УДК 519.86

МОДЕЛЬ ДИНАМИКИ В ЗАДАЧАХ УПРАВЛЕНИЯ ДЕГРАДИРУЮЩИМИ СИСТЕМАМИ[1]

В.В. Баранов, В.М. Матросов

Центр исследований устойчивости и нелинейной динамики при Институте машиноведения РАН, г. Москва

Построена модель переходной функции марковского процесса, описывающего управляемый процесс деградации. Модель ориентирована на применения к решению проблемы управления эффективностью и безопасностью деградирующих систем.

ВВЕДЕНИЕ

В работе [1] рассмотрена проблема управления эффективностью и безопасностью деградирующих систем. Деградация определяется внутренними процессами износа, старения, усталости и т. д., которые ухудшают качество функционирования системы и завершаются отказом либо гибелью системы. Динамика таких процессов описывается марковским процессом с монотонными, обрывающимися траекториями. Применение управляющих воздействий по предупреждению отказов порождает управляемый марковский процесс, описывающий процесс использования, деградации и восстановления работоспособности системы. Стохастическая закономерность такого процесса определяется переходной функцией $q^g(S|S\times Y)$, задающей вероятности переходов на множестве состояний S под воздействием управлений из множества Y и зависящей от структурной альтернативы $g \in G$ как от параметра. Развиваемые в работе [1] методология и методы используют переходную функцию $q^g(S|S\times Y)$ в неявном виде. Однако для возможности практического решения задач в соответствии с методологией [1] переходная функция должна быть задана в явном виде. Поэтому задача настоящей статьи состоит в построении переходной функции $q^g(S|S\times Y)$ в явном виде.

[1] Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект № 05-0833574 а.

1. МОДЕЛЬ ДИНАМИКИ ПРОЦЕССА ДЕГРАДАЦИИ

Процесс деградации описывается марковским процессом с монотонными, обрывающимися траекториями. Без ограничения общности можно полагать, что траектории *не убывают* и принимают значения в компактном борелевском пространстве состояний $(S, \mathcal{B})$, где множество состояний является единичным отрезком $S = [0, 1] \subset R^1$, $\mathcal{B}$ − σ-алгебра его подмножеств. Кроме того, будем полагать, что процесс является *строго* марковским. Для задания его переходной функции необходимо указать вероятностную меру на переходах за время $t > 0$ из произвольной точки $z \in S$ в любое подмножество $\Gamma = (a, b] \subset S$, где $0 \leqslant a < b \leqslant 1$. Требуемую переходную функцию условимся обозначать $q(t, \Gamma|z)$. Для ее построения рассмотрим теоретико-вероятностные события, связанные с указанными переходами. Введем событие вида:

$$A(t, \Gamma|z) = \{\text{за время } t > 0 \text{ совершился переход из точки } z \in S \text{ в множество } \Gamma = (a, b]\}.$$

Поскольку траектории случайны и являются обрывающимися, то в случайный момент времени $\xi > 0$ может произойти обрыв траектории, который условимся называть «отказом» системы. Очевидно, что событие $A(t, \Gamma|z)$ происходит лишь в том случае, если за время $t > 0$ отказ не произошел, т. е. при условии события $B(t, \Gamma|z)$ вида:

$$B(t, \Gamma|z) = \{\text{за время } t > 0 \text{ перехода из точки } z \in S \text{ в множество } \Gamma \text{ отказ не произошел}\}.$$

С другой стороны, если событие $A \equiv A(t, \Gamma|z)$ произошло, то произошло и событие $B \equiv B(t, \Gamma|z)$. Отсюда следует справедливость представления:

$$A = (A \cap B). \tag{1}$$

Дополнением $\bar{A}$ к событию A является событие вида:

$\bar{A} \equiv \bar{A}(t, \Gamma|z) =$ {за время $t > 0$ совершился переход из точки $z \in S$ в множество $S \backslash \Gamma$, включающее поглощающее состояние $\hat{s} = 1$}.

Поскольку события A и $\bar{A}$ несовместны, то $P(A) + P(\bar{A}) = 1$. При этом вероятности событий A и $\bar{A}$ являются вероятностями соответствующих переходов. С учетом этого наша задача состоит в указании таких вероятностей в явном виде.

