УДК 519.687

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ВХОДЯЩИМ ПОТОКОМ НАГРУЗКИ В СИСТЕМАХ С ПОВТОРАМИ ПЕРЕДАЧ

В. А. Жевнеров

Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова РАН, г. Москва

Предложена методика оптимального управления потоком нагрузки для систем с повторами передач. Приведен пример для системы с наиболее распространённым видом множественного доступа ALOHA.

Рассматривается задача определения значения λ^{o} интенсивности входящего потока, обеспечивающего оптимальное значение целевой функции W_n, т. е. $W_n(\lambda^{o}) = \mathrm{extr}\, W_n(\lambda)$.

Так как для потоковых систем целевая функция обычно представляется в виде $W_n(\lambda) = \lambda W(\lambda)$, где $W(\lambda)$— значение критерия качества обработки (передачи) единицы потока нагрузки, то задача может быть представлена в виде

$$\mathrm{extr}\, \lambda W(\lambda) = \lambda^{o} W(\lambda^{o}). \qquad (1)$$

Для обеспечения оптимального значения $\lambda = \lambda^{\circ}$ должно выполняться следующее необходимое условие

$$[\lambda W(\lambda)]'_{\lambda}\Big|_{\lambda = \lambda^{o}} = \lambda^{o} W'_{\lambda}(\lambda^{o}) + W(\lambda^{o}) = 0,$$

откуда следует

$$\lambda^{o} = -\, W(\lambda^{o}) / W'_{\lambda}(\lambda^{o}). \qquad (2)$$

Уравнение (2) позволяет определить значения $\lambda = \lambda^{o}$, обеспечивающие экстремальные значения $W(\lambda)$ за исключением случаев, когда решения находятся на границах области определения λ. Обычно такие случаи хорошо известны. Решения уравнения (2) удобно находить методом последовательных приближений, используя в качестве начального приближения минимальное значение λ.

В задаче (1) рассматривается случай изменения интенсивности входящего в некоторый узел системы внешнего потока. В действительности суммарный поток, входящий в этот узел, может быть увеличен путем дополнительного поступления потоков, приходящих по ветвям от других узлов системы, т. е. благодаря обратным связям. Учёт такого влияния показан ниже на примере однофазовой системы с обратной связью для наиболее общего случая зависимости вероятности $p_{\text{ос}}$ обратной связи от суммарной интенсивности потока. Структурная схема рассматриваемой системы показана на рис. 1, где λ — интенсивность внешнего входящего потока; λ- — интенсивность выходящего потока; $\tilde{\lambda}$ — суммарная интенсивность потока, поступающего на вход системы.

Поток на выходе системы с вероятностью $p_{\text{н}}$ получает полную обработку в приборе и с вероятностью $q_{\text{н}} = 1 - p_{\text{н}}$ нуждается в повторной обработке. Величина $p_{\text{н}}$ может трактоваться как надёжность процесса обработки собственно в приборе. Кроме того, поток на выходе прибора с вероятностью $p_{\text{ос}}(\tilde{\lambda})$ отправляется повторно на вход системы, а с вероятностью $p_{\text{с}}(\tilde{\lambda}) = 1 - p_{\text{ос}}(\tilde{\lambda})$ покидает систему. Величина $p_{\text{с}}(\tilde{\lambda})$ может трактоваться как готовность прибора к обработке потока. Вероятности $p_{\text{н}}$ и $p_{\text{с}}(\tilde{\lambda})$

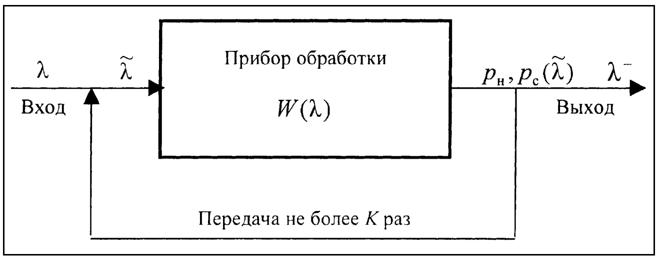

Рис. 1. Структурная схема однофазовой системы с обратной связью

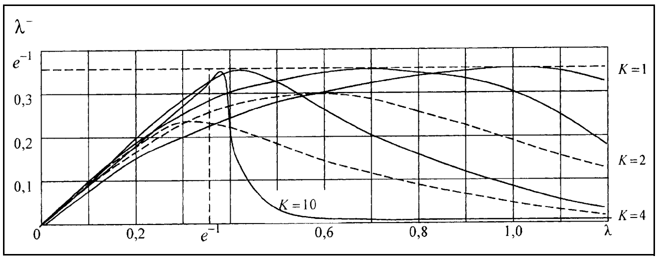

Рис. 2. Зависимости интенсивности выходящего потока от интенсивности внешнего входящего потока

полагаются взаимно независимыми. Максимальное число повторных передач ограничено числом $K - 1$.

Для рассматриваемой системы справедливы следующие уравнения связи между значениями интенсивностей потоков:

$$\lambda^{-} = p_{\text{н}}p_{\text{c}}(\tilde{\lambda})\tilde{\lambda}, \qquad (3)$$

$$\lambda^{-} = [1 - (1 - p_{\text{н}}p_{\text{c}}(\tilde{\lambda}))^{K}]\lambda.$$

Значение целевой функции на выходе системы определяется как $W_n = \lambda^{-}W(\tilde{\lambda})$.

