

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ПАРАМЕТРАМИ РАЗЛАДКИ В ЗАДАЧЕ МАКСИМИЗАЦИИ ЭНЕРГОПРОДУКТИВНОСТИ И РЕЗУЛЬТИРУЮЩАЯ ГЕТЕРОГЕННОСТЬ ПОПУЛЯЦИИ

А. А. Бутов, М. А. Волков

Ульяновский государственный университет, г. Ульяновск

Решена задача оптимального управления параметрами разладки энергопродуктивности. Показана неунимодальность целевой функции при определенных ограничениях, приводящая к возникновению гетерогенности популяции в ходе процессов старения.

ВВЕДЕНИЕ

Определение структур популяций (выделение субпопуляций) и решение обратной задачи — идентификации целевой функции на основе анализа структуры — оказывается наиболее полезным и актуальным при анализе таких объектов, как системы с разладками. В технических приложениях момент разладки зачастую интерпретируется как момент перехода прибора или машины в “форсированный” режим работы (например, переход работы двигателя на бензин с более низким октановым числом), в биологических — как момент перехода организма в состояние кортизолового стресса, в результате которого может развиваться гипертония или диабет, и т. п. В качестве момента разладки также может рассматриваться момент дифференцировки тканей, который сопровождается онтогенетическими событиями (например, переходом из личиночной стадии в фазу зрелого организма). Во многих таких случаях после разладки приближается момент выхода из строя или смерти (и, таким образом, меняется скорость старения организмов), но увеличивается вероятность выполнения основных функций в текущий момент. Возможность этого увеличения вероятности и трактуется здесь как исходная предпосылка формулировки задачи оптимального управления параметрами разладки (моментом перехода в форсированный режим и его интенсивностью).

ЗАДАЧА ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ПАРАМЕТРАМИ РАЗЛАДКИ КАК МОДЕЛЬ СТАРЕНИЯ ОРГАНИЗМОВ

В настоящей работе предлагается следующая постановка задачи: управление моментом разладки с целью оптимизации целевой функции; при этом целевая функция, зависящая от показателей смертности, определяет структуру формируемой популяции. Задачи в такой по-

становке восходят к анализу управляемых моментов останковки (см. работы [1–9]). Основное отличие заключается в том, что мы рассматриваем не только управление моментами останковки, но и управление поведением случайных процессов, характерным для систем с разладками.

В биологии часто рассматриваются физиологические показатели, которые до момента нарушения нормально-го состояния (момента разладки) находятся около своего среднего значения, а затем начинают расти до пересечения критической границы, после чего и наступает смерть организма (либо в иных приложениях — разрушение системы). В популяционной биологии естественно возникает задача максимизации средней энергопродуктивности в течение всей жизни организмов. Теоретические результаты в области оптимизации квадратичных стохастических целевых функций были получены в работе [10].

Анализ задачи максимизации энергопродуктивности показал наличие при некоторых параметрах двух локальных максимумов построенной целевой функции, что объясняет наблюдаемую природную неоднородность (гетерогенность) рассматриваемой популяции. Из этого следует, что она делится, по крайней мере, на две группы (соответствующие этим экстремумам): особи, у которых аллостатическая болезнь развивается с большой скоростью (но момент заболевания наступает в старших возрастах), и особи с рано возникающими (но медленно текущими) хроническими заболеваниями. У первой группы момент разладки наступает позже, чем у второй, но скорость развития заболевания выше после разладки, чем у хронически больных. У хронических — скорость меньше, но момент разладки наступает в начале жизни. Данное утверждение может быть биологически обосновано для болезней адаптации. В качестве примера гетерогенности популяции можно рассмотреть деление митохондрий на две группы, которые формируются по



стратегиям выработки энергии в организме (см., например, статью [11]).

В случае гибели организмов в момент пересечения некоторой границы случайным процессом с разладкой возникает ряд задач, связанных с выбором такого момента, целевыми функциями, определяемыми такими процессами, эволюционным отбором по стратегиям разладок и др.