По теореме умножения вероятностей из условия (1) получаем:

$$P(A) = P(A \cap B) = P(A|B)P(B). \tag{2}$$

Отсюда следует, что для вычисления вероятности $P(A)$ события A необходимо задать условную вероятность $P(A|B)$ и безусловную вероятность $P(B)$.

По определению события A вероятность $P(A)$ является переходной вероятностью $q(t, \Gamma|z)$. Условная же вероятность $P(A|B)$ является вероятностью перехода из точки $z \in S$ в множество $\Gamma \subset S$, но при условии, что за время $t > 0$ отказ не произошел. С учетом этого условную вероятность $P(A|B)$ можно обозначить $q(t, \Gamma|z, \xi > t)$. Будем называть ее *условной* переходной функцией. Такая функция задает вероятностную меру на подмножествах $\Gamma = (a, b] \subset [0, 1]$, в которые может попадать процесс $\{s_t\}$ за время $t > 0$ из точки $z \in S$ при условии, что за время $t > 0$ отказ не произошел. Поскольку траектории s_t не убывают по t, то указанная мера сосредоточена на полуинтервале $[z, 1) \subset [0, 1]$.

Рассмотрим приращения $r(t|z) = (s_t - z) \geqslant 0$ траектории s_t за время $t \geqslant 0$ из точки $z \in [0, 1)$. Величина $r(t|z)$ случайна и принимает значения из отрезка $[0, 1 - z]$. Поэтому и вся вероятностная мера, рассматриваемая на приращениях, сконцентрирована на отрезке $[0, 1 - z]$. При этом в силу однородности процесса она зависит лишь от длительности интервала времени $(0, t]$, на котором рассматриваются приращения, но не от момента времени $t \geqslant 0$. Очевидно, что вероятностная мера на приращениях однозначно определяет вероятности переходов $q(t, \Gamma|z, \xi > t)$. Способ построения требуемых вероятностей переходов основывается на существовании взаимно однозначного соответствия между вероятностными мерами и функциями распределения [2]. В частности, пусть задана функция распределения $F(x|z, t)$ приращений $z(t|z) = s_t - z$. Тогда вероятностная мера P на подмножествах $\Gamma = (a, b] \subset [0, 1]$ определяется единственным способом в соответствии с условием:

$$P((a, b]|t, z) = F(b|t, z) - F(a|t, z), \ \forall (a, b] \subset [0, 1].$$

С использование этого соотношения переходные вероятности $q(t, \Gamma|z, \xi > t)$, $\Gamma = (a, b] \subset [z, 1]$, $b > a$, $a \geqslant z$ определяются условиями вида:

$$q(t, (a, b]|z, \xi > t) = \\ = \begin{cases} F(b\,|\,t, z) - F(a\,|\,t, z), (a, b] \subset [0, 1 - z], \\ 0, (a, b] \not\subset [0, 1 - z]. \end{cases} \tag{3}$$

Заметим, что до момента обрыва траектория $\{s_t\}$ непрерывна. Тогда естественно полагать, что функция распределения $F(x|t, z)$ абсолютно непрерывна по переменной x на отрезке $[0, 1 - z]$. По переменной же времени t требует уточнений асимптотическое поведение функции $F(x|t, z)$ при $t \to 0$ и $t \to \infty$. С этой целью для определенности и наглядности рассуждений положим, что деградация определяется износом объекта. При этом естественно полагать, что за «малое время» объект «изнашивается мало». Отсюда следует, что на малом промежутке времени приращения траектории также малы и при $t \to 0$ они будут стремиться к 0. В этих предположениях функция распределения $F(x|t, z)$ должна удовлетворять следующему условию.

Условие 1. При $t \to 0$ функция распределения $F(x|t, z)$ стремится к вырожденной функции

$$F^0(x|z) = \begin{cases} 1, x \geq 0, \\ 0, x < 0. \end{cases}, \ x \in R^1. \ \blacklozenge$$

С другой стороны, ясно, что в силу деградации при неограниченном возрастании времени объект полностью изнашивается. В таком случае для заданного начального состоянии $z \in [0, 1)$ приращения траектории при $t \to \infty$ стремятся к значению $(1 - z)$. В этих условиях функция распределения $F(x|t, z)$ должна удовлетворять следующему условию.

