УДК 513.88

ИТЕРАЦИОННЫЙ АЛГОРИТМ ПОСТРОЕНИЯ ЦИКЛОВ НЕЛИНЕЙНЫХ АВТОНОМНЫХ СИСТЕМ. Ч. 2. Оценки параметров

И. Г. Исмаилов

Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова, г. Москва

Найдены оценки управляющих параметров итерационного алгоритма в терминах правой части системы, которые могут быть полезны для непосредственного численного поиска неустойчивых циклов нелинейных автономных систем.

ВВЕДЕНИЕ

В работе [1] рассмотрена задача о приближенном построении цикла многоконтурной автономной системы автоматического регулирования, которую можно привести к виду

$$\frac{dx}{dt} = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^N. \tag{1}$$

Для определения точки периодического решения и соответствующего периода была предложена следующая процедура:

$$x_{k+1} = x_k - \gamma_k((I - V^T(t_k, x_k))(x_k - p(t_k, x_k)) + (\langle a, x_k\rangle - b)a), \tag{2}$$

$$t_{k+1} = t_k + \mu_k\langle f(p(t_k, x_k)), x_k - p(t_k, x_k)\rangle, \quad k = 0, 1, 2, ..., \tag{3}$$

где $V(t, x)$, $V(0, x) = I$, — фундаментальная матрица линейной системы дифференциальных уравнений $dV/dt = f_x'(p(t, x))V$; γ_k и μ_k — управляющие параметры итерационной процедуры (2), (3), $p(t, x)$ — решение системы (1) с начальным условием $p(0, x) = x$; вектор $a \in \mathbb{R}^N$; число $b \in \mathbb{R}$, через $\langle \cdot, \cdot \rangle$ обозначено скалярное произведение в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^N$. Было доказано (см. основную теорему работы [1]), что если управляющие параметры γ_k и μ_k достаточно малые положительные числа, то последовательность $\{x_k, t_k\}$ сходится по норме к искомому циклу и его периоду. Однако для практического применения предложенной процедуры важно знать, каким именно оценкам должны удовлетворять параметры γ_k и μ_k. Цель настоящей работы состоит в получении этих оценок, исходя из свойств правой части системы (1). Итерационный алгоритм (2), (3) был опубликован в тезисах [2—4].

1. ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА

Пусть Γ — изолированный цикл системы (1) с периодом T^*, $x^* \in \Gamma$ и

$$\langle a, x^*\rangle = b. \tag{4}$$

Рассмотрим гиперплоскость π, определяемую уравнением (4). Изменяя параметры a и b, всегда можно добиться трансверсальности плоскости π и цикла Γ.

Пусть R_0 таково, что шар $\|x\|_{\mathbb{R}^N} \leqslant R_0$ содержит отыскиваемый цикл, $T_0 > T_*$ — некоторое число и, кроме того, для некоторых постоянных R_1, M_1, M_2, N_1 и N_2

$$\max\{\|p(t, x)\| : \|x\| \leqslant R_0, \quad 0 \leqslant t \leqslant T_0\} \leqslant R_1, \\ \max_{\|x\| \leq R_1}\|f(x)\| \leqslant M_1, \quad \max_{\|x\| \leq R_1}\|f'(x)\| \leqslant M_2, \tag{5}$$

$$\|f(x_1) - f(x_2)\| \leqslant N_1\|x_1 - x_2\|, \quad \|x\| \leqslant R_1, \\ \|f'(x_1) - f'(x_2)\| \leqslant N_2\|x_1 - x_2\|, \quad \|x\| \leqslant R_1. \tag{6}$$

Тогда справедлива следующая

Теорема. *В условиях основной теоремы работы* [1] *управляющие параметры процедуры* (2), (3) *могут быть выбраны из условий:* $0 < \alpha_0 \leqslant \gamma_k \leqslant \beta_0 \leqslant 1$, $0 < \alpha_1 \leqslant \mu_k \leqslant \beta_1 \leqslant 1$, *где* β_0 *и* β_1 *— любые положительные числа, удовлетворяющие соотношениям*

$$\frac{1}{2}K_1\beta_0 + \frac{1}{4}(K_2 + L_1)\beta_1 < 1, \tag{7}$$

$$\frac{1}{2}L_2\beta_1 + \frac{1}{4}(K_2 + L_1)\beta_0 < 1. \tag{8}$$

где

$$K_1 = 1 + \|a\|^2 + e^{N_1 T_0} + e^{M_2 T_0} + e^{(M_2 + N_1) T_0} + \\ + \frac{N_2(R_0 + R_1)(e^{(N_1 + M_2) T_0} - 1) e^{M_2 T_0}}{N_1 + M_2}, \quad (9)$$

$$K_2 = M_1 + ((R_0 + R_1)M_2 + M_1) e^{M_2 T_0}, \quad (10)$$

$$L_1 = N_1(R_0 + R_1) e^{N_1 T_0} + M_1(1 + e^{N_1 T_0}), \quad (11)$$

$$L_2 = M_1(R_0 N_1 + R_1 N_1 + M_1). \quad (12)$$

Доказательство теоремы см. в Приложении.

