УДК 629.78

ИССЛЕДОВАНИЕ РАЗРЕШИМОСТИ ЗАДАЧ ОПРЕДЕЛЕНИЯ СПУТНИКОВЫХ ОРБИТ ПО ИЗМЕРЕНИЯМ

А. С. Девятисильный, Д. Е. Кислов

Предложен метод численной оценки разрешимости задачи наблюдения в условиях конечной точности модельных представлений, обусловленной погружением задачи в вычислительную среду. Представлены результаты численного эксперимента, иллюстрирующие эффективность метода.

ВВЕДЕНИЕ

Одна из важнейших задач, возникающих при управлении движением искусственных спутников Земли (ИСЗ), состоит в определении параметров их орбит по измерениям [1]. Ее решение может быть значительно затруднено при численной реализации [2]. Например, для класса ИСЗ, находящихся на околостационарных орбитах (именно этот класс находится здесь в центре внимания), при использовании в качестве измерительной дальномерной информации от одного пункта наблюдения число обусловленности оператора связи «состояние—измерение» при конечномерном представлении задачи (в малом) составляет 10^7—10^9 и более. В связи с этим даже незначительные погрешности в задании элементов модели задачи, являющиеся, например, результатом конечности представления чисел в вычислительной машине, могут приводить к потере устойчивости ее решения.

В работе [2] приведены условия, гарантирующие численную разрешимость задач подобного рода, но не учтены возмущения операторов при погружении их в вычислительную среду. В настоящей статье этот пробел восполняется и в рамках концепции надежных вычислений (verified computing) и формулируются модифицированные условия.

Предложенная в работе технология численного анализа и результаты являются достаточно общими и могут быть применены для оценки корректности математической постановки задач, отличных от задач определения орбит.

1. МОДЕЛЬНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ

Как и в работе [2], будем рассматривать модель обратной задачи (в малом) в следующем общем виде:

$$\delta\dot{x} = A(t)\delta x, \qquad (1)$$

$$\delta z(t_k) = H(t_k)\delta x(t_k) + \zeta_k, \quad k = \overline{1, N},$$

где первое уравнение представляет эволюцию первой вариации (δx) вектора параметров орбиты, второе — вектор невязки измерений $\delta z(t_k)$, производимых в произвольные моменты времени t_k, $k = \overline{1, N}$; $A(t)$ и $H(t_k)$ — матрицы коэффициентов, получаемые при линеаризации нелинейной обратной задачи; ζ_k, $k = \overline{1, N}$ — инструментальные погрешности измерений.

Осуществляя переход в уравнениях измерений к значениям параметров состояния системы в некоторый момент времени t_0, получим следующую эквивалентную задачу:

$$\delta z(t_k) = H(t_k)\Phi(t_k, t_0)\delta x(t_0) + \zeta_k, \quad k = \overline{1, N},$$

где $\Phi(t_k, t_0)$ — переходная матрица линейной динамической системы (1).

Переходя к записи в матричной форме, получим:

$$\delta z = L\delta x_0 + \zeta, \qquad (2)$$

где $\delta x_0 = \delta x(t_0)$; $\delta z = (\delta z(t_1)^T, \delta z(t_2)^T, ..., \delta z(t_N)^T)^T$ — вектор невязок измерений; ζ — соответствующий вектор инструментальных погрешностей; L — матрица, структура которой очевидна.

Для построения оценок введем предположения относительно точности численных алгоритмов, участвующих в вычислении на ЭВМ матриц Φ и H. Будем полагать, что матрицы $H_м$ и $\Phi_м$, находящиеся в памяти ЭВМ, и точные матрицы H и Φ связаны следующими неравенствами:

$$\|H_м - H\|_F \leqslant \varepsilon_H \|H\|_F, \quad \|\Phi_м - \Phi\|_F \leqslant \varepsilon_\Phi \|\Phi\|_F, \quad (3)$$

где $\|\cdot\|_F$ — евклидова (фробениусова) норма матрицы [3].