Условие 2. При $t \to \infty$ функция распределения $F(x|t, z)$ стремится к вырожденной функции

$$F^\infty(x|z) = \begin{cases} 1, x > 1 - z, \\ 0, x \leq 1 - z, \end{cases}, \ x \in R^1. \ \blacklozenge \tag{4}$$

С учетом этих условий наша ближайшая задача состоит в построении функции распределения $F(x|t, z)$ в явном виде.

Поскольку функция распределения $F(x|t, z)$ абсолютно непрерывна по переменной $x \in [0, 1]$, то существует плотность распределения $f(x|t, z)$ на отрезке [0, 1]. Заметим, что среди непрерывных на единичном отрезке распределений, для которых плотность может быть задана в *явном виде*, известно лишь одно, так называемое β-*распределение*. Его плотность имеет вид:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\mathrm{B}(\alpha, \beta)} x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}, x \in [0, 1], \\ 0, x \notin [0, 1], \end{cases}$$

$\alpha > 0, \beta > 0$, где α и β — параметры, $\mathrm{B}(\alpha, \beta)$ — бета-функция. С учетом этого нужную функцию распределения $F(x|t, z)$ будем строить с использованием плотности β-распределения.

Поскольку функция $F(x|t, z)$ зависит от переменной времени t, то с использованием β-распределения его параметры также должны быть некоторыми функциями времени. Однако заметим, что при значениях параметров $\alpha > 1$ и $\beta > 1$ плотность β-распределения унимодальна с модой в точке $x = \dfrac{\alpha - 1}{\alpha + \beta - 2}$ [3]. Но согласно условию 2 функция распределения $F(x|t, z)$ при $t \to \infty$ стремится к вырожденной функции распределения $F^{\infty}(x|z)$ вида (4). Отсюда следует, что при $t \to \infty$ требование унимодальности плотности β-распределения становится избыточным. Тогда естественно строить функцию распределения $F(x|t, z)$, фиксируя один параметр β-распределения, а другой рассматривать в качестве функции времени. Для определенности зафиксируем параметр β, положив $\beta \equiv 1$, параметр же α будем определять некоторой функции времени $\alpha(t)$, $t \in [0, \infty)$. В рассматриваемых условиях плотность β-распределения, определенная на приращениях $r(t|z) = (s_t - z)$, записывается в виде

$$f(x|t, z) = \begin{cases} \alpha(t)\dfrac{x^{\alpha(t)-1}}{(1-z)^{\alpha(t)}}, x \in [0, 1-z], \\ 0, x \notin [0, 1-z], \end{cases}$$

$\alpha(t) > 0$.

Соответствующая функция распределения $F(x|t, z)$ выражается в виде:

$$F(x|t, z) = \begin{cases} \left(\dfrac{x}{1-z}\right)^{\alpha(t)}, x \in [0, 1-z), \\ 0, x < 0, \\ 1, x \geq 1-z. \end{cases} \qquad (5)$$

Для однозначного задания функции распределения $F(x|t, z)$ необходимо указать явный вид параметр-функции $\alpha(t)$. Для этого вначале сформулируем требования к ее асимптотическому поведению при $t \to 0$ и $t \to \infty$.

Из условия 1 следует, что при $t \to 0$ функция распределения вида (5) должна удовлетворять условию:

$$\lim_{t \to +0} \left(\frac{x}{1-z}\right)^{\alpha(t)} = 1, \quad x \in (0, 1-z].$$

Отсюда в свою очередь следует, что $\alpha(t) \downarrow 0$ при $t \to +0$.

Аналогичным образом, из условия 2 следует, что $\alpha(t) \uparrow \infty$ при $t \to \infty$.

Наконец, поскольку при фиксированном $z \in [0, 1)$ приращения $r(t|z) = s_t - z$ не убывают по t, то функция $\alpha(t)$ должна быть монотонной по t, возрастая от 0 до $+\infty$.

