

К ЗАДАЧЕ ВЫСТАВКИ ИНЕРЦИАЛЬНОЙ НАВИГАЦИОННОЙ СИСТЕМЫ НА НЕПОДВИЖНОМ ОСНОВАНИИ В УСЛОВИЯХ ГРАВИТАЦИОННОЙ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ

А. С. Девятисильный, К. А. Числов

Обсуждено погружение задачи пространственной гравиметрии в задачу выставки трехкомпонентной инерциальной навигационной системы. Приведены модели и результаты вычислительного эксперимента.

ВВЕДЕНИЕ

Инерциальные навигационные системы (ИНС) широко применяются для определения линейных и угловых параметров движения объектов различного назначения. Как известно [1, 2], один из источников погрешностей работы ИНС — ошибочные представления о координатах места старта объекта и ориентации системы отсчета, в которой интегрируются модельные уравнения его движения; поэтому предстартовая подготовка ИНС, или ее выставка, рассматривается как необходимый элемент технологии решения навигационной задачи [3].

В настоящей работе в рамках задачи выставки рассматривается проблема гравитационной неопределенности в месте старта объекта. Такая неопределенность, например, имеет место в районах повышенной сейсмической активности, когда в окрестностях (в радиусе до 100 км) очагов землетрясений появляются пространственные аномалии гравитационного поля до 10^{-3} м/с², сохраняющиеся на интервалах времени, исчисляемых месяцами и охватывающих периоды как до, так и после землетрясений [4]. Последнее означает, что оценка аномалий имеет, помимо обеспечения стартовых условий для работы ИНС, еще и конверсионное в определенном смысле значение, если рассматривать указанные аномалии в качестве предвестников землетрясений [4] и иных проявлений геофизических процессов [5].

Для определения траектории методом инерциальной навигации (ИНМ) необходимы достаточно полные представления о модели гравитационного поля. Вместе с тем, если траектория может определяться вне этого метода, например с помощью спутниковой навигационной системы (СНС — типа ГЛОНАСС, GPS и т. п.), то в условиях неопределенности представлений о гравитационном поле

в рамках метода инерциальной навигации вполне правомерна постановка задачи об идентификации поля. Именно такая, но локальная (в точке на Земле) задача и рассматривается в предлагаемой работе.

Обращаясь к фундаментальным представлениям, заметим, что речь идет об интерпретации первой (или, как в 1890 г. предложил называть ее Г.К. Суслов, — обратной [6, 7]) задачи механики [1] — определение сил по известной траектории, которая здесь решается методом инерциальной навигации с погружением в него задачи гравиметрии.

1. ОСНОВНЫЕ МОДЕЛИ

Метод инерциальной навигации предполагает моделирование в выбранной системе отсчета уравнений движения материальной точки, с которой отождествляется движущийся объект, — уравнений динамики (Ньютона)

$$\dot{q}_i = \Omega_{ik} q_k + p_i, \quad q_i(0) = q_{i,0}, \quad (1)$$

$$\dot{p}_i = \Omega_{ik} p_k + G_i(q) + F_i, \quad p_i(0) = p_{i,0}; \quad i, k = \overline{1,3}$$

и уравнений эволюции системы отсчета — уравнений кинематики (Эйлера — Пуассона)

$$\dot{a}_{im} = \Omega_{ik} a_{km}, \quad a_{im}(0) = a_{im,0}; \quad i, m, k = \overline{1,3}. \quad (2)$$

В этих уравнениях, записанных в гамильтоновых образах, $q = (q_i)$, $i = \overline{1,3}$ — радиус вектор текущего положения точки на траектории; $p = (p_i)$, $i = \overline{1,3}$ — вектор импульсов, отождествляемый в данном случае с вектором абсолютной скорости точки; $\Omega_{ik} = -e_{ijk}\omega_j$, e_{ijk} — оператор (тензор Леви—Чивита); $\omega = (\omega_i)$, $i = \overline{1,3}$ — абсолютная угловая скорость вращения выбранной системы отсчета (далее всюду будем иметь в виду только прямо-