Параметры ε_H и ε_Φ определяются вычислительной точностью используемых алгоритмов при построении матриц $H_м$ и $\Phi_м$. В описанных далее вычислительных экспериментах эти параметры составляют величины порядка 10^{-12}.

2. АНАЛИЗ НАКОПЛЕНИЯ ПОГРЕШНОСТЕЙ

Построение оценки вычислительных погрешностей, накапливаемых при численном конструировании оператора L, сопряжено с построением оценок для его составляющих блоков $L_k = H(t_k)\Phi(t_k, t_0)$. Для построения последних рассмотрим следующее неравенство [3]:

$$\begin{aligned}\|(H_м\Phi_м)_м - H_м\Phi_м\|_F &\leqslant m\varepsilon_1/(1 - 0{,}5\varepsilon_1(m-1)) \times \\ &\times \|H_м\|_F\|\Phi_м\|_F + m\varepsilon_0/(1 - 0{,}5\varepsilon_1(m-1)) \cong \\ &\cong m\varepsilon_1/(1 - 0{,}5\varepsilon_1(m-1))\|H_м\|_F\|\Phi_м\|_F, \quad (4)\end{aligned}$$

где $m = \dim(\delta x)$; ε_1 — относительная точность представления вещественных чисел в ЭВМ (согласно общепринятому определению [3]); ε_0 — наименьшее положительное машинное число, отличное от нуля; $(H_м\Phi_м)_м$ — результат вычислений произведения $(H_м\Phi_м)_м$ на ЭВМ.

Как правило, разрядные сетки ЭВМ, используемые в практических расчетах, имеют крайне малое значение параметра ε_0. Так, например, в режиме удвоенной точности представления вещественных чисел параметры ε_1 и ε_0 составляют величины порядка $2{,}2 \cdot 10^{-16}$ и $2{,}2 \cdot 10^{-308}$, соответственно, [3]. Поэтому, будем полагать, что абсолютным вкладом, а именно величиной $m\varepsilon_0/(1 - 0{,}5\varepsilon_1(m-1))$ в оценке (4) можно пренебречь.

Далее, опираясь на неравенства

$$\begin{aligned}\|H\Phi\|_F &\geqslant \inf_{x \neq 0}\|\Phi_x\|/\|x\| \cdot \|H\|_F, \\ \|H\Phi\|_F &\geqslant \inf_{x \neq 0}\|H_x\|/\|x\| \cdot \|\Phi\|_F, \quad (5)\end{aligned}$$

с учетом предположений (3), получим следующую оценку:

$$\begin{aligned}&(\|H_м\Phi_м)_м - H\Phi\|_F)/\|H\Phi\|_F \leqslant \\ &\leqslant \min(\sqrt{m}\,\mu(\Phi), \sqrt{\min(m, s)}\,\mu(H))((1 + \varepsilon_H) \times \\ &\times (1 + \varepsilon_\Phi)m\varepsilon_1/(1 - 0{,}5\varepsilon_1(m-1)) + \\ &+ (1 + \varepsilon_H)\varepsilon_\Phi + \varepsilon_H), \quad (6)\end{aligned}$$

где s: $\dim H = s \times m$; $\mu(A) = \sup\limits_{\|x\|, \|y\| \neq 0} \dfrac{\|Ax\|}{\|x\|} \cdot \dfrac{\|y\|}{\|Ay\|}$ — число обусловленности оператора A.

Отметим, что при решении задач определения околостационарных орбит по дальномерным измерениям от одного наземного пункта, как показывают вычислительные эксперименты, $\mu(\Phi) \approx 10^9$—10^{11}. Данное обстоятельство может вести к чрезмерному завышению оценок вычислительных погрешностей, получаемых по формуле (6).

Для улучшения аналитической оценки (6), необходимо отказаться от грубых неравенств (5) и попытаться использовать результат вычислений $(H_м\Phi_м)_м$, полученный на ЭВМ. Поэтому оценим величины $\|H\|_F$, $\|\Phi\|_F$ и $\|H\Phi\|_F$, через полученные в результате вычислений на ЭВМ величины $\|H_м\|_F^м$, $\|\Phi_м\|_F^м$ и $\|(H_м\Phi_м)_м\|_F^м$, где $\|\cdot\|_F^м$ — результат вычислений фробениусовой нормы матрицы на ЭВМ.