Из выполненных построений следует, что искомая функция $\alpha(t)$ является параметром переходной вероятностной меры $q(t, \Gamma|z, \xi > t)$. Тогда нужную функцию $\alpha(t)$, вообще говоря, можно искать из решения уравнения Колмогорова—Чепмена для переходной функции марковского процесса [2, 3]. Однако с использованием плотности β-распределения решение уравнения Колмогорова—Чепмена в явном виде не выражается. Но тогда можно воспользоваться следствием уравнения Колмогорова—Чепмена для моментов, которое для первого момента выражается в явном виде. С использованием переходной плотности уравнение Колмогорова—Чепмена для первого момента запишется в виде:

$$\int_z^1 f(x|t, z)dx = \int_z^1 x \int_z^1 f(x|t - \tau, s) f(s|\tau, z) ds dx,$$
$$\forall \tau : 0 < \tau < t.$$

В условиях используемой здесь плотности β-распределения это уравнение сводится к функциональному уравнению вида:

$$\frac{\alpha(t)}{\alpha(t)+1} = \frac{\alpha(\tau)}{\alpha(\tau)+1} + \frac{\alpha(t-\tau)}{(\alpha(\tau)+1)[\alpha(t-\tau)+1]}. \qquad (6)$$

Утверждение 1. *Решением уравнения* (6) *является функция* $\alpha(t)$ *вида*:

$$\alpha(t) = e^{\mu t} - 1, \quad \mu > 0. \ \blacklozenge \qquad (7)$$

Справедливость этого утверждения может быть проверена непосредственной подстановкой.

Замечание. Можно показать, что параметр $\mu > 0$ полученной в правой части (7) функции имеет смысл средней скорости износа. Отсюда открывается возможность оценки параметра μ. Однако способ его оценки здесь мы рассматривать не будем.

С использованием полученной функции $\alpha(t) = e^{\mu t} - 1$ можно теперь указать явный вид переходной вероятности $q(t, \Gamma|z, \xi > t)$. Действительно, пусть задан параметр износа $\mu > 0$. Тогда с использованием функции распределения $F(x|t, z)$ вида (5) и представления (3) для переходной вероятности из точки $z \in S$ в подмножество $\Gamma = (a, b] \subset [0, 1 - z]$, получаем следующее выражение для переходной вероятности

$$q(t, \Gamma|z, \xi > t) = q(t, (a, b]|z, \xi > t) =$$
$$= F(b|t, z) - F(a|t, z) = \left(\frac{b}{1-z}\right)^{\alpha(t)} - \left(\frac{a}{1-z}\right)^{\alpha(t)} =$$
$$= \left(\frac{b}{1-z}\right)^{e^{\mu t}-1} - \left(\frac{a}{1-z}\right)^{e^{\mu t}-1}. \quad (8)$$

Полученное выражение в явном виде определяет условную вероятность $P(A|B) = q(t, \Gamma|z, \xi > t)$, используемую для вычисления безусловной вероятности события A по формуле (2) вида: $P(A) = P(A|B)P(B)$. Остается в явном виде выразить безусловную вероятность $P(B)$. С этой целью рассмотрим событие вида:

$B(z) \equiv$ {при фиксированном $z \in S$ за время t отказ не произошел}.

Тогда событие B можно представить пересечением $B = \bigcap_{z \in \Gamma} \{B(z)\}$, где $\Gamma \equiv (a, b] \subset [0, 1 - z] \subset S$.

Если события $B(z)$ независимы для всех $z \in \Gamma = (a, b]$, то вероятность события B будет определяться произведением: $P(\bigcap_{z \in (a, b)} \{B(z)\}) = \prod_{z \in (a, b]} P(B(z)) = P(B)$. Однако в условиях деградации события $B(z)$, $z \in (a, b]$ на самом деле зависимы в совокупности. С учетом этого имеет место следующее

Утверждение 2. *В условиях деградации для вероятностей событий* $B = \bigcap_{z \in (a, b)} \{B(z)\}$ *и* $B(b)$ *справедливо равенство:* $P(B) = P(B(b))$, *где* b *— правая граница полуинтервала* $(a, b] \subset S$. ♦

С учетом определения событий $B(z)$, $z \in (a, b]$ и полученного утверждения можно использовать обозначение $P(\xi > t|b) \equiv P(B)$. Тогда вероятность события A, определенная в соответствии с формулой (2), запишется в виде:

$$P(A) \equiv q(t, \Gamma|z) = q(t, \Gamma|z, \xi > t)P(\xi > t|b). \quad (9)$$

Поскольку здесь условная вероятность $q(t, \Gamma|z, \xi > t)$ однозначно определена (формулой (8)), то остается указать способ явного задания вероятности $P(B) = P(\xi > t|b)$.