угольные координатные системы); $G(q) = (G_i(q))$, $i = \overline{1, 3}$ — вектор напряженности гравитационного поля; $F = (F_i)$, $i = \overline{1, 3}$ — вектор удельных сил негравитационной природы; $A = (a_{ij})$, $i, j = \overline{1, 3}$ — матрица преобразования векторов из инерциальной системы отсчета, назовем ее $o\xi = o\xi_1\xi_2\xi_3$, в выбранную вращающуюся — $ox = ox_1x_2x_3$, так что $x = A\xi$; точку o — начало системы отсчета — поместим в центр масс Земли, кроме того, примем, что координатный трехгранник ox (с осями, параллельными осям сопровождающего трехгранника) ориентирован географически, т. е. его ось ox_3 направлена по вектору q , а ось ox_2 лежит в плоскости географического меридиана места и направлена на север; здесь и далее действует правило Эйнштейна — по повторяющимся индексам (у нас только нижним) производится суммирование. Учитывая, что рассматривается случай неподвижного основания, имеем $\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)^T$, где $\omega_1 = 0$, $\omega_2 = u \cos \phi$, $\omega_3 = u \sin \phi$; ϕ — географическая широта места объекта (пункта гравиметрии); u — значение угловой скорости вращения Земли.

При интегрировании уравнений (1) и (2) полагаются заданными начальные условия (q_0, p_0, A_0) , а также текущие значения ω и F , которые измеряются с помощью гироскопов и ньютонометров (акселерометров) — инерциальных приборов, собственно и дающих название методу. Наличие погрешностей в данных и в измерениях ведет к погрешностям интегрирования — δq , δp , δA , уравнения эволюции которых в линейном приближении с учетом вида уравнений (1) и (2) можно представить следующим образом:

$$\delta \dot{q}_i = \Omega_{ik} \delta q_k + \delta p_i + Q_{ik} v_k, \quad \delta q_i(0) = \delta q_{i,0}, \quad (3)$$

$$\delta \dot{p}_i = \Omega_{ik} \delta p_k + \delta G_i(q) + f_i + P_{ik} v_k, \quad \delta p_i(0) = \delta p_{i,0},$$

$$\dot{\beta}_i = \Omega_{ik} \beta_k + v_i, \quad \beta_i = \beta_{i,0}, \quad i = \overline{1, 3},$$

где $v = (v_i)$ и $f = (f_i)$, $i = \overline{1, 3}$ — векторы инструментальных погрешностей гироскопических измерителей и ньютонометров; $Q_{ik} = e_{ijk} q_j$; $P_{ik} = e_{ijk} p_j$; $\beta = (\beta_i)$, $i = \overline{1, 3}$ — вектор малого угла, характеризующий погрешность интегрирования кинематических уравнений, так что $\delta A_{ik} = e_{ijk} \beta_j$; погрешность моделирования гравитационного поля $\delta G(q)$ — будет обсуждена далее.

Заметим, что инерциальные измерения и интегрирование уравнений (1) и (2) выполняются в осях приборного трехгранника $ou = ou_1u_2u_3$, жестко связанного с измерительной платформой и являющегося физической моделью трехгранника ox , так что $\delta q = (\delta q_1, \delta q_2, \delta q_3)^T$.

Если доступна информация от СНС о месте объекта (платформы), то сравнение ее с аналогичной информацией, предоставляемой ИНС, приводит к следующим невязкам двух решений:

$$J_i^q = \delta q_i - Q_{ij} \beta_k + \varepsilon_i^q, \quad (4)$$

$$J_i^p = \delta p_i - W_{ik} \beta_k + \varepsilon_i^p$$

где $W_{ik} = e_{imk} Q_{ms} \omega_s$; $\varepsilon^q = (\varepsilon_i^q)$ и $\varepsilon^p = (\varepsilon_i^p)$, $i = \overline{1, 3}$ — инструментальные погрешности СНС-измерителя, причем $\varepsilon_i^p = \Omega_{ik} \varepsilon_k^q$, $i, m, k = \overline{1, 3}$.