Заметим, что для произвольной матрицы $A_м$, элементы которой являются машинными числами, вычисление нормы $\|A_м\|_F^м$ ($\dim A_м = p \times q$) сводится к вычислению нормы $\|a\|$, где a — некоторый вектор, составленный из элементов матрицы $A_м$. Если для вычисления нормы $\|a\|$ применить алгоритм вида:

Шаг 1. Вычисление $\|a\|^2$, следуя рекуррентной процедуре $S_0 = 0$, $S_k = S_{k-1} + a_k^2$; a_k — компоненты вектора a; $k = \overline{1, pq}$.

Шаг 2. Вычисление $\|A_м\|_F^м = \sqrt{\|a\|^2}$,

то справедлива оценка [3]:

$$\|A_м\|_F - \|A_м\|_F^м \leqslant R(p, q)\|A_м\|_F \leqslant \frac{R(p, q)}{1 - R(p, q)}\|A_м\|_F^м, \quad (7)$$

$$R(p, q) = \left(1 + \frac{pq\varepsilon_1}{2 + (1 - pq)\varepsilon_1}\right)\varepsilon_1 + \frac{pq\varepsilon_1}{2 + (1 - pq)\varepsilon_1},$$

где $\|A_м\|_F^м$ — вычисленное в соответствии с приведенным алгоритмом значение $\sqrt{\|a\|^2}$; $R(p, q) < 1$ — условие на значения p и q.

В соответствии с предположениями (3) получим оценку:

$$\frac{\|(H_м\Phi_м)_м - H\Phi\|_F}{\|H\Phi\|_F} \leqslant W\frac{\|H\|_F\|\Phi\|_F}{\|H\Phi\|_F} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{W\|H_м\|_F\|\Phi_м\|_F}{(1-\varepsilon_H)(1-\varepsilon_\Phi)\|(H_м\Phi_м)_м\|_F - W\|H_м\|_F\|\Phi_м\|_F},$$

где $W = \dfrac{(1+\varepsilon_H)(1+\varepsilon_\Phi)m\varepsilon_1}{1-0{,}5\varepsilon_1(m-1)} + (1+\varepsilon_H)\varepsilon_\Phi + \varepsilon_H$.

Далее, учитывая выражения (7), получим:

$$\frac{\|(H_м\Phi_м)_м - H\Phi\|_F}{\|H\Phi\|_F} \leqslant \frac{W\|H_м\|_F^м\|\Phi_м\|_F^м}{S\|(H_м\Phi_м)_м\|_F^м - W\|H_м\|_F^м\|\Phi_м\|_F^м}, \tag{8}$$

где $S = (1 - 2R(m, s))(1 - R(m, m))(1 - \varepsilon_H)(1 - \varepsilon_\Phi)$.

Поскольку константы, определяющие разрядную сетку ЭВМ, достаточно малы, и малы значения ε_H и ε_Φ, превосходство последней численно-аналитической оценки (8) перед оценкой (6) определяется по сути соотношением между величинами $\sqrt{m}\,\mu(\Phi)$ и $\|H_м\|_F^м\|\Phi_м\|_F^м(\|(H_м\Phi_м)_м\|_F^м)^{-1}$.

Важно отметить также ряд ограничений, выполнение которых необходимо для возможности применения формулы (8). Наиболее обременительное из них $S\|(H_м\Phi_м)_м\|_F > W\|H_м\|_F\|\Phi_м\|_F$. Остальные в рамках используемой вычислительной точности весьма несущественны и могут быть представлены следующими неравенствами: $R(m, s) < 0{,}5$, $R(m, m) < 1$, $\varepsilon_H < 1$, $\varepsilon_\Phi < 1$.