Заметим, что при фиксированном состоянии $z \in S$ отказ может произойти либо не произойти, и других вариантов событий не существует. Поэтому событие вида

$\bar{B}(z)$ = {при фиксированном состоянии $z \in S$ за время $t > 0$ произошел отказ}

является дополнительным к событию $B(z)$. Тем самым $P(B(z)) + P(\bar{B}(z)) = 1$. Отсюда имеем

$$P(\bar{B}(z)) = 1 - P(B(z)) = 1 - P(\xi > t|z).$$

Здесь ξ является случайной величиной времени жизни до отказа. Тогда функция вида

$$1 - P(\xi > t|z) = F(\xi < t|z) \equiv F_\xi(t|z)$$

является функцией распределения случайной величины ξ при фиксированном состоянии $z \in S$.

Из определения события $B(z)$ и свойств деградации следует, что функция распределения $F_\xi(t|z)$ должна удовлетворять следующим асимптотическим условиям:

$$\lim_{t \to \infty} F_\xi(t|z) = 1, \quad \forall\, z \in S.$$

$$\lim_{t \to \infty} F_\xi(t|z) = 1, \quad \forall\, t > 0. \quad (10)$$

$$\lim_{t \to \infty} F_\xi(t|z) = p(t), \quad 0 < p(t) < 1. \quad (11)$$

Эти условия означают, что для любого $t > 0$ при любом $z \in [0, 1)$, в том числе при $z = 0$, отказ может произойти с положительной вероятностью $p(t) > 0$, а при $z = 1$ отказ происходит достоверно при любом $t > 0$.

Поскольку эти условия являются очевидными следствиями определения события $B(z)$ и свойств деградации, то формально будем называть их *условиями деградации.*

По исходным предположениям процесс деградации является однородным строго марковским процессом с неубывающими и обрывающимися траекториями. В этих условиях моменты ξ отказа являются *марковскими моментами*, т. е. не зависящими от будущего [2, 3]. В рассматриваемых предположениях требуется указать явный вид функции распределения $F_\xi(t|z)$.

С этой целью введем функцию вида

$$\Lambda(t, z) = -\frac{dF_\xi(t|z)}{1 - F_\xi(t|z)}, \quad t \in [0, \infty), z \in [0, 1].$$

Следуя терминологии теории надежности, такую функцию будем называть *опасностью отказа* [4]. Но в отличие от предположений теории надежности здесь опасность отказа зависит не только от времени $t \in [0, \infty)$, но и от состояния $z \in [0, 1]$. Поскольку по предположению процесс деградации является *строго* марковским, то моменты отказов являются *марковскими моментами* в том смысле, что вероятность их возникновения на интервале $(t, t + \tau)$ не зависит от момента времени t, а зависит лишь от длины интервала времени τ и состояния $z \in S$ [3]. В этих условиях так же, как в теории надежности, можно показать, что функция опасности отказа $\Lambda(t, z)$ не зависит от времени t, и зависит лишь от состояния $z \in E$. С учетом этого по аналогии с построениями теории надежности [4] получаем, что функция распределения $F_\xi(t|z)$ выражается в виде

$$F_\xi(t|z) = 1 - e^{-\Lambda(z)t}, \qquad (12)$$

а соответствующая ей плотность вероятности является *экспоненциальной* функцией вида:

$$f(t|z) = \Lambda(z)e^{-\Lambda(z)t}.$$

Явный вид функции $\Lambda(z)$ определяется из условий деградации (10) и (11). В частности, из условия (10) следует, что функция $\Lambda(z)$ при $z \to 1$ должна стремиться к $+\infty$, а из условия (11) следует, что при $z \to 0$ функция $\Lambda(z)$ должна стремиться к некоторой постоянной $\lambda > 0$. Требуемым условиям очевидным образом удовлетворяет функция вида

$$\Lambda(z) = \lambda/(1 - z), \quad z \in [0, 1], \lambda > 0.$$

Отсюда, в частности, следует, что параметр $\lambda > 0$ имеет смысл интенсивности отказов «нового» объекта (точнее, при значении $z = 0$), и согласно работе [4] может быть вычислен из соотношения $\lambda = 1/T_0$, где T_0 — среднее времени жизни при фиксированном значении $z = 0$.