Вернемся теперь к обсуждению погрешности моделирования напряженности гравитационного поля $\delta G(q)$. Еще раз обращая внимание на то, что в данной статье основной акцент делается на локальной задаче пространственной гравиметрии, модель напряженности поля можно задать в виде $G_i(q) = G_i = \text{const}$, $i = \overline{1, 3}$, тогда

$$\delta G_i(q) = g_i, \quad i = \overline{1, 3}, \quad (5)$$

где $g = (g_i)$ — аномалия — отклонение напряженности поля в точке наблюдения от известного значения $G = \text{const}$; примем, что и $g = \text{const}$, ориентируясь, таким образом на достаточно медленные по сравнению с временем наблюдения процессы.

Заметим, что при таком модельном представлении гравитационного поля из уравнений ИНМ исключается шулеровская компонента частоты, что существенно отличает их от традиционных [2, 3], описывающих эволюцию погрешностей работы ИНС. Учитывая только что изложенное и продолжая формирование модели задачи, дополним уравнения (3) уравнениями

$$\dot{g}_i = 0, \quad g_i(0) = g_{i,0}, \quad (6)$$

$$\dot{v}_i = -\lambda_i^v v_i + \sqrt{2\lambda_i^v} \sigma_i^v u_i^v, \quad v_i(0) = v_{i,0},$$

$$\dot{f}_i = -\lambda_i^f f_i + \sqrt{2\lambda_i^f} \sigma_i^f u_i^f, \quad f_i(0) = f_{i,0}; \quad i = \overline{1, 3},$$

где первые три утверждают гипотезу о неизменности аномалии поля на временном интервале наблюдения, а последние шесть на этом же интервале — гипотезу о погрешностях инерциальных измерителей как о марковских случайных процессах первого порядка, порождаемых белым шумом единичной интенсивности процессами u_i^v и u_i^f , $i = \overline{1, 3}$; значения величин λ_i^v , λ_i^f , σ_i^v , σ_i^f полагаются известными. Система дифференциальных и алгебраических уравнений (3) и (4) с учетом уравнений (5) и (6) является формальным описанием обратной задачи, цель решения которой состоит в определении значений совокупности векторов $\{\delta q, \delta p, \beta, g, v, f\}$, отождествляемой далее с вектором состояния x , $\dim x = 18$. Таким образом, задача

гравиметрии погружена в более общую задачу — выставки трехкомпонентной (3D) ИНС на неподвижном основании. Отметим следующее. Если производить гравиметрическую съемку с помощью и баллистического гравиметра [8], измеряющего значение $|G|$, то можно ограничиться схемой 2D-ИНМ, сохраняя в качестве идентифицируемых только горизонтальные (g_1 и g_2) составляющие вектора аномалии g . Соответствующие модельные представления 2D-задачи можно сформировать из уже полученных выше, если в последних исключить измерения J_3^q и J_3^p и уравнения эволюции значений δq_3 , δp_3 , g_3 и f_3 , а в оставшихся аннулировать члены, содержащие указанные переменные. Завершение формальной постановки обратной задачи требует проверки ее, постановки, корректности, или анализа разрешимости задачи. Современная теория систем [9] отождествляет проблему разрешимости с проблемой наблюдаемости, суть которой состоит в установлении соответствия между размерностью базиса пространства образов оператора задачи и размерностью декларируемого вектора желаемого решения. Строго (если точно придерживаться представлений Ж. Адамара о корректности [10]), с учетом ориентации способа решения на современные вычислительные средства и конечную точность представления чисел в них, следует иметь в виду и необходимость процедурной поддержки указанного соответствия (т. е. обеспечения численной устойчивости решения), если принципиально таковое установлено.

Как показал анализ рассматриваемой здесь задачи (он включает в себя стандартную процедуру построения базиса пространства, порожденного оператором задачи), требуемое соответствие имеет место и нарушается только в одном случае — когда вектор угловой скорости ω вращения Земли лежит на оси ox_3 , т. е. когда пункт наблюдения расположен на одном из географических полюсов Земли. Достаточно полное количественное представление об обусловленности задачи может быть получено, если перейти к конечномерной форме модели задачи в виде, декларирующем ее как задачу метода наименьших квадратов (МНК), а именно:

$$J(k) = H\Phi^k x_0 + H \int_0^{t_k} \Phi(t, \tau) v(\tau) d\tau + \varepsilon(k),$$

$$k = \overline{0, N}, \quad (7)$$

где k — номер цикла измерений, выполняемого в момент времени $t_k = kh$, $k = \overline{0, N}$, $h = \text{const}$, так что $T = Nh$ и $t_k \in [0, T]$; x_0 — начальное значение вектора состояния (x) системы ((3) и (6)), $\dim x = 18$; $\Phi(t, \tau)$ — фундаментальная матрица решений, соответствующая системе ((3) и (6)), так что $\Phi(t_k) =$