2. ЗАМЕЧАНИЯ

Напомним, что упомянутые в формулировке условия сводятся к следующему: точка x^* пересечения цикла Г с плоскостью π и период T^* должны быть изолированными решениями системы уравнений

$$\begin{cases} (I - V^T(t, x))(x - p(t, x)) + (\langle a, x\rangle - b)a = 0 \\ \langle f(p(t, x)), p(t, x)\rangle = 0. \end{cases}$$

которая, в свою очередь, эквивалентна условию равенства нулю градиента функции погрешности

$$W(x, t) = \frac{1}{2}(\|x - p(t, x)\|^2 + (\langle a, x\rangle - b)^2). \quad (13)$$

Функция (13) неотрицательна. В ее нулях градиент обращается в нуль. Заметим: наряду с точкой $\{x^*, T^*\}$ экстремалью (и нулем) функции (13) будет также точка $\{p(T_1^*, x^*), T^*\}$, $T_1^* < T^*$, где $p(T_1^*, x^*)$ — второе (из нескольких возможных) пересечение гиперплоскости π с циклом Г. В силу трансверсальности и конечности периода T^*, все прочие пересечения плоскости π с циклом Г ε-отделены от точки x^*.

Поясним структуру функции погрешности. Первое слагаемое в правой части равенства (13) фактически означает невязку t-периодичности при фиксированном t. Второе слагаемое добавлено с целью выделить начальное условие для точки x^* на цикле Г: без него многообразием минимумов функции W оказалась бы вся кривая Г. Этот прием тесно связан с методом функционализации параметра при вычислении функциональной характеристики цикла (см. работы [5, 6]).

3. ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство теоремы. Для доказательства нам понадобятся пять лемм.

Лемма 1. *Пусть* $\|x_1\|, \|x_2\| \leqslant R_0$ *и* $0 \leqslant t \leqslant T_0$. *Тогда*

$$\|p(t, x_1) - p(t, x_2)\| \leqslant \|x_1 - x_2\| e^{N_1 t}. \quad (14)$$

Доказательство. Так как $p(t, x_1) = x_1 + \int_0^t f(p(\tau, x_1))d\tau$, $p(t, x_2) = x_2 + \int_0^t f(p(\tau, x_2))d\tau$, то $\|p(t, x_1) - p(t, x_2)\| \leqslant$ $\leqslant \|x_1 - x_2\| + N_1 \int_0^t \|p(\tau, x_1) - p(\tau, x_2)\| d\tau$.

Из последнего неравенства и леммы Гронуолла—Беллмана вытекает оценка (14). ♦

Лемма 2. *Пусть* $\|x\| \leqslant R_0$, $0 \leqslant t_1, t_2 \leqslant T_0$. *Тогда*

$$\|p(t_1, x) - p(t_2, x)\| \leqslant |t_1 - t_2| M_1. \quad (15)$$

Доказательство. Так как $p(t_1, x) = x + \int_0^{t_1} f(p(\tau, x))d\tau$, $p(t_2, x) = x + \int_0^{t_2} f(p(\tau, x))d\tau$, то $p(t_1, x) - p(t_2, x) =$ $= \int_{t_1}^{t_2} f(p(\tau, x))d\tau$ и $\|p(t_1, x) - p(t_2, x)\| \leqslant \max_{t_2 \leq \tau \leq t_1} \|f(p(\tau, x))\| \times$ $\times |t_1 - t_2| \leqslant M_1 |t_1 - t_2|$. ♦

Лемма 3. *Пусть* $\|x\| \leqslant R_0$, $0 \leqslant t \leqslant T_0$. *Тогда*

$$\|V(t, x)\| \leqslant e^{M_2 t}. \quad (16)$$

Доказательство. Так как $V(t, x) = I + \int_0^t f'_x(p(\tau, x))V(\tau, x)d\tau$ то $\|V(t, x)\| \leqslant 1 + M_2 \int_0^t \|V(\tau, x)\| d\tau$.

Из последней оценки и леммы Гронуолла—Беллмана следует оценка (16). ♦

Лемма 4. *Пусть* $\|x\| \leqslant R_0$, $0 \leqslant t_1, t_2 \leqslant T_0$. *Тогда*

$$\|V(t_1, x) - V(t_2, x)\| \leqslant M_2 e^{M_2 T_0} |t_1 - t_2|. \quad (17)$$

Доказательство аналогично доказательству леммы 2.

Лемма 5. Пусть $\|x_1\|, \|x_2\| \leqslant R_0$, $0 \leqslant t \leqslant T_0$. *Тогда*

$$\|V(t, x_1) - V(t, x_2)\| \leqslant \\ \leqslant \frac{N_2}{N_1 + M_2}(e^{(N_1 + M_2) T_0} - 1) e^{M_2 t} \|x_1 - x_2\|. \quad (18)$$

Доказательство аналогично доказательству леммы 1; используется лемма Гронуолла—Беллмана.