Теперь напомним, что наша окончательная задача состоит в указании безусловной вероятности события A в соответствии с формулой (9) вида

$$P(A) \equiv q(t, (a, b]|z) = \\ = q(t, (a, b]|z, \xi > t)P(\xi > t|b), \qquad (13)$$

где b — правая граница полуинтервала $(a, b] \subset S$, а условная вероятность $q(t, (a, b]|z, \xi > t)$ определена в явном виде выражениями (8). Вероятность же условия $P(\xi > t|b) = 1 - F_\xi(t|b) \equiv P(B)$ с учетом выражения (12) определяется в явном виде формулой:

$$P(\xi > t|b) = e^{-\Lambda(z)t} = e^{-\left(\frac{\lambda t}{1-b}\right)}. \qquad (14)$$

Подставляя в правую часть (13) соответствующие формулы (8) и (14), получаем явное выражение для переходной вероятности:

$$P(A) \equiv q(t, (a, b]|\, z) = q(s, t, (a, b]|\xi > t)P(\xi > t|b) =$$

$$= \begin{cases} \left[\left(\frac{b}{1-z}\right)^{e^{\mu t}-1} - \left(\frac{a}{1-z}\right)^{e^{\mu t}-1}\right] e^{-\left(\frac{\lambda t}{1-b}\right)}, \ (1 > b > a, a \ge z, \mu > 0, \lambda > 0,) \\ 0, b = 1, \\ 0, b = a. \end{cases} \qquad (15)$$

Этим в явном виде определена безусловная вероятность события A вида:

$A \equiv A(t, \Gamma|z) = \{$за время $t > 0$ совершился переход из начальной точки $z \in S$ в множество $\Gamma \subset S\}$.

Остается указать вероятность дополнительного к событию A события $\bar{A} \equiv \bar{A}(t, \Gamma|z)$. Очевидным образом она выражается в виде

$$P(\bar{A}) = (q(t, (E\backslash(a, b]|z) = 1 - P(A) = \\ = 1 - q(t, (a, b]|z),$$

где вероятность $P(A) \equiv q(t, (a, b]|z)$ определена выражением (15).

Таким образом, функция $q(t, (a, b]|z)$ вида (15) является вероятностной мерой на σ-алгебре $\mathcal{B}$. При этом такая функция очевидным образом измерима по переменной $z \in S$. Тем самым она является *переходной функцией* марковского процесса в пространстве состояний $(S, \mathcal{B})$, описывающего динамику деградирующего объекта.

Полученная функция $q(t, \Gamma|z)$ зависит от двух параметров: скорости деградации $\mu > 0$ и интенсивности отказов $\lambda > 0$. С учетом этого для нее будем использовать обозначение $q^{(\mu,\lambda)}(t, \Gamma|z)$. Учитывая, что $\Gamma = (a, b]$ является произвольным множеством из S, z — произвольная точка из S, для полученной переходной функции можно использовать обозначение $q^{(\mu,\lambda)}(t, S|S)$.

2. МОДЕЛЬ ДИНАМИКИ УПРАВЛЯЕМОЙ ДЕГРАДАЦИИ

Из явного выражения (15) для переходной функции следует, что имеется две возможности управления процессом деградации: путем изменения параметров μ и λ переходной функции $q^{(\mu,\lambda)}(t, S|S)$ либо путем непосредственного изменения состояния $z \in S$. Положим, что изменение параметров μ и λ достигается применением альтернатив из заданных множеств альтернатив использования $u \in U$, альтернатив безопасности $v \in V$ и структурных альтернатив $h \in H$. С учетом этого будем полагать, что рассматриваемые параметры являются функциями соответственно $\mu(u, v, h)$ и $\lambda(u, v, h)$, $(u, v, h) \in U\times V\times H$. Конкретный вид таких функций определяется особенностями объекта и предполагается заданным. С учетом этого зависимость переходной функции от выбора соответствующих альтернатив $(u, v, h) \in U\times V\times H$ при необходимости будем отражать обозначениями: $q^{(u,v,h)}(\cdot) \equiv q^{(\mu(u,v,h),\, \lambda(u,v,h))}(\cdot)$.