$= \Phi^{k-1} \Phi = \Phi^k$; $v(k)$ — вектор случайных возмущений в правых частях уравнений (3) и (6), $\dim v(k) = \dim x$, причем только шесть последних компонент вектора $v(k)$ отличны от нуля; $J(k) = J(t_k)$ — вектор измерений с компонентами $J_i^q(t_k)$ и $J_i^p(t_k)$, $i = \overline{1, 3}$; H — матрица коэффициентов при переменных состояниях в модели измерений (4); $\varepsilon(k) = \varepsilon(t_k)$ — вектор инструментальных погрешностей измерений с компонентами $\varepsilon_i^q(t_k)$ и $\varepsilon_i^p(t_k)$, $i = \overline{1, 3}$.

Вместе с тем непосредственное решение рассматриваемой в настоящей работе задачи наиболее просто реализуется в виде хорошо известной [11] калмановской оценки состояния дискретного процесса с моделью

$$x(k+1) = \Phi x(k) + v(k), \quad x(0) = x_0, \quad (8)$$

$$J(k+1) = Hx(k+1) + \varepsilon(k+1),$$

где задействованы ранее введенные при формировании модели (7) обозначения.

2. ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ ЭКСПЕРИМЕНТЫ

При проведении вычислительных экспериментов ставились две цели — оценка разрешимости рассматриваемой задачи в условиях конечной точности представления чисел в ЭВМ, для чего использовалась модель (7), и проверка эффективности калмановской процедуры решения (8).

Отметим, что все эксперименты проводились на ЭВМ с относительной точностью вычислений $\varepsilon_1 = 10^{-50}$ [12]. Для достижения первой цели выполнены сингулярные разложения матричного опера-

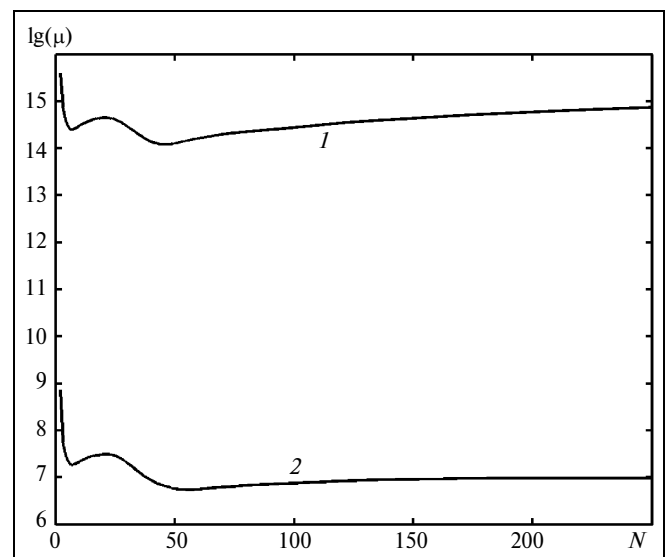


Рис. 1. Значения чисел обусловленности оператора модели (7): 1 — исходная обусловленность; 2 — обусловленность нормированного оператора