Из условия обеспечения равенства $\partial W_n/\partial\lambda = 0$ в соответствии с уравнением (3) имеем:

$$\tilde{\lambda}^{*} = -p_{\text{c}}(\tilde{\lambda})W(\tilde{\lambda})/\left.\frac{\partial[p_{\text{c}}(\tilde{\lambda})W(\tilde{\lambda})]}{\partial\tilde{\lambda}}\right|_{\tilde{\lambda} = \tilde{\lambda}^{*}}, \qquad (4)$$

где $\tilde{\lambda}^{*}$ — критическое значение $\tilde{\lambda}$, обеспечивающее наибольшее значение λ^{-}. Нетрудно убедиться, что, как правило, для реальных систем уравнение (4) имеет единственное устойчивое решение, поскольку по физическому смыслу $p_{\text{c}}(\tilde{\lambda})W(\tilde{\lambda})$ является монотонной выпуклой или вогнутой функцией. Заметим, что величина $\tilde{\lambda}^{*}$ не зависит от значений $p_{\text{н}}$ и K.

В соответствии с изложенным оптимальное управление доступом потоков сообщений сводится к следующему.

1. Определяется значение λ^{*}, соответствующее значениям $\tilde{\lambda}^{*}$ и $K \to \infty$, удовлетворяющее соотношению $\lambda^{*} = p_{\text{н}}p_{\text{c}}(\tilde{\lambda}^{*})\tilde{\lambda}^{*}$.

2. Если $\lambda < \tilde{\lambda}^{*}$, то система при любых K в область насыщения не попадает, т. е. значение K в этом случае необходимо выбирать как можно большим. Ограничениями сверху могут быть либо требование достижения определённого значения вероятности доставки, либо среднего времени доставки сообщений.

3. Если $\lambda^{*} < \lambda < \tilde{\lambda}^{*}$, то при больших K система переходит в неустойчивый режим работы, что приводит к катастрофическому росту среднего времени доставки сообщений. В этой ситуации значение K необходимо устанавливать таким образом, чтобы выполнялось условие $\tilde{\lambda} = \tilde{\lambda}^{*}$. Расчёт требуемого числа повторений производится по следующему соотношению:

$$K = \ln\left[\frac{1 - p_{\text{н}}p_{\text{c}}(\tilde{\lambda}^{*})\tilde{\lambda}^{*}}{\lambda}\right]/\ln[1 - p_{\text{н}}p_{\text{c}}(\tilde{\lambda}^{*})].$$

Очевидно, что при $\tilde{\lambda} = \tilde{\lambda}^{*}$ $K = 1$.

4. Если $\lambda > \tilde{\lambda}^{*}$, то полагается $K = 1$, и часть входящего потока должна получать отказ в передаче. Вероятность отказа $p_{\text{отк}}$ определяется из условия обеспечения равенства $\tilde{\lambda} = \tilde{\lambda}^{*}$, откуда $p_{\text{отк}} = 1 - \tilde{\lambda}^{*}/\lambda$.

Для простоты изложения примера ниже рассматривается случай требования обеспечения максимального значения интенсивности выходящего потока λ^{-} для системы множественного доступа ALOHA [1—3], когда $W(\tilde{\lambda}) = 1$ и при любом наложении все сообщения считаются потерянными.

Зависимости $\lambda^{-}(\lambda)$ при передаче сообщений одинаковой длительности T в канале с синхронной системой ALOHA не более K раз (сплошные линии) и ровно K раз (пунктирные линии) представлены на рис. 2. Зависимости построены на основе соотношения из работы [2] $p_{\text{c}} = \exp(-\lambda T)$.

При обязательной передаче каждого сообщения ровно K раз значение λ^{*}: $\tilde{\lambda}^{*} = \tilde{\lambda}(\lambda^{*})$ определяется следующим соотношением:

$$\lambda^{*} = -\frac{1 - [1 - p_{\text{c}}(\tilde{\lambda}^{*}K)p_{\text{н}}]^{K}}{Kp_{\text{н}}[1 - p_{\text{c}}(\tilde{\lambda}^{*}K)p_{\text{н}}]^{K-1}\partial p_{\text{c}}(\tilde{\lambda}^{*}K)/\partial\lambda}.$$

Для "чистой" системы ALOHA масштаб значений λ^{-} и λ на рис. 2 нужно уменьшить в два раза, т. е. $\lambda^{-} \to 2\lambda^{-}$ и $\lambda \to 2\lambda$.

Аналогичный подход применяется при оптимизации систем с обратной связью общего вида.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бердсекас Д., Галлагер Р.* Сети передачи данных. — М.: Мир, 1989.
2. *Клейнрок Л.* Вычислительные системы с очередями. — М.: Мир, 1979.
3. *Кустов Н. Т., Сущенко С. П.* О пропускной способности метода случайного множественного доступа // Автоматика и телемеханика. — 2001. — № 1. — С. 91—101.

☎ *(095) 334-85-79*

E-mail: zhevn@ipu.ru

❑