Управление же путем непосредственного изменения состояния достигается использованием управляющего воздействия восстановления работоспособности, выбираемого из заданного множества P в зависимости от ситуации работоспособности $x \in X$. Под воздействием $p \in P$ осуществляется мгновенный детерминированный переход из наблюдаемого состояния $s \in S$ в новое «улучшенное» состояние $z < s$ в соответствии с правилом:

$$z(s, p) = (1 - \varepsilon(p))\, s,$$

где $\varepsilon(p) \in [0, 1]$ — мера эффективности восстановления работоспособности, заданная для воздействия $p \in P$. Из полученной точки $z = z(s, p) \in S$ на выбранном шаге времени $\theta \in \Theta$ происходит эволюция состояний с закономерностью, определяемой переходной функцией $q^{(\mu, \lambda)}(\theta, S|z)$, задаваемой выражением (15) в предположении, что $t = \theta \in \Theta$; $\mu = \mu(u, v, h)$; $\lambda = \lambda(u, v, h)$, $(u, v, h) \in U\times V\times H$.

Обозначим $g = (u, v, h, \theta) \in U\times V\times H\times\Theta = G$. Тогда в соответствии с описанной схемой переходная функция процесса управляемой деградации определяется следующими условиями:

$$q^g(\Gamma|s, y) = q^{(u,\, v,\, h)}(\theta, \Gamma|s, (u, p)) =$$
$$= \begin{cases} q^{(\mu(u, v, h), \lambda(u, v, h))}(\theta, \Gamma|z), \\ z = (1 - \varepsilon(p))s; \quad s \in S, \end{cases}$$

где $s \in S$, $y = (u, p) \in U\times P$, $\Gamma = (a, b] \subset [0, 1]$, $q^{(\mu(u,v,h),\, \lambda(u,v,h))}(\theta, \Gamma|z)$ — переходная функция, определенная условиями (15).

Этим определена общая структура переходной функции $q^g(S|S\times Y)$ управляемого процесса деградации. Для ее окончательного однозначного задания требуется уточнение параметр-функций $\mu(u, v, h)$, $\lambda(u, v, h)$ и меры $\varepsilon(p)$ эффективности восстановления. Но эти функции могут быть заданы, лишь исходя из условий конкретного объекта. Поэтому без ограничения общности можно полагать их заданными. С учетом этого переходную функцию $q^g(S|S\times Y)$ управляемого процесса правомерно полагать однозначно построенной.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Построена модель *переходной функции*, определяющей стохастическую закономерность динамики управляемой деградации, ориентированной на применения к проблеме управления эффективностью и безопасностью деградирующих систем в соответствии с методологией, развитой в работе [1]. Однако методология формализации проблемы не исчерпывается заданием требуемой переходной функции. Другим важнейшим объектом методологии [1] является *функция полезности*, представляющая априорные предпочтения на управляющих альтернативах. Построение требуемой функции полезности представляет самостоятельный теоретический и практический интерес и является предметом самостоятельного исследования, которое существенно опирается на полученные в настоящей статье результаты и будет представлено в следующей статье.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Матросов В.М., Баранов В.В.* Проблема превентивной безопасности. Модель и методы принятия решений // Проблемы управления. — 2006. — № 5. — С. 2—11.
2. *Ширяев А.Н.* Вероятность. — М.: Наука, 1980. — 574 с.
3. Справочник по теории вероятностей и математической статистике. — Киев: Наукова думка, 1978. —582 с.
4. *Гнеденко Б.В., Беляев Ю.К., Соловьев А.Д.* Математические методы в теории надежности. — М.: Наука, — 1965. — 524 с.

☎ *(495) 132-01-47, e-mail: ciund@orc.ru*

Статья представлена к публикации членом редколлегии В.Ю. Рутковским. ❑