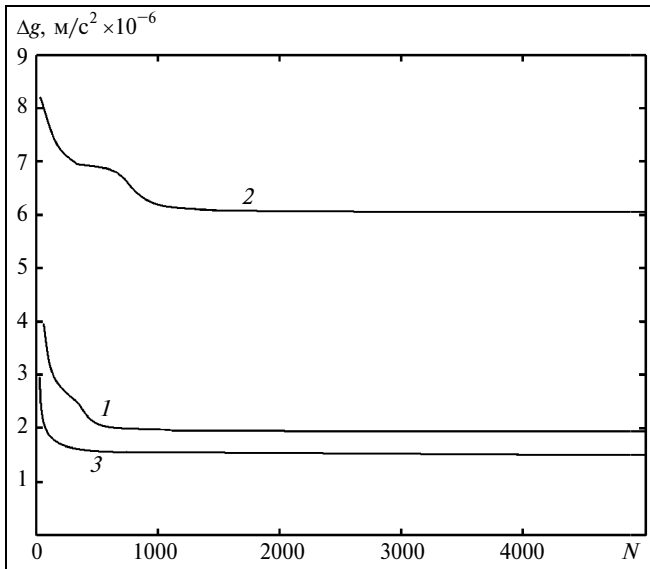


Рис. 2. Графики эволюций погрешностей Δg_i , $i = \overline{1, 3}$

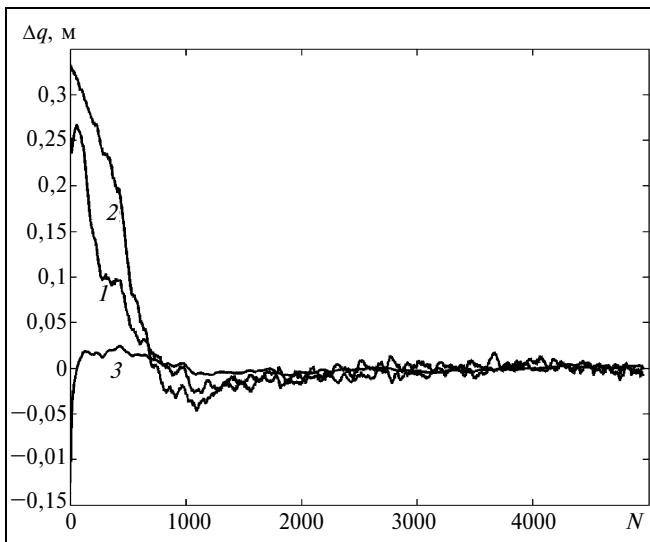


Рис. 3. Графики эволюций погрешностей Δq_i , $i = \overline{1, 3}$

тора модели (7) при различных N (при $h = 100$ с) и определены значения его числа обусловленности $\mu(N)$.

График $\lg \mu(N)$ приведен на рис. 1 под номером 1; ниже расположен график 2 для нормированного по столбцам матричного оператора модели (7), характеризующий практически предельные возможности улучшения обусловленности задачи методом преобразования исходных переменных состояния. Достоверность графиков обеспечивается высокой степенью точности представления в ЭВМ матрицы Φ , как матричной экспоненты, легко разлагаемой в степенной ряд требуемой для подтверждения этой

точности длины. Как видно из рис. 1 имеет место плохая обусловленность задачи, и для уверенного устойчивого ее решения в случае, например, применения обобщенного МНК (с взвешиванием измерений) обычно практикуемой в ЭВМ относительной точности вычислений $\varepsilon_1 \approx 10^{-16} \div 10^{-19}$ [12] было бы явно недостаточно и потребовалось бы ее значительное повышение. Здесь становится понятной и причина, по которой и само исследование обусловленности выполнено при повышенной относительной точности ε_1 .

Такая обусловленность задачи указывает также на то, что для получения приемлемых по точности