Пусть процесс с разладкой $X = (X_t)_{t \geq 0}$ записывается в классическом виде (см., например, работу [3]):

$$dX_t = \alpha I(t \geq \theta) dt + dW_t, \quad (1)$$

где θ — детерминированный момент разладки, α — скорость нарастания энергопродуктивности, I — индикаторная функция, принимающая значения 0 или 1, W — стандартный винеровский процесс. Пусть момент смерти (выхода из строя) τ наступает при выполнении условия

$$\tau = \inf\{t : t \geq 0, X_t = 1\}. \quad (2)$$

Возникает задача нахождения максимума целевой функции:

$$\varphi = E \int_0^{\tau} X_t dt + \beta E \tau \rightarrow \max_{\alpha, \theta}, \quad (3)$$

где β — неотрицательный коэффициент.

Таким образом, функция $f(t) = X_t + \beta$ представляет собой вырабатываемую мощность в момент t , а ее интеграл $\varphi = \int_0^{\tau} f(s) ds$ — совокупную выработанную энергию

за все время жизни. Заметим, что целевая функция φ является компромиссной в энергопродуктивности и продолжительности жизни. Ее оптимизация осуществляется на основе решения задачи управления моментом разладки θ и скоростью α роста энергопродуктивности.

Эта задача соответствует эволюционно обусловленному режиму максимальной совокупной (за все время жизни индивидуума) энергопродуктивности. Такая постановка задачи также находит экспериментальное подтверждение при изучении уровней плодовитости и продолжительности жизни насекомых [12]. В приведенных обозначениях справедлива следующая

Теорема. Для целевой функции φ существует область значений параметра $\beta \in (C; 0,5]$, $C < 0,5$, в которой существуют два локальных максимума φ при $\theta \in [0; +\infty)$.

Доказательство теоремы см. в Приложении.

Настоящая теорема может служить основанием и для решения обратной задачи — идентификации целевой функции “по итогам” формирования неоднородных популяций. При этом допускается следующая гипотеза.

Исходя из экспериментально установленных параметров θ , α и линейного приближения целевой функции (3), определяются ее максимумы. Положения полученных максимумов целевой функции соответствуют положениям максимумов функции распределения индивидуумов в популяции. В результате эволюционного отбора в популяции будет больше всего индивидуумов, характеристики которых соответствуют этим максимумам; таким образом, определяется структура популяции.

Главный результат теоремы состоит в том, что полученная гетерогенность была выявлена при абстрактном

рассмотрении популяции (не было привязки к экспериментальным данным). Кажущаяся простота и линейность (по параметрам и процессам) в постановке задачи (3) обманчива — решение существенно нелинейно и вид целевой функции подтверждает это. Таким образом, этот подход можно применить и при решении других задач, в которых присутствуют процессы с разладкой, и можно предположить, что рассматриваемая система распадается на несколько подсистем. Например, при анализе данных по экспрессии генов: до моментов смены онтогенетических фаз в организме (моментов разладки) определяются группы генов, вместе экспрессирующиеся или супрессирующиеся, после моментов разладки — гены могут переходить в другие группы или образовывать новые. При этом необратимые нарушения (выбывание объекта) в геноме происходят при пересечении процессом экспрессии некоторой критической нижней или верхней границы. Если гены распределяются в соответствии со значениями целевой функции, то состав группы может быть определен. Возникновению подгрупп (т. е. структуры) соответствует наличие нескольких локальных максимумов целевой функции.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Главный результат настоящей работы заключается в выводе (в форме теоремы) о существовании (при определенных ограничениях) двух локальных максимумов целевой функции — кумулятивной энергопродуктивности. При этом текущая мощность предполагается классическим процессом с разладкой.

Из теоремы вытекает следствие, состоящее в том, что по значению параметра β можно определить значения параметров целевой функции θ и α . Это позволяет осуществить идентификацию целевой функции (решение обратной задачи). В случае, когда эволюционное развитие завершено и известно распределение индивидуумов в популяции, можно сделать предположение о соответствии максимумов функции распределения и целевой функции. В этом случае, учитывая линейное приближение целевой функции (3), можно установить ее параметры.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство теоремы. Исследуем с помощью семимартингалных методов распределение τ — момента пересечения границы процессом с разладкой. Найдем:

$$E \int_0^{\tau} X_t dt = E \left(\int_0^{\tau \wedge \theta} X_t dt + \int_{\tau \wedge \theta}^{\tau} X_t dt \right). \quad (4)$$