При доказательстве основной теоремы в работе [1] было показано, что сходимость $\lim_{k \to \infty}(\|x_k - x^*\| + |t_k - T^*|) = 0$ имеет место, если только константы β_0 и β_1 подчинены неравенствам (7) и (8), где числа K_1, K_2, L_1 и L_2 определяются из условий липшицевости градиента функции $W(x, t)$:

$$\|\nabla_t W(x_1, t_1) - \nabla_t W(x_2, t_2)\| \leqslant L_1\|x_1 - x_2\| + L_2|t_1 - t_2|,$$

$$\|\nabla_x W(x_1, t_1) - \nabla_x W(x_2, t_2)\| \leqslant K_1\|x_1 - x_2\| + K_2|t_1 - t_2|.$$

Цель ближайших выкладок — вычисление констант K_1, K_2, L_1 и L_2 исходя из значений R_0, R_1, M_1, M_2, N_1 и N_2.

Легко видеть, что $\nabla_x W(x, t) = (I - V^T(t, x))(x - p(t, x)) + (\langle a, x\rangle - b)a$, $\nabla_t W(x, t) = -\langle f(p(t, x)), x - p(t, x)\rangle$.

Используя эти выражения и оценки из доказанных лемм (14)—(18) с помощью несложных преобразований получим неравенство:

$$\|\nabla_x W(x_1, t_1) - \nabla_x W(x_2, t_2)\| \leqslant \Big(1 + \|a\|^2 + e^{N_1 T_0} + e^{M_2 T_0} + \frac{N_2(R_0 + R_1)(e^{(N_1 + M_2)T_0} - 1)e^{M_2 T_0}}{N_1 + M_2} + e^{(M_2 + N_1)T_0}\Big) \times \|x_1 - x_2\| + (M_1 + (R_0 M_2 + M_1 + R_1 M_2)e^{M_2 T_0})|t_1 - t_2|.$$

Таким образом, градиент $\nabla_x W(x, t)$ по переменной x функции (13) удовлетворяет условию Липшица по x и t с константами K_1 и K_2, причем последние имеют вид (9) и (10). Аналогично получаем

$$\|\nabla_t W(x_1, t_1) - \nabla_t W(x_2, t_2)\| \leqslant \leqslant (R_0 N_1 e^{N_1 T_0} + M_1 + R_1 N_1 e^{N_1 T_0} + M_1 e^{N_1 T_0})\|x_1 - x_2\| + (R_0 N_1 M_1 + R_1 N_1 M_1 + M_1^2)|t_1 - t_2|.$$

Поэтому производная $\nabla_t W(x, t)$ функции (13) удовлетворяет условию Липшица по x и t с константами L_1 и L_2, определяемыми выражениями (11) и (12). Теорема доказана. ♦

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Доказанная теорема носит прикладной характер и может оказаться полезной для непосредственных вычислений на ЭВМ. Задачи, связанные с поиском неустойчивых циклов, часто встречаются в нелинейной динамике. Например при исследовании уравнений Дуффинга, Лоренца, Эно. Кроме того, в работах обширного класса для строгих аналитических доказательств применяется численный эксперимент. Суть подобных методов зачастую сводится к тому, чтобы установить отличие от нуля вращения поля, связанного с функцией последования (отображением Пуанкаре). Иногда это удается сделать благодаря устойчивости вращения к малым возмущениям поля, а следовательно, и к вычислительным ошибкам. В свете этого приведенные выше алгоритм и оценки параметров можно использовать для первоначальной локализации цикла. Впоследствии может оказаться, что на некоторой сфере с центром в точке x^* на секущей гиперплоскости вращение поля функции последования не равно нулю и, таким образом, станет возможным строго доказать существование цикла в окрестности найденного приближения.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Исмаилов И. Г.* Об одном итерационном алгоритме построения циклов автономных систем // Проблемы управления. — 2005. — № 3. — С. 10—12. (www.ipu.ru/period/pu).
2. *Бобылев Н. А., Исмаилов И. Г., Коровин С. К.* Об одном алгоритме построения предельных циклов в системах автоматического регулирования // IV междунар. семинар “Устойчивость и колебания нелинейных систем управления”. — М. — 1996. — С. 6.
3. *Ismailov I. G.* On the scheme of approximate construction of cycles of nonlinear systems // Fourth International conference on “Control, automation, robotics and vision”. — Singapore, — 1996.
4. *Ismailov I. G.* On the approximate construction of cycles in automatic control systems // Fourth International Symposium on “Method and Models in Automation and Robotics”. — Poland, — 1997.
5. *Бобылев Н. А., Красносельский М. А.* Функционализация параметра и теорема родственности для автономных систем // Дифференциальные уравнения. — 1970. — № 11. — С. 1946—1952.
6. *Бобылев Н. А., Коровин С. К.* Теоремы родственности в теории нелинейных колебаний // Методы анализа нелинейных систем: Сб. науч. тр. — МГУ, Ин-т системного анализа РАН. — М., — 1997.

☎ *(095) 334-79-00*

E-mail: ilham_is@mail.ru

❑