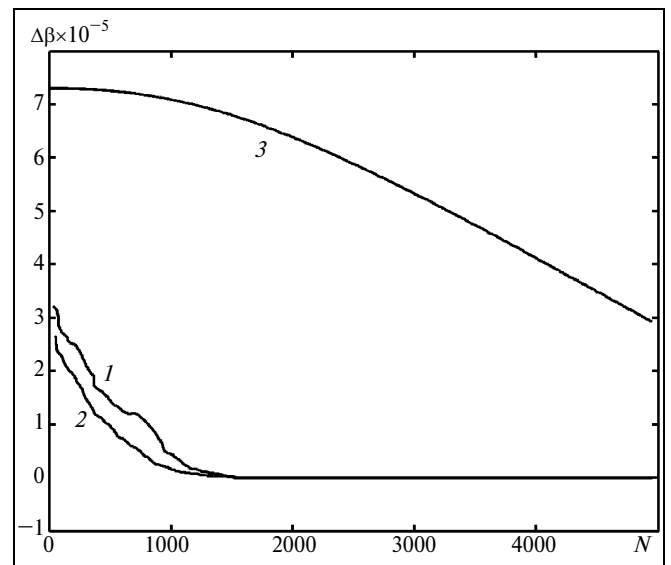


Рис. 4. Графики эволюций погрешностей $\Delta \beta_i$, $i = \overline{1, 3}$

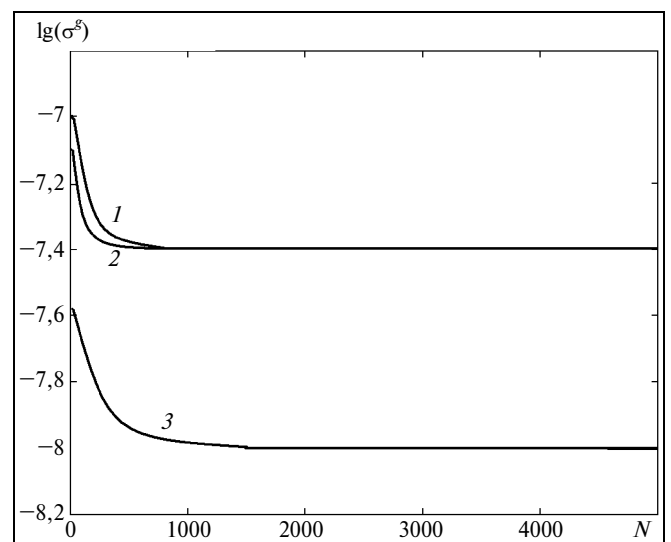


Рис. 5. Графики эволюции СКП оценки параметров g_i , $i = \overline{1, 3}$

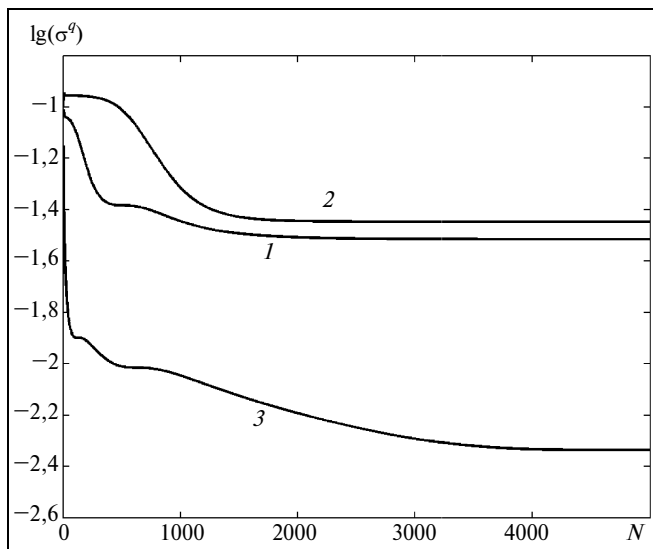


Рис. 6. Графики эволюции СКП оценки параметров q_i , $i = \overline{1, 3}$

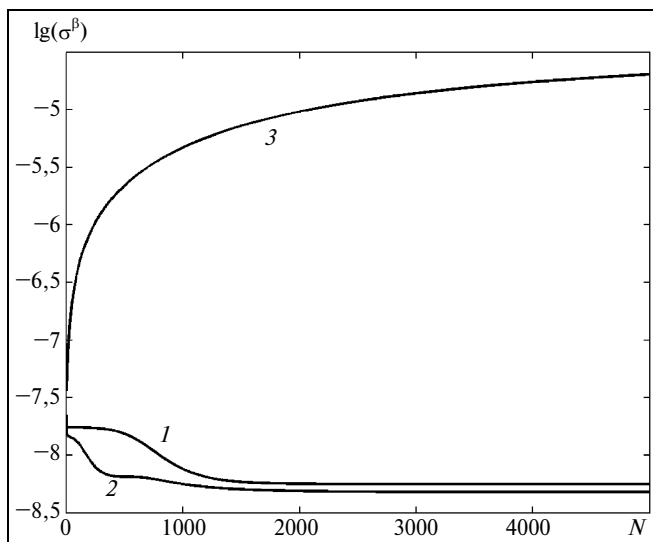


Рис. 7. Графики эволюции СКП оценки параметров β_i , $i = \overline{1, 3}$

решений ее в условиях стохастических возмущений потребовалось бы значительное число (N) циклов измерений. Оба эти положения — необходимость снижения значения ε_1 и увеличения числа N — подтвердились и в ходе вычислительных экспериментов с участием калмановского алгоритма оценивания. Рис. 2—7 представляют один из этих экспериментов для случая, когда $\phi = 45^\circ$, $h = 20$ с, среднеквадратические значения погрешностей (СКП) СНС-измерений $\sigma_i^q = 0,1$ м, $i = \overline{1, 3}$; а значения величин, характеризующие инструментальные погрешности инерциальных измерителей,

суть $\lambda = 10^{-5} \text{ с}^{-1}$, $\lambda_i^f = 10^{-6} \text{ с}^{-1}$, $\sigma_i^v = 5 \cdot 10^{-9} \text{ с}^{-1}$ (или $0,001^\circ/\text{ч}$), $\sigma_i^f = 10^{-6} \text{ м/с}^2$. На рис. 2—4 представлены графики эволюций погрешностей (Δg_i , Δq_i и $\Delta \beta_i$, $i = \overline{1, 3}$) оценивания переменных состояния (g_i , δq_i и β_i , $i = \overline{1, 3}$), а на рис. 5—7 графики СКП (σ_i^g , σ_i^q , σ_i^β , $i = \overline{1, 3}$) их оценивания; номера графиков соответствуют индексам переменных. В целом, что видно из рис. 2—7, выполненные исследования проблемы погружения задачи 3D-гравиметрии в более общую задачу указывают на достаточную эффективность и актуальность такого подхода.