Учитывая выражения (1) и (4), получаем

$$E \int_0^{\tau} X_t dt = E \left(X_{\tau \wedge \theta} (\tau \wedge \theta) - \int_0^{\tau \wedge \theta} s dW_s \right) + E \left(X_{\tau} \tau - X_{\tau \wedge \theta} (\tau \wedge \theta) - \int_{\tau \wedge \theta}^{\tau} s dX_s \right).$$

В силу того, что для мартингала W математическое ожидание $E \int_0^{\tau \wedge \theta} s dW_s = 0$, а значение процесса $X_t = 1$ при

$\alpha \geq 0$ (так как после пересечения границы процесс X равен этой границе), запишем ($\tau \wedge \theta$ означает $\min\{\tau, \theta\}$)

$$\begin{aligned} E \int_0^\tau X_t dt &= E(X_{\tau \wedge \theta}(\tau \wedge \theta)) + E(\tau - X_{\tau \wedge \theta}(\tau \wedge \theta)) - \\ &- E \int_{\tau \wedge \theta}^\tau t(\alpha I(t \geq \theta)) dt + dW_t = \\ &= E\tau - E\left(I(\tau > \theta)\alpha\left(\frac{\tau^2}{2} - \frac{\theta^2}{2}\right)\right) = E\tau - \alpha \frac{E(\tau^2 - \theta^2)^+}{2}. \end{aligned} \quad (5)$$

Заметим, что $EX_\tau^2 = EX_t = 1$, так как $X_t = 1$. В свою очередь, EX_τ^2 записывается в виде: $EX_\tau^2 = E(\alpha(\tau - \theta)^+ + W_\tau)^2 = E(\alpha^2((\tau - \theta)^+)^2 + 2\alpha(\tau - \theta)^+ \cdot W_\tau + W_\tau^2)$.

Подставим в выражение (1) $t = \tau$ и получим, что $W_\tau = 1 - \alpha(\tau - \theta)^+$. Возьмем математическое ожидание W_τ и получим, что $1 = \alpha E(\tau - \theta)^+$ ($EW_\tau = 0$, поскольку $E\tau < \infty$). Учитывая эти преобразования, получаем

$$\begin{aligned} EX_\tau^2 &= E(\alpha^2((\tau - \theta)^+)^2 + 2\alpha(1 - \alpha(\tau - \theta)^+)(\tau - \theta)^+ + \\ &+ W_\tau^2) = E\left(2\alpha(\tau - \theta)^+ - \alpha^2((\tau - \theta)^+)^2 + \int_0^\tau 2W_s dW_s + \tau\right) = \\ &= 2 - \alpha^2 E((\tau - \theta)^+)^2 + E\tau = 2 - \alpha^2 E((\tau - \theta)^+(\tau + \theta) - \\ &- 2\theta) + E\tau = 2 - \alpha^2 E((\tau^2 - \theta^2)^+ - 2\theta(\tau - \theta)^+) + E\tau = \\ &= 2 - \alpha^2 E(\tau^2 - \theta^2)^+ + 2\alpha\theta + E\tau. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\alpha \frac{E(\tau^2 - \theta^2)^+}{2} = \frac{1}{2\alpha} + \theta + \frac{E\tau}{2\alpha}. \quad (6)$$

Из выражений (5) и (6) получаем

$$\begin{aligned} E \int_0^\tau X_t dt &= E\tau - \frac{1}{2\alpha} - \theta - \frac{E\tau}{2\alpha} = \\ &= E\tau \left(1 - \frac{1}{2\alpha}\right) - \frac{1}{2\alpha} - \theta. \end{aligned} \quad (7)$$

Найдем величину $E\tau$. Представим τ в виде

$$\begin{aligned} \tau &= ((\tau - \theta)^+ + \theta)I(\tau > \theta) + \tau I(\tau \leq \theta) = \\ &= (\tau - \theta)^+ + \theta I(\tau > \theta) + \tau I(\tau \leq \theta). \end{aligned}$$

Тогда

$$E\tau = \frac{1}{\alpha} + \theta(1 - F(\theta)) + \int_0^\theta x dF(x), \quad (8)$$