3. УСЛОВИЯ РАЗРЕШИМОСТИ

Покажем, как на основе описанного выше подхода к оцениванию вычислительных погрешностей возможно исследование принципиальной разрешимости исходной линейной задачи (1). Естественным условием принципиальной разрешимости последней является отличие от нуля минимального сингулярного числа оператора L, входящего в уравнение (2). Однако, непосредственно, такой оператор неизвестен, поэтому заключение о полноте его ранга придется делать, исходя из знания численно полученного оператора $L_м$ и оценки возмущений $\|L - L_м\|$.

Как уже отмечалось выше, оператор L состоит из блоков $H\Phi$. Зная оценки погрешностей вычисления таких блоков, не составит труда получить оценку относительной погрешности для возмущенного оператора $L_м$.

$$\frac{\|L - L_м\|}{\|L\|} \leqslant P\sqrt{\min(sN, m)},$$

где $P = \max\limits_{t_i} \dfrac{W\|H_м\|_F^м\|\Phi_м\|_F^м}{S\|(H_м\Phi_м)_м\|_F^м - W\|H_м\|_F^м\|\Phi_м\|_F^м}$, $\|\cdot\|$ — спектральная норма матрицы.

Напомним [3], что $|\sigma_j(L + \Delta) - \sigma_j(L)| < \|\Delta\|$, $j = \overline{1, m}$, где $\sigma_j(\cdot)$ — j-е сингулярное число матрицы; $\Delta = L - L_м$ — возмущение матрицы L.

Отсюда прямо следует утверждение:

$$\text{если } \frac{\sqrt{m}P}{1-\sqrt{m}P}\mu(L_м) < 1, \tag{9}$$

то при $\sqrt{m}\,P < 1$ задача (2) (а значит и исходная задача (1)) разрешима.

Проверку достаточного условия разрешимости (9) удобно осуществлять, используя понятие так называемого критического числа обусловленности $\mu_{кр} = \dfrac{1-\sqrt{m}P}{\sqrt{m}P}$. В этом случае проверка условия (9) сводится к проверке выполнения неравенства $\mu(L_м) < \mu_{кр}$.

При исследовании разрешимости плохо обусловленных задач посредством проверки приведенного ранее достаточного условия важно, чтобы оценка возмущений оператора L как можно более точно отражала реальные погрешности. Точность такой оценки качественно влияет на выбор критического значения числа обусловленности.

Представленные условия разрешимости позволяют проводить гарантированное исследование локальной разрешимости исходной задачи в условиях, когда непосредственно доступен лишь ее приближенный образ в вычислительной среде.

4. ЧИСЛЕННЫЕ ЭКСПЕРИМЕНТЫ

Численные эксперименты выполнены для случая наземных наблюдений (измерений дальностей до ИСЗ из одного пункта) околостационарных кеплеровых орбит с различными значениями параметров наклонения (i) и эксцентриситета (e).

Как уже отмечалось, ввиду малости констант, входящих в численно-аналитическую оценку (8), ее превосходство над аналитической оценкой (6) определяется отношением

$$\vartheta = \frac{\sqrt{m}\mu(\Phi)}{\|H_м\|_F^м\|\Phi_м\|_F^м(\|(H_м\Phi_м)_м\|_F^м)^{-1}}. \tag{10}$$

Выполнив сравнения значений функции

$$G(\lambda,\ \varphi) = \max_{t_i} \frac{\|H(t_i,\lambda,\varphi)\|_F^{\text{м}} \|\Phi(t_i, 0)\|_F^{\text{м}}}{\|H(t_i,\lambda,\varphi)\Phi(t_i, 0)\|_F^{\text{м}}},$$

где λ и φ — долгота и широта наземного пункта наблюдения, и соответствующих значений $\mu(\Phi)$, можно утверждать, что численно-аналитическая оценка (8) существенно точней отражает реальные погрешности, чем оценка (6), а именно, по результатам вычислительных экспериментов, отношение ϑ (10) составляет величину порядка 10^6—10^8. Отметим также, что с уменьшением различия между параметрами долготы наземного пункта наблюдения и стационарной точки, над которой зависает ИСЗ, следует ожидать увеличения относительных возмущений оператора L. Этот факт подтверждается рядом численных экспериментов. Так, например, при решении задачи оценивания методом наименьших квадратов отмечается значительное сужение областей сходимости для пунктов наблюдения, параметр долготы которых мало отличается от параметра долготы стационарной точки.