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Дана интерпретация первой задачи механики, ориентированная на решение задачи 3D-гравиметрии в рамках метода инерциальной навигации; представлены ее модели с указанием отличительных черт; выполнены теоретико-численные исследования, результаты которых указывают, несмотря на плохую обусловленность задачи, на реальность ее решения.

ЛИТЕРАТУРА

- Ишлинский А. Ю. Классическая механика и силы инерции. — М.: Наука, 1987. — 320 с.
- Андреев В. Д. Теория инерциальной навигации (корректируемые системы). — М.: Наука, 1967. — 648 с.
- Инерциальная навигация. Анализ и проектирование / Под ред. К. Ф. О'Доннела. — М.: Наука, 1969. — 648 с.
- Иванов В. В. Изменение гравитационных аномалий при сильнейших землетрясениях // Морские исследования и технологии изучения природы Мирового океана. Вып. 1: Сб. ст. — Владивосток: ДВО РАН, 2005. — С. 60—68.
- Применение гравиинерциальных технологий в геофизике / Сб. статей и докл. — СПб.: ГНЦ РФ — ЦНИИ «Электроприбор», 2002. — 199 с.
- Сулов Г. К. О силовой функции, допускающей данные интегралы. — Киев, 1890. — 90 с.
- Галиуллин А. С. Обратные задачи динамики. — М.: Наука, 1981. — 143 с.
- Арнаутов Г. П. Результаты международных метрологических сравнений абсолютных лазерных баллистических гравиметров // Автометрия. — 2005. — Т. 41, № 5. — С. 126—136.
- Калман Р., Фалб М., Арбиб М. Очерки по математической теории систем. — М.: Мир, 1971. — 400 с.
- Тихонов А. Н., Арсенин В. Я. Методы решения некорректных задач. — М.: Наука, 1972. — 223 с.
- Медич Дж. Статистически оптимальные оценки и управление. — М.: Энергия, 1973. — 440 с.
- Малышев А. Н. Введение в вычислительную линейную алгебру. — Новосибирск: Наука, 1991. — 229 с.

☎ (4232) 31-35-49

e-mail: devyatis@iacp.dvo.ru

kirillche@rambler.ru