где $F(x)$ — функция распределения первого момента пересечения границы винеровским процессом $F(x) =$

$$= P(\sup_{0 \leq s \leq x} W_s \geq 1) = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{2\pi s^3}} e^{-\frac{1}{2s}} ds. \text{ Исходя из того, что}$$

$$\int_0^\theta x dF(x) = \theta F(\theta) - \int_0^\theta F(x) dx, \text{ запишем выражение (8) в виде}$$

$$\begin{aligned} E\tau &= \frac{1}{\alpha} + \theta - \theta F(\theta) + \theta F(\theta) - \int_0^\theta F(x) dx = \\ &= \frac{1}{\alpha} + \int_0^\theta (1 - F(x)) dx = \frac{1}{\alpha} + \int_0^\theta G(x) dx, \end{aligned} \quad (9)$$

где $G(x) = 1 - F(x)$. Таким образом, из выражений (7) и (9) получаем

$$E \int_0^\tau X_t dt = \left(\frac{1}{\alpha} + \int_0^\theta G(x) dx\right) \left(1 - \frac{1}{2\alpha}\right) - \frac{1}{2\alpha} - \theta,$$

и целевая функция принимает вид

$$\begin{aligned} \varphi &= E \int_0^\tau X_t dt + \beta E\tau = \left(\frac{1}{\alpha} + \int_0^\theta G(x) dx\right) \left(1 - \frac{1}{2\alpha}\right) - \\ &- \frac{1}{2\alpha} - \theta + \beta \left(\frac{1}{\alpha} + \int_0^\theta G(x) dx\right) = \\ &= \left(\frac{1}{\alpha} + \int_0^\theta G(x) dx\right) \left(1 + \beta - \frac{1}{2\alpha}\right) - \frac{1}{2\alpha} - \theta. \end{aligned}$$

Обозначим $v = 1/\alpha$, тогда полученная целевая функция записывается как

$$\varphi = \left(v + \int_0^\theta G(x) dx\right) \left(1 + \beta - \frac{v}{2}\right) - \frac{v}{2} - \theta.$$

Приравняем нулю частные производные целевой функции φ по θ и v для последующего нахождения ее экстремумов:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = G(\theta) \left(1 + \beta - \frac{v}{2}\right) - 1 = 0, \quad (10)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial v} = \left(1 + \beta - \frac{v}{2}\right) - \frac{1}{2} \left(v + \int_0^\theta G(x) dx\right) - \frac{1}{2} = 0. \quad (11)$$

$$\text{Выразим } v \text{ из уравнения (11): } v = \frac{1}{2} + \beta - \frac{1}{2} \int_0^\theta G(x) dx;$$

подставим в уравнение (10):

$$G(\theta^*) = 2 \left[\frac{3}{2} + \beta + \frac{1}{2} \int_0^{\theta^*} G(x) dx \right]^{-1}. \quad (12)$$

В соответствии с функцией распределения первого момента пересечения границы винеровским процессом функция $G(x)$ принимает вид (по определению (2) граница для процесса $X = (X_t)_{t \geq 0}$ равна 1):

$$G(\theta) = 1 - F(\theta) = 1 - \int_0^\theta \frac{1}{\sqrt{2\pi t^3}} e^{-\frac{1}{2t}} dt. \quad (13)$$

Выразим β из формулы (12):

$$\beta = \frac{2}{G(\theta^*)} - \frac{3}{2} - \frac{1}{2} \int_0^{\theta^*} G(x) dx. \quad (14)$$

Подставим формулу (13) в выражение (14):

$$\begin{aligned} \beta &= 2 \left[1 - \int_0^{\theta^*} \frac{1}{\sqrt{2\pi t^3}} e^{-\frac{1}{2t}} dt \right]^{-1} - \frac{3}{2} - \\ &- \frac{1}{2} \left(\theta^* - \theta^* \int_0^{\theta^*} \frac{1}{\sqrt{2\pi t^3}} e^{-\frac{1}{2t}} dt + \int_0^{\theta^*} \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{1}{2t}} dt \right). \end{aligned} \quad (15)$$

Подсчет интегралов в формуле (15) производился численным методом. Рассматривая поведение целевой



функции $\varphi(\theta, \nu)$ при различных значениях параметра β , приходим к выводу, что при $\beta \in (C; 0,5]$ и ограничении $\theta \geq 0$ целевая функция φ имеет три точки, подозрительные на экстремум. Выполнив численный анализ их окрестностей, получим, что две из них являются локальными максимумами, а третья — седловая точка.

