V_{n-q} \operatorname{sgn} S_{n-q}^*)$, $(\operatorname{sgn}\varepsilon)^T = (\operatorname{sgn}\varepsilon_1, ..., \operatorname{sgn}\varepsilon_{n-q})$.

Из выражений (П. 20) и (П. 21) следует, что вне поверхностей разрыва производная функции Ляпунова в силу условия (П. 17) отрицательно определена и если траектория не будет пересекать поверхности разрыва или будет их пересекать в отдельных точках, то функция Ляпунова W будет монотонно убывать в соответствии с уравнением $dW/dt + W = 0$.

В случае возникновения скользящего режима на пересечении части поверхностей, т. е. условие $S = S^* = 0$ выполняется только для части поверхностей

$$S^p = 0, \qquad (П. 22)$$

$$S^{*r} = 0, \qquad (П. 23)$$

где $1 \leqslant p \leqslant n - q$ и $1 \leqslant r \leqslant n - q$ — число поверхностей, на которых существует скользящий режим, движение системы описывается с помощью метода эквивалентного управления. Порядок расширенной системы уравнений (4), (П. 12) понижается путем исключения компонент векторов функций рассогласования ε и S^* в силу алгебраических уравнений (П. 22) и (П. 23), а вместо разрывных компонент векторов управлений $v(t)$ и $u(t)$ используются их эквивалентные значения, полученные в силу уравнений $dS^p/dt = 0$, $dS^{*r}/dt = 0$.

В этом случае из функции Ляпунова (П. 20) могут быть исключены переменные, относительно которых скользящий режим существует. Таким образом, функция становится вновь дифференцируемой, и ее производная вычисляется в соответствии с укороченной системой уравнений (4), (П. 12)

$$dW/dt = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq p}}^{n-q} [(d\varepsilon_i/dt)\operatorname{sgn}\varepsilon_i] + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq r}}^{n-q} (V_j \operatorname{sgn} S_j^* + x_2^j) =$$
$$= -(V + x_2)^T S^*,$$

где вектор $V^T = (V^1, V^2)$, $(V^1)^T = (V_1 \operatorname{sgn} S_1^*, ..., V_{n-q-p} \operatorname{sgn} S_{n-q-p}^*)$, $(V^2)^T = (v_{(n-q-p)eq}, ..., v_{(n-q)eq})$, $S^* \in R^{n-q-p}$.

Очевидно, что и в этом случае производная функции Ляпунова отрицательна вне поверхностей разрыва и монотонно убывает, а расширенная система (4), (П. 12) асимптотически стремится к многомерному скользящему движению по пересечению поверхностей $S = S^* = 0$. ♦

ЛИТЕРАТУРА

1. *Kvakernaak H., Sivan R.* Linear optimal control systems. — N.-Y: John Wiley & Son Inc., 1972.
2. *Поляк Б.Т., Щербаков П.С.* Робастная устойчивость и управление. — М.: Наука, 2002.
3. *Уткин В.И.* Скользящие режимы в задачах оптимизации и управления. — М.: Наука, 1981.
4. *Краснова С.А., Уткин В.А., Михеев Ю.В.* Каскадный синтез наблюдателей состояния нелинейных многомерных систем // Автоматика и телемеханика. — 2001. — № 2. — С. 43—64.
5. *Шубладзе А.М.* Решение задачи «быстрой» идентификации с помощью многомерных скользящих режимов // Там же. — 1980. — № 2. — С. 72—78.
6. *Vittek J., Dodds S.J.* Forced dynamics control of electric drives. — Zilina: EDIS — Publishing Center of Zilina University, 2003.
7. *Рывкин С.Е., Изосимов Д.Б.* Алгоритмы идентификации механических координат электропривода // Электротехника. — 1994. — № 7. — С. 26—30.

☎ *(495) 334-23-10, e-mail: rivkin@ipu.rssi.ru*

Статья представлена к публикации членом редколлегии В.Ю. Рутковским. ❑