В качестве результатов численных экспериментов приведем данные, позволяющие получить критические значения числа обусловленности для ряда суточно-синхронных орбит.

В таблице представлены значения $\max\limits_{\lambda,\varphi} G(\lambda,\ \varphi)$ (λ и φ — долгота и широта наземного пункта наблюдения, соответственно) для суточно-синхронных орбит в зависимости от эксцентриситета e и наклонения i при однопозиционных измерениях дальности до объекта.

Максимальные значения функции *G*

e	i					
	0°	0,1°	0,5°	1°	2°	4°
0	390,0	390,3	396,2	414,5	494,5	3 127,4
10^{-4}	390,0	390,4	396,3	414,6	494,7	3 130,1
0,005	389,8	390,4	397,8	418,7	509,0	3 266,8
0,01	385,3	386,1	394,9	421,7	518,9	3 420,0
0,1	476,9	477,2	483,9	506,2	621,0	7 404,9

Приведенные значения в случае, когда ε_H, ε_Φ, $\varepsilon_1 \ll 1$, позволяют получить значения критических чисел обусловленности. Приведем конкретный

Пример. Пусть $e = 0{,}005$ и $i = 0{,}1°$, что соответствует значению 390,4 в таблице. Поскольку значение P, с точностью до главных членов, определяется выражением

$$P = 390{,}4(\varepsilon_H + \varepsilon_\Phi + m\varepsilon_1/(1 - 0{,}5\varepsilon_1(m - 1))),$$

то предельно допустимое значение числа обусловленности для рассматриваемого случая будет следующим — $\mu_{\text{кр}} \approx P^{-1}m^{-0,5}$. Для спутниковых орбит величина $m\varepsilon_1$ ($m = 6$, $\varepsilon_1 < 10^{-15}$), как показывают вычислительные эксперименты, оказывается незначительной в сравнении со значениями ε_H и ε_Φ (ε_H, $\varepsilon_\Phi \sim 10^{-12}$). Тогда $\mu_{\text{кр}} \approx 1{,}3 \cdot 10^9$. Учитывая, что в данном эксперименте $\mu(L_{\text{м}}) = 1{,}1 \cdot 10^8$, имеем $\mu(L_{\text{м}}) < \mu_{\text{кр}}$, что гарантирует разрешимость рассматриваемой задачи.♦

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Получены условия разрешимости линейных динамических задач наблюдения в вычислительной среде с известной точностью выполнения арифметических операций. Подтверждена эффективность предлагаемого подхода в задачах определения орбит ИСЗ.

ЛИТЕРАТУРА

1. *16-й симпозиум* ИФАК по автоматическому управлению в пространстве // Проблемы управления. — 2005. — № 2. — С. 75—79.
2. *Девятисильный А. С.*, *Крыжко И. Б.* Исследование обусловленности задачи определения квазистационарной орбиты ИСЗ по наземным измерениям // Космические исследования. —1997. — № 1. — С. 99—101.
3. *Малышев А. Н.* Введение в вычислительную линейную алгебру. — Новосибирск: Наука, 1991. — 229 с.

☎ *(4232) 31-35-49*

e-mail: devyatis@iacp.dvo.ru ❑

Новая рубрика

*В нашем журнале появилась новая рубрика — **"Краткие сообщения"**, в которой редакция намерена публиковать конкретные результаты исследований, новые идеи и подходы к решению задач управления, изложенные в сжатой, но доступной для понимания большинства читателей форме.*

Объем краткого сообщения — не более пяти страниц формата А4 вместе со списком литературы и иллюстрациями, текст набирается через полтора интервала, шрифт Times New Roman, кегль 12 пунктов.

Редакция