Таким образом, численно установлено, что целевая функция имеет два локальных максимума при $b \in (C; 0,5]$ и значение константы $C = 0,445 \pm 0,0001$. При значениях $\beta \leq C$ единственный локальный максимум целевой функции находится при $\theta = 0$. При $\beta > 0,5$ целевая функция имеет один локальный максимум при $\theta \geq 0$. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ширяев А. Н.* Некоторые точные формулы в задаче о разладке // Теория вероятностей и ее применение. — 1965. — Т. 10, вып. 2. — С. 380—385.
2. *Ширяев А. Н.* Об оптимальных методах в задачах скорейшего обнаружения // Теория вероятностей и ее применение. — 1963. — Т. 8, вып. 1. — С. 26—51.
3. *Ширяев А. Н.* Статистический последовательный анализ. — М.: Наука, 1976.

4. *Пресман Э. Л., Сонин И. М.* Последовательное управление по неполным данным. — М.: Наука, 1982.
5. *Яшин А. И.* Теоретические и прикладные задачи оценивания скачкообразных процессов. Препринт. — М.: Институт проблем управления, 1978.
6. *Гихман И. И., Скороход А. В.* Управляемые случайные процессы. — Киев: Наукова думка, 1977.
7. *Дынкин Е. Б., Юшкевич А. А.* Управляемые марковские процессы и их приложения. — М.: Наука, 1975.
8. *Севастьянов Б. А.* Ветвящиеся процессы. — М.: Наука, 1971.
9. *Крылов Н. В.* Управляемые процессы диффузионного типа. — М.: Наука, 1977.
10. *Butov A. A., Kuznetsov N.A., Liptser R.Sh., et al.* Generalized observations control in problems of stochastic optimization // IFAC Control Science and Technology (8th Triennial World Congress). Kyoto, Japan, 1981. — P. 851—856.
11. *Скулачев В. П.* Эволюция, митохондрии и кислород // Сорский образовательный журнал. — 1999. — № 9. — С. 4—10.
12. *Carey J. R., Liedo P., Muller H. G., et al.* Dual modes of aging in Mediterranean fruit fly females // Science. — 1998. — № 281 (5379). — P. 996—998.

☎ (8422) 63-66-78

E-mail: butov@mv.ru



УДК 577.71:519.95

НОРМАЛЬНОЕ СТАРЕНИЕ КАК СЛЕДСТВИЕ РЕАКЦИИ УПРАВЛЯЮЩИХ СИСТЕМ ОРГАНИЗМА НА ВНЕШНИЕ СИГНАЛЫ, НЕ СПОСОБСТВУЮЩИЕ ЕГО ПОЛНОМУ САМОПОДДЕРЖАНИЮ I. Биологические предпосылки

А. В. Халявкин¹, А. И. Яшин²

¹Институт биохимической физики, Москва

²Университет Дьюка, г. Дюрам, США

Дан обзор результатов новейших исследований, подтвердивших способность клеток и других компонентов сложных организмов противостоять их старению. Поставлена задача поиска подходов к пониманию первопричины старения особей, состоящих из потенциально нестареющих клеток. Предположено, что старение организма скорее результат определенных сдвигов параметров его управляющих систем, чем фатальных изменений составляющих его клеток. Показано, что это может быть связано с тем, что способность организма к самоподдержанию зависит не только от его структурно-функциональных особенностей, но и от внешних условий, индуцирующих различные режимы жизнедеятельности. Приведены факты, совместимые с предложенным подходом.

ВВЕДЕНИЕ

Известно, что показатель ожидаемой продолжительности жизни людей, построенный по странам — текущим рекордсменам по этому параметру — растет линейно уже более 160-ти лет (каждые 10 лет на 2,5 года у

женщин и несколько меньше у мужчин) [1]. С успехами в целенаправленном контроле и регулировании процесса старения это не связано, поскольку до сих пор не поняты причины, по которым регуляция и координация жизненных процессов в организме становятся с возрастом все менее эффективными, а сам стареющий организм все более уязвимым к факторам окружающей сре-